

Bruno Vieira Ribeiro

*Modos Coletivos em um Plasma Livre
Sujeito a um Campo de Radiação*

Brasília

Março de 2011

Bruno Vieira Ribeiro

*Modos Coletivos em um Plasma Livre
Sujeito a um Campo de Radiação*

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Marco Antonio Amato

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

Brasília

Março de 2011

Comentários e Agradecimentos

Primeiramente, e acima de tudo, gostaria de agradecer aos meus pais e a minha irmã por uma vida inteira de apoio, incentivo e amor mútuo.

Aos meus pais pela paixão, pela dedicação, pelo carinho, pela amizade, pela força, pela coragem, pela paciência, pelo trabalho duro e pelo amor que sempre tiveram em todos os aspectos da vida, em especial, com seus filhos. Agradeço muito a eles por terem me ensinado a viver e a nunca desistir dos meus sonhos. Agradeço a eles por terem me dado todas as condições de alcançar meus sonhos. À minha irmã, agradeço pelas lições de como entender o mundo e como me divertir com as coisas nele. Aos três, um enorme agradecimento pela vida que temos e por tudo que passamos juntos.

Agradeço à minha namorada Natália por ficar sempre ao meu lado com muito carinho e com muita paciência, me incentivando a ir adiante. Muito agradeço a ela pela vida que planejamos e pela coragem de encarar a vida. Agradeço a Natália pelo amor que compartilhamos. Um agradecimento, também, ao Bernardino, à Aparecida (pais da Natália) e à Mariana (sua irmã) pelo apoio.

Ao meu orientador, professor Marco Amato, um muito obrigado pela paciência, pelas discussões e pela impecável orientação. Agradeço aos professores Luciano e José Leonardo pelas discussões que colaboraram à elaboração deste trabalho.

Agradeço ao meu colega Daniel pela colaboração na elaboração dos códigos em FORTRAN e pela companhia nas horas de trabalho. Um muito obrigado aos colegas da Física Suzana, Adriana, Leila, Rodrigo, Robson, Carla, Cíntia, Leander, Thiago, Carlos, Disrael, Brunno e Rafael por compartilhar a diversão de estudar o que estudamos.

Agradeço, finalmente, à Capes pelo apoio financeiro através do programa de bolsas PROF-Capes.

Aos meus pais

Resumo

Neste trabalho, estudamos os efeitos de um campo de radiação eletromagnético nas propriedades físicas de plasmas livres. Procedemos dentro da aproximação semi-clássica para efetuar os cálculos, *i.e.*, o campo eletromagnético é tratado classicamente e os elétrons, de um ponto de vista da mecânica quântica. Assumimos, também, um potencial local fraco.

Neste quadro, obtemos uma expressão implícita para a função dielétrica. Os modos coletivos do plasma resultam dos zeros da função dielétrica e os resultados são obtidos numericamente. Para calcular o elemento de matriz, devemos fazer uma soma para todos os fótons que podem participar do processo, e isso se torna um difícil problema computacional. Entretanto, conseguimos realizar a soma para o número de fótons envolvidos (m). Fixando um valor para a frequência (ω) e amplitude (E) do campo de radiação, obtemos a relação de dispersão do sistema.

A soma em m é truncada, mas, sem perda de generalidade, é mais adequada do que a realizada em estudos anteriores [1]. Notamos que os modos coletivos decaem de maneira mais *suave* e em um intervalo de frequência menor do que o reportado anteriormente. Vemos, também, que ao aumentarmos a frequência da radiação, os modos decaem em um taxa menor, *i.e.*, para uma frequência de radiação muito alta, o plasma permanece não-perturbado. Plotando a frequência dos plasmons em função de E (para um valor do número de onda 'q' gerado aleatoriamente), obtemos um decaimento do tipo exponencial para as frequências. Este decaimento é, novamente, mais lento para valores maiores da frequência de radiação.

Para analisar a contribuição dos fótons nos processos de decaimento e de modulação, plotamos gráficos para a relação de dispersão e para a dependência da frequência dos plasmons com E .

Palavras Chave: Plasma, Modos Coletivos, Plasmons, Dispersão.

Abstract

In this study we report the effects of an electromagnetic radiation field on the physical properties of free plasmas. In order to carry out the calculations we proceed within the semi-classical approximation, *i.e.*, the electromagnetic field is treated classically and the electrons from a quantum mechanical viewpoint. A weak local potential is also assumed.

In this framework we obtained an implicit expression for the dielectric function. The collective modes of the plasma come about the zeros of the dielectric function and the results are obtained numerically. To calculate the matrix element we have to sum over all numbers of photons that may participate in the process and this poses as a difficult computational problem. However, we were able to perform such a sum over the number of photons involved in the process (m). Fixating a value for the radiation field frequency ω and amplitude (E), we obtain the dispersion relation for the system.

Although the sum is truncated, without loss of generality, it is more properly accounted for than those of previous studies [1]. We note that the collective modes are damped away more smoothly and in a smaller frequency range than those previously reported. We also see that, as we increase the radiation frequency, the modes are damped in a slower rate, *i.e.*, for a large radiation frequency the plasma remains unperturbed. Plotting the plasmon frequency as a function of E (for a randomly generated value of the wave number 'q'), we obtain an exponential-like decay of the frequencies. This decay is, again, slower for larger values of the radiation frequency.

To analyze the contribution of the photons in the damping and modulation processes, we plot the graphics of the dispersion relation and of the frequency versus E .

Keywords: Plasma, Collective Modes, Plasmons, Dispersion.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução	p. 9
1 Características Gerais dos Plasmas	p. 13
1.1 Definição de Plasma	p. 13
1.2 Comportamento Coletivo	p. 15
1.3 Quase-neutralidade (<i>Neutralidade Macroscópica</i>)	p. 16
1.3.1 Blindagem de Debye	p. 17
1.4 Critérios para o Plasma	p. 19
1.5 Ondas Eletromagnéticas em Plasmas Macroscópicos	p. 21
1.6 Teoria Cinética de Ondas Eletromagnéticas em Plasmas	p. 25
1.6.1 Distribuição isotrópica das partículas	p. 30
2 Ondas Eletromagnéticas em Plasmas sob o Ponto de Vista da Mecânica Quântica	p. 33
2.1 Propagação de ondas eletromagnéticas em um plasma na ausência de campos externos	p. 33
2.2 Propagação de ondas eletromagnéticas em um plasma livre sob ação de um campo de radiação	p. 39

3 Discussão Numérica e Resultados	p. 48
Conclusão	p. 58
Referências	p. 61
Apêndice A – Subrotina para cálculo da função Bessel direta	p. 64
Apêndice B – Método numérico para resolução da relação de dispersão (2.95)	p. 69
B.1 Método da bissecção	p. 69
B.2 Método de Newton-Raphson	p. 73
Apêndice C – Obtenção do operador unitário (2.54)	p. 79

Lista de Figuras

1	Longo alcance das forças Coulombianas em plasmas.	p. 16
2	Gráfico da relação de dispersão (2.42). Vemos representadas as velocidades de fase e de grupo em um ponto P qualquer da curva.	p. 39
3	Gráfico do quadrado da função $J_m(q\gamma_0)$ para uma amplitude da radiação $E = 10V/m$, uma frequência de radiação de $\omega = 3 \times 10^7 s^{-1}$ e um valor para $q = 6000m^{-1}$. A linha sólida representa a curva obtida pela biblioteca do Maple 13. Os círculos correspondem aos valores obtidos por nossa subrotina. Note que a subrotina calcula apenas valores da função Bessel direta de ordem inteira.	p. 51
4	Relação de dispersão para um plasma de descarga gasosa na presença de um campo de radiação.	p. 52
5	Relação de dispersão para várias frequências da radiação externa. Note como a atenuação dos modos é mais rápida para valores menores de ω	p. 53
6	Relação de dispersão para vários valores do número de fótons envolvidos. A seta indica o sentido de crescimento do valor de m nas curvas. Note que, para valores baixos de m, os modos coletivos podem assumir frequências consideravelmente menores do que a frequência natural do plasma.	p. 53
7	Relação de dispersão destacando as curvas correspondentes à emissão e absorção de fótons da radiação externa. A frequência natural do plasma é tomada como $\omega = 6 \times 10^{11} s^{-1}$	p. 54
8	Curva dos modos coletivos em função da amplitude do campo de radiação incidente.	p. 55

9	Curvas dos modos coletivos em função de E para várias frequências da radiação incidente. A seta indica o sentido de crescimento do valor de m nas curvas. Note como a atenuação da curva é expressivamente mais rápida para valores menores de ω	p. 56
10	Dependência dos modos coletivos com a energia da radiação incidente. A seta indica o sentido de crescimento do valor de m nas curvas. Novamente traçamos as curvas para vários valores de ω notando que a atenuação é mais lenta para valores maiores da frequência da radiação	p. 56
11	Curvas de $\Omega(E)$ para os vários fótons envolvidos no processo. A seta indica o sentido de crescimento do valor de m nas curvas.	p. 57
12	Função Bessel direta. Gráfico mostra seis ordens da função Bessel.	p. 64
13	Gráfico de $J_0(x)$ para $n_{max} = 25$. A linha pontilhada corresponde aos valores obtidos pela subrotina BESSEL. A linha sólida corresponde aos valores dados pela biblioteca do programa Maple 13.	p. 67
14	Gráfico de $J_0(x)$ para $n_{max} = 40$. Novamente, a linha pontilhada corresponde aos valores obtidos a partir da subrotina BESSEL; e a linha sólida corresponde aos valores obtidos pela biblioteca do programa Maple 13.	p. 68
15	Ilustração do método de Newton-Raphson. A derivada é extrapolada para encontrar a próxima estimativa da raiz.	p. 73

Lista de Tabelas

- 1 Valores da função Bessel direta J_m usando $E = 10V/m$, uma frequência de radiação de $\omega = 3 \times 10^7 s^{-1}$ e um valor para $q = 6000m^{-1}$. A terceira coluna mostra a soma dos quadrados das funções bessel de ordem igual e inferior à ordem da linha correspondente. p. 50

Introdução

Um cátodo quente emite elétrons que podem ser categorizados em três grupos diferentes [2]: (i) elétrons primários, que não apresentam perdas significativas de momento linear após serem ejetados; (ii) elétrons secundários, com direções aleatórias, distribuição Maxwelliana de velocidades e temperatura aproximadamente proporcional à energia dos primários; e (iii) ”*ultimate electrons*”, com uma distribuição Maxwelliana correspondente a uma temperatura notadamente mais baixa que a dos secundários.

Usando um cátodo quente em um arco de mercúrio a baixa pressão, pode-se observar que um grande número de elétrons primários acelera a altas velocidades enquanto um outro grupo, igualmente grande, tem energia abaixo do esperado [2]. Esse *espalhamento* dos elétrons pode ser explicado supondo oscilações elétricas no arco de mercúrio, o que submeteria os elétrons a variações rápidas de campo elétrico e causaria flutuações no potencial dos eletrodos.

Motivados por essa suposição, Tonks e Langmuir, no ano de 1929, estudaram experimentalmente e de maneira sistemática o comportamento e natureza de oscilações em gases ionizados [3] (no exemplo do parágrafo anterior, o gás de mercúrio está ionizado após o aquecimento do cátodo) . Usando o arco de mercúrio nas condições descritas, observaram que os elétrons oscilavam tão rapidamente que os íons permaneciam praticamente fixos ao fundo, formando o que denominaram de uma ”geleia rígida”. As oscilações dos íons, quando perceptíveis, eram lentas o suficiente para que os elétrons atingissem o equilíbrio continuamente. Ainda no ano de 1929, os autores construíram uma teoria para explicar o comportamento das partículas no gás ionizado formado em um arco [4].

Tonks e Langmuir denominaram o sistema que estavam analisando, um gás ionizado com densidades altas (e da mesma ordem) de íons e elétrons, de *plasma* (a ”geléia rígida” com elétrons em movimento, descrita por Tonks e Langmuir, se assemelha ao *plasma sanguíneo* - termo proposto pelo fisiologista tcheco Jan Evangelista Purkinje nos meados do século 19 - carregando corpúsculos. Essa semelhança pode ter sido a motivação para a escolha do novo termo). Desses celebres estudos surgiu uma nova área na Física chamada de *Física dos Plasmas*.

A Física dos Plasmas passou a ser estudada de maneira mais abrangente e teórica após suas primeiras aplicações, já nos anos 1930, na eletrônica *pré-semicondutores*, com tubos de gás de elétrons e na propagação a longa distância de ondas curtas de rádio usando efeitos de interação das ondas com o plasma existente na ionosfera terrestre. No início da década de 1940, Hannes Olof Gösta Alfvén desenvolveu uma teoria para estudar determinadas ondas eletromagnéticas que se propagam em plasmas [5]. Em seu estudo, Alfvén tratou o plasma como um fluido condutor elétrico e denominou as ondas que se propagavam ao longo do campo magnético do plasma de *ondas hidromagnéticas* (ou *ondas de Alfvén*, atualmente). De seu estudo nasceu a Magnetohidrodinâmica (MHD), importante sub-área da Física dos Plasmas, o que lhe rendeu o prêmio Nobel em física no ano de 1970. Seis anos após o trabalho de Alfvén, Lev Davidovich Landau mostrou, com ferramentas matemáticas até então não utilizadas na descrição de plasmas, que as oscilações longitudinais do campo elétrico resultantes de uma distribuição inicial arbitrária fora do equilíbrio decaem na ausência de colisões entre as partículas do plasma (fenômeno chamado de *decaimento de Landau*) [6]. Embora esse estudo apresente uma coerência matemática inquestionável, os físicos de plasma da época relutaram em aceitá-lo pela complexidade dos cálculos e pela falta de uma explicação física para os fenômenos descritos. Apenas quinze anos após o trabalho de Landau, John Dawson ofereceu uma explicação física satisfatória à comunidade dos físicos de plasma para o decaimento de Landau [7]. Seu trabalho apresentava uma explicação simples para o fenômeno, baseada na conservação de energia entre partículas e ondas no plasma.

O interesse no estudo de propagação de ondas eletromagnéticas em plasmas cresceu na década que se seguiu à do trabalho de Alfvén. Gross, em seu trabalho [8], sugere que ondas longitudinais, propagando-se perpendicularmente ao campo magnético estático de um plasma, são atenuadas quando seu comprimento de onda é próximo de (porém menor que) um comprimento de blindagem do potencial elétrico local do plasma (comprimento de Debye, definido no capítulo 1). Inspirado pelo trabalho de Gross e pelos avanços na descrição de sistemas de gases ionizados, em 1952 Sen lançou um modelo tentando explicar a chamada *enhanced radiation* solar [9] (esse trabalho foi um dos pioneiros no estudo das estruturas solares usando os conceitos da Física dos Plasmas). Já em 1958, Bernstein publicou um trabalho demonstrando teoricamente que, ao contrário do que propunha Gross, oscilações eletrônicas longitudinais se propagam paralelamente ao campo magnético constante de um plasma sem sofrer amortecimento (desconsiderando colisões) [10]. Em um trabalho experimental publicado dez anos mais tarde [11], Gruber e Bekefi provaram a teoria de Bernstein ao detectarem ondas se propagando radialmente

através de uma coluna de plasma sujeita a um campo magnético axial.

Paralelamente aos estudos de propagação de ondas em plasmas usando teorias cinéticas e de fluidos, no início dos anos 1960 a aplicação da Mecânica Quântica (MQ) como ferramenta para descrever plasmas macroscópicos despertou o interesse da comunidade dos físicos de plasma. Embora esse tipo de sistema seja clássico, várias equações surgem como casos limites de sistemas quânticos. Pines publicou dois trabalhos, no ano de 1962, explicitando o uso do formalismo da MQ para a descrição de plasmas clássicos [12, 13]. Em coautoria com Schrieffer, uma dedução quântica de equações clássicas quase-lineares para plasmas foi proposta [12]. E em coautoria com Wyld, plasmas quânticos (não macroscópicos) foram estudados, obtendo sua integral de colisão (taxa de variação das funções de distribuição das partículas do plasma devido a colisões. Ver [14]). A partir de seus resultados, Wyld e Pines mostraram que, ao tomar o limite clássico ($\hbar \rightarrow 0$), a integral de colisão clássica é facilmente obtida. Ainda na mesma década, Walters e Harris estudavam efeitos não-lineares em plasmas intensamente magnetizados por meio de uma descrição mecânico-quântica [15]. Tomando o limite quântico, os autores mostraram como instabilidades surgiam por emissão ou absorção de plasmons por partículas energéticas. Um trabalho completo e abrangente sobre plasmas clássicos na ótica da MQ foi escrito por Harris e publicado em 1969 [16].

A interação de um campo de radiação eletromagnética (laser, por exemplo) com plasmas foi alvo de estudos de vários trabalhos a partir do fim da década de 1970. O comportamento de ondas eletromagnéticas no plasma sob ação de uma radiação externa foi estudado nas referências [17] e [18], onde foi utilizado o formalismo da Mecânica Quântica para obter os estados dos elétrons que compunham o plasma. Em [18], o autor mostra como a taxa de decaimento das ondas no plasma é controlada pela frequência da radiação externa no limite de pequenas amplitudes. Em estudos mais recentes, a interação de uma radiação eletromagnética com o plasma foi, novamente, considerada. Na referência [19], os autores estudaram o aquecimento de um plasma por campos de radiação intensos. Nesse trabalho, mostrou-se que os processos de absorção ressonante não-lineares envolvendo transições energéticas dos elétrons dominavam o aquecimento do plasma, resultando em um princípio de absorção dos campos de radiação.

Muitos estudos recentes [20, 21, 22, 23, 24] obtiveram sucesso em aplicar o formalismo quântico ao estudo dos processos de interação radiação-plasma. Embasados nesses, procuramos calcular o estado dos elétrons de um plasma macroscópico sob a incidência de uma radiação eletromagnética externa. Tratamos de um campo de radiação linearmente pola-

rizado e obtemos a função de onda dos elétrons por meio de uma transformação unitária [1, 24]. Assumimos que a alteração no potencial local do plasma é pequena para utilizar a teoria da perturbação e obter a flutuação na densidade de cargas. A partir desta, usamos a equação de Poisson para obter o potencial induzido resultante da perturbação e, com esse em mãos, determinamos a função dielétrica do plasma, caracterizando seu espectro de oscilações coletivas (*plasmons*). Encontramos algumas dificuldades numéricas no que se refere à resolução da relação de dispersão obtida a partir da função dielétrica. Felizmente, podemos contornar as dificuldades com códigos relativamente simples em linguagem FORTRAN e construir as curvas correspondentes ao espectro dos plasmons.

Esta dissertação, dentro do quadro descrito acima, fica organizada em 3 capítulos. No primeiro, descrevemos as principais características de um plasma e definimos conceitos importantes à nossa abordagem. Iniciamos, ainda, a discussão da existência de ondas eletromagnéticas se propagando no interior do plasma usando a aproximação hidrodinâmica e, posteriormente, a teoria cinética. Em ambos os casos, obtemos a função dielétrica para o plasma macroscópico e discutimos sua relação de dispersão para o caso de uma distribuição isotrópica dos componentes.

No capítulo 2, iniciamos o uso do formalismo quântico para o estudo das ondas eletromagnéticas no plasma. Mostramos, com sucesso, que a função dielétrica aqui obtida é totalmente equivalente àquela obtida pela teoria clássica. Na seção 2.2, tratamos da incidência de uma radiação externa no plasma livre¹. Chegamos, finalmente, a uma relação de dispersão implícita para a frequência dos modos coletivos.

O capítulo 3 é central neste estudo. Ele é dedicado à resolução numérica dessa relação de dispersão. Neste, apresentamos todos os resultados e as devidas aproximações tomadas. Explicitamos o método utilizado nos códigos de resolução dos sistemas encontrados e fazemos uma discussão geral dos principais resultados. O trabalho é finalizado com um resumo dos resultados e com algumas perspectivas de trabalhos futuros.

¹Não-magnetizado

1 *Características Gerais dos Plasmas*

“A palavra ‘*plasma*’ será usada para designar aquela porção de uma descarga do tipo arco na qual as densidades de íons e elétrons são altas mas substancialmente iguais” ([3], tradução livre). Foi assim que Tonks e Langmuir definiram um plasma pela primeira vez em Física. Essa caracterização, embora suficiente para descrever o sistema que era estudado, não define completamente o que vamos chamar de *plasma*, já que não explicita suas características macroscópicas nem suas características oscilatórias, por exemplo, que são fundamentais no estudo do comportamento dos plasmas.

Partindo da definição de Tonks e Langmuir, pode-se interpretar o plasma como um gás ionizado. Entretanto, não é todo gás ionizado que apresenta o comportamento esperado para um plasma, afinal, todo gás apresenta um certo grau de ionização. É necessário, então, definir critérios de classificação para plasmas. Neste capítulo definimos plasma e suas principais características.

1.1 Definição de Plasma

A matéria no universo visível pode ser classificada em quatro estados (em ordem energética crescente): sólido, líquido, gasoso e plasma. O que distingue os três primeiros estados é o potencial de ligação entre suas partículas constituintes. As forças de agregação decorrentes desse potencial são fortes nos sólidos, fracas nos líquidos e praticamente inexistentes em gases. A caracterização de uma substância em um desses estados depende da energia cinética aleatória (energia térmica) de seus constituintes, em outras palavras, depende de sua *temperatura*. O equilíbrio entre energia térmica e energia potencial de ligação entre partículas determina o estado. Se a energia térmica de um sistema superar a energia de ligação, ocorre uma transição de fase, que se dá a temperatura constante para uma dada pressão. Assim, ao aquecermos suficientemente um sólido, suas partículas

adquirem energia térmica necessária para superar a energia de ligação e passar ao estado líquido. A transição do estado líquido ao gasoso é semelhante. Agora, se aquecermos um gás molecular até que a energia térmica de uma fração considerável de suas moléculas supere à de ligação molecular, teremos um gás de átomos como resultado da "quebra" das moléculas. Se, por sua vez, esse gás de átomos receber energia suficiente para que uma fração suficientemente grande de seus constituintes tenha energia térmica superior à energia de ligação dos elétrons externos, estes se desprendem dos átomos gerando um gás ionizado (é importante comentar que os processos de ionização ocorrem por colisões). Essa passagem não pode, entretanto, ser considerada uma transição de fase abrupta, já que ocorre gradualmente com aumento de temperatura.

