Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Cotas Superiores para o Expoente e o Número Mínimo de Geradores do Quadrado q-Tensorial de Grupos Nilpotentes

por

Eunice Cândida Pereira Rodrigues

Brasília

2011

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Cotas Superiores para o Expoente e o Número Mínimo de Geradores do Quadrado q-Tensorial de Grupos Nilpotentes

por

Eunice Cândida Pereira Rodrigues

Orientador: Prof. Dr. Noraí Romeu Rocco

Resumo

Nesta tese estudamos certas propriedades do quadrado q-tensorial, $G \otimes^q G$, de um grupo G, sendo q um inteiro não negativo. Restringimos nossas considerações a grupos nilpotentes de classe menor ou igual a três. Estendendo resultados de M. Bacon e usando propriedades do grupo $\nu^q(G)$, introduzido por Bueno e Rocco, estabelecemos uma cota superior para $d(G \otimes^q G)$ em termos de $d(G)$, onde $d(G)$ indica o número mínimo de geradores de um grupo G, para G nilpotente de classe no máximo dois. Estudamos casos de grupos G em que o quadrado tensorial não abeliano, $G \otimes G$, está imerso em $G \otimes^q G$. Estendendo resultados de P. Moravec, provamos também que o quadrado q-tensorial de um grupo localmente finito é localmente finito. Além disso, estabelecemos cotas superiores para o expoente de $G \otimes^q G$ em termos de q e do expoente de G.

Palavras chaves: quadrado q-tensorial de grupos, quadrado q-exterior de um grupo, grupos localmente finitos, grupos nilpotentes.

Abstract

In this thesis we study certain properties of the q-tensor square of a group G, $G \otimes^q G$, where q is a non-negative integer. We restrict our considerations to nilpotent groups of class at most three. Extending results of M. Bacon, we make use of properties of the group $\nu^q(G)$, introduced by Bueno and Rocco, to establish an upper bound $d(G \otimes^q G)$ in terms of $d(G)$, where $d(G)$ indicates the minimal number of generators of G, for G nilpotent of class at most two. We study cases of groups G where the nonabelian tensor square, $G \otimes G$, is embedded into the group $G \otimes^q G$. Extending results of P. Moravec, we prove that the q-tensor square of a locally finite group is also locally finite. Finally, we establish upper bounds for the exponent of $G \otimes^q G$, in terms of q and the exponent of G.

Key words: q-tensor square of groups, q-exterior square of groups, locally finite groups, nilpotent groups.

Lista de Símbolos

x^y	$y^{-1}xy$
$[x,y]$	$x^{-1}y^{-1}xy$
$H \trianglelefteq G$	H é um subgrupo normal de G
$G^{(n)}$	n-ésima derivada de G
$\gamma_n(G)$	n-ésimo termo da série central inferior de G
G^q	subgrupo gerado pelo conjunto das q-ésimas potências dos elementos de G
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros
$mdc\{a_1,...,a_n\}$	máximo divisor comum de $a_1,...,a_n$
$a \mid b$	a divide b
$\|G\|$	ordem de G
$\|G:H\|$	índice de H em G
$\langle K\rangle$	subgrupo gerado pelos elementos de K
1_X	função identidade sobre o conjunto X
$\langle X\rangle^G$	fecho normal de X em G

$\cong$	isomorfismo
$(g)\,\alpha$	imagem de g por α
Nuc	núcleo de um homomorfismo
Im	imagem de uma função, homomorfismo de G
G^{ab}	grupo abelianizado, G/G'
$d\,(G)$	número mínimo de geradores de G
$G \times H$	produto direto, produto cartesiano de conjuntos
$G \rtimes H$	produto semidireto de grupos
$G * H$	produto livre dos grupos G e H
C_n	grupo cíclico de ordem n
D_m	grupo diedral de ordem $2m$, $m \geq 2$
Q_n	grupo dos quatérnios generalizado, de ordem 2^n, $n \geq 3$
$G \otimes_R H$	produto tensorial de R-módulos
$G \otimes H$	produto tensorial não abelianos de grupos
$exp\,(G)$	expoente do grupo G
$M(G)$	Multiplicador de Schur de G

Γ	funtor quadrático de Whitehead
$\Delta(G)$	subgrupo diagonal do quadrado tensorial de G
$G \wedge H$	produto exterior de G e H
$G \otimes^q H$	produto q-tensorial de G e H
$G \wedge^q H$	produto q-exterior de G e H

Sumário

Introdução

O nosso trabalho está focado em questões na área de produtos q-tensoriais de grupos (q um inteiro não negativo), envolvendo construções relacionadas.

O produto tensorial não abeliano de grupos G e H, denotado por $G \otimes H$, introduzido por Brown e Loday [7], generaliza o produto tensorial usual $\frac{G}{G'} \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{H}{H'}$, dos grupos abelianizados, uma vez que leva em conta as ações de G sobre H e de H sobre G, sob a hipótese de que essas ações são compatíveis.

Especificamente, dados dois grupos G e H munidos de uma ação, à direita, $(g,h) \mapsto g^h$ de H sobre G e uma ação $(h,g) \mapsto h^g$ de G sobre H, de tal forma que para todo $g, g_1 \in G$, $h, h_1 \in H$,

$$g^{(h^{g_1})} = \left(\left(g^{g_1^{-1}}\right)^h\right)^{g_1} \quad e \quad h^{(g^{h_1})} = \left(\left(h^{h_1^{-1}}\right)^g\right)^{h_1}, \tag{1}$$

onde G e H atuam sobre si mesmo por conjugação, o produto tensorial não abeliano $G \otimes H$ dos grupos G e H é o grupo gerado por todos os símbolos $g \otimes h$, $g \in G$, $h \in H$ satisfazendo as relações $gg_1 \otimes h = (g^{g_1} \otimes h^{g_1})(g_1 \otimes h)$ e $g \otimes hh_1 = (g \otimes h_1)\left(g^{h_1} \otimes h^{h_1}\right)$, para todos $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$.

Em particular, como a ação por conjugação de um grupo G sobre si mesmo satisfaz as equações (1), o quadrado tensorial não abeliano de um grupo G, $G \otimes G$, pode sempre ser definido.

A introdução deste conceito deve-se originalmente a razões topológicas, já que o produto tensorial não abeliano aparece no estudo das aplicações de um Teorema de Van Kampen Generalizado na Teoria de Homotopia [7]. Além disso, invariantes importantes do grupo G, tais como o Multiplicador de Schur, $M(G)$, e o quadrado exterior não abeliano, $G \wedge G$, aparecem como seções de $G \otimes G$.

Logo após a publicação dos trabalhos de Brown e Loday ([6], [7]) que mostraram a importância topológica do produto tensorial não abeliano de grupos, vários artigos surgiram sobre este assunto. Alguns investigaram propriedades gerais do produto tensorial não abeliano, enquanto outros (por exemplo, [1], [8]) concentraram-se na descrição do quadrado tensorial não abeliano de certas classes de grupos, tais como diedral, p-grupo 2-gerado de classe 2, grupos livres e grupos perfeitos.

Buscando dar um tratamento grupo-teorético ao estudo do quadrado tensorial não abeliano de grupos e valendo-se do cálculo de comutadores, Rocco [34] introduziu um operador ν na classe dos grupos, definido a seguir.

Sejam G e G^{φ} isomorfos por meio do isomorfismo $\varphi : g \mapsto g^{\varphi}$, $\forall g \in G$. Define-se o grupo $\nu(G)$, em [34],

$$\nu(G) := \left\langle G, G^{\varphi} \middle| \left[g_1, g_2^{\varphi}\right]^{g_3} = \left[{g_1}^{g_3}, ({g_2}^{g_3})^{\varphi}\right] = [g_1, {g_2}^{\varphi}]^{g_3^{\varphi}}, \forall g_1, g_2, g_3 \in G \right\rangle.$$

A relação entre $\nu(G)$ e $G \otimes G$ foi estabelecida por meio de um isomorfismo do subgrupo comutador $[G, G^{\varphi}]$ de $\nu(G)$, denotado por $\Upsilon(G)$, com $G \otimes G$. Este isomorfismo foi usado para obter uma prova alternativa da finitude de $G \otimes G$, através de uma uma conexão entre o grupo $\nu(G)$ e o grupo $\chi(G)$ introduzido por Sidki [39] e definido por:

$$\chi(G) = \langle G, G^{\varphi} | [g, g^{\varphi}] = 1, \forall g \in G \rangle.$$

Rocco [34] mostrou que $\nu(G)$ preserva propriedades do argumento G tais como finitude, conjunto de divisores primos, nilpotência e solubilidade. Além disso, para G um p-grupo finito, encontrou uma limitação para $|G \otimes G|$. Esta cota foi melhorada por G. Ellis e A. McDermott [17] no seguinte sentido: eles a estenderam para o produto tensorial não abeliano de um p-grupo finito e um q-grupo finito, onde p e q são primos (não necessariamente iguais).

Seja L um grupo e q um inteiro não negativo. O produto q-tensorial de L-módulos cruzados $\mu : G \to L$ e $\nu : G \to L$ foi definido em [12]. Em particular, quando G e H são subgrupos normais de L, então as inclusões de G e H em L são L-módulos cruzados com ações tomadas por conjugação em L. Neste caso, de acordo com [15], definimos o produto q-tensorial $G \otimes^q H$, de G e H, para $q \geq 1$, como o grupo gerado pelos símbolos $g \otimes h$ e $\hat{k}$, para todos $g \in G$, $h \in H$, $k \in G \cap H$, sujeito às relações:

$$(g \otimes hh_1) = (g \otimes h_1)\left(g^{h_1} \otimes h^{h_1}\right) \tag{2}$$

$$gg_1 \otimes h = (g^{g_1} \otimes h^{g_1})(g_1 \otimes h) \tag{3}$$

$$(g \otimes h)^{\widehat{k}} = \left(g^{k^q} \otimes h^{k^q}\right) \tag{4}$$

$$\widehat{kk_1} = \widehat{k} \prod_{i=1}^{q-1} \left(k \otimes (k_1^{-i})^{k^{q-1-i}})\right) \widehat{k}_1 \tag{5}$$

$$\left[\widehat{k}, \widehat{k_1}\right] = k^q \otimes {k_1}^q \tag{6}$$

$$\widehat{[g,h]} = (g \otimes h)^q \tag{7}$$

para todos $g, g_1, h, h_1 \in G$ e k_1, $k_2 \in G \cap H$.

Ressaltamos que se $q = 0$, então o produto 0-tensorial, $G \otimes^0 H$, é o grupo gerado pelos símbolos $g \otimes h$, para $g \in G$, $h \in H$ sujeito às relações (2) e (3) apenas, ou seja, $G \otimes^0 H$ coincide com $G \otimes H$. Além disso, (2) e (3) são relações de comutadores em grupos e que (4) a (7) podem ser vistas como abstrações das identidades que aparecem nas relações entre potências e comutadores.

Concentramos nosso estudo em um caso particular de $G \otimes^q H$, ou seja, estudamos o quadrado q-tensorial de grupos, $G \otimes^q G$, via construção relacionada, $\nu^q(G)$ (generalização do grupo $\nu(G)$). Restringimos nossas considerações a grupos nilpotentes de classe ≤ 3. Em particular, estabelecemos uma cota superior para $d(G \otimes^q G)$ em termos de $d(G)$ e encontramos cotas superiores para $exp(G \otimes^q G)$ em termos de $exp(G)$ e q. Além disso, levantamos a seguinte questão:

Para que classes de grupos G e para quais valores de q temos $G \otimes G$ imerso em $G \otimes^q G$?

Neste sentido, estudamos alguns casos de grupos onde a citada imersão ocorre.

Para cumprir com esses objetivos, estudamos o grupo $\nu^q(G)$, definido por T. Bueno [10] da seguinte maneira: sejam G e G^{φ} grupos isomorfos por meio do isomorfismo $\varphi : g \to g^{\varphi}$, $\forall g \in G$. Consideramos $K = \left\{\widehat{k} | k \in G\right\}$ um conjunto de símbolos, um para cada elemento de G. Quando $q = 0$ considera-se K o conjunto vazio. Seja $F(K)$ o grupo livre sobre K e $\nu(G) * F(K)$ o produto livre do grupo $\nu(G)$ com $F(K)$.

De acordo com a estrutura de $\nu(G)$ temos que G e G^{φ} estão imersos no produto livre $\nu(G) * F(K)$. Sendo assim, identificamos os elementos de G e de G^{φ} com suas imagens em $\nu(G) * F(K)$. Estabecelemos J como fecho normal em $\nu(G) * F(K)$ dos elementos:

$$(g_1)^{-1}\widehat{k}g_1(\widehat{k^{g_1}})^{-1} \tag{8}$$

$$\left(g_2^{\varphi}\right)^{-1}\widehat{k}g_2^{\varphi}(\widehat{k^{g_2}})^{-1} \tag{9}$$

$$(\widehat{k})^{-1}\left[g_1, g_2^{\varphi}\right]\widehat{k}\left[g_1^{k^q}, (g_1^{k^q})^{\varphi}\right]^{-1} \tag{10}$$

$$(\widehat{k})^{-1}\widehat{kk_1}(\widehat{k_1})^{-1}(\prod_{i=1}^{q-1}\left[k, (k_1{}^{-i})^{\varphi}\right]^{k^{q-1-i}})^{-1} \tag{11}$$

$$[\widehat{g_1}, \widehat{g_2}]\left[g_1^q, (g_2^q)^{\varphi}\right]^{-1} \tag{12}$$

$$\widehat{[g_1, g_2]}\left[g_1, g_2^{\varphi}\right]^{-q}, \tag{13}$$

para todos $g_1, g_2 \in G$ e $k_1, k_2 \in K$.

Definimos o grupo $\nu^q(G)$ por

$$\nu(G) * F(K)/J. \tag{14}$$

A relação entre $\nu^q(G)$ e $G \otimes^q G$ é dada por um isomorfismo do subgrupo $[G, G^\varphi]\langle K \rangle$ de $\nu^q(G)$ com $G \otimes^q G$. Denotamos os subgrupos $[G, G^\varphi]\langle K \rangle$, $[G, G^\varphi]$ de $\nu^q(G)$ por $\Upsilon^q(G)$ e T, respectivamente.

A seguir faremos um resumo dos capítulos que compõem esta tese.

No Capítulo 1, introduzimos conceitos e resultados que fazem parte da literatura usual da área e que foram necessários para o desenvolvimento de nosso trabalho.

No Capítulo 2, descrevemos alguns resultados obtidos por M. Bacon [2]. Além disso, damos uma prova alternativa ao resultado apresentado por M.Bacon [2] sobre o número mínimo de geradores do quadrado tensorial não abeliano de grupos, $d(G \otimes G)$, em termos de $d(G)$, quando G é um grupo n-gerado e nilpotente de classe 2.

O Capítulo 3 de nosso trabalho divide-se em duas seções. Na primeira seção, apresentamos o conceito do produto q-tensorial de grupos, $G \otimes^q H$, e algumas propriedades do grupo $\nu^q(G)$ [11]. Na segunda seção, obtivemos, via construção relacionada, $\nu^q(G)$, alguns resultados para o quadrado q-tensorial, dentre os quais destacamos:

Proposição 3.2.6: Seja $G = D_m$. Então temos:

(i) Se m é um inteiro ímpar e q é par ($q = 2t$), então:

$D_m \otimes^q D_m \cong C_4 \times C_m$ (t ímpar);

$D_m \otimes^q D_m \cong {C_2}^2 \times C_m$ (t par);

(ii) Se m é par e q é ímpar ou $\mathrm{mdc}(q, |G|) = 1$, então $D_m \otimes^q D_m \cong D_m$;

Seja $G = Q_n$. Então:

(iii) Se $\mathrm{mdc}(q, |G|) = 1$, então $Q_n \otimes^q Q_n \cong Q_n$;

Considere $G = D_\infty$, temos:

(iv) Para $q \equiv 2 \pmod 4$, temos $D_\infty \otimes^q D_\infty \cong {C_\infty}^2 \times C_4$;

(v) Quando $4|q$, segue que $D_\infty \otimes^q D_\infty \cong {C_\infty}^2 \times {C_2}^3$;

(vi) Se q é ímpar, $D_\infty \otimes^q D_\infty \cong D_\infty$.

O próximo teorema estende uma estimativa dada por Bacon [2] do caso $q = 0$ para todo inteiro $q \geq 0$.

Teorema 3.2.7: Seja G um grupo nilpotente de classe 2 tal que $d(G) = n$. Então $d(G \otimes^q G) \leq \dfrac{n^3 + 3n^2 + 2n}{3}$. Em particular, se G é finito tal $mdc(q, |G|) = 1$, então $d(G \otimes^q G) \leq n^2$.

A seguir, obtivemos um resultado semelhante ao dado pelo Teorema 3.2.7, no caso em que G é um grupo abeliano finitamente gerado.

Teorema 3.2.8 : Se G é um grupo abeliano gerado por $g_1, ..., g_n$, então $G \otimes^q G$ é produto direto de, no máximo, $n^2 + n$ grupos cíclicos. Além disso, se G é finito, digamos $G = C_{d_1} \times ... \times C_{d_n}$, $d_i \cong \langle g_i \rangle$; $d_1 | d_2, ..., d_i | d_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$, tal que $\mathrm{mdc}(d_n, q) = 1$, então $G \otimes^q G$ é produto direto de, no máximo, n grupos cíclicos finitos.

Encerramos esse capítulo, focando nossas discussões sobre a possibilidade de imersão de $G \otimes G$ em $G \otimes^q G$. Em geral, a citada imersão não ocorre. Um exemplo é quando consideramos G um grupo finito tal que $\mathrm{mdc}(q, |G|) = 1$, pois os geradores de $\Upsilon^q(G)$ da forma $[g, g^{\varphi}]$ tem ordem dividindo q e portanto são triviais em $\Upsilon^q(G)$. Particularmente, se $G = Q_4$ tem-se que $\Upsilon^3(Q_4) \cong Q_4$ com $|T| = 2$. No entanto, $\Upsilon(Q_4) \cong C_4 \times C_4 \times C_2 \times C_2$. Por outro lado, se q divide a ordem de G, não podemos garantir que tal imersão ocorra. Considere $G = D_4$ e $q = 2$, então, $\Upsilon(D_4) \cong C_2 \times C_4 \times C_2 \times C_2$ porém, $\Upsilon^2(D_4) \cong C_4 \times C_4 \times C_4$ com $|T| = 8$. Este exemplo nos permitiu mostrar que se $q \equiv 2 mod(4)$, então $D_4 \otimes D_4$ não está imerso em $D_4 \otimes^q D_4$.

A partir destas considerações surge a seguinte questão: para que classes de grupos G e para quais valores de q temos $G \otimes G$ imerso em $G \otimes^q G$?

Damos nossa contribuição a este problema calculando alguns exemplos de grupos onde a citada imersão ocorre.

Teorema 3.2.14: Se G é um dos grupos abaixo, então $G \otimes G$ está imerso em $G \otimes^q G$.

(i) $G = D_m$, onde m ímpar e q par;

(ii) $G = D_\infty$, com $4|q$;

(iii) $G = C_n$, para $n|q$ com n ímpar ou $4|n$;

(iv) G é nilpotente finito de classe 2, 2-gerado com $exp(G)$ dividindo q.

No Capítulo 4, estudamos limitações para o expoente do quadrado q-tensorial de um grupo G nilpotente finito de classe ≤ 3 em termos de $exp(G)$. Provamos aqui os seguintes resultados:

Teorema 4.0.19: Seja G um grupo nilpotente finito de classe ≤ 2 . Então

(i) $exp(G \otimes^q G) \leq exp(G)$, se q é ímpar ou q é par e 4 divide q;

(ii) $exp(G \otimes^q G) \leq 2exp(G)$, se $q \equiv 2(mod 4)$.

Finalizamos o nosso trabalho considerando grupos de classe 3:

Teorema 4.0.20: Se G é nilpotente finito de classe 3, com $exp(G) = n$, então

(i) $exp(G \otimes^q G) \leq exp(G)$, se n é ímpar;

(ii) $exp(G \otimes^q G) \leq 2exp(G)$, se n par.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo mencionamos alguns conceitos e propriedades da teoria de grupos importantes para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes. Os resultados apresentados aqui já fazem parte da literatura usual da área, por isso às demonstrações serão omitidas. Em razão disso, durante as abordagens preliminares, indicamos algumas referências nas quais esses resultados podem ser encontrados.

1.1 Cálculo de Comutadores

Sejam $x_1, x_2, \ldots$ elementos de um grupo G.

O conjugado de x_1 por x_2 é dado por:

$$x_1{}^{x_2} = x_2{}^{-1} x_1 x_2.$$

O comutador [1] de x_1 e x_2 (nesta ordem) é

$$[x_1, x_2] = x_1{}^{-1} x_2{}^{-1} x_1 x_2 = x_1{}^{-1} x_1{}^{x_2}.$$

Para $n \geq 2$ o comutador simples de peso n é definido indutivamente pelas regras

[1]Este conceito apareceu pela primeira vez em 1860 na Tese de C. Jordan(1838-1922).

$$[x_1.....x_n] = [[x_1.....x_{n-1}], x_n] \text{ e } [x_1] = x_1.$$

A seguir apresentamos algumas propriedades elementares de comutadores. Uma demonstração pode ser encontrada em [33].

Lema 1.1.1. *Se G é um grupo e $x_1, x_2, x_3 \in G$, então:*

(i) $[x_1, x_2] = \left[x_1, {x_2}^{-1}\right]^{-x_2} = \left[x_1^{-1}, x_2\right]^{-x_1}$*;*

(ii) $[x_1x_2, x_3] = [x_1, x_3]^{x_2}[x_2, x_3] = [x_1, x_3][x_1, x_3, x_2][x_2, x_3]$*;*

(iii) $[x_1, x_2x_3] = [x_1, x_3][x_1, x_2]^{x_3} = [x_1, x_3][x_1, x_2][x_1, x_2, x_3]$*;*

(iv) $\left[x_1, {x_2}^{-1}, x_3\right]^{x_2}\left[x_2, {x_3}^{-1}, x_1\right]^{x_3}\left[x_3, {x_1}^{-1}, x_2\right]^{x_1} = 1$ *(Identidade de Hall-Witt).*

Sejam G um grupo e X um subconjunto não vazio de G. Denotamos por $\langle X \rangle$ o subgrupo de G gerado por X. Se $X = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ então escrevemos simplesmente $G = \langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle$.

Sejam H e K subgrupos do grupo G. Denotamos por $[H, K]$ o subgrupo de G gerado pelo conjunto de todos os comutadores $[h, k]$, com $h \in H$ e $k \in K$.

Se $H_1, H_2, ..., H_n$, $n \geq 2$, são subgrupos de G, então definimos, recursivamente,

$$[H_1, H_2, ..., H_{n+1}] = [[H_1, H_2, ..., H_n], H_{n+1}]. \tag{1.1}$$

1.2 Grupos Solúveis

Definição 1.2.1. Uma série subnormal de um grupo G é uma sequência finita de subgrupos de G:

$$G = G_0 \geq G_1 \geq G_2 \cdots \geq G_n = 1, \tag{1.2}$$

na qual $G_i \lhd G_{i-1}$, $\forall i = 1, ..., n$. Os grupos quocientes G_{i-1}/G_i, $1 \leq i \leq n$, são denominados fatores da série.

Definição 1.2.2. Um grupo G é solúvel se ele tem uma série subnormal cujos fatores são abelianos.

1.3 Grupos Nilpotentes

Definição 1.3.1. Um grupo G é dito *nilpotente* se existe uma cadeia finita

$$1 = G_0 < G_1 < G_2 < \cdots < G_n = G \tag{1.3}$$

tal que

(i) $G_i \trianglelefteq G$;

(ii) $G_{i+1}/G_i \leq Z(G/G_i), \quad i = 0, \ldots, n-1.$

Uma tal cadeia é chamada *série central* de G. A classe de nilpotência de um grupo nilpotente G, $cl(G)$, é o comprimento da menor série central de G.

A seguir relacionamos alguns resultados básicos sobre grupos nilpotentes, cujas demonstrações podem ser encontradas em [33].

Proposição 1.3.2. *A classe dos grupos nilpotentes é fechada a subgrupos, quocientes e produtos diretos de um número finito de grupos.*

Teorema 1.3.3. *(Fitting) Sejam G um grupo e M e N subgrupos normais nilpotentes de G. Se as classes de nilpotência de M e N são m e n respectivamente então, MN é nilpotente de classe no máximo $m+n$.*

Teorema 1.3.4. *Seja G um grupo finito. G é nilpotente se, e somente se, G é o produto direto de seus subgrupos de Sylow.*

Lema 1.3.5. *Seja G um grupo nilpotente de classe 2. Então para quaisquer $a, b \in G$ e todo $n \in \mathbb{Z}$,*

$$[a, b^n] = [a^n, b] = [a, b]^n, (ab)^n = a^n b^n [b, a]^{\binom{n}{2}}. \tag{1.4}$$

Consequentemente, se G é um grupo nilpotente de classe 2, n-gerado pelo conjunto $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, então qualquer elemento $g \in G$ pode ser escrito na forma:

$$g = \prod_{i=1}^{n} x_i^{m_i} \prod_{i \leq j < k \leq n} \left[x_j, x_k\right]^{\ell_{jk}}, \tag{1.5}$$

sendo $m_i, \ell_{jk} \in \mathbb{Z}$.

1.4 Grupos Policíclicos

O estudo sistemático de grupos policíclicos foi iniciado por Hirsh em duas publicações [18, 19] e continuada em três outros artigos [20, 21, 22]. Recentemente grupos policíclicos tem atraído atenção porque eles formam uma classe dos grupos para os quais muitos problemas podem ser resolvidos algoritmicamente [38]. Essa classe de grupos inclui a classe de grupos solúveis finitos e a classe dos grupos nilpotentes finitamente gerados. Nesta seção sumarizamos a teoria básica para grupos policíclicos. Material sobre grupos policíclicos pode ser encontrado nos trabalhos citados acima, assim como em [13] e [40].

Definição 1.4.1. Um grupo G é chamado *policíclico* se ele possui uma série subnormal

$$G = G_1 \geq G_2 \geq \cdots \geq G_n \geq G_{n+1} = 1$$

tal que G_i/G_{i+1}, é cíclico para todo $1 \leq i \leq n$. Tal série é chamada uma *série policíclica* de G de comprimento n.

A proposição a seguir estabelece algumas propriedades de grupos policíclicos que podem ser encontradas em [38] e [40].

Proposição 1.4.2. *(i) Subgrupos e grupos quocientes de grupos policíclicos são policíclicos.*

(ii) Grupos policíclicos são finitamente gerados.

(iii) Sejam G um grupo e N um subgrupo normal de G. Se N e G/N são policíclicos então G é policíclico.

(iv) Todo grupo abeliano finitamente gerado é policíclico.

(v) Todo grupo nilpotente finitamente gerado é policíclico.

(vi) Grupos policíclicos são solúveis.

Pelas partes (ii) e (vi) da Proposição 1.4.2, apenas grupos solúveis finitamente gerados podem ser policíclicos, mas existem grupos solúveis finitamente gerados que não são policíclicos conforme [38] e [40].

O seguinte teorema mostra que um grupo solúvel tal que todo subgupo é finitamente gerado é policíclico.

Teorema 1.4.3. *Um grupo G é policíclico se, e somente se, G é solúvel e todo subgrupo de G é finitamente gerado.*

Proposição 1.4.4. *Se G é um grupo policíclico com uma série policíclica de comprimento n, então G pode ser gerado por n elementos.*

Proposição 1.4.5. *Se G tem uma série policíclica de comprimento n, então todo subgrupo de G pode ser gerado por n ou menos elementos.*

Proposição 1.4.6. *Suponha que H e K são subgrupos de um grupo policíclico G. Se $H \subseteq K$ e $H = K^g$, para algum $g \in G$, então $H = K$.*

Seja G um grupo policíclico. Nem todas as séries policíclicas de G têm o mesmo comprimento. Entretanto, o número de quocientes infinitos em uma série policíclica é o mesmo para toda série. Esse número é chamado *número de Hirsch* de G.

1.4.1 Apresentações Policíclicas

Seja G um grupo policíclico com uma série policíclica $G = G_1 \supseteq \cdots \supseteq G_{n+1} = 1$. Como G_i/G_{i+1} é cíclico, existem elementos $x_i \in G$, tal que $G_i/G_{i+1} = \langle x_i G_{i+1} \rangle$ para todo índice i.