Uma maneira de produzir um plasma é, então, aumentar a temperatura de uma substância até que uma ionização alta seja atingida (em equilíbrio termodinâmico, o grau de ionização está fortemente relacionado à temperatura dos elétrons através da equação de Saha - ver [25, 26]). Existem vários exemplos de plasmas na natureza (estrela de nêutrons, corona solar, auroras, nebulosas, cinturão de Van Allen...), mas em laboratórios, os plasmas são mais difíceis de se obter por aquecimento devido à quantidade de energia necessária. Outra maneira de se produzir um plasma é aumentar o grau de ionização acima de seu valor de equilíbrio térmico. Esse processo de ionização pode ser dado por uma descarga elétrica gasosa, como foi feito por Tonks e Langmuir [3], na qual um campo elétrico acelera os elétrons livres que, por colisão, podem ionizar outros átomos. Como o campo transfere energia de forma mais eficiente aos elétrons, neste processo os elétrons possuem uma temperatura mais elevada do que a dos íons. Um outro processo de ionização é a *fotoionização*, na qual fótons incidentes com energia igual ou superior à de ionização do gás são absorvidos por seus átomos. A energia excedente é transformada em energia cinética dos pares elétron-íon formados. Esse processo pode ser obtido com a utilização de radiação de curto comprimento de onda (por exemplo, a energia potencial de ionização dos elétrons externos do oxigênio atômico é 13.6 eV, que pode ser obtida com radiação na faixa do ultravioleta).

Conforme a ionização se dá no processo de *criação* do plasma, a recombinação de elétrons com íons também acontece formando partículas neutras. Na medida em que as partículas passam de seu estado ionizado (excitado) para o estado neutro (fundamental), radiação é emitida caracterizando o espectro do plasma. Porém, a radiação emitida pelo plasma não provém apenas da recombinação de partículas ionizadas. Devido à presença de campos eletromagnéticos internos ao plasma, partículas carregadas são aceleradas emitindo radiação. De forma semelhante, se uma partícula carregada é desacelerada

por colisão Coulombiana, esta emite uma radiação de freamento chamada *bremstrahlung* [25, 26]. Um outro tipo de radiação ocorre na presença de um campo magnético externo. Sob ação desse campo, as partículas carregadas adquirem uma aceleração centrípeta, emitindo radiação eletrociclôtrônica.

Como já foi dito, não é todo gás ionizado que pode ser considerado um plasma. Por exemplo, um gás ionizado fracamente praticamente não emite radiação eletrociclôtrônica. Um gás ionizado com poucos elétrons e muitos íons não apresenta a oscilação de campos eletromagnéticos que caracterizou o *espalhamento* de elétrons no experimento de Tonks e Langmuir. É necessário, aqui, introduzir uma definição apropriada para plasmas:

Um plasma é um gás quase-neutro de partículas neutras e carregadas que exibe comportamento coletivo [25].

Vamos explorar essa definição e explicar o que é “quase-neutralidade” e “comportamento coletivo”.

1.2 Comportamento Coletivo

Como vimos, um plasma é composto por elétrons, íons e partículas neutras, todos com elevada energia cinética devido às altas temperaturas. Conforme as partículas carregadas se movimentam, podem criar no plasma concentrações locais de carga positiva ou negativa, gerando campos elétricos internos ao plasma. As partículas em movimento criam, também, correntes elétricas que geram campos magnéticos. Esses campos afetam o movimento das partículas do plasma. Analisando as forças Coulombianas entre regiões carregadas em um plasma, vemos que são de longo-alcance: vamos supor duas regiões carregadas, A e B, no plasma separadas por uma distância r . As forças Coulombianas entre as regiões diminuem com $1/r^2$. Entretanto, para um dado ângulo sólido ($\Delta r/r = \text{constante}$, ver figura (1)), o volume de plasma em B que afeta A aumenta com r^3 . Assim, elementos do plasma exercem forças uns sobre os outros mesmo a grandes distâncias.

Além dessa força eletromagnética atuando nas partículas do plasma, colisões ocorrem entre elétrons, íons e partículas neutras. Os elétrons, por serem mais leves, possuem velocidades muito maiores do que aquelas dos íons e partículas neutras (caracterizando a “geleia rígida”). Neste aspecto, o plasma apresenta comportamento de fluido.

Temos, então, colisões entre partículas e forças eletromagnéticas de longo alcance no

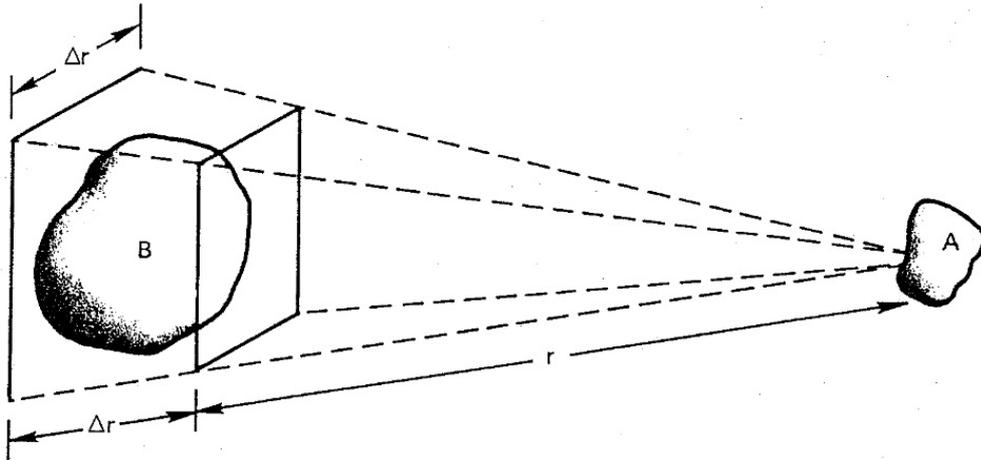


Figura 1: Longo alcance das forças Coulombianas em plasmas.

plasma. Uma perturbação externa no plasma pode, levando em conta o alcance das forças, se propagar por toda a extensão do plasma. Esse aspecto caracteriza o comportamento coletivo do plasma, enriquecendo o repertório de movimentos, oscilatórios ou não, possíveis nos plasmas.

1.3 Quase-neutralidade (*Neutralidade Macroscópica*)

Um plasma é macroscopicamente neutro na ausência de perturbações externas. Da simples definição dada por Tonks e Langmuir podemos inferir essa afirmação, já que a densidade de íons e elétrons é, essencialmente, igual. Em outras palavras, em condições de equilíbrio sem forças externas, em um volume do plasma suficientemente grande para conter um número grande de partículas mas ao mesmo tempo pequeno comparado com as dimensões macroscópicas do sistema, a carga líquida é zero:

$$\sum_i e_i n_i = 0, \quad (1.1)$$

onde n_i é a densidade de partículas do tipo i (com carga e_i). Esta característica de neutralidade macroscópica com ionização das partículas define a quase-neutralidade do plasma.

Nesse regime de quase-neutralidade, se o plasma estiver totalmente ionizado (e assim o trataremos nesta dissertação), a interação entre suas partículas é basicamente apenas eletromagnética; se, mais ainda, o plasma for não-relativístico, podemos assumir que as interações são puramente eletrostáticas. Essas interações em um plasma não são, entretanto, descritas pela lei de Coulomb usual, já que a presença de outras partículas

carregadas blindam a interação Coulombiana entre duas partículas em consideração. O movimento das partículas no plasma é afetado por campos eletromagnéticos internos e externos, colisões, qualquer força externa e é, portanto, muito complicado. Devido a isso, a *blindagem* apresenta um caráter dinâmico e bastante complexo. Mas, podemos ter uma boa ideia sobre essa blindagem partindo do caso estático.

1.3.1 Blindagem de Debye

Se inserirmos uma partícula carregada dentro de um plasma, esta será encoberta por uma nuvem de partículas livres, majoritariamente de carga oposta. Consideremos uma nuvem (estática) de elétrons e íons na vizinhança de uma partícula carregada arbitrária em um plasma. O potencial eletrostático (φ) dentro da nuvem satisfaz a equação de Poisson

$$\nabla^2\varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} \sum_i e_i n_i, \quad (1.2)$$

onde ϵ_0 é a permissividade elétrica no vácuo.

Se o plasma está em um estado de equilíbrio termodinâmico sujeito ao potencial φ , as partículas apresentam uma distribuição Maxwelliana [25, 27]

$$f_i(u) = A \exp \left[- \left(\frac{\frac{1}{2} m_i u^2 + e_i \varphi}{k_B T_{e_i}} \right) \right], \quad (1.3)$$

onde u é a velocidade das partículas, T_{e_i} é a temperatura da partícula i , A é uma constante de normalização (dada por $A = n_i \left(\frac{m_i}{2\pi k_B T_{e_i}} \right)^{3/2}$), m_i a massa da partícula de espécie i , e k_B a constante de Boltzmann. Sabendo que a densidade de partículas é dada pela função de distribuição, temos

$$\begin{aligned} n_i &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du \\ &= n_{i0} \exp \left[- \frac{e_i \varphi}{k_B T_{e_i}} \right], \end{aligned} \quad (1.4)$$

onde n_{i0} é a densidade de equilíbrio.

Estas densidades devem satisfazer a condição de neutralidade (1.1). Pela própria definição de plasma, podemos assumir uma temperatura ($k_B T$) muito alta, permitindo a aproximação

$$\left| \frac{e_i \varphi}{k_B T_{e_i}} \right| \ll 1. \quad (1.5)$$

Dada esta aproximação e com as densidades (1.4), resolvemos a equação de Poisson,

obtendo a seguinte expressão para determinar φ :

$$\begin{aligned}\nabla^2\varphi &= -\frac{1}{\epsilon_0} \left[\sum_i e_i n_{i0} - \sum_i \frac{e_i \varphi}{k_B T_{ei}} \right] \\ \nabla^2\varphi - \frac{\varphi}{\lambda_D^2} &= 0,\end{aligned}\tag{1.6}$$

onde a quantidade λ_D é o denominado *comprimento de Debye* [3, 25, 26, 28],

$$\lambda_D = \left(\frac{\epsilon_0 k_B T}{\sum_i n_{i0} e_i^2} \right)^{1/2}, \quad (T_{ei} = T).\tag{1.7}$$

Procuramos uma solução esfericamente simétrica para a equação (1.6):

$$\varphi \propto \frac{\exp(-r/\lambda_D)}{r},\tag{1.8}$$

o que corresponde a uma energia de interação entre duas partículas carregadas e_1 e e_2 , a uma distância relativa r_{12} , de

$$U_{12} = \frac{e_1 e_2}{r_{12}} \exp\left(-\frac{r_{12}}{\lambda_D}\right).\tag{1.9}$$

Logo, o efeito de blindagem no plasma implica na multiplicação de um fator $\exp(-r_{12}/\lambda_D)$ no termo usual de potencial de interação Coulombiana. Como resultado dessa queda na energia potencial, a interação eletrostática de partículas separadas por distâncias maiores que o comprimento de Debye pode ser, muitas vezes, desprezada. Assim, definindo uma *esfera de Debye*, de raio λ_D , dentro do plasma, quaisquer campos eletrostáticos gerados fora da esfera são blindados pelas partículas carregadas e praticamente não contribuem para o campo elétrico em seu centro. Ou seja, o comportamento coletivo que caracteriza o plasma ocorre essencialmente dentro da esfera de Debye. O número de partículas dentro da esfera que interagem coletivamente é dado por

$$N_D = \frac{4\pi}{3} \lambda_D^3 \sum_i n_{i0}.\tag{1.10}$$

É preciso ressaltar que a relação (1.9) é válida para plasmas em equilíbrio termodinâmico, i. e, assumimos implicitamente que:

$$\left\langle \frac{e^2}{r_{12}} \right\rangle / \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle \ll 1,\tag{1.11}$$

onde $\langle \dots \rangle$ indica média termodinâmica. Percebendo que $\langle \frac{1}{2} m v^2 \rangle \approx T$ e $\langle r_{12} \rangle \approx n^{-1/3}$, o

critério (1.11) pode ser reescrito como

$$\frac{e^2 n^{1/3}}{T} \ll 1, \quad (1.12)$$

o que implica que o plasma deve ser suficientemente quente e suficientemente rarefeito.

Entretanto, a equação (1.9) representa um valor médio do potencial de interação das partículas do plasma, ou seja, a blindagem é dinâmica. Portanto, o potencial φ é, necessariamente, uma função oscilatória do tempo, já que partículas carregadas em movimento no plasma, quando no processo de blindagem, oscilam em torno de sua posição de equilíbrio. Assim, a blindagem dinâmica está relacionada à possibilidade de existência de oscilações coletivas no plasma.

Vamos assumir que apenas os elétrons do plasma estão em movimento no processo de blindagem e que o plasma é não relativístico. Se uma camada plana de elétrons é deslocada de sua posição inicial por uma distância x , de acordo com a equação de Poisson, surge um campo elétrico dado por

$$E = \frac{enx}{\epsilon_0}, \quad (1.13)$$

sendo a densidade dos elétrons e e sua carga. Esse campo atua nos elétrons que se movimentarão obedecendo a equação de movimento:

$$m_e \frac{d^2 x}{dt^2} = -eE = -\frac{e^2 nx}{\epsilon_0}, \quad (1.14)$$

onde m_e é a massa dos elétrons. Essa equação é a de um oscilador harmônico com frequência

$$\omega_{pe} = \left(\frac{ne^2}{m_e \epsilon_0} \right)^{1/2}. \quad (1.15)$$

A existência de oscilações em plasma é, de fato, possível e fortemente relacionada à blindagem das interações. A frequência (1.15) determina a oscilação mais simples possível em um plasma, na qual apenas os elétrons participam quando seu movimento térmico pode ser desprezado. Estas oscilações são as chamadas *oscilações de Langmuir* [3, 25, 26, 28], e a frequência (1.15) é chamada *frequência natural do plasma* ou *frequência de Langmuir*.

1.4 Critérios para o Plasma

Voltemos a um problema importante: como diferenciar um gás ionizado de um plasma? Já sabemos algumas características de um plasma e como, aproximadamente, suas partículas

se distribuem e comportam em equilíbrio termodinâmico na ausência de campos externos. Estamos em condições de definir alguns critérios que devem ser satisfeitos para que o gás ionizado seja considerado um plasma.

A relação (1.7) define a distância de blindagem do potencial eletrostático em um plasma. Essa blindagem é uma característica do comportamento coletivo das partículas, portanto, precisamos requerer que as dimensões do sistema sejam muito maiores do que λ_D , caso contrário não haveria espaço suficiente para que o gás exiba comportamento coletivo. Este último ocorre dentro do que chamamos esfera de Debye (ver seção anterior), logo, precisamos admitir que o número (1.10) de partículas dentro dessa esfera seja muito grande.

Para que o comportamento oscilatório do plasma não seja desprezível, precisamos analisar casos em que as colisões (responsáveis por amortecer as ondas no plasma) possam ser desprezadas. Ou seja, é necessário que a frequência de colisão entre partículas do plasma seja menor do que a frequência natural do plasma ω_{pe} (1.15).

Podemos definir L como uma dimensão característica do plasma e τ como o tempo médio entre colisões de partículas do plasma para resumir os critérios em:

1. $L \gg \lambda_D$;
2. $N_D \gg 1$;
3. $\omega_{pe}\tau > 1$.

Esses três critérios, juntamente com a condição de neutralidade (1.1), **devem** ser satisfeitos para que um gás ionizado seja considerado um plasma.

É comum definir a função

$$g \equiv \frac{1}{n\lambda_D^3} \quad (1.16)$$

como o *parâmetro de plasma*. A aproximação (1.12) e o terceiro critério para a existência do plasma podem ser sumarizados por

$$g \ll 1, \quad (1.17)$$

o que é conhecido como a *aproximação de plasma*.

1.5 Ondas Eletromagnéticas em Plasmas Macroscópicos

Vimos, na seção 1.3, que existem oscilações em plasmas devidas apenas a seu caráter coletivo e a seu efeito de blindagem. Em sua forma mais simples, oscilações em plasmas decorrem do movimento dos elétrons em torno de um ponto de equilíbrio com uma frequência dada pela equação (1.15). Vamos, agora, sistematizar o estudo de oscilações em plasmas para melhor entender suas propriedades. Usaremos as equações de Maxwell em conjunto com as forças de Lorentz para explicar como as ondas eletromagnéticas se comportam na presença de uma densidade constante de elétrons (com velocidade também constante).

Partimos de um caso simples, com frequência de colisões binárias muito baixa em comparação com a frequência das ondas eletromagnéticas (de fato, vamos desprezar todas as colisões, estudando o caso de *plasmas não-colisionais*), cuja velocidade será considerada muito maior do que a velocidade térmica média das partículas (plasma *frio*). Como faremos até o fim deste trabalho, vamos desconsiderar a influência do movimento dos íons, tratando de um plasma de elétrons. Consideraremos, também, o plasma na ausência de campos externos, assim, toda oscilação decorre do movimento interno de seus componentes.

A densidade $n_e = n_e(\mathbf{r}, t)$ e a velocidade $\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_e(\mathbf{r}, t)$ dos elétrons devem satisfazer as equações de continuidade e de movimento

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot n_e \mathbf{u}_e = 0 \quad e \quad (1.18)$$

$$\frac{d_e \mathbf{u}_e}{dt} = -\frac{e}{m_e} \{ \mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B} \}, \quad (1.19)$$

onde m_e e $-e$ são a massa e a carga do elétron, respectivamente. A derivada total é dada por

$$\frac{d_e}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}_e \cdot \nabla) \quad (1.20)$$

e \mathbf{E} e \mathbf{B} representam, respectivamente, os campos elétrico e magnético das ondas. Assu-

mindando que o plasma é não relativístico, os campos obedecem às equações de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \quad (1.21)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (1.22)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.23)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.24)$$

onde \mathbf{J} e ρ são as densidades de corrente e de carga produzidas pelos elétrons. A densidade de equilíbrio dos elétrons é, por hipótese, igual à densidade dos íons n_0 . Logo, as densidades nas equações de Maxwell são dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \mathbf{J}_e = -en_e \mathbf{u}_e \\ \rho &= -e(n_e - n_0), \end{aligned} \quad (1.25)$$

lembrando, novamente, que estamos tomando a velocidade dos íons como sendo nula.

Não vamos, neste trabalho, distinguir entre os vetores campo magnético \mathbf{H} e indução magnética \mathbf{B} , uma vez que a permeabilidade magnética de um plasma é, geralmente, muito próxima da unidade ¹

Temos, então, um conjunto completo de equações descrevendo a propagação de ondas eletromagnéticas em um plasma *frio* (equações (1.18) à (1.25)). Assumindo que a amplitude das ondas seja pequena, podemos usar a forma linearizada da equação de movimento para os elétrons

$$\frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}. \quad (1.26)$$

Como estamos interessados em grandezas oscilatórias no plasma, vamos tomar a dependência temporal de todas as variáveis na forma $e^{-i\omega t}$. Logo

$$\mathbf{u}_e = -\frac{ie}{m_e \omega} \mathbf{E}. \quad (1.27)$$

Estando no limite de pequenas amplitudes, a densidade dos elétrons difere pouco de seu valor de equilíbrio, permitindo que a densidade de corrente seja dada por

$$\mathbf{J} = -en_0(u_e) \equiv \sigma \mathbf{E}, \quad (1.28)$$

¹Para uma melhor discussão sobre a permeabilidade magnética e a magnetização de um plasma, refiro-me aos textos [28] e [29]. Para uma discussão geral sobre a separação da indução magnética em campo magnético e magnetização, refiro-me ao texto [30].

onde a condutividade σ na Lei de Ohm assume a forma

$$\sigma(\omega) = \frac{ie^2n_0}{m_e\omega} \quad (1.29)$$

e recebe o nome *condutividade de alta-frequência de plasma*.

Agora introduzimos a indução elétrica a partir da equação (1.22) na forma

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1.30)$$

para uma onda monocromática obtemos a relação

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \frac{i}{\omega} \mathbf{J} &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \frac{i}{\omega} \sigma \mathbf{E} = \epsilon(\omega) \mathbf{E} \\ \epsilon(\omega) &= \epsilon_0 + \frac{i}{\omega} \sigma(\omega). \end{aligned} \quad (1.31)$$

Esta última quantidade é a chamada *constante ou permissividade dielétrica do plasma*.