Definição 1.4.7. A sequência dos elementos $X = \{x_1, ..., x_n\}$ tal que $G_i/G_{i+1} = \langle x_i G_{i+1} \rangle$ para $1 \leq i \leq n$ é chamada uma sequência policíclica para G.

Para grupos solúveis finitos, o termo *AG-sistema* foi introduzido por Jurgensen em 1970, veja [24]. Note que na definição acima a ordem é importante e cada subsequência $X_i = \{x_i, ..., x_n\}$

é uma sequência policíclica para o subgrupo G_i. Este recurso é usado frequentemente para argumentos de indução e métodos algorítmicos.

Definição 1.4.8. Seja X uma sequência policíclica para um grupo policíclico G. A sequência $R(X) = \{r_1, ..., r_n\}$ definida por $r_i = [G_i : G_{i+1}]$, o índice de G_{i+1} em G_i, $r_i \in \mathscr{N} \cup \{\infty\}$, é chamada sequência de ordens relativas para X. Denotamos por $I(X) = \{i \in \{1, ..., n\} \,|r_i \text{ finito }\}$, o conjunto de índices tal que r_i é finito.

Observe que em $R(X)$ a ordem também é importante.

Podemos provar que dado um grupo policíclico com uma sequência policíclica $X = \{x_1, ..., x_n\}$ e ordens relativas $R(X) = \{r_1, ..., r_n\}$, todo elemento $g \in G$ pode ser escrito unicamente na forma $g = x_1^{e_1} ... x_n^{e_n}$ para $0 \leq e_i \leq r_i$. Esta expressão é chamada *forma normal* de g com respeito a X.

Observe que $x_i^{r_i} \in G_{i+1}$ e $x_k^{x_j} \in G_{j+1}$ para todos $0 \leq i \leq n$ e $0 \leq j \leq k \leq n$. Assim, podemos escrever G como um grupo gerado pelos elementos $x_1, ..., x_n$ sujeito às seguintes relações:

$$x_i^{s_i} = x_{i+1}^{\alpha_{ii+1}} .... x_n^{\alpha_{in}} \text{ para } 1 \leq i \leq n, s_i < \infty,$$

$$x_i^{x_j} = x_{j+1}^{\beta_{iji+1}} .... x_n^{\beta_{ijn}} \text{ para } 1 \leq i < j \leq n,$$

$$x_i^{x_j^{-1}} = x_{j+1}^{\gamma_{iji+1}} .... x_n^{\gamma_{ijn}} \text{ para } 1 \leq i < j \leq n, \, s_j < \infty.$$

As relações acima são chamadas de *relações policíclicas* e a apresentação acima é denominada *apresentação policíclica* para G.

1.5 Grupos Livres e Apresentações de Grupos

Grupos livres constituem noções fundamentais da teoria de apresentações de grupos. As demonstrações sobre a existência e construção de grupos livres podem ser encontradas em [23] e [28].

Definição 1.5.1. Um grupo F é dito livre sobre um subconjunto $X \subseteq F$ se, para qualquer grupo G e qualquer função $\theta : X \to G$, existir um único homomorfismo $\theta' : F \to G$ tal que $(x)\theta' = (x)\theta$, para todo $x \in X$. A cardinalidade de X é chamada de posto de F.

A definição anterior refere-se à comutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\theta"'] & F \arrow[d, dotted, "\theta'"] \\ & G \end{tikzcd}$$

onde i é a inclusão de X em F.

Ressaltamos ainda que, se escrevermos "grupo abeliano" no lugar da palavra "grupo" explicitada anteriormente, obteremos a definição de grupo abeliano livre.

Teorema 1.5.2. *[33] Seja G um grupo e X um subconjunto de G. Assumimos que cada elemento g de G pode ser univocamente escrito da forma* $g = {x_1}^{t_1} ... {x_s}^{t_s}$*, onde* $x_i \in X$; $s \geq 0$, $t_i \neq 0$ *e* $x_i \neq x_{i+1}$. *Então G é livre sobre X.*

Teorema 1.5.3. *Um grupo abeliano livre de posto r é a soma direta de r grupos cíclicos infinitos.*

Sejam X um conjunto, $F = F(X)$ o grupo livre sobre X, R um subconjunto de F, N o fecho normal de R em F que denotamos por $\langle R \rangle^F = N$ e G o grupo quociente F/N.

Definição 1.5.4. Com a citada notação, escrevemos $G = \langle X|R \rangle$ e dizemos que esta é uma apresentação para G. Os elementos de X são chamados de geradores, e os elementos de R são relatores. Um grupo G é dito finitamente apresentado se possui uma apresentação com X e R finitos.

Observações 1.5.5. *Para cada* $r \in R$*, a equação* $r = 1$ *é chamada relação definidora de G.*

Teorema 1.5.6. *Todo grupo tem uma apresentação. Todo grupo finito tem uma apresentação finita.*

Teorema 1.5.7. *(Teste da Substituição) Suponha que são dados uma apresentação* $G = \langle X|R \rangle$*, um grupo H e uma função* $\theta : X \to H$*. Então,* θ *se estende a um homomorfismo* $\theta' : X \to H$ *se, e somente se, para todos* $x \in X$ *e* $r \in R$*, o resultado da substituição de x por* $(x)\theta$ *em r é a identidade de H.*

Teorema 1.5.8. *Sejam* $G = \langle X|R \rangle$ *e* $H = \langle Y|S \rangle$ *duas apresentações. Então, o produto direto,* $G \times H$*, tem a apresentação* $G \times H = \langle X, Y | R, S, [X, Y] \rangle$*, onde* $[X, Y]$ *indica o conjunto de todos os comutadores* $[x, y]$ *com* $x \in X$ *e* $y \in Y$.

Definição 1.5.9. Se $G = \langle X|R\rangle$ e $H = \langle Y|S\rangle$, então $\langle X,Y|R,S\rangle$ é chamado de produto livre de G e H, e denotado por $G*H$.

Proposição 1.5.10. *Seja $G*H$ o produto livre dos grupos G e H. O subgrupo comutador $[G,H]$ de $G*H$ é normal. Além disso, $[G,H]$ é um grupo livre sobre o conjunto $\{[g,h], g \in G, h \in H, g,h \neq 1\}$.*

Teorema 1.5.11. *(Von Dicky) Seja F um grupo livre e $R \subseteq S$ subconjunto de F. Então existe um epimorfismo $\theta \langle X|R\rangle \to \langle X|S\rangle$ o qual fixa cada elemento de X e cujo núcleo é a imagem em $\langle X|R\rangle$ do fecho normal de $S\mathbb{R}$.*

Proposição 1.5.12. *Se G, H e K são grupos e $\alpha : G \to H$ e $\beta : G \to K$ são homomorfismos com α sobrejetora e tais que $Nuc(\alpha) \subseteq Nuc(\beta)$, então existe um homomorfismo $\lambda : H \to K$ tal que $\alpha\lambda = \beta$.*

$$\begin{tikzcd}
Nuc(\beta) \arrow[dr] & & H \arrow[dd, "\gamma"] \\
& G \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & \\
Nuc(\alpha) \arrow[uu] \arrow[ur] & & K
\end{tikzcd}$$

Definição 1.5.13. (Transformação de Tietze) Consideremos o grupo G com a apresentação

$$G = \langle a,b,c,...|P,Q,R\rangle . \tag{1.6}$$

As seguintes operações com os geradores e relatores de G são chamadas de *transformações de Tietze*:

(T_1) Se as palavras $S,T,...$, são deriváveis de $P,Q,R,...$, então adicionamos $S,T,...$ nas relações definidoras de 1.6;

(T_2) Caso alguns dos relatores, digamos S, T,..., listados nas relações definidoras P, Q, R,..., sejam deriváveis de outros, então deletamos S, T,..., das relações definidoras de 1.6;

(T_3) Quando K, M,... são quaisquer palavras em $a,b,c,...$, então adjuntamos os símbolos $x,y,...$, aos geradores em 1.6 e as relações $x = K$, $y = M$,... às relações definidores;

(T_4) Se alguma das relações em 1.6 é da forma $p = V$, $q = W$,..., onde p, q,..., geradores e

$V, W, \ldots$ palavras nos geradores fora de p, $q, \ldots$, então deletamos $p = V$, $q = W \ldots$, das relações definidoras.

H. Tietze mostrou que, dada uma apresentação $G = \langle a, b, c, \ldots | P, Q, R \rangle$ para um grupo G, qualquer outra apresentação de G pode ser obtida por repetidas aplicações de T_1, T_2, T_3, T_4.

1.6 Sequências Exatas

Definição 1.6.1. Uma sequência de homomorfismos de grupos

$\ldots G_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} G_i \xrightarrow{f_i} G_{i+1} \ldots$ é exata em G_i se $Im(f_{i-1}) = Nuc(f_i)$. A sequência é dita exata quando for exata em cada G_i. Em particular,

(i) $1 \longrightarrow B \xrightarrow{\alpha} C$ é exata se, e somente se, α é injetora.

(ii) $B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 1$ é exata se, e somente se, β é sobrejetora.

(iii) $1 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 1$ é exata se, e somente se, α é injetora, β sobrejetora e β induz um isomorfismo de $B/Im(\alpha)$ sobre C.

1.7 Multiplicador de Schur

O Multiplicador de Schur foi introduzido inicialmente por I. Schur no início do século passado, com o propósito de estudar representações projetivas de grupos. A partir daí, inúmeras aplicações do Multiplicador de Schur surgiram em diversas áreas, tais como em teoria de números algébricos e classificação de grupos finitos.

Definição 1.7.1. [37] O Multiplicador de Schur , $M(G)$, de um grupo G é definido como sendo o segundo grupo de cohomologia de $H^2(\mathbb{Q}, \mathbb{C}^\times)$, onde $\mathbb{C}^\times$ denota o grupo multiplicativo dos complexos não nulos com G-ação trivial.

Mencionamos que se G é um grupo finito, $G = F/R$, onde F é um grupo livre , então o Multiplicador de Schur pode ser expresso pela "Fórmula de Hopf":

$$M(G) \cong \frac{F' \cap R}{[F,R]}.$$

Proposição 1.7.2. *[37] Considerando G um grupo qualquer, temos:*

(i) $M(G)$ depende apenas de G e não da apresentação $\langle X|R \rangle$ para G;

(ii) Quando G é um grupo finito, $M(G)$ é um grupo abeliano finito e o expoente de $M(G)$ divide $|G|$.

Proposição 1.7.3. *[37] Seja G um grupo finito e $\widetilde{G}$ um grupo que possui um subgrupo central A tal que $\widetilde{G}/A \cong G$. Então $A \cap \widetilde{G}'$ é uma imagem homomórfica de $M(G)$.*

Definição 1.7.4. Se, na proposição anterior, $A \subseteq \widetilde{G}' \cap Z(\widetilde{G})$ e $|A| = |M(G)|$, então dizemos que $\widetilde{G}$ é um grupo de recobrimento (de Schur) de G.

1.8 O Produto Tensorial Usual de Módulos

Para o que segue, R é um anel com unidade e.

Definição 1.8.1. Um grupo abeliano (aditivo) M é um R-módulo à esquerda se existe uma função $R \times M \to M$, sendo $(r,m) \mapsto rm$, tal que:

(i) $r(m+m') = rm + rm'$;

(ii) $(r+r')m = rm + r'm$;

(iii) $(rr')m = r(r'm)$;

(iv) $em = m$,

para todos $m,m' \in M, r,r' \in M'$.

Da mesma maneira, definimos um R-módulo à direita. Se R é também comutativo, todo R-módulo à direita M pode ser considerado um R-módulo à esquerda definindo $rm = mr$, $\forall m \in M, r \in R$.

Definição 1.8.2. Se M é um R-módulo à direita, N um R-módulo à esquerda e G um grupo abeliano aditivo, então uma função R-biaditiva é uma aplicação $M \times N \to G$ tal que:

(i) $f(m+m',n) = f(m,n) + f(m',n)$;

(ii) $f(m, n+n') = f(m,n) + f(m,n')$;

(iii) $f(mr, n) = f(m, rn)$;

para todos $m, m' \in M, n, n' \in N$ e $r \in R$.

Admitamos que M é um R-módulo à direita e N um R-módulo à esquerda. Neste caso, temos:

Definição 1.8.3. Um produto tensorial de M e N, denotado por $M \otimes_R N$, é um grupo abeliano T junto com uma função R-biaditiva φ tal que, para todo grupo abeliano G e toda função R-biaditiva $f : M \times N \to G$, existe um único homomorfismo $\overline{f} : T \to G$ cujo diagrama, apresentado a seguir, é comutativo.

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & T \arrow[d, dotted, "\overline{f}"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Proposição 1.8.4. *Se M e N são grupos abelianos finitamente gerados com M ou N finito, então $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ é finito.*

Proposição 1.8.5. *Se p e q são números primos entre si, então $Z_p \otimes_{\mathbb{Z}} Z_q$ é o grupo trivial, com $Z_p = Z/pZ$.*

1.9 O Funtor Quadrático de Whitehead

Nesta seção, definimos o funtor quadrático de Whitehead [2] Γ e vimos algumas de suas propriedades. As demonstrações dos resultados podem ser encontradas em [41].

Definição 1.9.1. Dado um grupo abeliano $(aditivo) A$, ΓA é o grupo gerado por todos os símbolos $\gamma(a)$ com $a \in A$ satisfazendo as relações

$$\gamma(-a) = \gamma(a) \tag{1.7}$$

[2] Este conceito foi introduzido por J.H.C. Whitehead no estudo de certas sequências exatas [41].

$$\gamma(a+b+c)+\gamma(a)+\gamma(b)+\gamma(c)=\gamma(a+b)+\gamma(b+c)+\gamma(c+a), \tag{1.8}$$

para todos os elementos $a,b,c \in A$.

Proposição 1.9.2. *Existem os isomorfismos:*

$$\Gamma\mathbb{Z}_n \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_n, & \textit{se } n \textit{ é ímpar} \\ \mathbb{Z}_{2n}, & \textit{se } n \textit{ é par} \end{cases}$$

Proposição 1.9.3. *Sejam A e B grupos abelianos. Então temos:*

$$\Gamma(A\otimes B)\cong \Gamma A\otimes\Gamma B\otimes(A\otimes_{\mathbb{Z}} B).$$

Proposição 1.9.4. *Se A é um grupo abeliano finito, então ΓA também é finito.*

1.10 O Produto Tensorial Não Abeliano de Grupos

O produto tensorial não abeliano de grupos G e H, da maneira como foi introduzido por Brown-Loday [7], generaliza o produto tensorial usual $\frac{G}{G'}\otimes_{\mathbb{Z}}\frac{H}{H'}$, dos grupos abelianizados, uma vez que leva em conta as ações de G sobre H e de H sobre G, sob a hipótese de que essas ações são compatíveis.