Usando a relação (1.29) podemos reescrever a constante dielétrica

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left(1 - \frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0 \omega^2} \right), \quad (1.32)$$

ou, reconhecendo o termo da frequência natural do plasma

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right). \quad (1.33)$$

A constante dielétrica nos fornece toda a informação necessária para descrever a propagação de ondas eletromagnéticas de um plasma. Para mostrar esse fato, tomemos ondas planas monocromáticas

$$\mathbf{E}, \mathbf{B} \propto e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) - i\omega t} \quad (1.34)$$

se propagando em um plasma homogêneo². Neste caso as equações de Maxwell assumem a forma

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = -i\omega \mu_0 \epsilon(\omega) \mathbf{E}. \quad (1.35)$$

Destas últimas equações podemos encontrar a relação direta do campo magnético com o campo elétrico. Usando a dependência dada por (1.34), temos

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}. \quad (1.36)$$

²Note que, na derivação da equação (1.33), não foi feita nenhuma consideração sobre a homogeneidade do plasma. Logo, tal equação é válida tanto para plasmas homogêneos quanto para não-homogêneos

Recuperamos o resultado conhecido de que o campo magnético se propaga perpendicularmente ao campo elétrico e ao vetor de onda. Substituindo a equação (1.36) na expressão do rotacional do campo magnético em (1.35), chegamos à relação

$$\begin{aligned} \frac{i}{\omega}(\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E})) &= i\omega\mu_0\epsilon(\omega)\mathbf{E} \\ \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) - (k^2 - \omega^2\mu_0\epsilon(\omega))\mathbf{E} &= 0. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Multiplicando essa última equação escalarmente por \mathbf{k} , temos a condição

$$\epsilon(\omega)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) = 0. \quad (1.38)$$

Dessa condição, vemos que, se $\epsilon(\omega) \neq 0$, a onda eletromagnética se propaga transversalmente aos campos. Nesse regime, a equação (1.37) se escreve

$$\begin{aligned} k^2 - \omega^2\mu_0\epsilon(\omega) &= 0 \\ k^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Vemos, então, que ondas eletromagnéticas se propagam apenas para $\epsilon(\omega) > 0$, ou, usando a equação (1.33), há propagação quando $\omega > \omega_{pe}$. Substituindo (1.33) na relação (1.39) temos, finalmente, a relação de dispersão

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + c^2k^2. \quad (1.40)$$

A velocidade de fase da onda, para esse caso,

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0}}}, \quad (1.41)$$

será maior do que a velocidade da luz.

Para o outro possível caso ($\epsilon(\omega) < 0$), o vetor de onda \mathbf{k} assume valores imaginários puros e a onda sofre amortecimento. Uma medida desse amortecimento pode ser obtida a partir da *distância de penetração* da onda no plasma. Esta é dada por

$$l = \frac{1}{|\mathbf{k}|} = \frac{c}{(\omega_{pe}^2 - \omega^2)^{1/2}}. \quad (1.42)$$

Claramente, a condição

$$\epsilon(\omega) = 0 \quad (1.43)$$

caracteriza a propagação de ondas longitudinais no plasma. Novamente, substituindo em

(1.33), recuperamos a dispersão de ondas de Langmuir

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2. \quad (1.44)$$

Note que, para essas oscilações, a indução elétrica \mathbf{D} é nula, mas o campo elétrico \mathbf{E} não o é.

1.6 Teoria Cinética de Ondas Eletromagnéticas em Plasmas

Na última seção, analisamos a propagação de ondas eletromagnéticas em um plasma frio. Para tal, assumimos que a densidade e a velocidade dos elétrons eram constantes em toda a extensão do plasma, ou seja, descrevemos o plasma a partir de valores médios da densidade e da velocidade de seus componentes. Essa descrição é chamada *descrição hidrodinâmica* do plasma.

Partimos, agora, para um estudo *cinético* de um plasma, em que estamos interessados na função de distribuição ($F_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$) das partículas (do tipo α) que compõem o plasma. A função de distribuição é definida de tal maneira que a densidade de partículas do tipo α , com carga e_α , seja dada por [25, 26]

$$n_\alpha(\mathbf{r}, t) = \int F_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{v}, \quad (1.45)$$

e, por extensão, as densidades de carga e de corrente produzidas por partículas do tipo α são dadas, respectivamente, por

$$\rho_\alpha(\mathbf{r}, t) = e_\alpha \int F_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{v} \quad (1.46)$$

$$\mathbf{j}_\alpha(\mathbf{r}, t) = e_\alpha \int \mathbf{v} F_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{v}. \quad (1.47)$$

De maneira mais geral, o valor médio de qualquer função das velocidades ($g(\mathbf{v})$) é dado pela função de distribuição através da relação

$$\langle g(\mathbf{v}) \rangle = \int g(\mathbf{v}) F_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{v}, \quad (1.48)$$

a integração sendo tomada em todo o espaço das velocidades.

Queremos determinar as condições para propagação de ondas eletromagnéticas no plasma. Para tal, novamente partimos das equações de Maxwell para os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} .

Tomando o rotacional da equação (1.24), obtemos

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= -\frac{\partial(\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t} \\ &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2},\end{aligned}\quad (1.49)$$

onde usamos a equação (1.22). Essa última equação nos dá uma relação entre campo elétrico e densidade de corrente elétrica.

Neste estudo, \mathbf{E} é o campo elétrico de uma onda eletromagnética se propagando em um plasma não-colisional e \mathbf{j} é a densidade de corrente elétrica produzida pelo movimento das partículas no plasma,

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha} \mathbf{j}_{\alpha}(\mathbf{r}, t), \quad (1.50)$$

onde \mathbf{j}_{α} é dada por (1.47).

Podemos obter a função de distribuição a partir de sua derivada temporal total,

$$\begin{aligned}\frac{dF_{\alpha}}{dt} &= \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \cdot \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial \mathbf{v}} \\ \frac{dF_{\alpha}}{dt} &= \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) F_{\alpha} + \frac{\mathbf{G}_{\alpha}}{m_{\alpha}} \cdot \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial \mathbf{v}},\end{aligned}\quad (1.51)$$

onde \mathbf{G}_{α} é a força atuando na partícula do tipo α . Neste trabalho, \mathbf{G}_{α} é a força de Lorentz na partícula carregada, logo

$$\frac{dF_{\alpha}}{dt} = \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) F_{\alpha} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left(\{\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})\} \cdot \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial \mathbf{v}} \right), \quad (1.52)$$

sendo que os campos elétrico (\mathbf{E}) e magnético (\mathbf{B}) se relacionam pela equação (1.24).

Supomos que as variações na função de distribuição se dão, no plasma, apenas por colisões, e, como estamos analisando o caso não-colisional, obtemos a equação

$$\frac{\partial F_{\alpha}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) F_{\alpha} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left(\{\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})\} \cdot \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial \mathbf{v}} \right) = 0, \quad (1.53)$$

que é conhecida como *equação de Vlasov* [25, 26, 28, 29].

A fim de determinar como ondas eletromagnéticas se propagam no plasma, usamos a equação cinética (1.53). Para tal, consideremos uma pequena perturbação linear na função de distribuição das partículas

$$\begin{aligned}F_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &= f_{\alpha 0}(\mathbf{v}) + f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \\ |f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)| &\ll f_{\alpha 0}(\mathbf{v}),\end{aligned}\quad (1.54)$$

sendo $f_{\alpha 0}(\mathbf{v})$ a função de distribuição na ausência de oscilações, enquanto $f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ é uma pequena correção devida às oscilações no plasma. É importante lembrar que os campos na equação de Vlasov são gerados *apenas* pelo movimento dos componentes do plasma, uma vez que não estamos considerando, aqui, a ação de quaisquer campos externos ao plasma.

Podemos, agora, linearizar a equação (1.53) em f_{α} , obtendo

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) f_{\alpha} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left(\{\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})\} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} \right) = 0. \quad (1.55)$$

Na ausência de oscilações, assumimos que o plasma não apresenta densidades locais de carga ou corrente, ou seja

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int f_{\alpha 0}(\mathbf{v}) d^3 \mathbf{v} &= 0 \\ \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int \mathbf{v} f_{\alpha 0}(\mathbf{v}) d^3 \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Logo, a densidade de corrente na equação (1.49) é determinada por

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int \mathbf{v} f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3 \mathbf{v}. \quad (1.57)$$

As equações (1.24), (1.49), (1.55) e (1.57) formam um conjunto fechado de equações que descrevem a propagação de ondas de baixa amplitude em um plasma não-colisional. Resolvemos o conjunto dando as condições de contorno necessárias. Entretanto, é possível determinar uma equação descrevendo a existência de soluções do conjunto de equações que independa de condições de contorno. Para tal, precisamos assumir que todas as quantidades em (1.24), (1.49), (1.55) e (1.57) têm uma dependência do tipo onda monocromática

$$\mathbf{E}, \mathbf{B}, f_{\alpha} \propto e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - i\omega' t}, \quad (1.58)$$

onde \mathbf{k} é o vetor de onda e ω' é a frequência complexa de oscilação das quantidades.

Para essa dependência, a equação (1.49) assume a forma

$$[\mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \mathbf{E}]] + \frac{\omega'^2}{c^2} \mathbf{E} = -i\mu_0 \omega' \mathbf{j}, \quad (1.59)$$

e, de maneira análoga, as equações (1.24) e (1.55) são

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \frac{1}{\omega'}[\mathbf{k} \times \mathbf{E}] \\ f_\alpha &= -\frac{ie_\alpha}{m_\alpha[\omega' - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})]} \left([\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} \right).\end{aligned}\quad (1.60)$$

A equação (1.57) pode ser reescrita na forma (1.50), onde as componentes (i) do novo vetor \mathbf{j}_α são

$$\begin{aligned}j_{\alpha i} &= e_\alpha \int v_i f_\alpha d^3 \mathbf{v} \\ &= -\frac{ie_\alpha^2}{m_\alpha} \int v_i \left(\frac{[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}}}{[\omega' - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})]} \right) d^3 \mathbf{v}.\end{aligned}\quad (1.61)$$

Usando a primeira relação em (1.60), temos que

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} = \frac{1}{\omega'} \sum_j (v_j E_j) \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} - \frac{1}{\omega'} \sum_j (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) E_j \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_j}.\quad (1.62)$$

Portanto, reescrevendo (1.61)

$$j_{\alpha i} = -\frac{ie_\alpha^2}{m_\alpha} \int v_i \sum_j E_j \left\{ \left[1 - \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})}{\omega'} \right] \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_j} + \frac{v_j}{\omega'} \left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} \right) \right\} \frac{d^3 \mathbf{v}}{[\omega' - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})]}.\quad (1.63)$$

Introduzimos, aqui, o tensor condutividade de alta frequência ($\sigma_{ij}^{(\alpha)}$) do componente α do plasma para escrever

$$j_{\alpha i} = \sum_j \sigma_{ij}^{(\alpha)} E_j,\quad (1.64)$$

com

$$\sigma_{ij}^{(\alpha)} = -\frac{ie_\alpha^2}{m_\alpha} \int v_i \left\{ \left[1 - \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})}{\omega'} \right] \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_j} + \frac{v_j}{\omega'} \left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} \right) \right\} \frac{d^3 \mathbf{v}}{[\omega' - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})]}.\quad (1.65)$$

Lembrando que a integração deve ser feita contornando a singularidade em $\omega' = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})$, o que pode ser feito, trivialmente, usando a fórmula de Plemelj [28]

$$\frac{1}{[\omega' - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})]} = P \frac{1}{[\omega' - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})]} - i\pi\delta\{\omega' - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})\},\quad (1.66)$$

onde o símbolo P indica que um valor principal deve ser tomado.

Procuramos uma maneira de escrever as equações (1.59), (1.60), (1.63) e (1.64) em um conjunto simples (e simétrico) de equações. Para isso, introduzimos, novamente, a

indução elétrica

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \frac{i}{\omega'} \mathbf{j}. \quad (1.67)$$

Usando a equação (1.64), escrevemos as componentes do vetor indução elétrica na forma

$$\begin{aligned} D_i &= \epsilon_0 E_i + \frac{i}{\omega'} \sum_{\alpha} \sum_j \sigma_{ij}^{(\alpha)} E_j \\ &= \sum_j \left\{ \epsilon_0 \delta_{ij} + \frac{i}{\omega'} \sum_{\alpha} \sigma_{ij}^{(\alpha)} \right\} E_j. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Conforme foi feito na seção anterior, introduzimos a permissividade dielétrica do plasma

$$D_i = \sum_j \epsilon_{ij} E_j, \quad (1.69)$$

onde

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_0 \delta_{ij} + \sum_{\alpha} \frac{i}{\omega'} \sigma_{ij}^{(\alpha)}. \quad (1.70)$$

Cabe aqui salientar que ϵ_{ij} é um tensor de segunda ordem, portanto, estamos tratando do *tensor permissividade dielétrica* (ou tensor dielétrico). Em seguida, definimos a polarizabilidade de alta frequência do componente α do plasma ($\pi_{ij}^{(\alpha)}$) através da relação

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= \epsilon_0 \delta_{ij} + \sum_{\alpha} \pi_{ij}^{(\alpha)} \\ \pi_{ij}^{(\alpha)} = \frac{i}{\omega'} \sigma_{ij}^{(\alpha)} &= \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha} \omega'^2} \int \sum_l \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_l} \frac{v_i (\omega' - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \delta_{jl} + k_l v_j v_i}{(\omega' - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})} d^3 \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Finalmente, podemos introduzir o tensor [28]

$$\Lambda_{ij} = n^2 (x_i x_j - \delta_{ij}) + \epsilon_{ij}, \quad (1.72)$$

onde $n \equiv k/\omega' \sqrt{\mu_0}$ e \mathbf{x} é um vetor unitário na direção de propagação da onda ($\mathbf{x} = \mathbf{k}/k$). Com esse tensor, as equações (1.59), (1.60), (1.63) e (1.64) podem ser obtidas a partir do conjunto

$$\sum_j \Lambda_{ij} E_j = 0. \quad (1.73)$$

Como exemplo, abrimos essa última equação

$$\begin{aligned} \sum_j \{n^2(x_i x_j - \delta_{ij})E_j + \epsilon_{ij}E_j\} &= 0 \\ \sum_j \frac{1}{\omega'^2 \mu_0} k_i k_j E_j - \frac{k^2}{\omega'^2 \mu_0} E_i + \epsilon_0 E_i + \frac{i}{\omega'} j_i &= 0, \end{aligned} \quad (1.74)$$

onde usamos (1.67) e (1.69). Multiplicando a equação por $\mu_0 \omega'^2$, temos

$$\begin{aligned} \sum_j (k_j E_j) k_i - k^2 E_i + \frac{\omega'^2}{c^2} E_i + i\omega' \mu_0 j_i &= 0 \\ [\mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \mathbf{E}]]_i + \frac{\omega'^2}{c^2} E_i + i\omega' \mu_0 j_i &= 0. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Esta é a componente i da equação (1.59). Usando (1.70) na primeira equação de (1.74), obtemos a equação (1.64).

Assim, a condição de existência de soluções do conjunto homogêneo de equações (1.73) nos dá uma relação de dispersão para as oscilações eletromagnéticas no plasma:

$$\Lambda \equiv \text{Det} |\Lambda_{ij}| = 0. \quad (1.76)$$

Esta equação determina, para um dado vetor de onda \mathbf{k} , valores das frequências de oscilações eletromagnéticas (ω') no plasma.

As quantidades introduzidas nesta seção possuem a seguinte dependência

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega'), \quad \Lambda_{ij} = \Lambda_{ij}(\mathbf{k}, \omega'). \quad (1.77)$$

1.6.1 Distribuição isotrópica das partículas

No caso de uma distribuição isotrópica das partículas, temos

$$f_{\alpha 0} \equiv f_{\alpha 0}(\varepsilon), \quad (1.78)$$

sendo $\varepsilon = \frac{1}{2} m_\alpha v^2$ a energia da partícula. Assim, a polarizabilidade (1.71) tem a forma

$$\pi_{ij}^{(\alpha)} = \frac{e_\alpha^2}{\omega'} \int \frac{v_i v_j}{\omega' - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} f'_{\alpha 0} d^3 \mathbf{v}. \quad (1.79)$$

Usando a primeira equação de (1.71), temos que o tensor dielétrico é dado por

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega') = \epsilon_0 \delta_{ij} + \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2}{\omega'} \int \frac{v_i v_j}{\omega' - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} f'_{\alpha 0} d^3 \mathbf{v}. \quad (1.80)$$

Este tensor depende apenas de um vetor (o vetor de onda \mathbf{k}). Então, os únicos tensores independentes de segunda ordem que podemos construir são o tensor unitário δ_{ij} e o tensor $k_i k_j$. Logo, podemos estabelecer a estrutura geral do tensor dielétrico como [28]

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega') = (\delta_{ij} - x_i x_j) \epsilon_t(\mathbf{k}, \omega') + x_i x_j \epsilon_l(\mathbf{k}, \omega'), \quad (1.81)$$

onde $\mathbf{x} = \mathbf{k}/k$ e definimos ϵ_t e ϵ_l como as *permissividades transversal e longitudinal do plasma*, respectivamente. Comparando a equação (1.80) com o tensor dielétrico na forma (1.81), obtemos [31]

$$\begin{aligned} \epsilon_l(\mathbf{k}, \omega') &= \epsilon_0 + \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{\omega' - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} f'_{\alpha 0} \epsilon d^3 \mathbf{v} \\ \epsilon_t(\mathbf{k}, \omega') &= \epsilon_0 + \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2}{2\omega'} \int \frac{v_{\perp}^2}{\omega' - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} f'_{\alpha 0} \epsilon d^3 \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (1.82)$$

onde o componente da velocidade \mathbf{v} perpendicular ao vetor de onda é representado por v_{\perp} .

Nesta teoria cinética, as propriedades dielétricas de um plasma com uma distribuição isotrópica das partículas são caracterizadas por duas funções escalares do vetor de onda e da frequência das ondas, enquanto que na teoria hidrodinâmica, as propriedades dielétricas são caracterizadas por uma única função da frequência. Ou seja, no caso hidrodinâmico, $\epsilon_l(\mathbf{k}, \omega') = \epsilon_t(\mathbf{k}, \omega') = \epsilon(\omega')$. Logo, o tensor dielétrico, na aproximação hidrodinâmica, é, usando (1.81), proporcional ao tensor unitário:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon(\omega') \delta_{ij}. \quad (1.83)$$

Usando a expressão do tensor dielétrico (1.81) para construir o tensor (1.72), obtemos

$$\Lambda_{ij} = (x_i x_j - \delta_{ij})(n^2 - \epsilon_t) + x_i x_j \epsilon_l. \quad (1.84)$$

Com este tensor, a relação de dispersão (1.76) se escreve

$$\Lambda = \epsilon_l(\mathbf{k}, \omega') [n^2 - \epsilon_t(\mathbf{k}, \omega')]^2 = 0. \quad (1.85)$$

Esta relação nos dá duas equações:

- Uma equação para a permissividade longitudinal

$$\epsilon_l(\mathbf{k}, \omega') = 0, \quad (1.86)$$

que nos dá as frequências das oscilações longitudinais no plasma (de acordo com (1.43));

- e uma equação para a permissividade transversal

$$\epsilon_t(\mathbf{k}, \omega') = \frac{k^2}{\mu_0 \omega'^2}, \quad (1.87)$$

determinando as frequências de oscilações transversais no plasma.

Vimos, na seção anterior, que a velocidade de fase das ondas eletromagnéticas transversais assume valores maiores do que a velocidade da luz. Logo, o denominador na segunda equação de (1.82) nunca se anula e, portanto, $\epsilon_t(\mathbf{k}, \omega')$ é real em toda a extensão do plasma.

As equações (1.86) e (1.87) descrevem completamente a propagação de ondas eletromagnéticas em um plasma isotrópico de acordo com a teoria cinética.

2 Ondas Eletromagnéticas em Plasmas sob o Ponto de Vista da Mecânica Quântica

Agora, vamos estudar a propagação de ondas eletromagnéticas em um plasma macroscópico usando as ferramentas da mecânica quântica. Para tal, vamos tratar de um plasma de elétrons com íons fixos. Novamente, vamos considerar que as ondas resultam de uma perturbação na distribuição dos elétrons, porém, vamos calcular o estado dos elétrons através de sua função de onda em vez da função de distribuição.

Com a finalidade de simplificar as equações, neste capítulo usaremos, como de costume em sistemas quânticos eletrodinâmicos, o sistema CGS de unidades.

2.1 Propagação de ondas eletromagnéticas em um plasma na ausência de campos externos

Para obter os estados dos elétrons, partimos do caso mais simples: o elétron livre. A equação que descreve o movimento de um elétron livre é a equação de Schrödinger [32, 33]

$$H\psi_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2.1)$$

com o Hamiltoniano dado por

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_e}. \quad (2.2)$$

Aqui, usamos o índice (0) na função de onda $\psi_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{r}, t)$ para denotar um estado não perturbado dos elétrons. A solução da equação (2.1) é [33]

$$\psi_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(0)} t\right), \quad (2.3)$$

onde

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(0)} = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m_e} \quad (2.4)$$

é a energia do elétron livre. A função $\psi_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{r}, t)$ é normalizada e forma um conjunto ortonormal. Logo, a densidade de cargas é expressa por

$$\rho_{\mathbf{k}}^{(0)} = -e \psi_{\mathbf{k}}^{*(0)}(\mathbf{r}, t) \psi_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{r}, t), \quad (2.5)$$

onde “e” é a carga do elétron. Novamente, usamos o índice (0) para denotar uma densidade não perturbada de cargas.

A perturbação no plasma será introduzida devida a ação de um potencial local. Este potencial causa uma flutuação na densidade de carga, uma vez que modifica a função de onda. Para determinar essa nova função de onda, usamos (2.3) como base para a expansão

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}(t) \psi_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{r}, t). \quad (2.6)$$

O coeficiente $a_{\mathbf{k}}(t)$ da expansão será determinado pelo método da perturbação temporal [32, 34]. Usaremos a expansão de Fourier do potencial local para proceder nos cálculos

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{q} \int d\Omega \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \exp(-i\Omega t) \varphi(\mathbf{q}, \Omega) + c.c. , \quad (2.7)$$

onde c.c. é o complexo conjugado do termo precedente.