Especificamente, uma ação de um grupo G sobre um grupo H é um homomorfismo $\theta : G \to Aut(H)$, sendo $Aut(H)$ o grupo de automorfismos de H. Escrevemos $(h)\theta_g$ como h^g, representando, assim, uma ação à direita de H. Se θ é o homomorfismo trivial, então dizemos que G age trivialmente sobre H ou que H é G-trivial.

Sejam G e H dois grupos munidos de uma ação de G sobre H e de uma ação de H sobre G. Suponhamos também que cada um desses grupos atue sobre si mesmo por conjugação, isto é, $g,x \in G$ e $h,y \in H$, $g^x = x^{-1}gx$ e $h^y = y^{-1}hy$. Podemos afirmar que as ações de G sobre H e de H sobre G são ações compatíveis quando para todos $g,g_1 \in G$, $h,h_1 \in H$ tivermos:

$$g^{(h^{g_1})} = \left(\left(g^{g_1^{-1}}\right)^h\right)^{g_1} \tag{1.9}$$

$$h^{\left(g^{h_1}\right)} = \left(\left(h^{h_1^{-1}}\right)^{g}\right)^{h_1} \tag{1.10}$$

para todos $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$.

Se G e H atuam um sobre o outro compativelmente, o produto tensorial não abeliano, $G \otimes H$, é definido como o grupo gerado por todos os símbolos $g \otimes h$, $g \in G$, $h \in H$ satisfazendo as relações:

$$gg_1 \otimes h = (g^{g_1} \otimes h^{g_1})(g_1 \otimes h) \tag{1.11}$$

$$g \otimes hh_1 = (g \otimes h_1)\left(g^{h_1} \otimes h^{h_1}\right) \tag{1.12}$$

para todos $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$. Tal grupo é denotado por $G \otimes H$.

Notamos que as relações (1.11) e (1.12) têm a forma das identidades de comutadores quando $g \otimes h$ é substituído por $[g, h]$.

Observamos também que, se $g_1 = 1$ em (1.11) e $h_1 = 1$ em (1.12), temos então que $g \otimes 1 = 1 \otimes h$ é o elemento neutro de $G \otimes H$, com $g \in G$ e $h \in H$. Além disso, se G e H são subgrupos normais de um grupo E, podemos considerar a ação de um grupo sobre o outro dada por conjugação em E.

Ressaltamos ainda que, se considerarmos G e H grupos agindo um sobre o outro, com G abeliano e H é G-trivial, verifica-se facilmente que tais ações são compatíveis.

Exemplo 1.10.1. Considere $G = \langle a | a^2 \rangle$ e $H = \langle b | b^3 \rangle$.

Suponhamos que a ação de H sobre G é trivial e que G age sobre H por $b^a = b^{-1}$.

Utilizando as relações (1.11) e (1.12), obtemos $C_2 \otimes C_3 = \left\langle a \otimes b | (a \otimes b)^3 \right\rangle \cong C_3$.

Agora, se G e H agem um sobre o outro trivialmente, tem-se que $C_2 \otimes C_3 = 1$.

A noção de emparelhamento permite-nos determinar imagens homomórficas de $G \otimes H$.

Definição 1.10.2. Seja L um grupo. Uma função $\phi : G \times H \to L$ é chamada biderivação se para todos $g, g' \in G$, $h, h' \in H$,

$$(gg',h)\phi = \left(g^{g'},h^{g'}\right)\phi(g',h)\phi;$$

$$\left(g,hh^{'}\right)\phi = \left(g,h^{'}\right)\phi\left(g^{h'},h^{h^{'}}\right)\phi.$$

Proposição 1.10.3. *[7] Um emparelhamento $\phi : G \times H \to L$ determina um único homomorfismo de grupos $\phi^* : G \otimes H \to L$ tal que $(g \otimes h)\,\phi^* = (g,h)\phi$, para todos $g,h \in G$.*

Esta proposição é frequentemente usada, por exemplo, na prova das duas próximas proposições, cujas demonstrações podem ser encontradas em [8].

Proposição 1.10.4. *Os grupos G e H atuam sobre $G \otimes H$ de modo que*

$$(g_1 \otimes h)^g = \left(g_1^g \otimes h^g\right);$$

$$(g \otimes h_1)^h = \left(g^h \otimes {h_1}^h\right),$$

para todos $g,g_1 \in G, h,h_1 \in H$. Consequentemente, temos uma ação de $G * H$ sobre o $G \otimes H$ dada por

$$(g \otimes h)^p = (g^p \otimes h^p)\text{, com } g \in G,\ h \in H \text{ e } p \in G * H.$$

Proposição 1.10.5. *Existe um único isomorfismo*

$$\nu : G \otimes H \to H \otimes G \tag{1.13}$$

tal que $(g \otimes h)\,\nu = (h \otimes g)^{-1}$ para todos $g \in G$, $h \in H$.

Proposição 1.10.6. *[8] Para todos $g,g_1 \in G$, $h,h_1 \in H$, temos*

(i) $\left(g^{-1} \otimes h\right)^g = (g \otimes h)^{-1} = \left(g \otimes h^{-1}\right)^h$;

(ii) $(g \otimes h)^{-1}(g_1 \otimes h_1)(g \otimes h) = (g_1 \otimes h_1)^{[g,h]} = \left(g^{-1} \otimes h^{-1}\right)^{g^{-1}} g^h = (g_1 \otimes h_1)^{h^{-g}h}$;

(iii) $\left(g^{-1}g^h \otimes h_1\right) = (g \otimes h)^{-1}(g \otimes h)^{h_1}$;

(iv) $\left(g_1 \otimes h^{g^{-1}}h\right) = (g \otimes h)^{-g_1}(g \otimes h)$;

(v) $[g \otimes h, g_1 \otimes h_1] = g^{-1}g^h \otimes h_1^{-g_1}h_1$.

Definição 1.10.7. Um módulo cruzado é um homomorfismo de grupos $\mu : M \to P$ junto com uma ação de P sobre M satisfazendo as seguintes condições:

$$(m^p)\,\mu = p^{-1}\,(m)\,\mu p, \text{ para todos } p \in P, m \in M;$$

$$(m_1)^{(m)\mu} = m^{-1}m_1m, \text{ para todos } m, m_1 \in M.$$

Proposição 1.10.8. *[8] Existem homomorfismos de grupos $\lambda : G \otimes H \to G$, $\mu : G \otimes H \to H$, tais que*

(i) $(g \otimes h)\,\lambda = g^{-1}g^h$, $\quad (g \otimes h)\,\lambda = h^{-g}h$;

(ii) Os homomorfismos λ, μ com as ações dadas na proposição (1.10.4) são módulos cruzados;

(iii) Se $g \in G$, $h \in H$, $t \in G \otimes H$, então

$$t\lambda \otimes h = t^{-1}t^h \quad g \otimes t\mu = t^{-g}t;$$

(iv) $t\lambda \otimes t_1\mu = [t, t_1]$ para todos $t, t_1 \in G \otimes H$;

(v) As ações de G sobre $Nuc\,(\mu)$ e de H sobre $Nuc\,(\lambda)$ são triviais.

Proposição 1.10.9. *[29] Se G atua trivialmente sobre H e H atua trivialmente sobre G, então*

$$G \otimes H \cong G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} H^{ab}.$$

Uma vez que a ação por conjugação de um grupo G sobre si mesmo satisfaz (1.9) e (1.10), o quadrado tensorial não abeliano $G \otimes G$ de um grupo G pode sempre ser definido.

1.11 O Quadrado Tensorial não Abeliano de um Grupo

Logo após a publicação dos trabalhos de Brown e Loday [7], no qual mostraram a importância do produto tensorial não abeliano de grupos, vários artigos surgiram sobre este assunto. Alguns investigaram propriedades gerais do produto tensorial não abeliano, enquanto outros concentraram-se na descrição do quadrado tensorial não abeliano de certas classes de grupos.

Mencionamos, dentre alguns resultados estabelecidos para o quadrado tensorial em [8], as seguintes proposições:

Proposição 1.11.1. *Se G é um grupo livre, então*

$$G \otimes G \cong G' \times \Gamma\left(G^{ab}\right),$$

sendo que Γ é o Funtor de Whitehead descrito na seção (1.9).

Proposição 1.11.2. *Seja G é um grupo perfeito. Então $G \otimes G$ é o grupo de recobrimento de G, a menos de isomorfismo.*

Proposição 1.11.3. *Existem os isomorfismos:*

$$Q_n \otimes Q_n \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_n\ , & se\ n\ \acute{e}\ \acute{i}mpar, \\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2n} \times \mathbb{Z}_{2+k} \times \mathbb{Z}_2\ , & se\ n = 4r + k, onde\ k = 0\ ou\ k = 2. \end{cases}$$

Proposição 1.11.4. *Seguem os isomorfismos:*

$$D_n \otimes D_n \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_n, & se\ n\ \acute{e}\ \acute{i}mpar, \\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, & se\ n\ \acute{e}\ par. \end{cases}$$

Na sequência abordamos alguns resultados de N. Rocco ([34] e [35]), sobre uma construção relacionada ao quadrado tensorial não abeliano de grupos. Especificamente, sejam G e G^{φ} dois grupos isomorfos por meio do isomorfismo $\varphi : g \mapsto g^{\varphi}$, $\forall g \in G$. O referido grupo é definido por

$$\nu(G) := \left\langle G, G^{\varphi} |\ \left[g_1, g_2^{\varphi}\right]^{g_3} = \left[g_1{}^{g_3}, (g_2{}^{g_3})^{\varphi}\right] = [g_1, g_2{}^{\varphi}]^{g_3^{\varphi}}, \forall g_1, g_2, g_3 \in G \right\rangle.$$

O exemplos a seguir foram obtidos através de uma técnica encontrada em [35] para calcular $\nu(G)$, quando G é abeliano finitamente gerado.

Exemplo 1.11.5. (i) $\nu(C_2) \cong D_4$;

(ii) $\nu(C_3) \cong B(2,3)$ (grupo de Burnside 2-gerado de expoente 3, com ordem 27).

Consideremos o subgrupo $\Upsilon(G) = [G, G^{\varphi}]$ de $\nu(G)$.

A relação entre $\nu(G)$ e $G \otimes G$ foi dada pelo resultado:

Proposição 1.11.6. *[34] $G\otimes G\cong\Upsilon(G)$, através do isomorfismo $g\otimes h\mapsto[g,h^{\varphi}]$.*

Proposição 1.11.7. *[34] Vale o isomorfismo:*

$$\nu(G)\cong((G\otimes G)\rtimes G)\rtimes G.$$

Rocco [34] dá uma prova alternativa da finitude de $\nu(G)$ quando G é finito usando uma conexão entre $\nu(G)$ e um grupo $\chi(G)$, introduzido por S. Sidki [39] e definido por:

$$\chi(G)=\langle G,G^{\varphi}\,|\,[g,g^{\varphi}]=1,\forall g\in G\rangle.$$

A seguir citamos um resultado de [39] sobre $\chi(G)$.

Teorema 1.11.8. *Seja G um π-grupo (π um conjunto de números primos), nilpotente finito ou solúvel finito. Então $\chi(G)$ é também um π-grupo finito, nilpotente finito ou solúvel finito.*

O grupo $\chi(G)$ tem um subgrupo $R(G)$ tal que as relações $\left[g_1,g_2^{\varphi}\right]^{g_3^{\varphi}}=\left[g_1{}^{g_3},\left(g_2^{g_3}\right)^{\varphi}\right]$ são satisfeitas em $\dfrac{\chi(G)}{R(G)}$ para todos $g_1,g_2,g_3\in G$. Aqui $R(G)=[G,L(G),G^{\varphi}]$ com $L(G):=\left\langle g^{-1}g^{\varphi}|g\in G\right\rangle$.

Seja $\Delta(G)$ o subgrupo de $\nu(G)$ gerado por todos os comutadores $[g,g^{\varphi}]$, com $g\in G$.

Deste modo, temos:

Teorema 1.11.9. *[35] Para todo grupo G,*

$$\frac{\chi(G)}{R(G)}\cong\frac{\nu(G)}{\Delta(G)}.$$

Além disso, $\Delta(G)\leq\nu(G)'\cap Z(\nu(G))$.

O teorema anterior e Proposição 1.7.3 implicam que $\Delta(G)$ é imagem homomórfica do Multiplicador de Schur de $\dfrac{\chi(G)}{R(G)}$. Isto, juntamente com o Teorema 1.11.8 e a Proposição 1.7.2-(ii), fornece

Teorema 1.11.10. *[34] Seja G um π-grupo finito, nilpotente finito ou solúvel de comprimento derivado finito. Então $\nu(G)$ é também um π-grupo finito, nilpotente finito ou solúvel de grau finito.*

Observe que o resultado acima dá uma prova alternativa da finitude de $G \otimes G$ quando G é finito. A seguir citamos algumas propriedades do grupo $\nu(G)$.

Lema 1.11.11. *[34] Em $\nu(G)$ seguem as seguintes relações:*

(i) $\left[g_1, g_2^{\varphi}\right]^{\left[g_3, g_4^{\varphi}\right]} = \left[g_1, g_2^{\varphi}\right]^{\left[g_3, g_4\right]}$; $\forall g_1, g_2, g_3, g_4 \in G$;

(ii) $\left[g_1, g_2^{\varphi}, g_3\right] = \left[g_1, g_2, g_3^{\varphi}\right] = \left[g_1, g_2^{\varphi}, g_3^{\varphi}\right]$;

$\left[g_1^{\varphi}, g_2, g_3\right] = \left[g_1^{\varphi}, g_2, g_3^{\varphi}\right] = \left[g_1^{\varphi}, g_2^{\varphi}, g_3\right]$, $\forall g_1, g_2, g_3, g_4 \in G$;

(iii) $[g, g^{\varphi}]$ *é central em* $\nu(G)$; $\forall g \in G$;

(iv) $\left[g_1, g_2^{\varphi}\right]\left[g_1, g_2^{\varphi}\right]$ *é central em* $\nu(G)$, $\forall g_1, g_2 \in G$;

(v) $[g, g^{\varphi}] = 1$, *para todo* $\forall g \in G'$.

Lema 1.11.12. *[35] Sejam G um grupo e g, h elementos de G. Então*

(i) $[g, h^{\varphi}] = [gh, (gh)^{\varphi}]\,[h, h^{\varphi}]^{-1}\,[g, g^{\varphi}]^{-1}$ $(\in \Delta(G))$;

(ii) $[g, h^{\varphi}]\,[h, g^{\varphi}] = [h, g^{\varphi}]\,[g, h^{\varphi}]$;

(iii) Se $g \in G'$, *então* $[g, h^{\varphi}]\,[h, g^{\varphi}] = 1$;

(iv) Se $gG' = hG'$, *então* $[h, h^{\varphi}] = [g, g^{\varphi}]$;

(v) Denote por $o'(x)$ a ordem da classe xG'. Se $o'(g)$ ou $o'(h)$ é finita, então $[g, h^{\varphi}]\,[h, g^{\varphi}]$ tem ordem dividindo o mdc $(o'(g), o'(h))$;

(por um abuso de notação consideramos mdc$(n, \infty) := n$ para um número natural n);

(vi) Se $o'(h)$ é finito, então $[h, h^{\varphi}]$ tem ordem dividindo o mdc$(o'(h)^2, 2o'(h))$.

Ainda no estudo do quadrado tensorial, Russel D. Blyth e Robert Fitzgerald Morse [4] provaram que se G é policíclico então $G \otimes G$ e $\nu(G)$ são também policíclicos. Além disso, estendem o resultado de Rocco [35], exibindo um conjunto de geradores para o subgrupo $[G, G^{\varphi}]$ de $\nu(G)$ obtido por meio da seguinte proposição:

Proposição 1.11.13. *Seja G um grupo policíclico com geradores policíclicos $g_1, \ldots, g_k$. Então o subgrupo $[G, G^{\varphi}]$ de $\nu(G)$ é gerado por $\left\{\left[g_i, g_i^{\varphi}\right], \left[g_i^{\varepsilon}, (g_j^{\varphi})^{\delta}\right], \left[g_i, g_j^{\varphi}\right]\left[g_j, g_i^{\varphi}\right]\right\}$, para $1 \leq i, j \leq k$, $i \neq j$; sendo*

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & se \ |g_i| < \infty \\ \pm 1, & se \ |g_i| = \infty \end{cases}$$

$$\delta = \begin{cases} 1, & se \ |g_j| < \infty \\ \pm 1, & se \ |g_j| = \infty \end{cases}$$

Exemplo 1.11.14. Com o auxílio da Proposição 1.11.13 e de algumas propriedades de $\nu(G)$, explicitadas sob a forma dos Lemas 1.11.11 e 1.11.12, obtemos:

(i) $[D_p, D_p{}^{\varphi}] \cong C_2 \times C_p$, se p é ímpar;

(ii) $[D_p, D_p{}^{\varphi}] \cong C_p \times C_2^3$, se p é par;

(iii) $\left[D_\infty, D_\infty^{\varphi}\right] \cong C_2^3 \times C_\infty$.

Encerramos esta seção apresentando alguns resultados do trabalho de Irene Nakaoka.

Nakaoka ([27]) introduziu o operador η que generaliza o operador ν para o caso de dois grupos G e H que agem um sobre o outro de maneira compatível.

Considerando H^{φ} uma cópia de H, com $\varphi : h \mapsto h^{\varphi}, \forall h \in H$, temos:

$$\eta\,(G,H) := \left\langle G, H^{\varphi} \middle| \, [g,h^{\varphi}]^{g_1} = \left[g^{g_1}, (h^{g_1})^{\varphi}\right], \left[g,(h)^{\varphi}\right]^{(h_1)^{\varphi}} = \left[g^{h_1}, \left(h^{h_1}\right)^{\varphi}\right], \forall g, g_1 \in G, \forall h, h_1 \in H \right\rangle.$$

Observamos que se $G = H$ e a ação é por conjugação, então $\eta\,(G,G) = \nu\,(G)$.

Nesta situação mais geral valem resultados semelhantes aos das Proposições 1.11.6 e 1.11.7, quais sejam:

Proposição 1.11.15. *Em [27], temos:*

(i) $[G, H^{\varphi}] \cong G \otimes H$;

(ii) $\eta\,(G,H) \cong ((G \otimes H) \rtimes G) \rtimes H$.

De acordo com o isomorfismo dado por meio da Proposição 1.11.15, podemos reformular o resultado de Brown, Johnson e Robertson, expresso na Proposição 1.10.6, da seguinte maneira:

Proposição 1.11.16. *[8] Para todos $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$ temos:*

(i) $\left[g^{-1}, h^{\varphi}\right]^{g} = [g, h^{\varphi}]^{-1} = \left[g, (h^{-1})^{\varphi}\right]$;

(ii) $[g, h^{\varphi}]^{-1}\left[g_1, h_1^{\varphi}\right][g, h^{\varphi}] = \left[g_1, h_1^{\varphi}\right]^{[g,h]} = \left[g_1, h_1^{\varphi}\right]^{g^{-1}g^{h}} = \left[g_1, h_1^{\varphi}\right]^{h^{-g}h}$;

(iii) $\left[g^{-1}g^{h}, h_1{}^{\varphi}\right] = [g, h^{\varphi}]^{-1}[g, h^{\varphi}]^{h_1}$;

(iv) $[g_1, (h^{-g}h)^{\varphi}] = [g, h^{\varphi}]^{-g_1}[g, h^{\varphi}]$;

(v) $\left[[g, h^{\varphi}], \left[g_1, h_1^{\varphi}\right]\right] = \left[g^{-1}g^{h}, (h_1^{-g_1}h_1)^{\varphi}\right]$.

Capítulo 2

O Quadrado Tensorial não Abeliano de um Grupo Nilpotente de Classe 2

Nesta segunda parte, expomos alguns resultados sobre o quadrado tensorial de um grupo nilpotente de classe 2, e damos uma prova alternativa para o resultado:

Teorema 2.0.17. *(M. Bacon) [2]: Se G é um grupo nilpotente de classe 2 com $d(G) = n$, então $d(G \otimes G) \leq \dfrac{n(n^2+3n-1)}{3}$.*

Em [8], Brown, Johnson e Robertson levantaram a questão sobre a possibilidade de se obter alguma estimativa geral para $d(G \otimes G)$ em termos de $d(G)$, quando G é um grupo finito. Michael R. Bacon [2] contribuiu com este problema apresentando uma estimativa para $d(G \otimes G)$ em termos de $d(G)$ no caso em que G é nilpotente de classe 2, finitamente gerado.

Neste momento faremos a exposição dos resultados obtidos por M. Bacon [2] e usados na demonstração do citado teorema.

Lema 2.0.18. *Seja G um grupo nilpotente de classe 2. Então para qualquer $a, b \in G$ e qualquer $n \in \mathbb{Z}$,*

$$[a, b^n] = [a^n, b] = [a, b]^n \text{ e } (ab)^n = a^n b^n [b, a]^{\binom{n}{2}}.$$

Proposição 2.0.19. *Se G é um grupo nilpotente de classe 2, então $G \otimes G$ é abeliano e $1_{\otimes} = [g, h] \otimes [g', h']$ para todos $g, h, g', h' \in G$.*

Proposição 2.0.20. *Seja G um grupo nilpotente de classe 2. Então as relações definidoras para G reduzem-se a*

$$gg' \otimes h = (g \otimes h)(g' \otimes h)([g,g'] \otimes h)(g \otimes [h,g']); \tag{2.1}$$

$$g \otimes hh' = (g \otimes h)(g \otimes h')(g \otimes [h,h'])([g,h'] \otimes h). \tag{2.2}$$

Corolário 2.0.21. *Se G é um grupo nilpotente de classe 2, então as seguintes relações acontecem para todos $g,h,t \in G$:*

$$([g,h] \otimes t)(h \otimes [g,t])(g \otimes [t,h]) = 1_{\otimes}; \tag{2.3}$$

$$(g \otimes [h,t])([g,t] \otimes h)([h,g] \otimes t) = 1_{\otimes}; \tag{2.4}$$

$$([g,h] \otimes t) = (t \otimes [g,h])^{-1}. \tag{2.5}$$

Lema 2.0.22. *Seja G um grupo nilpotente de classe 2. Então*

$$\prod_{i=1}^{n} g_i \otimes h = \prod_{i=1}^{n}(g_i \otimes h)\prod_{i=2}^{n}\prod_{j=1}^{i-1}(g_i \otimes [h,g_j]), \tag{2.6}$$

para todos $g_1,...,g_n,h \in G$;

$$g \otimes \prod_{i=1}^{n} g_i = \prod_{i=1}^{n}(g \otimes g_i)\prod_{i=2}^{n}\prod_{j=1}^{i-1}([g,g_j] \otimes g_i), \tag{2.7}$$

para todos $g,g_1,...,g_n \in G$;

$$\prod_{i=1}^{n} g_i \otimes \prod_{j=1}^{n} h_j = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(g_i \otimes h_j)M, \tag{2.8}$$

para todos $g_1,...,g_n,h_1,...,h_m \in G$, sendo

$$M=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\prod_{k=1}^{j-1}([h_j,g_i] \otimes h_k)\prod_{i=2}^{n}\prod_{k=1}^{i-1}\prod_{j=1}^{m}(g_k \otimes [g_i,h_j]).$$

Como consequência temos

Lema 2.0.23. *Seja G um grupo nilpotente de classe 2. Então para todos $g,h \in G$ e para quaisquer $m,n \in \mathbb{Z}$,*

$$g^n \otimes h^m = (g \otimes h)^{mn} (h \otimes [h,g])^{n\binom{m}{2}} (g \otimes [h,g])^{m\binom{n}{2}}.$$

O próximo resultado nos fornece um conjunto de geradores para $G \otimes G$, bem como uma expressão explícita para cada $g \otimes h$ em termos desses geradores. Desse resultado seguirá uma estimativa para $d(G \otimes G)$.

Proposição 2.0.24. *Seja G um grupo nilpotente de classe 2 e $G = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$. Então $G \otimes G$ é gerado por todos os elementos da forma $g_i \otimes g_j$, $1 \leq i, j \leq n$, $g_i \otimes [g_j, g_k]$, $1 \leq j < k \leq n$.*

Demonstração. Considere $g, h \in G$. Então g e h podem ser representados por $g = UV$ e $h = U'V'$, sendo

$$U = \prod_{i=1}^{n} g_i^{m_i}, \quad V = \prod_{1 \leq j < k \leq n}^{m} [g_j, g_k]^{l_{jk}}, \quad U' = \prod_{i=1}^{n} g_i^{m_i'}, \quad V' = \prod_{1 \leq j < k \leq n}^{m} [g_j, g_k]^{l_{jk}'},$$

com $m_i, m_i', l_{jk}, l_{jk}'$ números inteiros. Assim, qualquer gerador de $g \otimes h$ de $G \otimes G$ pode ser escrito como $UV \otimes U'V'$. Como V e V' estão no centro de G, então

$$UV \otimes U'V' = (U \otimes U')(U \otimes V')(V \otimes U')(V \otimes V).$$

Agora, pelo Lema 2.0.22 e Proposição 2.0.19, $V \otimes V' = 1_{\otimes}$. Expandindo $U \otimes V'$ e $U \otimes V'$ pelos Lemas 2.0.22 e 2.0.23 , obtemos:

$$U \otimes V' = \prod_{i=1}^{n} \prod_{1 \leq j < k \leq n} (g_i \otimes [g_j, g_k])^{m_i l_{jk}'} \quad \text{e}$$

$$V \otimes U' = \prod_{i=1}^{n} \prod_{1 \leq j < k \leq n} ([g_j, g_k] \otimes g_i)^{m_i' l_{jk}'},$$

de modo que

$$(U \otimes V')(V \otimes U') = \prod_{i=1}^{n} \prod_{1 \leq j < k \leq n} (g_i \otimes [g_j, g_k])^{m_i l_{jk}' - m_i' l_{jk}}.$$

Novamente, pelo Lema 2.0.22 segue que

$$U \otimes U' = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} ({g_i}^{m_i} \otimes {g_j}^{m_j}) M,$$

onde $M = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{j-1}(\left[g_j,g_i\right]\otimes g_k)^{m'_j m'_k m_i}\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=2}^{n}\prod_{k=1}^{i-1}(g_k\otimes\left[g_i,g_j\right])^{m_k m_i m'_j}$. Combinando os termos, aplicando o Lema 2.0.23 e reindexando-os, mostra-se:

$$U\otimes U' = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(g_i\otimes g_j)^{m_i m'_j}\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(g_i\otimes\left[g_i,g_j\right])^{m'_j\binom{m_i}{2}-m_j\binom{m'_i}{2}}.$$

$\square$

Demonstração do Teorema 2.0.17. A proposição acima nos diz que $G\otimes G$ é gerado por $g_i\otimes g_j$, $1\leq i,j\leq n$, $g_i\otimes\left[g_j,g_k\right]$, $1\leq j<k\leq n$. A estimativa segue da contagem desses geradores, que se deu da seguinte maneira: existem n^2 geradores da forma $g_i\otimes g_j$ e $n(n-1)$ geradores do tipo $g_i\otimes\left[g_j,g_i\right]$, $i\neq j$. Inicialmente há $n(n-1)(n-2)$ geradores da forma $g_i\otimes\left[g_j,g_k\right]$ com i,j,k distintos. Mas, pele Corolário 2.0.21,

$$g_i\otimes\left[g_j,g_k\right] = (g_j\otimes[g_i,g_k])(g_k\otimes\left[g_j,g_i\right]).$$

Assim há apenas $2\binom{n}{3} = \frac{1}{3}n(n-1)(n-2)$ geradores da forma $g_i\otimes\left[g_j,g_k\right]$ e então $d(G\otimes G)\leq n^2+n(n-1)+\frac{1}{3}n(n-1)(n-2) = \frac{1}{3}n(n^2+3n-1)$. $\square$

Passamos à demonstração da prova alternativa da estimativa obtida para $d(G\otimes G)$ (Teorema 2.0.17), via isomorfismo $G\otimes G\cong\Upsilon(G)$. Nesta prova utilizamos um conjunto de geradores policíclicos para $[G,G^{\varphi}]$(Proposição 20, [4]), o que nos permite fazer uma demonstração bastante simplificada.