A equação de Schrödinger na presença desse potencial assume a forma

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = (H - e\varphi(\mathbf{r}, t)) \Psi(\mathbf{r}, t), \quad (2.8)$$

onde H é o Hamiltoniano do elétron livre dado por (2.2). Usando a expansão (2.6), obtemos, para os coeficientes, até primeira ordem

$$\frac{\partial a_{\mathbf{k}}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} e \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\varepsilon_{\mathbf{k}'}^{(0)} - \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(0)}) \right] \int \psi_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{r}, t) \psi_{\mathbf{k}'}^{(0)*}(\mathbf{r}, t) \varphi(\mathbf{r}, t). \quad (2.9)$$

Substituindo (2.7), obtemos

$$\frac{\partial a_{\mathbf{k}}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} e \sum_{\Omega} \varphi(\mathbf{q}, \Omega) \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(0)} - \varepsilon_{\mathbf{k}'}^{(0)} - \hbar\Omega) t \right]. \quad (2.10)$$

Integrando esta última equação no tempo, obtemos uma expressão para os coeficientes

da expansão (2.6).

$$a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} = -e \sum_{\Omega} \frac{\exp \left[\frac{i}{\hbar} (\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{(0)} - \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(0)} - \hbar\Omega) t \right]}{\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{(0)} - \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(0)} - \hbar\Omega - i\eta} \varphi(\mathbf{q}, \Omega), \quad \eta \rightarrow 0^{(+)}. \quad (2.11)$$

Finalmente, podemos escrever a função de onda perturbada até primeira ordem [32, 34]

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = \psi_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{r}, t) + \sum_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}(t) \psi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{(0)}(\mathbf{r}, t). \quad (2.12)$$

Conhecendo a função de onda dos elétrons na presença do potencial (2.7), podemos calcular a flutuação na densidade de carga

$$\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = -e \Psi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}, t) \Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) - \rho_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{r}, t). \quad (2.13)$$

Assumindo uma perturbação pequena, ou seja, assumindo um potencial local fraco, desprezamos os termos de segunda ordem em φ para obter

$$\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = e^2 \sum_{\mathbf{q}, \Omega} \varphi(\mathbf{q}, \Omega) \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} e^{-i\Omega t}}{\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{(0)} - \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(0)} - \hbar\Omega - i\eta} + c.c. . \quad (2.14)$$

De forma semelhante à feita no capítulo anterior, vamos assumir uma distribuição isotrópica dos elétrons. Mais especificamente, usaremos uma distribuição Maxwelliana ($f_{\mathbf{k}}$) para os elétrons. Assim, a flutuação total da densidade de carga no plasma é dada por

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} \rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t). \quad (2.15)$$

Usando a relação (2.14), temos

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e^2 \sum_{\mathbf{q}, \Omega} \varphi(\mathbf{q}, \Omega) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} e^{-i\Omega t} \Pi(\mathbf{q}, \Omega) + c.c. , \quad (2.16)$$

onde introduzimos a definição de polarizabilidade eletrônica

$$\Pi(\mathbf{q}, \Omega) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{f_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - f_{\mathbf{k}}}{\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{(0)} - \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(0)} - \hbar\Omega - i\eta}. \quad (2.17)$$

Temos, então, uma expressão final para a flutuação de carga no plasma. Esta flutuação induz um potencial ($\varphi_{ind}(\mathbf{r}, t)$) interno ao sistema, que pode ser calculado usando a equação de Poisson

$$\nabla^2 \varphi_{ind}(\mathbf{r}, t) = -4\pi \rho(\mathbf{r}, t). \quad (2.18)$$

Usando uma expansão de Fourier, na forma (2.7), para o potencial induzido, temos o laplaciano

$$\nabla^2 \varphi_{ind}(\mathbf{r}, t) = - \sum_{\mathbf{q}, \Omega} q^2 e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} e^{-i\Omega t} \varphi_{ind}(\mathbf{q}, \Omega) + c.c. . \quad (2.19)$$

O potencial local é composto pelo potencial induzido e um potencial externo

$$\varphi(\mathbf{q}, \Omega) = \varphi_{ext}(\mathbf{q}, \Omega) + \varphi_{ind}(\mathbf{q}, \Omega). \quad (2.20)$$

Por outro lado, o potencial local pode ser expresso em função do potencial externo com auxílio da função dielétrica [33]

$$\varphi(\mathbf{q}, \Omega) = \frac{\varphi_{ext}(\mathbf{q}, \Omega)}{\epsilon(\mathbf{q}, \Omega)}. \quad (2.21)$$

Substituindo a equação (2.21) em (2.20), temos

$$\epsilon(\mathbf{q}, \Omega) = 1 - \frac{\varphi_{ind}(\mathbf{q}, \Omega)}{\varphi(\mathbf{q}, \Omega)}. \quad (2.22)$$

Usando a expressão (2.19) na equação de Poisson (2.18) com auxílio da densidade (2.16), obtemos uma expressão para o valor esperado da função dielétrica

$$\epsilon(\mathbf{q}, \Omega) = \langle \epsilon(\mathbf{q}, \Omega) \rangle = 1 - \frac{4\pi e^2}{q^2} \frac{1}{V} \Pi(\mathbf{q}, \Omega). \quad (2.23)$$

Esta é a expressão para função dielétrica do plasma (compare com a equação (1.71) da teoria cinética do capítulo anterior). Como estamos estudando plasmas macroscópicos, podemos assumir um volume (V) muito grande do sistema. Se fizermos esse volume tender ao infinito, o somatório em $\Pi(\mathbf{q}, \Omega)$ se torna uma integral no espaço das velocidades [16]

$$\sum_{\mathbf{k}} \xrightarrow{v \rightarrow \infty} V \int d^3 v, \quad (2.24)$$

onde usamos o fato de podermos expressar $\mathbf{v} = \hbar\mathbf{k}/m_e$. Logo, a função dielétrica assume a forma

$$\epsilon(\mathbf{q}, \Omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{q^2} \int \frac{f_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - f_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{(0)} - \epsilon_{\mathbf{k}}^{(0)} - \hbar\Omega - i\eta} d^3 v. \quad (2.25)$$

Usando a fórmula de Plemelj [35]

$$\frac{1}{x + i\eta} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0^+} P \frac{1}{x} - i\pi\delta(x), \quad (2.26)$$

encontramos uma expressão para a parte real de (2.25):

$$\epsilon(\mathbf{q}, \Omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{q^2} P \int \frac{f_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - f_{\mathbf{k}}}{\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{(0)} - \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(0)} - \hbar\Omega} d^3v, \quad (2.27)$$

onde a letra P indica que um valor principal deve ser tomado.

Simplificando os termos no denominador,

$$\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{(0)} - \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(0)} = \frac{\hbar^2(\mathbf{k} + \mathbf{q})^2}{2m_e} - \frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2m_e} = \frac{\hbar^2\mathbf{k}}{m_e} \cdot \mathbf{q} + \frac{\hbar^2\mathbf{q}^2}{2m_e}. \quad (2.28)$$

Por tratarmos de um plasma macroscópico (um sistema clássico), tomamos o limite clássico ($\hbar \rightarrow 0$; $\hbar\mathbf{k} \rightarrow m\mathbf{v}$) [16] na equação (2.28). Depois, substituímos o resultado na função dielétrica (2.27), proseguindo com os cálculos em uma dimensão ($\mathbf{v} \rightarrow v$), por simplicidade, obtendo

$$\epsilon(\mathbf{q}, \Omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{m_e q^2} P \int \frac{\frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial v}}{v - \Omega/q} dv, \quad (2.29)$$

onde usamos o limite

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{f_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - f_{\mathbf{k}}}{\frac{\hbar^2\mathbf{k}}{m_e} \cdot \mathbf{q} + \frac{\hbar^2\mathbf{q}^2}{2m_e} - \hbar\Omega} = \frac{1}{m_e} \frac{\frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial v}}{v - \Omega/q}. \quad (2.30)$$

Procedendo a uma integração por partes de (2.29), obtemos,

$$\epsilon(\mathbf{q}, \Omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{q^2} \int \frac{f_{\mathbf{k}}}{(v - \Omega/q)^2} dv, \quad (2.31)$$

onde a frequência natural do plasma, no sistema CGS, é dada por

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi n e^2}{m_e} \quad (2.32)$$

Vemos que a equação (2.29) é exatamente igual (feita a derivação com relação à energia do elétron) à parte longitudinal de (1.82). De acordo com as teorias descritas no capítulo anterior, a relação de dispersão para as ondas longitudinais no plasma é

$$\epsilon(\mathbf{q}, \Omega) = 0. \quad (2.33)$$

Esta relação nos dá a frequência de oscilação longitudinal coletiva no plasma em função do número de onda da radiação que se propaga, *i. e.*, os modos de oscilações coletivas.

Assim, usando (2.29) na relação (2.33), temos

$$1 = \frac{\omega_p^2}{q^2} \int \frac{f_{\mathbf{k}}}{(v - \Omega/q)^2} dv. \quad (2.34)$$

Estamos integrando em todo o espaço das velocidades, logo, o intervalo de integração é

$$1 = \frac{\omega_p^2}{q^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{\mathbf{k}}}{(v - \Omega/q)^2} dv. \quad (2.35)$$

Usando a definição (1.48), vemos que esta última equação é escrita na forma

$$1 = \frac{\omega_p^2}{q^2} \left\langle \left(v - \frac{\Omega}{q} \right)^{-2} \right\rangle. \quad (2.36)$$

Novamente, vamos assumir que a velocidade de fase é muito maior que a velocidade térmica dos elétrons (plasma frio) para expandir o lado direito da equação (2.36)

$$\left(v - \frac{\Omega}{q} \right)^{-2} = \left(\frac{\Omega}{q} \right)^{-2} \left(1 - \frac{v}{\Omega/q} \right)^{-2} = \left(\frac{\Omega}{q} \right)^{-2} \left(1 + 2\frac{v}{\Omega/q} + 3\left(\frac{v}{\Omega/q} \right)^2 + 4\left(\frac{v}{\Omega/q} \right)^3 + \dots \right). \quad (2.37)$$

Ao aplicarmos a média da expansão, os termos em potências ímpares se anulam. Assim, até segunda ordem em v

$$\left\langle \left(v - \frac{\Omega}{q} \right)^{-2} \right\rangle = \left(\frac{\Omega}{q} \right)^{-2} \left(1 + 3\frac{\langle v^2 \rangle}{(\Omega/q)^2} \right). \quad (2.38)$$

Finalmente, usando a expansão (2.38), a relação de dispersão (2.36) se escreve

$$\Omega^2 = \omega^2 + 3\frac{\omega_p^2}{\Omega^2} \langle v^2 \rangle q^2. \quad (2.39)$$

Desconsiderando a velocidade térmica dos elétrons, temos a expressão usual das oscilações de Langmuir

$$\Omega = \omega_p. \quad (2.40)$$

Por outro lado, se considerarmos o movimento térmico dos elétrons (com velocidade tal que $\langle v^2 \rangle = \frac{k_B T_e}{m_e}$ [25, 26]) haverá uma correção nas frequências de oscilação coletiva. Assumindo que esta correção é pequena, podemos fazer a aproximação

$$\frac{\omega_p^2}{\Omega^2} \approx 1 \quad (2.41)$$

para obter a relação de dispersão

$$\Omega^2 = \omega^2 + 3\frac{k_B T_e}{m_e} q^2, \quad (2.42)$$

ou, usando a definição de comprimento de Debye dada na equação (1.7)

$$\Omega^2 = \omega_p^2(1 + 3\lambda_D^2 q^2). \quad (2.43)$$

Esta é a expressão final relacionando a frequência dos modos coletivos Ω com o número de onda q . Pelo gráfico da relação de dispersão mostrado na figura (2), vemos que as velocidades de grupo e de fase são finitas. Além disso, as equações (2.40) e (2.42) são as mesmas obtidas classicamente para os modos coletivos em um plasma isotrópico, o que mostra a eficiência do método. Assim, as ferramentas da mecânica quântica descrevem bem o comportamento clássico de um plasma macroscópico. Em alguns casos, a mecânica quântica permite um caminho mais simples e útil do que aquele possível classicamente.

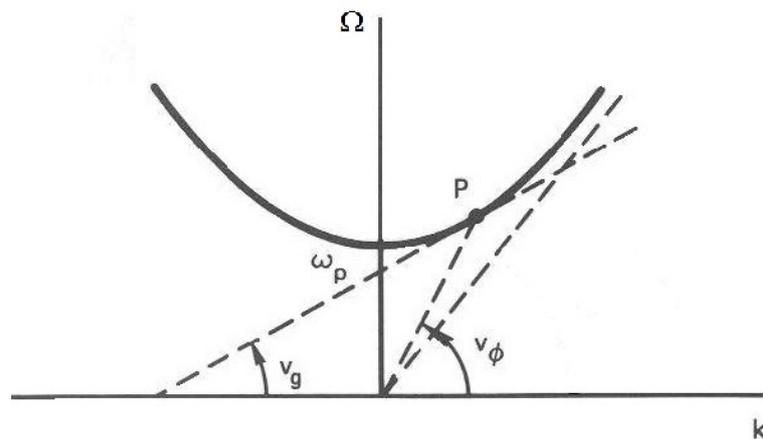


Figura 2: Gráfico da relação de dispersão (2.42). Vemos representadas as velocidades de fase e de grupo em um ponto P qualquer da curva.

Até o final deste trabalho, serão utilizadas as ferramentas da mecânica quântica para descrever a propagação de ondas eletromagnéticas em um plasma não magnetizado.

2.2 Propagação de ondas eletromagnéticas em um plasma livre sob ação de um campo de radiação

Nesta seção vamos estudar os modos coletivos em um plasma livre na presença de um campo de radiação [17, 18, 24]. Como feito na seção anterior, usaremos as ferramentas da mecânica quântica para determinar a flutuação na densidade de carga do plasma devida à

presença do campo externo e, assim, ter uma expressão para o potencial local. Novamente, partimos da equação de Schrödinger para o elétron livre

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m_e}\Phi(\mathbf{r}, t) = i\hbar\frac{\partial\Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.44)$$

cuja solução normalizada é dada por

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_{\mathbf{k}}t}, \quad (2.45)$$

e a energia dos elétrons por

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2m_e}. \quad (2.46)$$

Consideramos, agora, a incidência de uma radiação eletromagnética no plasma. O vetor campo elétrico da radiação incidente será tomado ao longo do eixo x:

$$\mathbf{E}(t) = E\cos(\omega t)\hat{\mathbf{x}}, \quad (2.47)$$

onde ω é a frequência da radiação. Assim, a equação de movimento para os elétrons na presença da radiação (2.47) é

$$H\psi_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = i\hbar\frac{\partial\psi_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.48)$$

onde H é o Hamiltoniano do sistema e, mais uma vez, usamos o índice (0) para caracterizar que este será utilizado como estado não perturbado.

Precisamos levar em conta, no Hamiltoniano, a interação do campo de radiação com os elétrons do plasma. O fator que descreve essa interação é o potencial vetor, derivado a partir do campo elétrico, na forma

$$\mathbf{A}(t) = \left(\frac{E}{\omega}\sin(\omega t)\right)\hat{\mathbf{x}}. \quad (2.49)$$

Com este, o Hamiltoniano é dado por [27, 33]

$$H = \frac{1}{2m_e}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}(t))^2. \quad (2.50)$$

Precisamos, agora, resolver a equação de Schrödinger para o potencial vetor dependente do tempo. As equações (2.48) e (2.44) podem ser relacionadas por uma simples transformação unitária [24, 36, 37], que transforma o problema dependente do tempo em

um problema estacionário ¹

$$U \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\mathbf{p}^2}{2m_e} \right] U^+ = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2m_e} (\mathbf{p} - e\mathbf{A}(t))^2, \quad (2.51)$$

onde U, o operador unitário, nos dá a função de onda a partir do resultado do elétron livre na forma

$$\psi_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = U\Phi(\mathbf{r}, t). \quad (2.52)$$

Supomos um operador unitário dado por

$$U = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\alpha(t) \cdot \mathbf{r}\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\beta(t) \cdot \mathbf{p}\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\eta(t)\right), \quad (2.53)$$

onde $\alpha(t)$ é o gerador de translação de momento, $\beta(t)$ é o gerador de translação espacial e $\eta(t)$ é um fator de fase [1]. Resolvendo (2.51), obtemos o operador unitário [1, 24]

$$U = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}2\gamma_1\omega t\right) \exp(i\gamma_0 k_x(1 - \cos(\omega t))) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\gamma_1 \text{sen}(2\omega t)\right), \quad (2.54)$$

onde $\gamma_0 = eE/m_e\omega^2$ e $\gamma_1 = e^2E^2/8m_e\omega^3$.

Substituindo em (2.52) o resultado expresso pela equação (2.54), temos a função de onda para o elétron na presença de um campo de radiação

$$\psi_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}F(\omega, t)\right) \exp(i\gamma_0 k_x(1 - \cos(\omega t))) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_{\mathbf{k}}t\right), \quad (2.55)$$

sendo que introduzimos a função $F(\omega, t) = -2\gamma_1\omega t + \gamma_1 \text{sen}(2\omega t)$ para simplificar os cálculos.

De maneira semelhante à que encontramos na seção anterior, a função $\psi^{(0)}(\mathbf{r}, t)$ forma um conjunto ortonormal. Logo, não há flutuação na densidade de carga, mesmo na presença de um campo de radiação:

$$\rho_{\mathbf{k}}^{(0)} = -e\psi_{\mathbf{k}}^{*(0)}(\mathbf{r}, t)\psi_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = -e. \quad (2.56)$$

Agora, vamos impor uma perturbação no sistema, na forma de um potencial local dado por

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{q} \int d\Omega e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} e^{i\Omega t} \varphi(\mathbf{q}, \Omega) + c.c. , \quad (2.57)$$

¹Uma explicação abrangente da aplicação de transformações unitárias para obter o estado de um elétron na presença de um campo externo pode ser vista na referência [38]

e expandir a nova função de onda perturbada na base dada por (2.55)

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}(t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} F(t)\right) \exp(i\gamma_0 k_x (1 - \cos(\omega t))) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \varepsilon_{\mathbf{k}} t\right). \quad (2.58)$$

A equação de movimento para os elétrons, sob ação da perturbação (2.57), é dada por

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = (H - e\varphi(\mathbf{r}, t)) \Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t), \quad (2.59)$$

onde o Hamiltoniano, H , é dado por (2.50).

Estamos interessados na flutuação da densidade de carga. Para tal, precisamos da função de onda perturbada. Assumimos uma perturbação fraca para usar a teoria da perturbação usada na seção anterior. Usando a equação (2.57) na equação de Schrödinger (2.59) com auxílio de (2.58), temos

$$\frac{\partial a_{\mathbf{k}'}(t)}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} e \exp[i\gamma_0(k_x - k'_x)(1 - \cos(\omega t))] \exp\left(\frac{i}{\hbar}(\varepsilon_{\mathbf{k}'} - \varepsilon_{\mathbf{k}})t\right) \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} \varphi(\mathbf{r}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (2.60)$$

integrando no tempo e usando a expansão dada por (2.57), temos, fazendo $\mathbf{k}' \rightarrow \mathbf{k} + \mathbf{q}$

$$a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}(t) = e \cdot \exp(-i\gamma_0 q_x) \sum_{m, \Omega} i^m J_m(q_x \gamma_0) \varphi(\mathbf{q}, \Omega) \cdot \frac{\exp\left[\frac{i}{\hbar}(\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{k}} - \hbar\Omega - m\hbar\omega)t\right]}{\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{k}} - \hbar\Omega - m\hbar\omega - i\eta} \quad (\eta \rightarrow 0^+), \quad (2.61)$$

onde usamos a função Bessel geradora [35]

$$\exp(i\alpha \cos x) = \sum_m i^m J_m(\alpha) \exp(imx), \quad (2.62)$$

$J_m(\alpha)$ sendo a função Bessel direta de ordem m e argumento α .

Temos condição de expressar, agora, a função de onda perturbada até primeira ordem [32, 34] como sendo

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = \Psi_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{r}, t) + \sum_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}(t) \Psi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{(0)}(\mathbf{r}, t). \quad (2.63)$$

Esta é a função de onda dos elétrons no plasma na presença de uma radiação externa (2.47) submetidos a uma pequena perturbação (2.57).

A flutuação na densidade de carga

$$\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = -e \Psi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}, t) \Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) - \rho_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = -e [\Psi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}, t) \Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) - 1], \quad (2.64)$$

é, então, calculada desprezando termos de ordem 2 em $\varphi(\mathbf{q}, \Omega)$, na forma

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = & -e^2 \sum_{\mathbf{q}, \Omega, m} i^m \varphi(\mathbf{q}, \Omega) J_m(q_x \gamma_0) \left\{ \frac{\exp[-i\gamma_0 q_x \cos(\omega t)] \exp[-i(\Omega + m\omega)t]}{\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{k}} - \hbar\Omega - m\hbar\omega - i\eta} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \right\} \\ & - e^2 \sum_{\mathbf{q}, \Omega, m} i^m \varphi(\mathbf{q}, \Omega) J_m(q_x \gamma_0) \left\{ \frac{(-1)^m \exp[i\gamma_0 q_x \cos(\omega t)] \exp[i(\Omega + m\omega)t]}{\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{k}} - \hbar\Omega - m\hbar\omega - i\eta} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \right\} + c.c.. \end{aligned} \quad (2.65)$$

A contribuição do conjugado complexo é obtida utilizando o mesmo método. Reescrevendo (2.65), temos

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = & -e^2 \sum_{\mathbf{q}, \Omega} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \varphi(\mathbf{q}, \Omega) \exp[-i\gamma_0 q_x \cos(\omega t)] e^{-i\Omega t} \sum_m i^m J_m(q_x \gamma_0) e^{-im\omega t} \\ & \times \left\{ \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{k}} - \hbar\Omega - m\hbar\omega - i\eta} + \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{k}} + \hbar\Omega + m\hbar\omega + i\eta} \right\} + c.c.. \end{aligned} \quad (2.66)$$

A flutuação total da densidade de carga no plasma é dada por

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} \rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t), \quad (2.67)$$

aqui estamos assumindo um plasma isotrópico, ou seja, a função de distribuição $f_{\mathbf{k}}$ é Maxwelliana² dada por $f_{\mathbf{k}} = n_0 \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_e} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2k_B T_e} - \frac{\varepsilon_\gamma}{k_B T_e}\right)$, onde k_B é a constante de Boltzmann, T_e a temperatura dos elétrons e $\varepsilon_\gamma = 2\gamma_1 \omega$ é a energia da radiação eletromagnética. Substituindo a densidade (2.66) na expressão da flutuação total de carga (2.67), temos

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e^2 \sum_{\mathbf{q}, \Omega} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{e^{i\Omega t}} \varphi(\mathbf{q}, \Omega) \exp[-i\gamma_0 q_x \cos(\omega t)] \sum_m i^m J_m(q_x \gamma_0) e^{-im\omega t} \Pi(\mathbf{q}, \Omega + m\omega) \quad (2.68)$$

onde

$$\Pi(\mathbf{q}, \Omega) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{f_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - f_{\mathbf{k}}}{\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{k}} - \hbar\Omega - i\eta} \quad (2.69)$$

é a conhecida polarizabilidade eletrônica e m corresponde ao número de fótons envolvidos no processo³. Agora, decompos a exponencial dependente do tempo $\exp[-i\gamma_0 q_x \cos(\omega t)]$ em harmônicos com o auxílio da identidade (2.62), obtendo

$$\exp[-i\gamma_0 q_x \cos(\omega t)] = \sum_{m'} i^{-m'} J_{m'}(q_x \gamma_0) e^{im'\omega t}. \quad (2.70)$$

²Para um discussão sobre a expressão da distribuição Maxwelliana, ver a referência [24]

³Note como o número inteiro m corresponde ao número de $\hbar\omega$ contribuindo à polarizabilidade

Agora, podemos escrever a flutuação total da densidade de carga

$$\rho(\mathbf{r}, t) = -e^2 \sum_{\mathbf{q}, \Omega} \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \varphi(\mathbf{q}, \Omega) \exp(-i\Omega t) \cdot \sum_{m, m'} i^{m-m'} J_m(q_x \gamma_0) J'_m(q_x \gamma_0) \exp[-i(m-m')\omega t] \cdot \Pi(\mathbf{q}, \Omega + m\omega). \quad (2.71)$$

Continuamos nosso estudo lembrando que, como visto na seção anterior, a flutuação na densidade de carga (2.71) gera um potencial induzido interno ao plasma. Calculamos esse potencial usando a equação de Poisson [27, 30]

$$\nabla^2 \varphi_{ind}(\mathbf{r}, t) = -4\pi \rho(\mathbf{r}, t). \quad (2.72)$$

Usando uma expansão de Fourier em $\varphi_{ind}(\mathbf{r}, t)$ da forma (2.57), temos o laplaciano

$$\nabla^2 \varphi_{ind}(\mathbf{r}, t) = - \sum_{\mathbf{q}, \Omega} q^2 e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\Omega t} \varphi_{ind}(\mathbf{q}, \Omega) + c.c. . \quad (2.73)$$

Vamos assumir uma radiação de alta frequência, assim, o termo $\exp[-i(m-m')\omega t]$ oscila muito rápido e, em um período do campo de radiação, esse termo pode ser desprezado. Portanto, os termos $m \neq m'$ não contribuem para o potencial induzido quando usamos o valor médio de (2.71) em um período. Então, usando a expansão (2.73) em (2.72) usando o valor médio de (2.71), obtemos

$$\varphi_{ind}(\mathbf{q}, \Omega) = \frac{4\pi e^2}{q^2} \varphi(\mathbf{q}, \Omega) \sum_m J_m^2(q_x \gamma_0) \Pi(\mathbf{q}, \Omega + m\omega). \quad (2.74)$$

O potencial local total é composto de um potencial induzido e um externo

$$\varphi(\mathbf{q}, \Omega) = \varphi_{ext}(\mathbf{q}, \Omega) + \varphi_{ind}(\mathbf{q}, \Omega), \quad (2.75)$$

e, como já vimos, pode ser obtido a partir da função dielétrica $\epsilon(\mathbf{q}, \Omega) = \langle \epsilon(\mathbf{q}, \Omega) \rangle$

$$\varphi(\mathbf{q}, \Omega) = \frac{\varphi_{ext}(\mathbf{q}, \Omega)}{\epsilon(\mathbf{q}, \Omega)}. \quad (2.76)$$

Usando esta última relação, temos

$$\epsilon(\mathbf{q}, \Omega) = 1 - \frac{\varphi_{ind}(\mathbf{q}, \Omega)}{\varphi(\mathbf{q}, \Omega)}. \quad (2.77)$$

Substituindo (2.74) na equação (2.77), temos a função dielétrica

$$\epsilon(\mathbf{q}, \Omega) = \langle \epsilon(\mathbf{q}, \Omega) \rangle = 1 - \frac{4\pi e^2}{q^2} \frac{1}{V} \sum_m J_m^2(q_x \gamma_0) \Pi(\mathbf{q}, \Omega + m\omega), \quad (2.78)$$

ou, usando a definição (2.69)

$$\epsilon(\mathbf{q}, \Omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{q^2} \frac{1}{V} \sum_m J_m^2(q_x \gamma_0) \sum_{\mathbf{k}} \frac{f_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - f_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{k}} - \hbar\Omega - m\hbar\omega - i\eta}, \quad (2.79)$$

onde V é o volume do sistema analisado.

Vemos claramente que, na ausência da radiação ($\gamma_0 = 0$), temos $J_m^2(q_x \gamma_0) = \delta_{m0}$. Logo, nesse caso,

$$\epsilon(\mathbf{q}, \Omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{q^2} \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{f_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - f_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{k}} - \hbar\Omega - i\eta}, \quad (2.80)$$

que é o resultado obtido na seção anterior para a função dielétrica na ausência de campos elétricos. Cabe salientar que as expressões obtidas até agora são válidas para qualquer intensidade de campo, qualquer densidade e temperatura de elétrons (sem violar as condições descritas no capítulo 1), desde que o potencial externo (e o conseqüente potencial local) seja fraco.

Continuando nossa discussão, tomamos o limite macroscópico, *i.e.*, fazemos o volume do sistema tender ao infinito. Assim,

$$\sum_{\mathbf{k}} \xrightarrow{V \rightarrow \infty} V \int d^3v, \quad (2.81)$$

sendo que $\mathbf{v} = \hbar\mathbf{k}/m_e$. Com essa aproximação, a equação para a função dielétrica (2.79) se escreve

$$\epsilon(\mathbf{q}, \Omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{q^2} \sum_m J_m^2(q_x \gamma_0) \int \frac{f_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - f_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{k}} - \hbar\Omega - m\hbar\omega - i\eta} dv, \quad (2.82)$$

onde, assim como na seção anterior, vamos proceder os cálculos em uma dimensão, *i. e.*, consideraremos apenas a componente da velocidade dos elétrons ao longo do eixo x .

Usamos a fórmula de Plemelj [35]

$$\frac{1}{x + i\eta} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0^+} P \frac{1}{x} i\pi\delta(x), \quad (2.83)$$

diretamente em (2.82) para obter a parte real da função dielétrica na forma

$$\epsilon_R(\mathbf{q}, \Omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{q^2} \sum_m J_m^2(q_x \gamma_0) P \int \frac{f_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - f_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{k}} - \hbar\Omega - m\hbar\omega} dv, \quad (2.84)$$

e a parte imaginária como

$$\epsilon_I(\mathbf{q}, \Omega) = 1 - i\pi \frac{4\pi e^2}{q^2} \sum_m J_m^2(q_x \gamma_0) (f_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - f_{\mathbf{k}}) \delta(\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{k}} - \hbar\Omega - m\hbar\omega) dv. \quad (2.85)$$

Em geral, não é possível separar as ondas eletromagnéticas em um plasma em ondas longitudinais e transversais. Porém, como estamos tratando de um plasma isotrópico, essa separação é possível dada a separação da função dielétrica em uma parte longitudinal e uma transversal em (1.81) [16]. Por comparação direta com a seção anterior, a função dielétrica (2.84) equivale à parte longitudinal em (1.81).

Partimos à análise da função (2.84). O denominador pode ser simplificado da mesma maneira à feita na seção anterior:

$$\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{(0)} - \epsilon_{\mathbf{k}}^{(0)} = \frac{\hbar^2(\mathbf{k} + \mathbf{q})^2}{2m_e} - \frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2m_e} = \frac{\hbar^2\mathbf{k}}{m_e} \cdot \mathbf{q} + \frac{\hbar^2\mathbf{q}^2}{2m_e}. \quad (2.86)$$

Reescrevemos, então, a parte real da função dielétrica

$$\epsilon_R(\mathbf{q}, \Omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{q^2} \sum_m J_m^2(q_x \gamma_0) P \int \frac{f_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - f_{\mathbf{k}}}{\frac{\hbar^2\mathbf{k}}{m_e} \cdot \mathbf{q} + \frac{\hbar^2\mathbf{q}^2}{2m_e} - \hbar\lambda_m} dv, \quad (2.87)$$

onde definimos $\lambda_m = \Omega + m\omega$. Tomamos, aqui o limite clássico ($\hbar \rightarrow 0$). Estando estudando o caso unidimensional, temos o limite

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{f_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - f_{\mathbf{k}}}{\frac{\hbar^2\mathbf{k}}{m_e} \cdot \mathbf{q} + \frac{\hbar^2\mathbf{q}^2}{2m_e} - \hbar\Omega} = \frac{1}{m_e} \frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial v} v - \Omega/q, \quad (2.88)$$

que nos permite escrever

$$\epsilon_R(\mathbf{q}, \Omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{m_e q^2} \sum_m J_m^2(q_x \gamma_0) P \int \frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial v} \frac{1}{v - \lambda_m/q} dv. \quad (2.89)$$

A integral pode ser resolvida por partes obtendo

$$\epsilon_R(\mathbf{q}, \Omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{m_e q^2} \sum_m J_m^2(q_x \gamma_0) P \int \frac{f_{\mathbf{k}}}{(v - \lambda_m/q)^2} dv. \quad (2.90)$$

A integral representa o valor médio de $(v - \lambda_m/q)^{-2}$, de acordo com a definição (1.48). Expandindo esse termo da mesma maneira feita na seção anterior e usando a definição da

frequência natural de plasma

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi n e^2}{m_e}, \quad (2.91)$$

temos

$$\epsilon_R(q, \Omega) = 1 - \omega_p^2 \sum_m J_m^2(q_x \gamma_0) \frac{P}{\lambda_m^2} \left(1 + \frac{2q \langle v \rangle}{\lambda_m} + \frac{3q^2 \langle v^2 \rangle}{\lambda_m^2} + \dots \right). \quad (2.92)$$

Novamente, os termos em potências ímpares de v se anulam ao tomarmos a média. A expressão final para a parte real da função dielétrica é, tomando termos de até segunda ordem em v

$$\epsilon_R(\mathbf{q}, \Omega) = 1 - \omega_p^2 \sum_m J_m^2(q_x \gamma_0) \frac{1}{\lambda_m^2} \left(1 + \frac{3q^2 \langle v^2 \rangle}{\lambda_m^2} \right) \exp\left(-\frac{\varepsilon_\gamma}{k_B T_e}\right). \quad (2.93)$$

A relação de dispersão das ondas longitudinais no plasma é, nesse caso

$$\epsilon_R(\mathbf{q}, \Omega) = 0 \quad (2.94)$$

$$1 - \omega_p^2 \sum_m J_m^2(q_x \gamma_0) \frac{1}{\lambda_m^2} \left(1 + \frac{3q^2 \langle v^2 \rangle}{\lambda_m^2} \right) \exp\left(-\frac{\varepsilon_\gamma}{k_B T_e}\right) = 0. \quad (2.95)$$

Esta equação nos fornece a frequência das oscilações coletivas Ω em função de seu número de onda \mathbf{q} . Entretanto, a equação (2.95) não possui solução analítica, sendo necessário um estudo numérico de seu comportamento. O próximo capítulo é dedicado a esse estudo e à discussão dos resultados obtidos do mesmo.

3 *Discussão Numérica e Resultados*

Neste capítulo, mostraremos os resultados dos cálculos numéricos obtidos da teoria desenvolvida nos capítulos anteriores. Alguns parâmetros foram assumidos com base no conhecimento de algumas espécies de plasmas de laboratório (plasma de descarga gasosa, especificamente). Nossos cálculos foram construídos com auxílio da linguagem de programação FORTRAN [39]. Alguns resultados da função Bessel foram testados com auxílio do *software* MAPLE 13 e todos os gráficos foram construídos e melhorados com o *software* OriginPro 8. Os códigos utilizados são relativamente simples e podem ser reproduzidos em computadores pessoais.

Nosso objetivo é partir da relação de dispersão (2.95) e obter uma curva relacionando os modos coletivos Ω a seu número de onda $q \equiv q_x$. Entretanto, não temos em mãos uma expressão explícita de $\Omega(q)$ e, assim, partimos para uma análise numérica da expressão (2.95). Nossa primeira aproximação será tomar o termo da média do quadrado da velocidade dos elétrons como aproximadamente igual ao quadrado da velocidade térmica dos elétrons

$$\langle v^2 \rangle \approx v_{th}^2 = \frac{k_B T}{m_e}, \quad (3.1)$$

como feito anteriormente. Em seguida, precisamos de um método para obter as raízes da equação (2.95). Porém, essa única equação é dependente da frequência dos modos coletivos e de seu número de onda. Logo, precisamos de um artifício para eliminar uma das dependências.

O método que utilizamos se baseia em fixar um valor inteiro positivo para o número de onda q e achar a raiz (Ω) da relação de dispersão $\epsilon_R(\Omega)_{qfixo} = 0$. Varrendo valores de q e repetindo o método, podemos traçar, finalmente, um gráfico de $\Omega(q)$. Para tal, escolhemos dois métodos de obtenção de raízes de equações não-lineares [39]: o método da bissecção e o método de Newton-Raphson. Mais adiante, veremos que não há discrepâncias entre os resultados obtidos em cada método.

A segunda aproximação que fazemos é na soma em m presente na relação de dispersão. Essa soma toma valores de m indo de $-\infty$ a $+\infty$; portanto, para os cálculos numéricos, é necessário um truncamento da soma. Note que o índice m aparece em dois momentos da soma: na ordem da função Bessel (J_m) e no fator λ_m , que cresce linearmente com m e aparece apenas em denominadores da soma em m . Logo, para valores cada vez maiores do módulo de m , os termos contendo $\frac{1}{\lambda_m}$ contribuem cada vez menos para a função dielétrica. O valor de m^1 para o qual tais termos podem ser desprezados seria, então, um valor arbitrariamente 'grande'.

Para escolher esse valor de m , analisamos o comportamento da função Bessel. Em primeiro lugar, observamos que a soma em m contém apenas termos do quadrado da função Bessel. Por outro lado, sabe-se que as soluções da equação de Bessel satisfazem à relação [35]

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x), \quad (3.2)$$

portanto

$$J_{-m}^2(x) = J_m^2(x). \quad (3.3)$$

Assim, as contribuições, para a soma em m , do quadrado das funções Bessel de ordem positiva são iguais às contribuições de ordem negativa. Logo, basta analisarmos os valores de J_m apenas com m positivo (ou negativo) para determinar o truncamento da soma.

Precisamos, aqui, estabelecer os valores das grandezas envolvidas no cálculo da função Bessel. O argumento de $J_m(q_x \gamma_0)$, na relação de dispersão, é função do número de onda q , da amplitude do campo elétrico da radiação incidente E e da frequência ω da radiação, além das constantes massa e carga do elétron ². Tomando $E = 10V/m$, uma frequência de radiação de $\omega = 3 \times 10^7 s^{-1}$ e um valor para $q = 6000m^{-1}$, usamos uma sub-rotina na linguagem FORTRAN que calcula as funções Bessel para construir a Tabela 1 ³.

Vemos que, para valores de m superiores a 20, não há mudanças perceptíveis (com uma precisão de 19 casas decimais) na soma dos quadrados das funções Bessel. Dessa forma, podemos truncar a soma na relação de dispersão em $m = \pm 20$. Para melhor ilustrar a contribuição negligenciável dos termos de ordem $m \geq 20$ no quadrado da função Bessel, traçamos o gráfico da Figura 3

¹Leia-se, aqui, o valor do módulo de m

²Lembrando que $\gamma_0 = \frac{eE}{m_e \omega^2}$.

³Esse valor para q foi escolhido como um valor médio dentre aqueles que utilizaremos para construir a curva de $\Omega(q)$

Tabela 1: Valores da função Bessel direta J_m usando $E = 10V/m$, uma frequência de radiação de $\omega = 3 \times 10^7 s^{-1}$ e um valor para $q = 6000m^{-1}$. A terceira coluna mostra a soma dos quadrados das funções bessel de ordem igual e inferior à ordem da linha correspondente.

m	$J_m(q\gamma_0)$	$\sum_m J_m^2(q\gamma_0)$
1	-0.213313E-01	0.4550228186417371035E-03
2	-0.233300E+00	0.5488400161266326904E-01
3	-0.185491E-01	0.5522806942462921143E-01
4	0.226959E+00	0.1067382916808128357E+00
5	0.134938E+00	0.1249465942382812500E+00
6	-0.134693E+00	0.1430888622999191284E+00
7	-0.250061E+00	0.2056191414594650269E+00
8	-0.121779E+00	0.2204492986202239990E+00
9	0.104342E+00	0.2313365340232849121E+00
10	0.264469E+00	0.3012803792953491211E+00
11	0.302533E+00	0.3928068280220031738E+00
12	0.252682E+00	0.4566550850868225098E+00
13	0.172595E+00	0.4864442646503448486E+00
14	0.101360E+00	0.4967180490493774414E+00
15	0.526484E-01	0.4994899034500122070E+00
16	0.246365E-01	0.5000968575477600098E+00
17	0.105221E-01	0.5002075433731079102E+00
18	0.414193E-02	0.5002247095108032227E+00
19	0.151427E-02	0.5002269744873046875E+00
20	0.517355E-03	0.5002272129058837891E+00
21	0.166029E-03	0.5002272129058837891E+00
22	0.502649E-04	0.5002272129058837891E+00
23	0.144093E-04	0.5002272129058837891E+00
24	0.392387E-05	0.5002272129058837891E+00
25	0.101791E-05	0.5002272129058837891E+00
26	0.252186E-06	0.5002272129058837891E+00
27	0.598017E-07	0.5002272129058837891E+00
28	0.135998E-07	0.5002272129058837891E+00
29	0.296640E-08	0.5002272129058837891E+00
30	0.598394E-09	0.5002272129058837891E+00

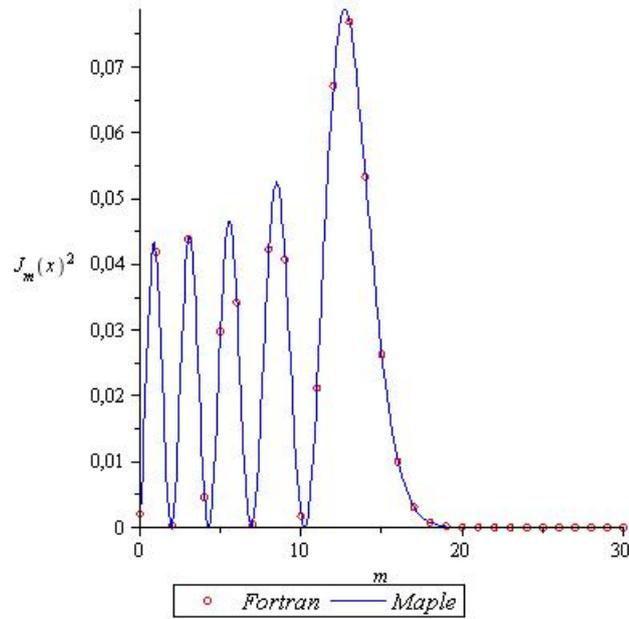


Figura 3: Gráfico do quadrado da função $J_m(q\gamma_0)$ para uma amplitude da radiação $E = 10V/m$, uma frequência de radiação de $\omega = 3 \times 10^7 s^{-1}$ e um valor para $q = 6000 m^{-1}$. A linha sólida representa a curva obtida pela biblioteca do Maple 13. Os círculos correspondem aos valores obtidos por nossa subrotina. Note que a subrotina calcula apenas valores da função Bessel direta de ordem inteira.

Podemos, agora, utilizar os métodos de obtenção de raízes de equações não-lineares para traçar a relação de dispersão $\Omega(q)$. Primeiramente, escolhemos os mesmos parâmetros utilizados para montar a Tabela 1. Assumimos, também, um plasma de descarga gasosa, com uma densidade típica da ordem de $10^{20} m^{-3}$, uma temperatura de $k_B T = 1.6 \times 10^{-19} J$ e uma frequência natural de $6 \times 10^{-11} s^{-1}$. Varrendo valores de q de 0 a $12000 m^{-1}$, utilizamos os métodos da bissecção e Newton-Raphson para resolver $\epsilon_R(\Omega)_{qfixo} = 0$, obtendo o gráfico da Figura 4.

Notamos, inicialmente, que ambos os métodos resultam na mesma curva sem qualquer discrepância perceptível. Para valores pequenos do número de onda q , os modos coletivos, ou *plasmons*, se propagam com frequência maior do que a frequência natural do plasma. Aumentando o número de onda, observa-se uma forte atenuação nos modos coletivos para a frequência de radiação escolhida (frequência essa, muito menor do que a frequência natural do plasma), sendo que o valor limite para Ω é a própria frequência natural.