Demonstração. Seja G um grupo nilpotente de classe 2 gerado por $g_1,...,g_n$. Qualquer elemento de G pode ser escrito na forma

$$g = \prod_{i=1}^{n}g_i^{m_i}\prod_{1\leq j<k\leq n}\left[g_j,g_k\right]^{l_{jk}}.$$

sendo m_i e l_{jk} inteiros.

Assim, em G temos o seguinte conjunto de geradores policíclicos:

$$\{g_i;1\leq i\leq n\}\cup\left\{\left[g_j,g_k\right];1\leq j<k\leq n\right\}. \tag{2.9}$$

Dessa forma, da expressão 2.9 e Proposição 1.11.13, temos que $[G, G^{\varphi}]$ é gerado por:

$$\left\{\left[{g_i}^{\varepsilon}, (g_j^{\varphi})\delta\right]; 1 \leq i, j \leq n\right\}$$

$$\bigcup\left\{\left[g_i^{\varepsilon}, (\left[g_j, g_k\right]^{\varphi})^{\delta}\right]; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j < k \leq n\right\} \bigcup\left\{\left[\left[g_j, g_k\right]^{\delta}, (g_i^{\varphi})^{\varepsilon}\right]; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j < k \leq n\right\}$$

$$\bigcup\left\{\left[[g_r, g_s]^{\delta}([g_t, g_u]^{\varphi})^{\varepsilon}\right]; 1 \leq r < s \leq n, 1 \leq t < u \leq n\right\}, \text{ sendo } \varepsilon \text{ e } \delta \in \{-1, 1\}.$$

Utilizando algumas propriedades de $\nu(G)$, apresentadas sob a forma dos Lemas 1.11.11 e 1.11.12, vimos que o conjunto de geradores acima torna-se:

$$\left\{\left[g_i, g_j^{\varphi}\right]; 1 \leq i, j \leq n\right\} \cup \left\{\left[g_i, \left[g_j, g_k\right]^{\varphi}\right]; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j < k \leq n\right\}. \tag{2.10}$$

Em (2.10) existem n^2 elementos da forma $\left[g_i, g_j^{\varphi}\right]$ e $n(n-1)$ geradores do tipo $\left[g_i, \left[g_j, g_i\right]^{\varphi}\right]$. Resta contarmos os geradores $\left[g_i, \left[g_j, g_k\right]^{\varphi}\right]$, quando i, j, k são distintos com $j < k$. Usando a identidade de Hall-Witt e ainda o fato de $c\ell(\nu(G)) \leq 3$ (Teorema B, [34]) e o Lema 1.11.11, temos

$$\left[(g_j)^{\varphi}, (g_k)^{\varphi}, g_i\right] \left[(g_k)^{\varphi}, (g_i)^{\varphi}, g_j\right] \left[g_i, g_j, (g_k)^{\varphi}\right] = 1.$$

Logo,

$$\left[g_i, \left[g_j, g_k\right]^{\varphi}\right] = \left[g_j, [g_i, g_k]^{\varphi}\right] \left[g_k, \left[g_j, g_i\right]^{\varphi}\right].$$

Portanto, $d([G, G^{\varphi}]) \leq \dfrac{n(n^2+3n-1)}{3}$ e, consequentemente, $d(G \otimes G) \leq \dfrac{n(n^2+3n-1)}{3}$. □

Capítulo 3

O Quadrado q-Tensorial em Certas Classes de Grupos

Nesta terceira etapa de nosso trabalho apresentamos alguns resultados relativos ao produto q-tensorial de grupos, por meio de construções relacionadas. Particularmente, estendemos a estimativa dada por Bacon [2] do caso $q = 0$ para todo inteiro $q \geq 0$. Descrevemos alguns exemplos de grupos G para os quais $G \otimes G$ está imerso em $G \otimes^q G$.

3.1 O Produto q-Tensorial de Grupos

Nesta seção intoduzimos o conceito do produto q-tensorial de grupos.

Seja L um grupo e q um inteiro não negativo. O produto q-tensorial de L-módulos cruzados $\mu : G \to L$ e $\nu : G \to L$ foi definido em [12]. Em particular, quando G e H são subgrupos normais de L, então as inclusões de G e H em L são L-módulos cruzados com ações tomadas por conjugação em L. Neste caso, de acordo com [15], definimos o produto q-tensorial, $G \otimes^q H$, de G e H, para $q \geq 1$, como o grupo gerado pelos símbolos $g \otimes h$ e $\hat{k}$, para todos $g \in G$, $h \in H$, $k \in G \cap H$, sujeitos às relações:

$$(g \otimes hh_1) = (g \otimes h)\left(g^{h_1} \otimes h^{h_1}\right) \tag{3.1}$$

$$gg_1 \otimes h = (g^{g_1} \otimes h^{g_1})(g_1 \otimes h) \tag{3.2}$$

$$(g \otimes h)^{\widehat{k}} = \left(g^{k^q} \otimes h^{k^q}\right) \tag{3.3}$$

$$\widehat{kk_1} = \widehat{k} \prod_{i=1}^{q-1} \left(k \otimes (k_1^{-i})^{k^{q-1-i}})\right) \widehat{k}_1 \tag{3.4}$$

$$\left[\widehat{k}, \widehat{k_1}\right] = k^q \otimes k_1{}^q \tag{3.5}$$

$$\widehat{[g,h]} = (g \otimes h)^q, \tag{3.6}$$

para todos $g, g_1, h, h_1 \in G$ e k_1, $k_2 \in G \cap H$.

Quando $q = 0$ seguimos [7] e definimos o produto 0-tensorial $G \otimes^0 H$ como o grupo gerado pelos símbolos $g \otimes h$, para $g \in G$, $h \in H$ sujeitos às relações (3.1) e (3.2), isto é, como produto tensorial não-abeliano $G \otimes H$.

Ressaltamos, ainda, que (3.1) e (3.2) são relações de comutadores em grupos e que (3.3) a (3.6) podem ser vistas como abstrações das identidades que aparecem em apresentações por potências e comutadores.

Concentramos nosso estudo em um caso particular de $G \otimes^q H$, com $G = H = L$, via construção relacionada, conforme exposto na seção a seguir.

3.2 O Grupo $\nu^q(G)$

O grupo $\nu^q(G)$ foi introduzido em [10] da seguinte maneira: sejam G e G^φ grupos isomorfos por meio do isomorfismo $\varphi : g \to g^\varphi$, $\forall g \in G$. Consideramos $K = \left\{\widehat{k} | k \in G\right\}$ um conjunto de símbolos, um para cada elemento de G. Quando $q = 0$ considera-se K o conjunto vazio. Seja $F(K)$ o grupo livre sobre K e $\nu(G) * F(K)$ o produto livre do grupo $\nu(G)$ com $F(K)$, sendo

$\nu(G)$ o grupo definido no Capítulo 1 ([34]).

De acordo com a estrutura de $\nu(G)$ temos que G e G^{φ} estão imersos no produto livre $\nu(G) * F(K)$. Sendo assim, identificamos os elementos de G e de G^{φ} com suas imagens em $\nu(G) * F(K)$. Estabecelemos J como fecho normal em $\nu(G) * F(K)$ dos elementos:

$$R_1 : (g_1)^{-1}\widehat{k}g_1(\widehat{k^{g_1}})^{-1} \tag{3.7}$$

$$R_2 : \left(g_2^{\varphi}\right)^{-1}\widehat{k}g_2^{\varphi}(\widehat{k^{g_2}})^{-1} \tag{3.8}$$

$$R_3 : (\widehat{k})^{-1}\left[g_1, g_2^{\varphi}\right]\widehat{k}\left[g_1^{k^q}, (g_1^{k^q})^{\varphi}\right]^{-1} \tag{3.9}$$

$$R_4 : (\widehat{k})^{-1}\widehat{kk_1}(\widehat{k_1})^{-1}(\prod_{i=1}^{q-1}\left[k, (k_1{}^{-i})^{\varphi}\right]^{k^{q-1-i}})^{-1} \tag{3.10}$$

$$R_5 : [\widehat{g_1}, \widehat{g_2}]\left[g_1^q, (g_2^q)^{\varphi}\right]^{-1} \tag{3.11}$$

$$R_6 : \widehat{[g_1, g_2]}\left[g_1, g_2^{\varphi}\right]^{-q} \tag{3.12}$$

para todos $g_1, g_2 \in G$ e $k_1, k_2 \in K$.

Definimos o grupo $\nu^q(G)$ por

$$\nu(G) * F(K)/J. \tag{3.13}$$

É importante lembrar que quando q=0 os conjuntos das relações (3.7) a (3.12) são vazios e consequentemente $\nu(G) * F(K)/J \cong \nu(G)$. Além disso, o símbolo "chapéu"que aparece nas relações (3.9), (3.11) e (3.12) externaliza q-ésimas potências. Vamos entender a citada externalização na relação R_4.

Considere x e $y \in G$. Usando indução sobre q, obtemos:

$$(xy)^2 = x^2 \left[x, y^{-1}\right] y^2$$

$$(xy)^3 = x^3 \left[x, y^{-1}\right]^x \left[x, y^{-2}\right] y^3$$

$$\vdots$$

$$(xy)^q = x^q \prod_{i=1}^{q-1} \left[x, y^{-i}\right]^{x^{q-1-i}} y^q$$

Devido à relação R_3, temos que o subgrupo de $\nu^q(G)$ gerado por K normaliza o comutador $[G, G^\varphi]$ em $\nu^q(G)$ e portanto o subgrupo $\Upsilon^q(G) = [G, G^\varphi]\langle K\rangle$ é normal em $\nu^q(G)$.

A relação entre $G \otimes^q G$ com $\nu^q(G)$ foi estabelecida através do seguinte resultado:

Teorema 3.2.1. *[10] Vale o isomorfismo:*

$$\Upsilon^q(G) \cong G \otimes^q G. \tag{3.14}$$

Teorema 3.2.2. *[10] Existe um isomorfismo:*

$$\nu^q(G) \cong ((G \otimes^q G) \rtimes G) \rtimes G. \tag{3.15}$$

O Teorema 3.2.2 generaliza o resultado obtido por Rocco (veja Proposição 1.11.7).

Observações 3.2.3. *Mencionamos que o quadrado q-exterior do grupo G, $G \wedge^q G$, é definido por: $G \wedge^q G = G \otimes^q G/\Delta(G)$.*

A seguir apresentamos algumas propriedades do grupo $\nu^q(G)$.

Lema 3.2.4. *[11] Seja G um grupo arbitrário e q um inteiro não-negativo. As seguintes relações valem em $\nu^q(G)$.*

(i) $\left[g_1, g_2^\varphi\right]^{\left[g_3, g_4^\varphi\right]} = \left[g_1, g_2^\varphi\right]^{\left[g_3, g_4\right]}$, $\forall g_1, g_2, g_3, g_4 \in G$;

(ii) $\left[g_1, g_2^\varphi, g_3\right] = \left[g_1, g_2, g_3^\varphi\right] = \left[g_1, g_2^\varphi, g_3^\varphi\right] =$

$= \left[g_1^\varphi, g_2, g_3^\varphi\right] = \left[g_1^\varphi, g_2^\varphi, g_3\right] \left[g_1^\varphi, g_2^\varphi, g_3\right]$, $\forall g_1, g_2, g_3, g_4 \in G$;

(iii) $[g_1,[g_2,g_3]^{\varphi}] = [[g_2,g_3],g_1^{\varphi}]^{-1}$, $\forall g_1,g_2,g_3 \in G$;

(iv) $\left[\widehat{k},[g_1,g_2{}^{\varphi}]\right] = \left[\widehat{k},[g_1,g_2]\right]$, $\forall g_1,g_2,k \in G$;

(v) $(\widehat{k})^g = \widehat{k}[k^q,g^{\varphi}]$, $\forall g \in G$;

(vi) Se $[g_1,g_2]=1$, *então* $[g_1,g_2^{\varphi}]$ *e* $[g_2,g_1^{\varphi}]$ *são elementos centrais de* $\nu^q(G)$, *de ordem finita dividindo q. Se além disso* g_1,g_2 *são elementos de torção de ordem* $o(g_1)$, $o(g_2)$, *respectivamente, então a ordem de* $[g_1,g_2^{\varphi}]$ *divide o mmc* $(q,o(g_1),o(g_2))$;

(vii) $[g_1,g_1{}^{\varphi}]$ *é central em* $\nu^q(G)$, $\forall g_1 \in G$;

(viii) $[g_1,g_2^{\varphi}]\,[g_2,g_1^{\varphi}]$ *é central em* $\nu^q(G)$, $\forall g_1,g_2 \in G$;

(ix) $[g_1,g_1{}^{\varphi}]=1$, *para todo* $\forall g_1 \in G'$;

(x) Se g_1,g_2,g_2 *são elementos de G tal que* $[g_1,g_2]=1=[g_1,g_3]$, *então* $[g_2,g_3,g_1^{\varphi}]=1=[[g_2,g_3]^{\varphi},g_1]$.

Observações 3.2.5. *Para simplificar a notação, denotaremos os subgrupos* $[G,G^{\varphi}]$ *e* $\langle K\rangle$ *de* $\nu^q(G)$ *por T e* $\mathscr{K}$, *respectivamente.*

Em nosso primeiro resultado calculamos alguns exemplos para $G\otimes^q G$, via isomorfismo $G\otimes^q G \cong \Upsilon^q(G)$, conforme segue:

Proposição 3.2.6. *Seja* $G = D_m$. *Então temos:*

(i) Se m é um inteiro ímpar e q é par ($q=2t$), *então:*

$D_m \otimes^q D_m \cong C_4 \times C_m$ *(t ímpar);*

$D_m \otimes^q D_m \cong C_2{}^2 \times C_m$ *(t par);*

(ii) Se m é par e q é ímpar ou $mdc(q,|G|)=1$, *então* $D_m \otimes^q D_m \cong D_m$;

Seja $G = Q_n$. *Então:*

(iii) Se $mdc(q,|G|)=1$, *então* $Q_n \otimes^q Q_n \cong Q_n$;

Considere $G = D_\infty$, *temos:*

(iv) Para $q \equiv 2 \pmod 4$, *temos* $D_\infty \otimes^q D_\infty \cong C_\infty{}^2 \times C_4$;

(v) Quando $4|q$*, segue que* $D_\infty \otimes^q D_\infty \cong {C_\infty}^2 \times {C_2}^3$

(vi) Se q é ímpar, $D_\infty \otimes^q D_\infty \cong D_\infty$.

Antes de demonstrarmos a Proposição 3.2.6 faremos algumas considerações, que serão utilizadas nas demonstrações dos três primeiros itens da citada proposição.

Seja $D_m = \left\langle x, y \mid x^2, y^m, y^x = y^{-1} \right\rangle$.

Da Proposição 1.11.13, segue que T é gerado pelos elementos $[x, x^\varphi], [x, y^\varphi], [x, y^\varphi][y, x^\varphi], [y, y^\varphi]$. Deste modo, $\Upsilon^q(D_m) = \langle [x, x^\varphi], [x, y^\varphi], [y, x^\varphi], [y, y^\varphi], \widehat{g}, \forall g \in D_m \rangle$

Utilizando a propriedade R_4, as relações de D_4 e o Lema 3.2.4, obtemos:

$$\Upsilon^q(D_m) = \langle [x, x^\varphi], [x, y^\varphi], [x, y^\varphi][y, x^\varphi], [y, y^\varphi], \widehat{x}, \widehat{y} \rangle \tag{3.16}$$

O elemento $[y, y^\varphi]$ tem ordem ≤ 2.

De fato:

$1 = \left[x^2, y^\varphi\right] = [x, y^\varphi]^x [x, y^\varphi]$

$= [x, y^\varphi] [[x, y^\varphi], x] [x, y^\varphi]$

$= [x, y^\varphi] [x, y, x^\varphi] [x, y^\varphi]$ (Lema 3.2.4 - i)

$= [x, y^\varphi] \left[x, [x, y]^\varphi\right]^{-1} [x, y^\varphi]$ (Lema 1.11.12- iii)

$= [x, y^\varphi] \left[x, y^2\right]^{-1} [x, y^\varphi]$ (Lema 3.2.4- i)

$= [x, y^\varphi]^{-1} [[x, y], y^\varphi]^{-1} [x, y]$

$= [x, y^\varphi]^{-1} \left[y^2, y^\varphi\right]^{-1} [x, y^\varphi]$

$= \left[y^2, y^\varphi\right]^{-1}$

O elemento $[x, y^\varphi][y, x^\varphi]$ também tem ordem ≤ 2:

$1 = \left[y, (x^2)^\varphi\right] = [y, x^\varphi][y, x^\varphi]^{x^\varphi}$

$= [y, x^\varphi][y, x^\varphi][[y, x^\varphi], x^\varphi]$

$= [y,x^{\varphi}]\,[y,x^{\varphi}]\,[[y,x]\,,x^{\varphi}]$ (Lema 3.2.4-i)

$= [y,x^{\varphi}]\,[y,x^{\varphi}]\,[x,[y,x^{\varphi}]]^{-1}$ (Lema 1.11.12-iii)

$= [y,x^{\varphi}]\,[y,x^{\varphi}]\,\left[x,(y^{-2})^{\varphi}\right]^{-1}$ (relações de D_m)

$= [y,x^{\varphi}]\,[y,x^{\varphi}]\,[x,y^{\varphi}]\,[x,y^{\varphi}]$ (Lema 3.2.4-iv)

$= ([x,y^{\varphi}]\,[y,x^{\varphi}])^2$

Vê-se facilmente que $[x,x^{\varphi}]$ tem ≤ 2. Além disso, $[x,y^{\varphi}]$ tem ordem m (Proposição 1.11.4).

Demonstração. Caso (i): Seja $m = 2k+1$. Relembremos a expressão (3.16):

$$\Upsilon^q\,(D_mG) = \langle [x,x^{\varphi}]\,,[x,y^{\varphi}]\,,[x,y^{\varphi}]\,[y,x^{\varphi}]\,,[y,y^{\varphi}]\,,\widehat{x},\widehat{y}\rangle$$

Como $y = \left[x,y^kx\right]$, temos que $[y,y^{\varphi}] = 1$ (Lema 3.2.4-ix) e que $[y,x^{\varphi}]\,[x,y^{\varphi}]$ é trivial (Lema 1.11.12-iii).

Portanto, a expressão (3.16) torna-se: $\Upsilon^q\,(D_m) = \langle [x,x^{\varphi}]\,,[x,y^{\varphi}]\,,\widehat{x}\rangle$.

Mas, pela propriedade R_4, temos que $(\widehat{x})^2 = [x,x^{\varphi}]^{\sum_{i=1}^{q-1} i} = [x,x^{\varphi}]^{\frac{q(q-1)}{2}} = [x,x^{\varphi}]^t$.

Desta forma, se t é par então $(\widehat{x})^2 = 1$, caso contrário, $(\widehat{x})^4 = 1$.

Logo, se t é ímpar, $\Upsilon^q\,(D_m) = \left\langle [x,y^{\varphi}]\,,\widehat{x} \mid [x,y^{\varphi}]^m\,,\widehat{x}^2\right\rangle$.

E para t par, $\Upsilon^q\,(D_m) = \left\langle [x,x^{\varphi}]\,,[x,y^{\varphi}]\,,\widehat{x} \mid [x,x^{\varphi}]^2\,,[x,y^{\varphi}]^m\,,(\widehat{x})^2\right\rangle$.

Caso (ii): Os geradores $[x,x^{\varphi}]$, $[x,y^{\varphi}]\,,[y,x^{\varphi}]$ e $[y,y^{\varphi}]$ são triviais, uma vez que possuem ordens dividindo q. Além disso, tem-se que $[x,y^{\varphi}] = [x,(y^{sq})^{\varphi}] = [x,y^{\varphi}]^{sq} = ([x,y^{\varphi}]^q)^s = (\widehat{y})^{2s}$.

Por outro lado, $[\widehat{x},\widehat{y}] = [x^q,(y^{\varphi})^q] = [x,(y^{\varphi})^q] = [x,y^{\varphi}]^q = (\widehat{y})^2$.

Assim, $\Upsilon^q\,(D_m) = \left\langle \widehat{x},\ \widehat{y} \mid \widehat{x}^2,\ \widehat{y}^m,\ \widehat{y}^{\widehat{x}} = \widehat{y}^{-1}\right\rangle$.

Analogamente, mostra-se que $D_m \otimes^q D_m \cong D_m$, quando $\mathrm{mdc}(q,|G|) = 1$.

Caso (iii): Segue análogo ao item anterior.

Passamos às demonstrações dos três últimos itens. Novamente iniciamos com alguns comentários que serão relevantes no decorrer destas demonstrações.

Considere $G = D_\infty = \left\langle x, y \mid x^2, y^x = y^{-1} \right\rangle$.

Pelo Corolário 3.6 ([11]), temos:

$$\Upsilon^q(D_\infty) = \langle [x, x^\varphi], [x, y^\varphi], [x, y^\varphi][y, x^\varphi], [y, y^\varphi], \widehat{x}, \widehat{y} \rangle \tag{3.17}$$

Os elementos $[x, x^\varphi]$, $[y, y^\varphi]$ e $[x, y^\varphi][y, x^\varphi]$ possuem ordens ≤ 2 e suas demonstrações seguem análogo ao caso anterior.

Além disso, $[x, y^\varphi]$ e $\widehat{y}$ têm ordens infinita, devido ao homomorfismo $\Upsilon^q(D_\infty) \to G$, definido por $[x, y^\varphi] \mapsto [x, y]$, $\widehat{y} \mapsto y^q$.

Caso (iv): Mostramos que alguns geradores de $\Upsilon^q(D_\infty)$ podem ser eliminados de (3.17).

De fato,

$[y, y^\varphi] = (\widehat{y})^{-2}[x, y^\varphi]$ (propriedades R_4 e R_6). Além disso, $[x, x^\varphi] = (\widehat{x})^2$

Utilizando a propriedade R_4 e a igualdade $\widehat{xy} = \widehat{y^{-1}x}$, obtemos $[x, y^\varphi] = [y, x^\varphi]^s$, para $s \in \mathbb{Z}$.

Portanto, $\Upsilon^q(D_\infty) = \left\langle [x, y^\varphi], \widehat{x}, \widehat{y} \mid (\widehat{x})^4 \right\rangle$

Caso(v): Segue de forma semelhante ao caso anterior.

Caso (vi): Os elementos $[x, x^\varphi]$ e $[x, y^\varphi][y, x^\varphi]$, $[y, y^\varphi]$ têm ordens dividindo q e portanto são triviais. Além disso, $[x, y^\varphi] = (\widehat{y})^{-2}$ ou $[x, y^\varphi] = \widehat{x}(\widehat{y})^{-2}$

Com efeito,

Utilizando a propriedade R_4, as igualdades $\widehat{y}^{\widehat{x}} = (\widehat{y})^{-1}$, $\widehat{xy} = \widehat{y^{-1}x}$ e ainda o fato do elemento $[x, y^\varphi][y, x^\varphi]$ ser trivial, chegamos em:

$$\left((\widehat{y})^2[x, y^\varphi]\right)^{\frac{q-1}{2}} = 1 \tag{3.18}$$

Se $(\widehat{y})^2[x, y^\varphi]$ tem ordem finita, então $(\widehat{y})^2[x, y^\varphi] = \widehat{x}$. Caso contrário, $(\widehat{y})^2[x, y^\varphi] = 1$.

Portanto, $\Upsilon^q(D_\infty) = \left\langle \widehat{x},\ \widehat{y} \mid (\widehat{x})^2,\ \widehat{y}^{\widehat{x}} = (\widehat{y})^{-1} \right\rangle$.

$\square$

Teorema 3.2.7. *Seja G um grupo nilpotente de classe 2 tal que $d(G) = n$. Então $d(G \otimes^q G) \leq \dfrac{n^3+3n^2+2n}{3}$. Em particular, se G é finito tal $mdc(q,|G|) = 1$, então $d(G \otimes^q G) \leq n^2$.*

Demonstração. No capítulo anterior vimos que se G é nilpotente de classe 2 gerado por $g_1,...,g_n$, então $[G, G^{\varphi}]$ é gerado por

$$\left\{ \left[g_i, g_j^{\varphi}\right]; 1 \leq i,j \leq n \right\} \cup \left\{ \left[g_i, \left[g_j, g_k\right]^{\varphi}\right]; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j < k \leq n \right\}.$$

Logo,

$$\Upsilon^q(G) = \left\langle \left[g_i, g_j^{\varphi}\right], \left[g_i, \left[g_j, g_k\right]^{\varphi}\right], \widehat{g}; g \in G, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j < k \leq n \right\rangle.$$

Por outro lado, $\widehat{g} = \widehat{\prod_{i=1}^{n} g_i^{m_i} M}$, onde $M = \prod_{1 \leq j<k \leq n} \left[g_j, g_k\right]^{\ell_{jk}}$.

Assim, usando a propriedade R_4, temos:

$$\widehat{g} = \widehat{\prod_{i=1}^{n} g_i^{m_i}} \left(\prod_{d=1}^{q-1} \left[\prod_{i=1}^{n} g_i^{m_i}, \prod_{1 \leq j<k \leq n} (\left[g_j, g_k\right]^{-d\ell_{jk}})^{\varphi}\right]^{(\prod_{i=1}^{n} g_i^{m_i})^{q-1-d}}\right) \prod_{1 \leq j<k \leq n} \widehat{\left[g_j, g_k\right]} \tag{3.19}$$

Mostraremos que $\Upsilon^q(G) = \left\langle \left[g_i, (g_j^{\varphi})\right], \left[g_i, \left[g_j, g_k\right]^{\varphi}\right], \widehat{g_i}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j < k \leq n \right\rangle$.

Notamos que $\widehat{\prod g_i^{m_i}}$ pode ser escrito como produto dos geradores $\widehat{g_i}$, $\left[g_j, (g_j^{\varphi})\right]$, $\left[g_i, \left[g_j, g_k\right]^{\varphi}\right]$ de $\Upsilon^q(G)$ com $1 \leq i \leq n, 1 \leq j < k \leq n$.

De fato,

Usando indução sobre m_i e a propriedade R_4 de $\nu^q(G)$, obtemos:

$$\widehat{g_i^{m_i}} = (\widehat{g_i})^{m_i} \left[g_i, g_i^{\varphi}\right]^{\binom{m_i}{2}\binom{q}{2}}.$$

Além disso, pela propriedade R_4 e ainda pelo fato de $\mathscr{K}$ agir trivialmente sobre $[G, G^{\varphi}]$, temos:

$$\widehat{g_i^{m_i} g_j^{m_j}} = \widehat{g_i}^{m_i} \widehat{g_j}^{m_j} \prod_{d=1}^{q-1} \left[g_i^{m_i}, (g_j^{-dm_j})^{\varphi} \right] \left[g_i^{m_i}, (g_j^{-dm_j})^{\varphi}, (g_i^{m_i})^{q-1-d} \right].$$

Mas $\left[g_i^{m_i}, (g_j^{-dm_j})^{\varphi}, (g_i^{m_i})^{q-1-d} \right] = \left[g_i^{m_i}, (g_j^{-dm_j}), ((g_i^{m_i})^{q-1-d})^{\varphi} \right]$ (lema 3.2.4).

E do Lema 2.0.23 segue,

$$\left[g_i^{m_i}, (g_j^{-dm_j})^{\varphi} \right] = \left[g_i, g_j^{\varphi} \right]^{-m_i d m_j} \left[g_j, \left[g_i, g_j \right]^{\varphi} \right]^{-m_i \binom{dm_j}{2}} \left[g_i, \left[g_i, (g_j) \right]^{\varphi} \right]^{-dm_j \binom{m_i}{2}}.$$

Agora, suponhamos que $\widehat{\prod_{i=1}^{n-1} g_i^{m_i}}$ seja produto dos elementos $\widehat{g_i}$, $\left[g_i, g_j^{\varphi} \right]$, $\left[g_i, \left[g_j, g_k \right]^{\varphi} \right]$, sendo $1 \leq j < k \leq n-1$.