Para melhor estudar a atenuação observada, variamos a frequência da radiação externa, mantendo os demais parâmetros, e obtemos a relação de dispersão para cada caso. A Figura 5 nos mostra tais casos. Podemos ver que a atenuação dos modos coletivos é maior para frequências baixas da radiação incidente. Para o caso ressonante, ou seja, para

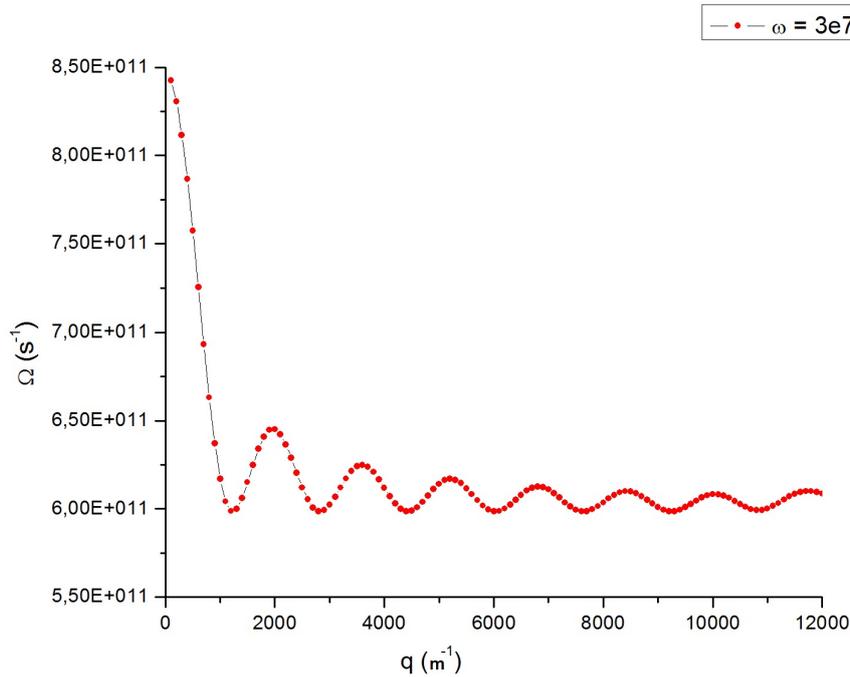


Figura 4: Relação de dispersão para um plasma de descarga gasosa na presença de um campo de radiação.

$\omega = \omega_p$, não há atenuação dos modos coletivos e Ω permanece em seu valor máximo para quaisquer valores do número de onda q . Este comportamento é explicado na referência [18] como um equilíbrio dos processos de emissão ($m > 0$) e absorção ($m < 0$) de fótons da radiação externa.

Um aspecto interessante da relação de dispersão obtida é sua dependência do número de fótons (m) envolvidos no processo, seja por absorção ou por emissão. Queremos entender como o número de fótons altera o comportamento dos plasmons. Para tal, podemos controlar esse número, numericamente, por meio do valor de truncamento da soma em (2.95). Variando o valor de truncamento de 0 a 25 (valor superior ao máximo de contribuições não-negligenciáveis) obtemos o gráfico da Figura 6.

A curva de $m = 0$ é a reprodução exata do resultado já obtido nas referências [1, 24]. Vemos, claramente, que a inclusão de termos de $m \neq 0$ altera a dispersão dos plasmons. A presença de um único fóton já impede que Ω atinja valores próximos a zero, além de tornar a curva mais suave. A curva para $m = 25$ se comporta como uma curva assintótica para a relação de dispersão, notando que os modos com baixos números de onda atingem seu valor máximo com um número pequeno de fótons no processo.

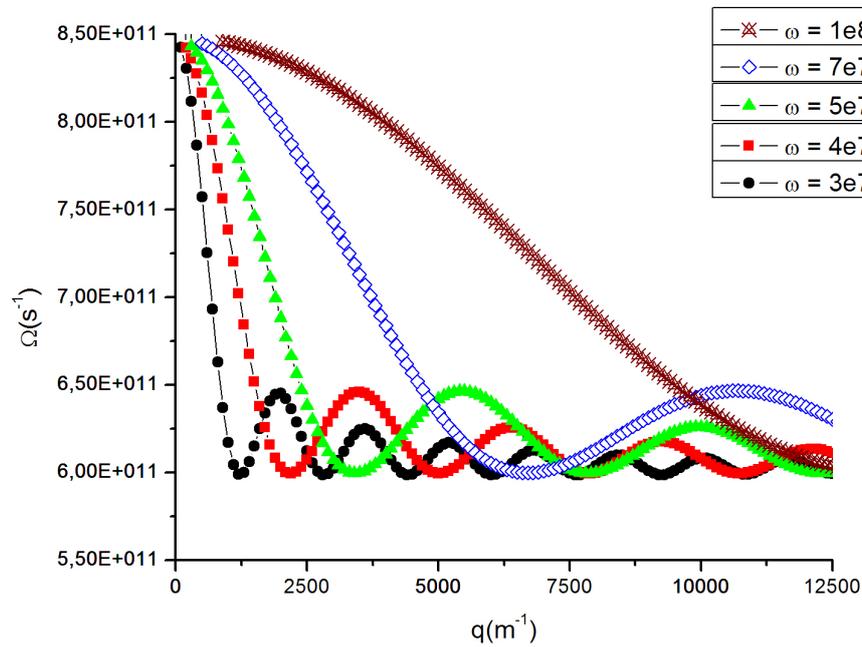


Figura 5: Relação de dispersão para várias frequências da radiação externa. Note como a atenuação dos modos é mais rápida para valores menores de ω

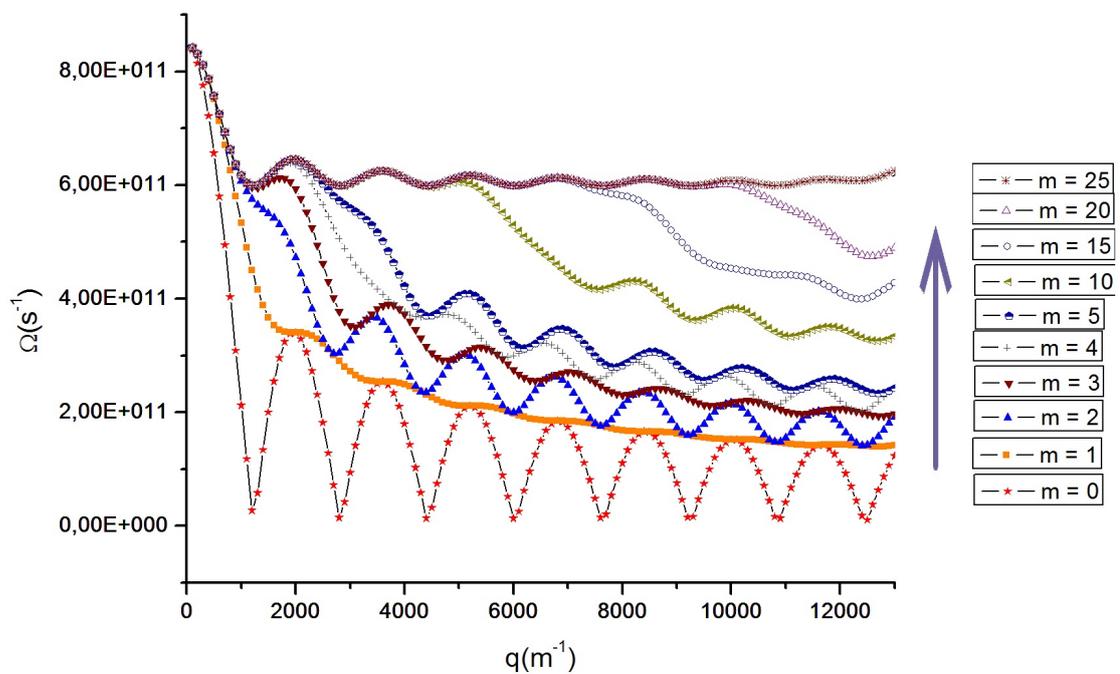


Figura 6: Relação de dispersão para vários valores do número de fótons envolvidos. A seta indica o sentido de crescimento do valor de m nas curvas. Note que, para valores baixos de m , os modos coletivos podem assumir frequências consideravelmente menores do que a frequência natural do plasma.

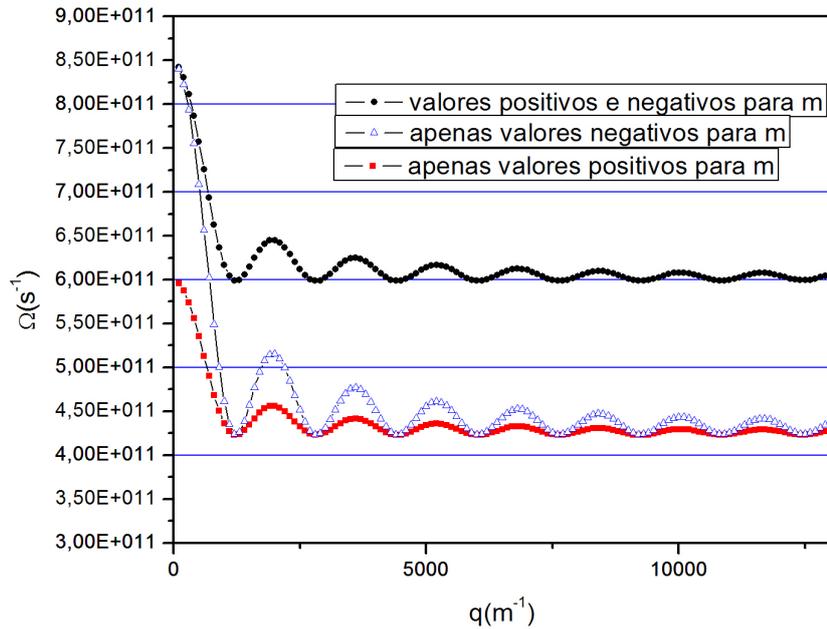


Figura 7: Relação de dispersão destacando as curvas correspondentes à emissão e absorção de fótons da radiação externa. A frequência natural do plasma é tomada como $\omega = 6 \times 10^{11} \text{s}^{-1}$

É possível fazer uma distinção entre os processos de absorção e de emissão de fótons. Basta estudarmos o comportamento da relação de dispersão para valores de m apenas positivos ou apenas negativos. Na Figura 7, vemos três curvas: uma já vista na Figura 4 sem restrições nos valores de m ⁴, uma curva para $m < 0$ e a última para $m > 0$. Quando permitimos apenas valores positivos para m , nota-se que as frequências dos modos coletivos nunca ultrapassam a frequência natural do plasma ($\omega_p = 6 \times 10^{11} \text{s}^{-1}$). Este fato está associado à emissão de fótons, uma vez que, não havendo absorção, os modos coletivos não ganham energia da radiação. Por outro lado, a curva correspondente à absorção de fótons assume valores superiores à frequência natural, porém, seu valor assintótico está abaixo dessa.

A relação de dispersão (2.95) apresenta uma forte dependência com a amplitude do campo de radiação através do termo contendo a exponencial negativa em ε_γ ⁵. Sendo assim, podemos fixar um valor de q em (2.95) e varrer valores de E para obter um gráfico de $\Omega(E)$ da mesma maneira feita anteriormente. Usando os mesmos parâmetros de um plasma de descarga gasosa, geramos, aleatoriamente, um valor para q e traçamos um

⁴Há uma restrição, obviamente, devida ao truncamento na soma.

⁵Lembrando que $\varepsilon_\gamma = 2\gamma_1\omega$, onde $\gamma_1 = \frac{e^2 E^2}{8m_e \omega^3}$.

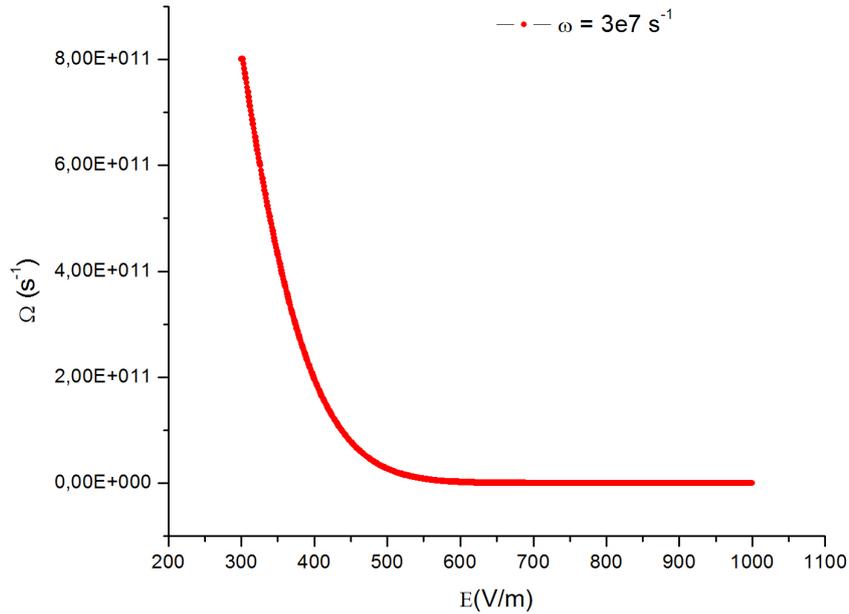


Figura 8: Curva dos modos coletivos em função da amplitude do campo de radiação incidente.

gráfico de $\Omega(E)$, representado na Figura 8, onde notamos uma forte atenuação do tipo exponencial dos modos coletivos com o aumento da amplitude da radiação incidente.

Novamente, podemos traçar este gráfico para várias frequências da radiação incidente. A Figura 9 nos mostra que a atenuação dos modos coletivos é mais lenta para valores maiores da frequência ω . Assim como foi explicado para a Figura 5, ao aumentarmos a frequência da radiação até atingir o valor de ressonância, os modos coletivos permanecem em seu valor máximo devido ao equilíbrio entre os processos de absorção e de emissão de fótons.

Apenas por ilustração, podemos mostrar a dependência dos modos coletivos com o quadrado da amplitude da radiação, ou seja, a dependência com a energia da radiação. A Figura 10 mostra essa dependência como um decaimento do tipo exponencial.

Podemos comparar nosso resultado com os resultados obtidos nas referências [1, 24]. Escolhemos, como anteriormente, apenas valores positivos para m e traçamos as curvas de $\Omega(E)$ para valores de m indo de 0 até 20 na Figura 11. Notamos que, neste caso, o valor de Ω não ultrapassa a frequência natural do plasma ($\omega_p = 6 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$). A curva de

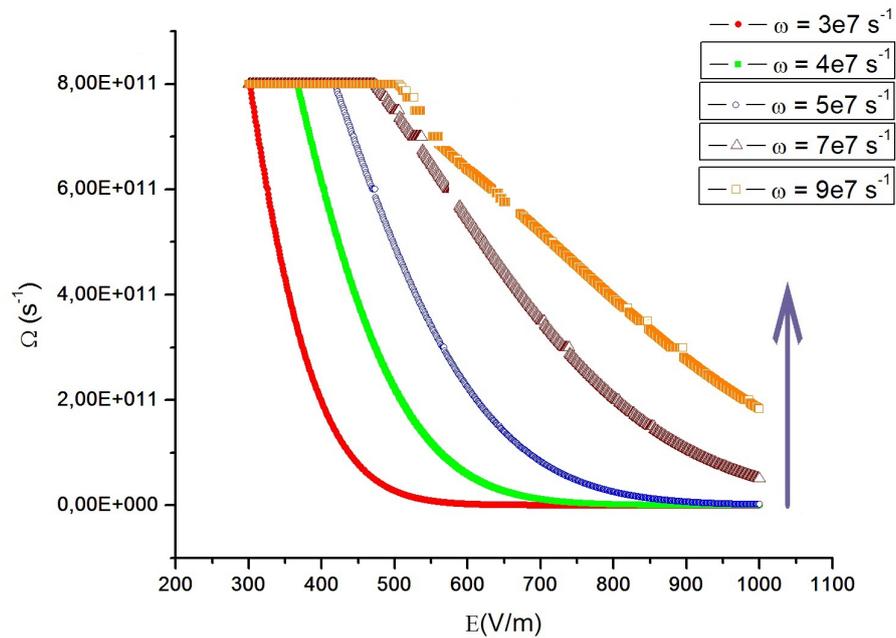


Figura 9: Curvas dos modos coletivos em função de E para várias frequências da radiação incidente. A seta indica o sentido de crescimento do valor de m nas curvas. Note como a atenuação da curva é expressivamente mais rápida para valores menores de ω .

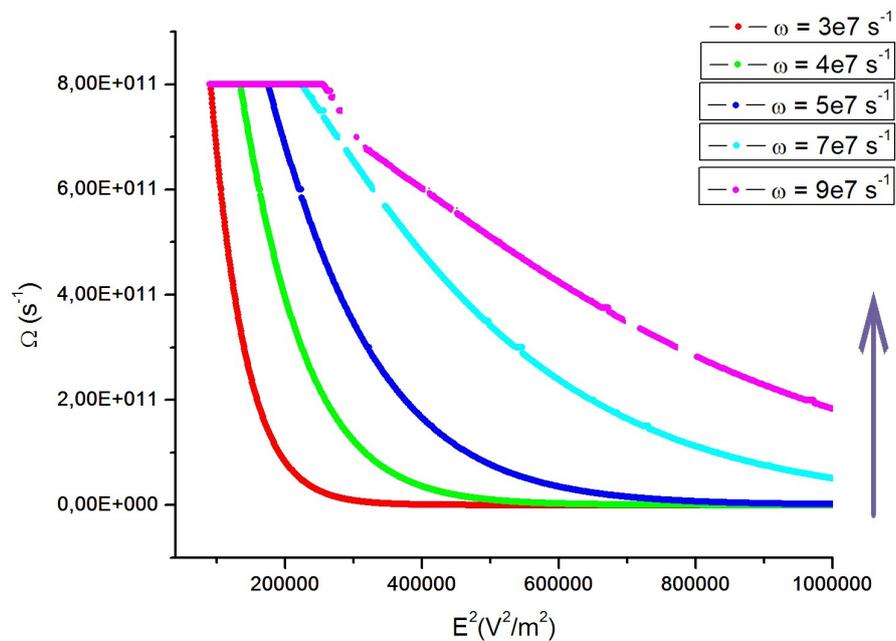


Figura 10: Dependência dos modos coletivos com a energia da radiação incidente. A seta indica o sentido de crescimento do valor de m nas curvas. Novamente traçamos as curvas para vários valores de ω notando que a atenuação é mais lenta para valores maiores da frequência da radiação

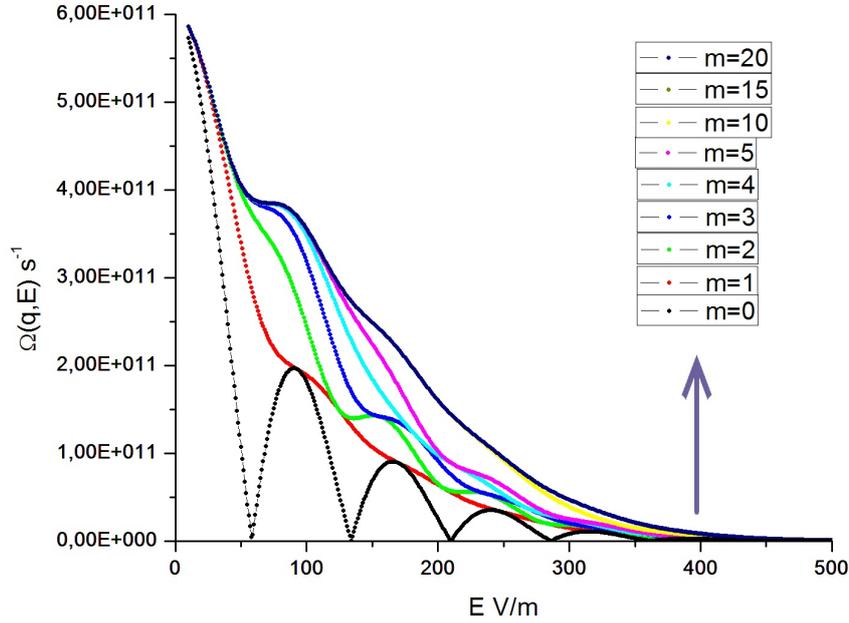


Figura 11: Curvas de $\Omega(E)$ para os vários fótons envolvidos no processo. A seta indica o sentido de crescimento do valor de m nas curvas.

$m = 20$ comporta-se como uma curva assintótica para as demais, sendo que, para valores baixos de E , os plasmons atingem sua frequência máxima com poucos fótons envolvidos no processo.

Novamente, a curva em $m = 0$ reproduz exatamente aquela das referências [1, 24]. É interessante ressaltar a importância dos valores de $m \neq 0$ para as curvas obtidas. No caso da curva da Figura 11, a presença de valores não-nulos de m elimina a oscilação de $\Omega(E)$, tornando a curva um decaimento quase-exponencial ⁶.

Nas Figuras 9 e 10, notamos algumas discontinuidades nas curvas obtidas. A saber, essas são resultado de flutuações numéricas nos compiladores utilizados e não devem ser entendidas como resultantes da teoria.

⁶Aqui usamos o termo *quase-exponencial* pois observamos algumas flutuações nas curvas descaracterizando uma exponencial pura

Conclusão

Neste trabalho, descrevemos as principais características dos plasmas macroscópicos. A partir desta descrição, procedemos ao estudo das ondas eletromagnéticas que podem se propagar em plasmas livres, tratando do caso mais simples das oscilações de Langmuir até a propagação de ondas longitudinais na presença de uma radiação externa. Esta última se torna o tópico principal desta tese. A fim de explorar a teoria, utilizamos a mecânica quântica para obter nossos principais resultados.

Primeiramente, analisamos o comportamento do plasma sob um pequeno deslocamento de uma camada de elétrons. Vimos, nesse caso, que um modo não-propagativo de ondas eletromagnéticas surge no plasma. Esse modo é descrito por uma frequência característica que depende apenas da densidade dos componentes do plasma. Essa frequência é denominada de frequência natural do plasma e o modo correspondente é o conhecido modo de Langmuir.

Em seguida, estudamos a propagação de ondas eletromagnéticas em um plasma macroscópico a partir de uma descrição hidrodinâmica. Para tal, estudamos as médias das grandezas envolvidas (densidade e velocidade dos componentes) e resolvemos as equações de Maxwell para determinar um conjunto auto-consistente de equações descrevendo o comportamento dos campos resultantes na presença de densidades de carga e de corrente no plasma. Nesse quadro, obtemos relações de dispersão para as ondas longitudinais e transversais se propagando no meio. Essas relações são obtidas sabendo-se, exatamente, a função dielétrica do sistema.

Partindo para uma descrição mais geral, introduzimos o conceito de função de distribuição para iniciar um estudo cinético das ondas em um plasma. Resolvendo as equações de Maxwell de maneira semelhante à feita na descrição hidrodinâmica, chegamos a uma expressão geral para a dispersão das ondas eletromagnéticas no plasma, novamente, dependente da função dielétrica do sistema (neste caso, tensor dielétrico). Assumimos uma distribuição isotrópica das partículas para construir as relações de dispersão para ondas longitudinais e transversais. Chegamos à mesma relação de dispersão para ondas longitudinais obtida pela descrição hidrodinâmica, o que aponta a consistência da teoria.

Avançando na teoria, estudamos a propagação de ondas eletromagnéticas em um plasma macroscópico utilizando o formalismo da Mecânica Quântica. Assumimos uma perturbação pequena no potencial local do plasma, o que gera uma flutuação na densidade de elétrons (íons foram mantidos fixos). Para obter essa, resolvemos a equação de Schrödinger para o caso estudado usando a teoria da perturbação. Com a flutuação de cargas, partimos à resolução da equação de Poisson para obter o potencial induzido pela perturbação. A partir desse, calculamos a função dielétrica do plasma. Notamos, novamente, que as funções dielétricas obtidas pela teoria hidrodinâmica, pela teoria cinética e pela teoria quântica são idênticas. Nesse quadro, obtemos a relação de dispersão para as frequências das oscilações coletivas longitudinais do plasma estudado (na ausência de campos externos), resultado bem conhecido e explorado pela teoria clássica.

O próximo passo foi introduzir uma radiação externa ao plasma e estudar os modos coletivos resultantes. Utilizamos uma radiação linearmente polarizada ao longo do eixo \mathbf{x} . De maneira semelhante à feita no caso do plasma na ausência de radiação externa, procuramos a flutuação na densidade de cargas através da solução da equação de Schrödinger. Para tal, utilizamos uma transformação unitária, uma vez que, no Hamiltoniano, havia um termo de potencial dependente do tempo. Uma vez resolvida a equação de Schrödinger pela teoria da perturbação, obtemos a flutuação na densidade de cargas e, com esta, o potencial induzido por meio da equação de Poisson. Com esse, obtemos a função dielétrica do sistema. Tratando-se de um plasma macroscópico, tomamos o limite clássico ($\hbar \rightarrow 0$). Obtemos, feitas essas aproximações, uma relação implícita entre as frequências dos modos coletivos e seus números de onda.

Para obter um gráfico da relação de dispersão do sistema na presença do campo de radiação, usamos um método numérico de resolução da equação com a dependência implícita de $\Omega(q)$. Nos cálculos, assumimos um plasma morno, portanto não desprezamos efeitos térmicos. Uma dificuldade encontrada foi a presença de uma soma infinita na relação de dispersão. A partir de um estudo do comportamento dos termos envolvidos, conseguimos truncar a soma para um valor finito de termos. Finalmente, plotamos a curva da relação de dispersão. Notamos uma atenuação nos modos coletivos com o crescimento do número de onda. O valor limite para os modos foi observado como sendo o próprio valor da frequência natural do plasma.

Plotando a relação de dispersão para várias frequências da radiação incidente, percebemos que a atenuação dos modos coletivos é mais forte para frequências menores da radiação externa. No caso de ressonância, esperamos uma ausência de atenuação, con-

forme previsto por estudos anteriores [17, 18].

Exploramos a dependência da dispersão com o número m de fótons envolvidos, notando que um único fóton varia de forma visível o comportamento dos plasmons. A curva obtida para $m = 0$ é a reprodução exata do resultado das referências [1] e [24]. Conseguimos plotar as relações de dispersão para os casos isolados de processos apenas de emissão e apenas de absorção de fótons. As curvas resultantes mostraram um aspecto interessante: no caso de emissão de fótons, a frequência dos modos coletivos nunca ultrapassa a frequência natural do plasma, conforme esperado; já para o processo de absorção, os modos ultrapassam essa frequência, mas seu valor assintótico coincide com o valor observado para o processo de emissão.

Na relação de dispersão implícita obtida, existe um termo fortemente dependente da amplitude do campo de radiação. Visto isso, plotamos curvas para a frequência dos modos coletivos em função da amplitude E do campo de radiação, dado um valor para o número de onda. Observamos uma atenuação do tipo exponencial desses modos com E . Novamente, a atenuação é tanto menor quanto maior for a frequência da radiação incidente. Conseguimos essas curvas, também, controlando o número de fótons envolvidos, obtendo o resultado já conhecido para $m = 0$ [1, 24].

Como extensão deste estudo, estamos interessados na condutividade elétrica de alta frequência do plasma não-magnetizado, relacionada à função dielétrica implicitamente obtida. Queremos estudar, também, uma relação de dispersão de ondas transversais para o caso de uma radiação externa no plasma macroscópicos, utilizando a teoria quântica. Trabalhos em andamento estudam os modos coletivos de um plasma magnetizado na presença de uma radiação circularmente polarizada. Futuramente, estudaremos o comportamento da equação de Vlasov não-linearizada e/ou de uma perturbação não-linear na função de distribuição dos componentes do plasma. Esse estudo será feito dentro do formalismo da mecânica quântica.

Referências

- [1] GUIMARÃES, A. F. *Estudo, utilizando a mecânica quântica, das propriedades dielétricas e do efeito da blindagem dinâmica na taxa de aquecimento de plasmas macroscópicos*. Tese (Tese de Doutorado) — Instituto de Física, UnB, Brasília, 2006.
- [2] LANGMUIR, I. Scattering of electrons in ionized gases. *Phys. Rev.*, **26**, 585, 1925.
- [3] TONKS, L.; LANGMUIR, I. Oscillations in ionized gases. *Phys. Rev.*, **33**, 195-211, 1929.
- [4] TONKS, L.; LANGMUIR, I. A general theory of the plasma of an arc. *Phys. Rev.*, **34**, 876-922, 1929.
- [5] ALFVÉN, H. On the existence of electromagnetic-hydrodynamic waves. *Arkiv f. Mat., Astron. o. Fys.*, **B29**, 1-7, 1925.
- [6] LANDAU, L. D. On the vibrations of the electronic plasma. *J. Phys. (U.S.S.R.)*, **10**, 25, 1946.
- [7] DAWSON, J. On landau damping. *Phys. of Fluids*, **7**, 869-74, 1961.
- [8] GROSS, E. P. Plasma oscillations in a static magnetic field. *Phys. Rev.*, **82**, 232-42, 1951.
- [9] SEN, H. K. Solar enhanced radiation and plasma oscillations. *Phys. Rev.*, **88**, 816-22, 1952.
- [10] BERNSTEIN, I. B. Waves in a plasma in a magnetic field. *Phys. Rev.*, **109**, 10-21, 1958.
- [11] GRUBER, S.; BEKEFI, G. Excitation of longitudinal waves near electron-cyclotron harmonics. *Phys. of Fluids*, **11**, 122-33, 1968.
- [12] PINES, D.; SCHRIEFFER, J. R. Approach to equilibrium of electrons, plasmons, and phonons in quantum and classical plasmas. *Phys. Rev.*, **125**, 804-12, 1962.
- [13] WYLD, H. W.; PINES, D. Kinetic equation for plasma. *Phys. Rev.*, **127**, 1851-55, 1962.
- [14] AKHIEZER, A. I. et al. *Collective Oscillations in a Plasma*. Oxford . London . Edinburgh . New York . Toronto . Sydney . Paris . Braunschweig: Pergamon Press, 1967.
- [15] WALTERS, G. M.; HARRIS, E. G. Quantum-mechanical theory of non-linear plasma phenomena in a strong magnetic field. *Phys. of Fluids*, **11**, 112-22, 1969.

- [16] HARRIS, E. G. Classical plasma phenomena from a quantum mechanical viewpoint. *Advances in Plasma Physics*, **3**, 157, A. Simon and W. B. Thompson - Interscience Publisher, 1969.
- [17] AMATO, M. A.; MIRANDA, L. C. M. Plasma wave instability in the field of an intense electromagnetic wave. *The Phys. of Fluids*, **20**, 1031-32, 1977.
- [18] AMATO, M. A. Instability of plasma waves in an electromagnetic field. *IL NUOVO CIMENTO*, **7**, 767-70, 1986.
- [19] TAGUCHI, T.; JR, T. M. A.; MILCHBERG, H. M. Resonant heating of a cluster plasma by intense laser light. *Phys. Rev. Lett.*, V. 92 **20**, 205003, 2004.
- [20] HAZAK, G. et al. Inverse bremsstrahlung in cold dense plasmas. *Phys. of Plasmas* **9**, 345-57, 2002.
- [21] SHVETS, G.; FISCH, N. J.; RAX, J. M. Magnetic field generation through momentum exchange between circularly polarized radiation and charged particles. *Phys. Rev. E*, **65**, 046403, 2002.
- [22] ZHANG, C. Dynamic screening and collective excitation of an electron gas under intense terahertz radiation. *Phys. Rev. B*, **65**, 153107, 2002.
- [23] MIRANDA, D. F. et al. Screening breakdown in a plasma by two laser fields and strong dc magnetic field. *Contrib. Plasma Phys.*, **45**, No. 1 22-31, 2005.
- [24] GUIMARÃES, A. F. et al. Suppression of the plasma high-frequency electrical conductivity under a radiation field. *J. of Physics A: Math. and Theor.*, **40**, 15131-41, 2007.
- [25] CHEN, F. F. *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*. New York and London: Plenum Press, 1985.
- [26] BITTENCOURT, J. A. *Fundamentals of plasma physics - 3rd Edition*. New York: Springer, 2004.
- [27] JACKSON, J. D. *Classical Electrodynamics*. USA: John Wiley and Sons, Inc., 1999.
- [28] AKHIEZER, A. I. et al. *Plasma Electrodynamics. Volume 1: Linear Theory*. Oxford: Pergamon Press, 1975.
- [29] KLIMONTOVICH, Y. L. *The Statistical Theory of Non-Equilibrium Processes in a Plasma*. Oxford: Pergamon Press, 1967.
- [30] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Electrodynamics of Continuous Media*. Oxford: Pergamon Press, 1960.
- [31] GERTSENSHTEIN, M. E. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **23**, 669, 1952.
- [32] SAKURAI, J. J. *Modern Quantum Mechanics*. Massachusetts . California . New York . Ontario . Wokingham . Amsterdam . Bonn . Sydney . Singapore . Tokyo . Madrid . San Juan . Milan . Paris: Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

- [33] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Quantum Electrodynamics*. Oxford: Pergamon Press, 1981.
- [34] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Quantum Mechanics (Non-Relativistic Theory)*. Oxford: Pergamon Press, 1981.
- [35] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of Mathematical Functions, 10th Edition*. [S.l.: s.n.], 1972.
- [36] FONSECA, A. L. A.; NUNES, O. A. C.; ARAGÃO, F. R. F. *Phys. Rev. A*, **38**, 4732, 1988.
- [37] FONSECA, A. L. A.; NUNES, O. A. C. *Phys. Lett. A*, **155**, 159, 1988.
- [38] GALVÃO, R. M. O.; MIRANDA, L. C. M. Quantum theory of an electron in external fields using unitary transformations. *Am. J. of Phys.*, **51** (8), 729-33, 1983.
- [39] PRESS, W. H. et al. *Numerical Recipes in FORTRAN 77: The Art of Scientific Computing 2nd Edition*. London: Cambridge University Press, 1989.

APÊNDICE A – Subrotina para cálculo da função Bessel direta

Uma das principais dificuldades em obter uma relação de dispersão do tipo $\Omega(q)$, a partir da equação (2.95), está em calcular a função Bessel direta numericamente. O nosso objetivo, neste trabalho, é resolver tal problema usando a linguagem FORTRAN 77-95, portanto, a função Bessel deve ser obtida de uma subrotina de elaboração própria (queremos evitar o uso de bibliotecas externas para poder controlar a precisão da função Bessel numérica).

Partimos de uma relação de recorrência característica da função Bessel direta [35]:

$$J_{n-1}(x) = -J_{n+1}(x) + \frac{2n}{x}J_n(x). \quad (\text{A.1})$$

Sabe-se que a função Bessel direta ($J_n(x)$) decai com o aumento de sua ordem (n) para argumentos (x) pequenos. Para melhor enxergar isso, veja a Figura 12, onde plotamos seis curvas correspondentes às funções Bessel de ordens 0 a 5.

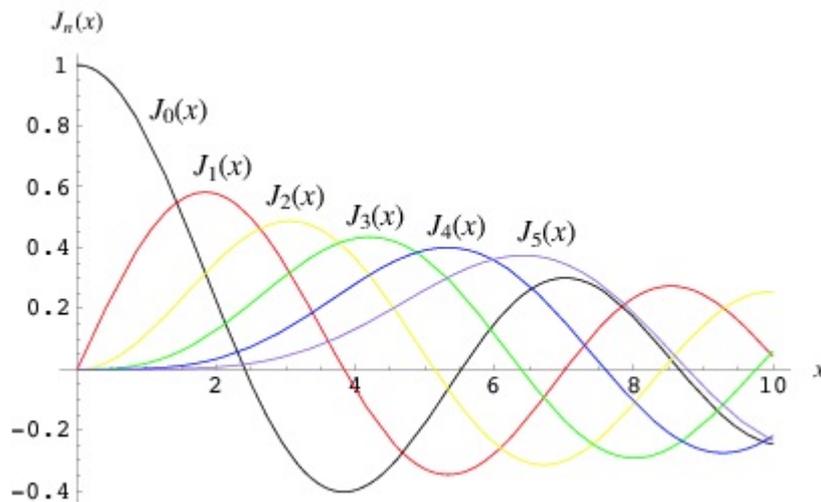


Figura 12: Função Bessel direta. Gráfico mostra seis ordens da função Bessel.

Da figura, podemos identificar que $J_n(x)$ se aproxima de zero para ordens muito grandes. Isto é verdade para qualquer valor do argumento, dada uma boa escolha do valor "grande" da ordem. Logo, podemos fixar um valor grande n_{max} para n , tal que $J_{n_{max}} = 0$. Uma segunda aproximação será escolher um valor finito próximo de zero para a função Bessel de ordem $n_{max} - 1$. Assim, podemos usar a relação (A.1) para obter todas as ordens menores do que n_{max} da função Bessel.

Dadas essas condições, podemos construir uma subrotina simples para obtenção de funções Bessel diretas para, praticamente, qualquer argumento (basta uma escolha apropriada de n_{max}). Entretanto, para evitar problemas de convergência de nossa subrotina, escolhemos uma segunda relação envolvendo as funções Bessel, a saber, um teorema de adição de funções Bessel diretas [35]

$$1 = J_0^2(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_k^2(x). \quad (\text{A.2})$$

Então, para garantir uma melhor convergência das funções obtidas pela equação (A.1), realizamos a soma das ordens da função de Bessel, com os resultados obtidos pela relação de recorrência (chamamos estes de RI), explicitada em (A.2) e a chamamos de SUMT. O resultado final, que denominamos de SI, será o valor de RI multiplicado por $\frac{1}{SUMT}$.

Esse processo nos dá um código simples em linguagem FORTRAN, com boa convergência, para o cálculo de funções Bessel diretas. Explicitamente, a subrotina que construímos é:

C-----
 C Subrotina que calcula as funções de bessel de ordem 1 a mdo.

```

SUBROUTINE BESSEL(MDO,X,SI)
DIMENSION RI(1000), SI(1000), SUMB(1000)
REAL*8 X
M=MDO
MM=M+1
RI(MM)=0.
RI(M)=1.0E-25
DO 1 NN=2,MDO
  N=(MDO+2)-NN
  I=N-1
```

```

      II=N+1
C-----
1      RI(I)=-RI(II)+2*(I)*RI(N)/X
C      Jn-1(x) = -Jn+1(x) + (2n/x)Jn(x)
C-----

      SUM=0.
      DO 5 K=2,(MDO+1)/2
          SUM=SUM+2*RI((2*K)-1)
5      SUMT=RI(1)+SUM
      DO 6 L=1,MDO+1
6      SI(L)=RI(L)*(1/SUMT)

      RETURN
      END
C-----

```

Os parâmetros de entrada MDO e X se referem à n_{max} e o argumento da função Bessel, respectivamente. O único parâmetro de saída, SI, é o vetor contendo todas as funções Bessel de ordem 0 à $MDO - 1$ ¹. O programa principal usado na construção da Tabela 1 foi construído apenas somando os quadrados das funções obtidas pela subrotina BESSEL. O programa principal é:

```

C BESSEL FUNCTION
C BACKWARD RECURSION
C   calcula a função de bessel direta - J
C   mdo - refere-se à ordem de J

      PROGRAM SOMA_BESSEL
      DIMENSION SI1(1000), SUMB(1000)
      REAL*8 X1
      INTEGER B,MDO1
      READ (*,100) MDO1,X1
100  FORMAT(I2,F5.2)
      CALL BESSEL(MDO1,X1,SI1)
C-----
C Comando de soma dos quadrados das funções de bessel.

```

¹Note que, na subrotina BESSEL, a função SI(1) corresponde a $J_0(x)$

```

DO B=2,MD01
  SUMB(1)= SI1(1)*SI1(1)
  SUMB(B)= SUMB(B-1) + (SI1(B)*SI1(B))
ENDDO

C-----
  OPEN(20,FILE='RESUL.DAT',STATUS='UNKNOWN')
C Cada linha da terceira coluna da tabela se refere à soma de todas as funções
C de ordem menor ou igual à sua própria ordem.
  WRITE(20,110) (L,SI1(L),SUMB(L),L=1,MD01)
110  FORMAT(I2,E14.6,2x,E25.19)
  CLOSE(20)
END

```

Pelas aproximações usadas na construção do programa, nota-se que a precisão desse está diretamente relacionada com o valor de n_{max} . Para testar nossa subrotina, plotamos a ordem zero da função Bessel direta obtida para dois valores distintos de n_{max} . Primeiro, escolhemos $n_{max} = 25$ e obtemos o gráfico da Figura 13.

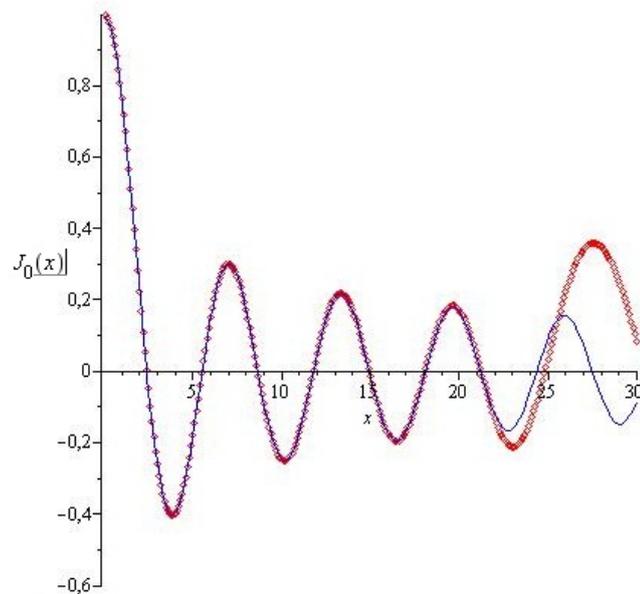


Figura 13: Gráfico de $J_0(x)$ para $n_{max} = 25$. A linha pontilhada corresponde aos valores obtidos pela subrotina BESSEL. A linha sólida corresponde aos valores dados pela biblioteca do programa Maple 13.

Em seguida, repetimos a plotagem para $n_{max} = 40$, obtendo o gráfico da Figura 14.

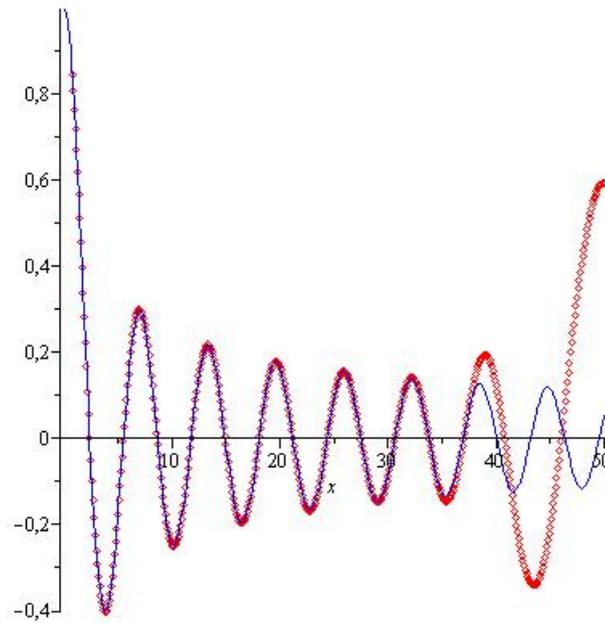


Figura 14: Gráfico de $J_0(x)$ para $n_{max} = 40$. Novamente, a linha pontilhada corresponde aos valores obtidos a partir da subrotina BESSEL; e a linha sólida corresponde aos valores obtidos pela biblioteca do programa Maple 13.

É fácil notar que a curva correspondente a $n_{max} = 40$ é mais precisa do que a correspondente a $n_{max} = 25$.

APÊNDICE B – Método numérico para resolução da relação de dispersão (2.95)

Como comentamos no texto, as nossas curvas de $\Omega(q)$ só podem ser obtidas por um método numérico, uma vez que a relação de dispersão (2.95) obtida não tem solução analítica.

As aproximações a serem usadas são aquelas descritas no início do Capítulo 3. O primeiro passo do nosso método consiste em fixar valores de q , obtendo

$$\epsilon_R(q, \Omega) \longrightarrow \epsilon_R(\Omega)_{qfixo}. \quad (\text{B.1})$$

Feito isto, basta escolhermos um método de obtenção de raízes de equações não-lineares para resolver

$$\epsilon_R(\Omega)_{qfixo} = 0, \quad (\text{B.2})$$

e obter, assim, um valor de Ω correspondente ao q fixado. Para construir a curva, repetimos o procedimento para vários valores de q , resultando em um conjunto de pontos (q, Ω) . Então, uma limitação do nosso método é que a curva não será contínua, e sim uma sequência de pontos igualmente espaçados em q .

A próxima dificuldade encontrada está na soma infinita em m . Vimos que essa soma pode, sem perdas significativas, ser truncada para um valor de m suficientemente grande. Este valor, para um número de onda q na região em que estamos interessados, é em torno de 20, como visto no Capítulo 3.

B.1 Método da bissecção

Tendo feito essas aproximações, podemos partir para a escolha do método de obtenção das raízes. Primeiro escolhemos um método simples: o método da bissecção, que se baseia

no teorema do valor médio, a saber

Dada uma função contínua f , dizemos que há pelo menos uma raiz de f no intervalo (a, b) se $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais opostos.

Para uma função não contínua, em vez de uma raiz, podemos ter uma descontinuidade do tipo degrau cruzando o zero. Para todo propósito numérico, isso pode ser tomado como uma raiz, uma vez que o comportamento é o mesmo esperado de uma função contínua cruzando o zero. Uma vez conhecido o intervalo (a, b) que contém a raiz ¹, podemos tomar o valor intermediário do intervalo (c , por exemplo) e analisar o sinal da função nesse ponto ($f(c)$). Usamos esse valor intermediário c para substituir um dos extremos do intervalo (a ou b), de modo a que o novo intervalo ainda contenha a raiz de f . Repetimos o procedimento várias vezes sendo que, a cada iteração, o intervalo contendo a raiz é cortado pela metade. Após n iterações, sabemos que a raiz está contida em um intervalo de tamanho ε_n . Logo, na próxima iteração a raiz estará contida em um intervalo

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n}{2}. \quad (\text{B.3})$$

Dessa maneira, podemos determinar o número de iterações necessárias para obtermos uma precisão ε da solução

$$n = \log_2 \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}, \quad (\text{B.4})$$

onde ε_0 é o tamanho inicial do intervalo contendo a raiz.

Vemos, então, que o código para tal método é de simples construção. Baseados no código fornecido pela referência [39], construímos um código para o método da bissecção como uma função em FORTRAN 77-95. Tal função tem como parâmetros de entrada o número de onda q fixado, o valor de truncamento da soma em m (chamado de MDO2 no código), os valores $x1$ e $x2$ correspondentes ao intervalo (a, b) e a precisão ε desejada. A função fica, assim, construída

```

FUNCTION rtbis(q,MD02,x1,x2,xacc)
REAL x1,x2,xacc
REAL rtbis
REAL dx,f,fmid,xmid
MAXIT=10000
fmid=funcd(MD02,q,x2)

```

¹Podemos sempre obter esse intervalo analisando o comportamento do sinal da função. Se, em dado intervalo, a função muda de sinal, então nesse intervalo é esperada a existência de uma raiz.

```

f=funcd(MD02,q,x1)
if (f*fmid .goe. 0.) call nrerror('erro')
if (f*fmid .ge. 0.) write(*,*) 'erro'
if (f .lt. 0.) then
    rtbis=x1
    dx=x2-x1
else
    rtbis=x2
    dx=x1-x2
endif
do j=1,MAXIT
    dx=dx*0.5
    xmid=rtbis+dx
    fmid=funcd(MD02,q,xmid)
    if (fmid .le. 0.) rtbis=xmid
    if (abs(dx) .lt. xacc .or. fmid .eq. 0.) RETURN
enddo
END

```

Aqui, a função funcd corresponde à nossa função dielétrica $\epsilon_R(q, \Omega)$ e é dada por

```

function funcd(MD02,q,0)

REAL ME,WPE,P,W,KT,ecamp
CC WPE=freq. natural, W=freq. da radiacao, ecamp=int. do campo
PARAMETER(WPE=6.E11, W=6.e11, KT=1.6E-19, ME=9.109e-31, ecamp=10.,
& e=1.602e-19)
REAL FN,XX,TER2,0,SI2,SI
dimension SI2(100)
INTEGER MD02,q,MD03
C----- Ordem maxima da funcao de bessel -----
MD03=30
C-----
GZERO=(e*ecamp)/(ME*(W**2))
CC Energia da radiação
EG=((e**2)*(ecamp**2))/(4*ME*(W**2))

```

```

P=exp(-EG/(KT))
CC  Argumento da Bessel
    XX=q*(GZERO)
    CALL BESSEL(MD03,XX,SI2)
    DO L=1,MD03
        bess=SI2(L)
    ENDDO
    TER2=0.
    DO M=-MD02,MD02
        IF (M.EQ.0) GO TO 10
        TER2 = TER2-((SI2(abs(M))**2)*P/(((M-1)*W + 0)
&**2)) * (1+3*q*(KT/ME)/((M-1)*W + 0)**2)
10    CONTINUE
    ENDDO
    TER2=(WPE**2)*TER2
    funcd=1+TER2
    END

```

Utilizando essas funções, o programa principal para obtenção de $\Omega(q)$ (chamada simplesmente de root) é extremamente simples

```

program testartsafe
INTEGER MDO,q
REAL XX1,XX2,ACC,RTSAFE
open (unit=20,file='ress.dat',status='unknown')
WRITE(*,*)'INFORME A ORDEM DA BESSEL (M=1 -> m=0)'
READ(*,*) MDO
WRITE(*,*)'INFORME OS LIMITES DE OMEGA'
READ(*,*) XX1, XX2
WRITE(*,*) 'INFORME A PRECISAO'
READ(*,*) ACC
DO q=100,20000,100
    root=rtbis(q,MDO,XX1,XX2,ACC)
    WRITE(20,*) q, root
ENDDO
END

```

Note que os valores de q são varridos de 10^2 a 2×10^4 com intervalos de 10^2 . Não tomamos $q = 0$ para evitar uma divisão por zero na relação de recorrência da subrotina BESSEL. Para construir as curvas apresentadas no Capítulo 3, tomamos um precisão $ACC = 1$, equivalente a 10^{-11} da ordem de grandeza das frequências calculadas.

B.2 Método de Newton-Raphson

Para testar nossos resultados, usamos outro método de resolução da equação (B.2). Escolhemos um método com boa convergência dos resultados: o método de *Newton-Raphson*.

Para encontrar a raiz de uma função $f(x)$ usando Newton-Raphson, precisamos conhecer, além da própria função, sua derivada $f'(x)$ em pontos arbitrários. Este método surge de uma simples ideia geométrica: conhecendo o valor de f e de f' em um ponto x_i , podemos estender a linha tangente ao ponto x_i até cruzar o zero de f . Determinamos o próximo ponto da iteração x_{i+1} na abscissa do ponto de cruzamento da linha tangente com o zero de f (Ver a Figura 15). Geometricamente, esse é o método de Newton-Raphson.

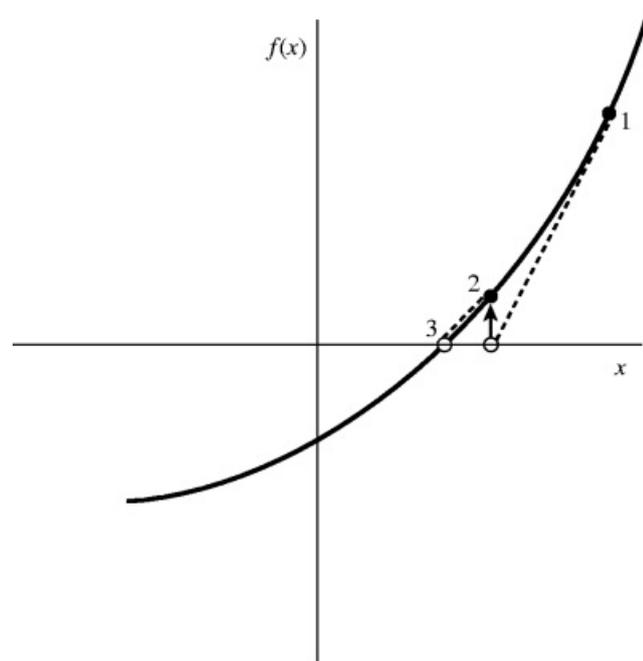


Figura 15: Ilustração do método de Newton-Raphson. A derivada é extrapolada para encontrar a próxima estimativa da raiz.

Para a construção do código, notamos que o método resulta de uma expansão em

séries de Taylor de $f(x)$ em torno de um ponto em sua vizinhança. Seja

$$f(x + \delta) \approx f(x) + f'(x)\delta + \frac{f''(x)}{2}\delta^2 + \dots \quad (\text{B.5})$$

Se δ é pequeno o suficiente e $f(x)$, uma função bem comportada, podemos usar apenas os termos lineares em δ . Logo, a condição $f(x + \delta) = 0$ nos fornece

$$\delta = -\frac{f(x)}{f'(x)}. \quad (\text{B.6})$$

A uma distância ε de x , temos

$$\begin{aligned} f(x + \varepsilon) &= f(x) + f'(x)\varepsilon + \frac{f''(x)}{2}\varepsilon^2 + \dots \\ f'(x + \varepsilon) &= f'(x) + f''(x)\varepsilon + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Usando (B.6), sabemos que

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \quad (\text{B.8})$$

logo

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}. \quad (\text{B.9})$$

Assim, se uma solução tentativa x_i difere da raiz por ε_i , podemos usar (B.7) para expressar $f(x_i)$ e $f'(x_i)$ em termos de ε_i e das derivadas da própria raiz. Isto resulta em uma relação de recorrência para os desvios das soluções tentativas da forma

$$\varepsilon_{i+1} = -\varepsilon_i^2 \frac{f''(x)}{2f'(x)}. \quad (\text{B.10})$$

Mostramos, então, que o método de Newton-Raphson tem convergência quadrática. Portanto, é bastante eficiente para funções cujas derivadas podem ser avaliadas facilmente (que é, felizmente, o caso de (2.95)).

Baseados no código da referência [39], construímos uma sub-rotina em linguagem FORTRAN para o método descrito acima. Precisamos, como parâmetros de entrada, do número de onda q fixado, do valor de truncamento de m (MDO2), dos limites x_1 e x_2 do intervalo contendo a raiz e da precisão desejada (x_{acc}); o único valor de saída da sub-rotina é a estimativa final da raiz. A sub-rotina fica assim construída

Subroutine `rtsafe1(q,MDO2,x1,x2,xacc,rtsafe)`

```

Real rtsafe,x1,x2,xacc,q
Real df,dx,dxold,f,fh,fl,temp,xh
Integer MAXIT,j
Parameter (MAXIT=1000000)

CALL AFUNCD (MDO2,Q,X1,FL,DF)
CALL AFUNCD (MDO2,Q,X2,FH,DF)
write(*,*) 'aqui!!!'
if ((fl.gt.0..and.fh.gt.0).or.(fl.lt.0..and.fh.lt.0)) pause
if (fl.eq.0.) then
    rtsafe=x1
    return
else if (fh.eq.0.) then
    rtsafe=x2
    return
else if (fl.lt.0.) then
    xl=x1
    xh=x2
else
    xh=x1
    xl=x2
endif
rtsafe=0.5*(x1+x2)
dxold=abs(x2-x1)
dx=dxold
CALL AFUNCD(MDO2,Q,RTSAFE,F,DF)
do j=1,MAXIT
a1=((rtsafe-xh)*df-f)*((rtsafe-xl)*df-f)
a2=abs(2.0*f)
a3=abs(dxold+df)
    if(a1.gt.0..or.a2.gt.a3) then
        dxold=dx
        dx=0.5*(xh-xl)
        rtsafe=xl+dx
        if (xl.eq.rtsafe) return

```

```

        write(*,*)'chegou'
    else
        dxold=dx
        dx=f/df
        temp=rtsafe
        rtsafe=rtsafe-dx
        if (temp.eq.rtsafe) return
    endif
    if (abs(dx).lt.xacc) return
    CALL AFUNCD(MDO2,Q,RTSAFE,F,DF)
    if (f.lt.0) then
        xl=rtsafe
    else
        xh=rtsafe
    endif
enddo
return
END

```

A sub-rotina `afuncd` deve retornar o valor da função (FN) e de sua derivada (DF) em um ponto dado como parâmetro de entrada (O). Os valores de MDO2 e de q também devem ser parâmetros de entrada para `afuncd`. É possível obter a derivada de (2.95) analiticamente. Portanto, a sub-rotina `afuncd` é construída da seguinte forma

```

SUBROUTINE AFUNCD(MDO2,q,0,FN,DF)
PARAMETER (WPE=6.E11, W=6.e11, KT=1.6E-19,
&ME=9.109e-31,ecamp=10., e=1.602e-19)
REAL q,FN,XX,TER2,0,SI2
REAL ME,WPE,P,W,KT,ecamp
dimension SI2(25), A(25)
INTEGER MDO2,q,MDO3

C-----Ordem máxima da função de bessel-----
MDO3=30
C-----
GZERO=(e*ecamp)/(ME*(W**2))

```

```

CC      Energia da radiação
      EG=((e**2)*(ecamp**2))/(4*ME*(W**2))
      P=exp(-EG/(KT))
CC      Argumento da Bessel
      XX=q*(GZERO)
      CALL BESSEL(MD03,XX,SI2)
      DO L=1,MD03
      TER2=0.
      DF=0.
      DO M=1, MD02
      TER2=TER2 - (SI2(M)**2)*P/(((M-1)*W + 0)**2)

      DF=DF + (SI2(M)**2)*P/(((M-1)*W + 0)**3)
      ENDDO
      TER2=(WPE**2)*TER2
      DF=2*(WPE**2)*DF
      FN= 1 + TER2
      END

```

O programa principal assume, então, a forma

```

program testartsafe
  INTEGER MDO,q
  REAL XX1,XX2,ACC,RTSAFE
  open (unit=20,file='ress.dat',status='unknown')
  WRITE(*,*)'INFORME A ORDEM DA BESSEL (M=1 ->m=0)'
  READ(*,*) MDO
  WRITE(*,*)'INFORME OS LIMITES DE OMEGA'
  READ(*,*) XX1, XX2
  WRITE(*,*) 'INFORME A PRECISAO'
  READ(*,*) ACC
  DO q=100,20000,100
    root=rtbis(q,MDO,XX1,XX2,ACC)
    WRITE(20,*) q, root
  ENDDO
  END

```

Novamente, a precisão usada foi de $ACC = 1$.

Os resultados de ambos os métodos coincidiram ponto a ponto. As duas curvas (correspondentes a cada um dos métodos) estão plotadas na Figura 4.

APÊNDICE C – Obtenção do operador unitário (2.54)

Para a resolução da equação de Schrödinger para um elétron na presença de um campo de radiação, supusemos uma função de onda da forma

$$\psi_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = U\Phi(\mathbf{r}, t), \quad (\text{C.1})$$

onde a função de onda $\Phi(\mathbf{r}, t)$ corresponde ao elétron livre e o operador unitário U é da forma

$$U = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\alpha(t) \cdot \mathbf{r}\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\beta(t) \cdot \mathbf{p}\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\eta(t)\right), \quad (\text{C.2})$$

onde $\alpha(t)$ é o gerador de translação de momento, $\beta(t)$ é o gerador de translação espacial e $\eta(t)$ é um fator de fase [1].

Para obter a expressão (2.54) a partir dessas definições, notamos que

$$\frac{\partial \psi_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} \left(\frac{d\alpha}{dt} \cdot \mathbf{r} + \frac{d\beta}{dt} \cdot \mathbf{p} + \frac{d\eta}{dt} \right) \Phi(\mathbf{r}, t) + U \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (\text{C.3})$$

Por hipótese, $\psi_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{r}, t)$ deve ser solução da equação de Schrödinger

$$H\psi_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (\text{C.4})$$

com o Hamiltoniano dado por

$$H = \frac{1}{2m_e} (\mathbf{p} - e\mathbf{A}(t))^2. \quad (\text{C.5})$$

Usando (C.3) e (C.5) em (C.4), temos

$$HU\Phi(\mathbf{r}, t) = - \left(\frac{d\alpha}{dt} \cdot \mathbf{r} + \frac{d\beta}{dt} \cdot \mathbf{p} + \frac{d\eta}{dt} \right) \Phi(\mathbf{r}, t) + Ui\hbar \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (\text{C.6})$$

Multiplicando esta última expressão por U^+ , vemos que

$$\frac{1}{2m_e}(\mathbf{p} + \alpha - e\mathbf{A}(t))^2\Phi(\mathbf{r}, t) = - \left(\frac{d\alpha}{dt} \cdot (\mathbf{r} - \beta) + \frac{d\beta}{dt} \cdot (\mathbf{p} + \alpha) + \frac{d\eta}{dt} \right) \Phi(\mathbf{r}, t) + H_0\Phi(\mathbf{r}, t), \quad (\text{C.7})$$

sendo que

$$H_0\Phi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial\Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (\text{C.8})$$

Isolando H_0 em (C.7), obtemos

$$H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_e} + \frac{1}{2m_e}(\alpha - e\mathbf{A}(t))^2 + \frac{\mathbf{p}}{m_e}(\alpha - e\mathbf{A}(t)) + \frac{d\alpha}{dt} \cdot \mathbf{r} + \frac{d\beta}{dt} \cdot \mathbf{p} - \frac{d\alpha}{dt} \cdot \beta + \frac{d\beta}{dt} \cdot \alpha + \frac{d\eta}{dt}. \quad (\text{C.9})$$

Queremos encontrar as funções $\alpha(t)$, $\beta(t)$ e $\eta(t)$. Para tal, notamos que os termos lineares em \mathbf{p} e em \mathbf{r} devem ser nulos, uma vez que o primeiro termo do lado direito da equação (C.9) já corresponde ao Hamiltoniano do elétron livre H_0 . Assim, precisamos resolver o sistema

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0, \quad (\text{C.10})$$

$$\frac{d\beta}{dt} + \frac{1}{m_e}(\alpha - e\mathbf{A}(t)) = 0, \quad (\text{C.11})$$

$$-\frac{d\alpha}{dt} \cdot \beta + \frac{d\beta}{dt} \cdot \alpha + \frac{d\eta}{dt} + \frac{1}{2m_e}(\alpha - e\mathbf{A}(t))^2 = 0 \quad (\text{C.12})$$

para obter os geradores que compõem o operador unitário U .

Usando (2.49), reescrevemos o sistema de equações acima

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0, \quad (\text{C.13})$$

$$\frac{d\beta}{dt} + \frac{1}{m_e}(\alpha - e \left(\frac{E}{\omega} \sin(\omega t) \right) \hat{\mathbf{x}}) = 0, \quad (\text{C.14})$$

$$-\frac{d\alpha}{dt} \cdot \beta + \frac{d\beta}{dt} \cdot \alpha + \frac{d\eta}{dt} + \frac{1}{2m_e}(\alpha - e \left(\frac{E}{\omega} \sin(\omega t) \right) \hat{\mathbf{x}})^2 = 0 \quad (\text{C.15})$$

Da equação (C.13), vemos que $\alpha(t)$ deve ser uma constante. A escolha desse valor é

feita arbitrariamente. Portanto, podemos tomar

$$\alpha = 0. \quad (\text{C.16})$$

Usando este resultado na equação (C.14), vemos que

$$\frac{d\beta_y}{dt} = \frac{d\beta_z}{dt} = 0 \quad (\text{C.17})$$

enquanto que a componente em x desta equação nos dá

$$\frac{d\beta_x}{dt} = \frac{eE}{m_e\omega} \text{sen}(\omega t). \quad (\text{C.18})$$

Novamente, as componentes de $\beta(t)$ nas direções y e z são constantes arbitrárias. Integrando a equação (C.18), temos

$$\begin{aligned} \beta_x &= \frac{eE}{m_e\omega^2} [1 - \cos(\omega t)] \\ \beta_y &= \beta_z = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Usando as soluções (C.16) e (C.19), a equação (C.15) assume a forma

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{e^2 E^2}{2m_e\omega^2} \text{sen}^2(\omega t), \quad (\text{C.20})$$

que é integrável e resulta em

$$\eta = -\frac{e^2 E^2}{4m_e\omega^2} t + \frac{e^2 E^2}{8m_e\omega^3} \text{sen}(2\omega t). \quad (\text{C.21})$$

Substituindo os resultados em (C.2), temos, finalmente, o operador unitário dado por

$$U = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} 2\gamma_1 \omega t\right) \exp(i\gamma_0 k_x (1 - \cos(\omega t))) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \gamma_1 \text{sen}(2\omega t)\right), \quad (\text{C.22})$$

onde $\gamma_0 = eE/m_e\omega^2$ e $\gamma_1 = e^2 E^2/8m_e\omega^3$.