Então, $\widehat{\prod_{i=1}^{n} g_i^{m_i}} = (\widehat{\prod_{i=1}^{n-1} g_i^{m_i}}) g_n = \widehat{\prod_{i=1}^{n-1} g_i^{m_i}} (\prod_{d=1}^{q-1} \left[\prod_{i=1}^{n-1} g_i^{m_i}, (g_n^{-d})^{\varphi}) \right]^{(\prod_{i=1}^{n-1} g_i^{m_i})^{q-1-d}}) \widehat{g_n}$

$$= (\widehat{\prod_{g_i} m_i}) \prod_{d=1}^{q-1} \left[\prod_{i=1}^{n-1} g_i^{m_i}, (g_n^{-d})^{\varphi} \right] \left[\prod_{i=1}^{n-1} g_i^{m_i}, (g_n^{-d})^{\varphi}, (\prod_{i=1}^{n-1} g_i^{m_i})^{q-1-d} \right] \widehat{g_n}.$$

Mas, pelos Lemas 2.0.22 e 2.0.23, temos

$$\left[\prod_{i=1}^{n-1} g_i^{m_i}, (g_n^{-d})^{\varphi} \right] = \prod_{i=1}^{n-1} \left[g_i^{m_i}, (g_n^{-d})^{\varphi} \right]$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1} [g_i, g_n^{\varphi}]^{-m_i d} [g_n, [g_i, g_n^{\varphi}]]^{m_i \binom{-d}{2}} [g_i, [g_i, g_n^{\varphi})]]^{-d \binom{m_i}{2}}$$

e

$$\left[\prod_{i=1}^{n-1} g_i^{m_i}, (g_n^{-d})^{\varphi}, (\prod_{i=1}^{n-1} g_i^{m_i})^{q-1-d} \right] = \left[\prod \left[g_i^{m_i}, (g_n^{-d})^{\varphi} \right], (\prod_{i=1}^{n-1} g_i^{m_i})^{q-1-d} \right] = \prod_{i=1}^{n-1} \left[\left[g_i^{m_i}, (g_n^{-d})^{\varphi} \right], (\prod_{j=1}^{n-1} g_j^{m_j})^{q-1} \right.$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1} \left[\left[g_i^{m_i}, (g_n^{-d})^{\varphi} \right], \prod_{j=1}^{n-1} g_j^{m_j} \right]^{q-1-d}$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} \left[[g_i, g_n^{\varphi})]^{-m_i d} [g_n, [g_i, g_n^{\varphi})]]^{m_i \binom{-d}{2}} [g_i [g_i, (g_n)^{\varphi}]]^{-d \binom{m_i}{2}}, (g_j^{m_j}) \right]^{q-1-d}$$

$$=\prod_{i=1}^{n-1}\prod_{j=1}^{n-1}\left[[g_i,g_n^{\varphi}],g_j\right]^{-m_im_jd(q-1-d)}$$

$$=\prod_{i=1}^{n-1}\prod_{j=1}^{n-1}\left[[g_i,g_n]^{\varphi},g_j\right]^{-m_im_jd(q-1-d)}.$$

Por outro lado, dos lemas 2.0.23 e 3.2.4(i), obtemos:

$$\left[\prod_{i}^{n}g_i^{m_i},\prod_{1\leq j<k\leq n}([g_j,g_k]^{-d\ell_{jk}})^{\varphi}\right]^{(\prod_{i=1}^{n}g_i^{m_i})^{q-1-d}}$$

$$=\prod_{i}^{n}\prod_{1\leq j<k\leq n}[g_i,[g_j,g_k]]^{-m_id\ell_{jk}}\left[\prod_{i}^{n}g_i^{m_i},\prod_{1\leq j<k\leq n}([g_j,g_k]^{-d\ell_{jk}})^{\varphi},(\prod_{i=1}^{n}g_i^{m_i})^{q-1-d}\right]$$

$$=\Pi_i^n\prod_{1\leq j<k\leq n}[g_i,[g_j,g_k]]^{-m_id\ell_{jk}}.$$

Das propriedades R_4, R_6 e da nulidade de $[G',(G')^{\varphi}]$, segue que

$\widehat{[g_j,g_k]}^2=[g_j,(g_k)^{\varphi}]^{2q}$, o que permite, por indução sobre n, concluir que:

$$\prod_{1\leq j<k\leq n}\widehat{[g_j,g_k]}=\prod_{1\leq j<k\leq n}(\widehat{[g_j,g_k]})$$

Assim, $\Upsilon^q(G)$ é gerado pelos elementos $\left[g_i,(g_j^{\varphi})\right],\left[g_i,[g_j,g_k]^{\varphi}\right]$ e $\widehat{g_i}$. Destes geradores, existem $\dfrac{n(n^2+3n-1)}{3}$ geradores da forma $\left[g_i,(g_j^{\varphi})\right],\left[g_i,[g_j,g_k]^{\varphi}\right]$ (Teorema 2.0.17) e n geradores do tipo $\widehat{g_i}$.

Logo, $d(\Upsilon^q(G))\leq\dfrac{n^3+3n^2+2n}{3}$. Além disso, se G é um grupo finito com $\mathrm{mdc}(q,|G|)=1$, os geradores da forma $[g_i,g_i^{\varphi})]$ e $\left[g_i,[g_j,g_k]^{\varphi}\right]$ são triviais e, portanto, $d(G\otimes^q G)\leq n^2$.

$\square$

Observamos que se G é abeliano, então $G\otimes^q G$ é abeliano. Este fato foi importante para obtermos um resultado semelhante ao dado pelo Teorema 3.2.7, no caso em que G é um grupo abeliano finitamente gerado.

Teorema 3.2.8. *Se G é um grupo abeliano gerado por $g_1,\cdots,g_n$, então $G\otimes^q G$ é produto direto de, no máximo, n^2+n, grupos cíclicos. Além disso, se G é finito, digamos $G=C_{d_1}\times\cdots\times C_{d_n}$, $d_i\cong\langle g_i\rangle$; $d_1|d_2,...,d_i|d_{i+1}$, $1\leq i\leq n-1$ tal que mdc$(d_n,q)=1$, então $G\otimes^q G$ é produto direto* *de, no máximo, n grupos cíclicos finitos.*

Demonstração. O grupo $\Upsilon^q(G)$ é gerado por $\left[g_i,(g_j^{\varphi})\right]$ e $\widehat{g_i}$. Logo, $\Upsilon^q(G)$ é produto direto, de no máximo, n^2+n grupos cíclicos. Agora, se $\mathrm{mdc}(d_n,q)=1$, então os geradores de T são triviais. Desta maneira, $\Upsilon^q(G)$ é gerado por n elementos.

□

Exemplo 3.2.9. (i) $(C_2\times C_3)\otimes^2(C_2\times C_3)\cong C_{12}\times C_2$;

(ii) $C_\infty\otimes^q C_\infty\cong C_\infty\times C_q$;

(iii) $C_n\otimes^q C_n\cong C_n$, $\mathrm{mdc}(n,q) = 1$.

Passamos agora à exposição de alguns resultados envolvendo o quadrado q-tensorial de um grupo nilpotente de classe 3.

Proposição 3.2.10. *Seja G um grupo nilpotente de classe 3. Então:*

(i)$[\gamma_2(G),G^{\varphi}]$ *é abeliano;*

(ii) $[\gamma_2(G),(\gamma_3(G))^{\varphi}]$ *é trivial.*

Demonstração. Caso (i): Segue diretamente do Lema 3.2.4.

Caso (ii): Novamente pelo Lema 3.2.4, temos que $\left[[g_1,g_2^{\varphi}],[g_3,g_4,g_5^{\varphi}]\right]=1, \forall g_1,g_2,g_3,g_4,g_5\in G$. E, pela Proposição 1.11.16, obtemos $1=\left[[g_1,g_2^{\varphi}],[g_3,g_4,g_5^{\varphi}]\right]=\left[[g_1,g_2],[g_3,g_4,g_5]^{\varphi}\right]$.

□

Proposição 3.2.11. *Seja G um grupo nilpotente de classe 3. Então K age trivialmente sobre* $[\gamma_2(G),G^{\varphi}]$.

Demonstração. *: Usando algumas propriedades de* $\nu^q(G)$ *(Lema 3.2.4), as relações* R_3*,* R_6 *e indução sobre q, obtemos* $[[g,h],t^{\varphi}]^{\widehat{k}}=[[g,h],t^{\varphi}]\,[[g,h],t^{\varphi},k^q]=[[g,h],t^{\varphi}]$*, para todos* $g,h\in G$. □

Como consequência das Proposições 3.2.10 e 3.2.11, temos:

Proposição 3.2.12. *Se G é nilpotente de classe 3, então* $[\gamma_3(G),G^{\varphi}]$ *é central em* $\nu^q(G)$.

O resultado abaixo estende a cota dada por Rocco [34] do caso q=0 para todo inteiro $q \geq 0$.

Proposição 3.2.13. *Seja G um grupo p-grupo finito com $|G| = p^n$, $|G'| = p^m$. Então $|G \otimes^q G| \leq p^{(n+1)(n-m)}$.*

Demonstração. Segue do Corolário 3.12 ([34]) e da sequência

$$\Upsilon(G) \longrightarrow \Upsilon^q(G) \longrightarrow G/G' \longrightarrow 1. \tag{3.20}$$

□

A sequência (3.20) não é exata à esquerda. Dito de outro modo, $G \otimes G$, em geral, não está imerso em $G \otimes^q G$. Um exemplo de que tal exatitude não ocorre pode ser visto quando consideramos um grupo G finito tal que $\mathrm{mdc}(q, |G|) = 1$, isto porque os geradores de $\Upsilon^q(G)$ da forma $[g, g^\varphi]$ tem ordem dividindo q e, portanto, são triviais. Particularmente, se $G = Q_8$ tem-se que $\Upsilon^3(Q_4) \cong Q_4$ com $|T| = 2$ e $|\mathscr{K}| = 8$. No entanto, $\Upsilon(Q_4) \cong C_4 \times C_4 \times C_2 \times C_2$. Por outro lado, se q divide a ordem de G, não podemos garantir que tal imersão ocorra. Por exemplo, se $G = D_4$ e $q = 2$, $\Upsilon(D_4) \cong C_2 \times C_4 \times C_2 \times C_2$ porém, $\Upsilon^2(D_4) \cong C_4 \times C_4 \times C_4$ com $|T| = 16$ e $|\mathscr{K}|$=64. Este exemplo nos permite mostrar que se $q \equiv 2(mod 4)$, então $\Upsilon(D4)$ não está imerso em $\Upsilon^q(D_4)$. Os exemplos acima foram obtidos por meio do GAP [42].

A seguir, construimos um exemplo que nos mostra a não imersão de $D_m \otimes D_m$ em $D_m \otimes^q D_m$, sendo m é um inteiro par.

Seja $D_m = \langle x, y \mid x^2, y^m, y^x = y^{-1} \rangle$.

Logo T é gerado pelos elementos $[x, x^\varphi], [y, y^\varphi], [x, y^\varphi], [x, y^\varphi][y, x^\varphi]$.

Agora, da relação 3.12 temos que $[x, x^\varphi]$, $[y, y^\varphi]$ e $[x, y^\varphi][y, x^\varphi]$ tem ordem dividindo q.

Por outro lado, vimos que estes geradores têm ordens dividindo 2 (Proposição 3.2.6).

Portanto os geradores $[x, x^\varphi], [y, y^\varphi], [x, y^\varphi][y, x^\varphi]$, sob a condição que mdc $(q, |G|) = 1$, são triviais.

Como y age trivialmente em $[x, y^\varphi]$, segue que $[x, y^\varphi] = [x, (y^{sq})^\varphi] = [x, y^\varphi]^{sq} = (\hat{y})^2$. Assim, se m é par, temos que $T \cong C_{m/2}$.

Mas, $\Upsilon(D_m) \cong C_2 \times C_2 \times C_m \times C_2$, para m par.

Diante do exposto, surge a seguinte questão: para que classes de grupos G e para quais valores de q temos $G \otimes G$ imerso em $G \otimes^q G$?

Damos nosso contribuição a este problema calculando alguns exemplos de grupos onde a citada imersão ocorre.

Teorema 3.2.14. *Seja G um grupo. Então $G \otimes G$ está imerso em $G \otimes^q G$, quando:*

(i) $G = D_m$, para m ímpar e q par;

(ii) $G = C_n$, $n|q$ com n ímpar ou $4|n$;

(iii) $G = D_\infty$ com $4|q$;

(iv) Se G é nilpotente finito de classe 2, 2-gerado com exp(G) dividindo q.

Demonstração.

Caso (i): Segue diretamente da proposição 3.2.6 - (i)

Caso (ii): Advém do Teorema 3.1 ([11])

Caso (iii): Segue de 3.2.6 - (ii)

Caso (iv): Em [11] foi definido o seguinte homomorfismo:

$$\phi : \Upsilon^q(G) \to G \tag{3.21}$$

dado por $[g, h^\varphi] \mapsto [g, h]$ e $\widehat{k} \mapsto k^q$.

Seja $G = \langle x, y \rangle$. Então $\Upsilon^q(G) = \langle [x, x^\varphi], [x, y^\varphi], [x, y^\varphi][y, x^\varphi], [y, y^\varphi], \widehat{x}, \widehat{y} \rangle$.

Suponhamos que $[x, y^\varphi]$ seja trivial. Logo, pelo homomorfismo 3.21, G seria abeliano.

Além disso, se $[y, x^\varphi] = [x, y^\varphi]$, então $G' \cong C_2$. Mas, se $G = B(2,3)$, o grupo 2-gerado de expoente 3, temos que $G' \cong C_3$.

Por fim, suponhamos que $[x, y^\varphi][y, x^\varphi]$ seja trivial. Então $\Delta^q(G)$ seria gerado por $[x, x^\varphi]$ e $[y, y^\varphi]$, para todo G nilpotente de classe 2. Mas $\Delta^4(D_4) \cong C_2 \times C_2 \times C_2$ e $\Delta^4(Q_4) \cong C_4 \times C_2 \times C_2$. De modo análogo, mostra-se que $[x, x^\varphi]$ e $[y, y^\varphi]$ não podem ser triviais.

□

Capítulo 4

Expoentes do Quadrado q-Tensorial de Grupos Nilpotentes

Em 2008, Moravec [31] fez um estudo sobre expoentes do produto tensorial não abeliano de grupos, obtendo resultados que respondem positivamente às questões por ele apresentadas:

(I) Podemos limitar o $exp(G\otimes H)$ em termos de $exp(G)$ e $exp(H)$ somente?

(II) Existem grupos tais que $exp(G\otimes G)$ divide $exp(G)$?

Exibimos abaixo os resultados apresentados por Moravec [31] sobre as citadas questões. O primeiro deles, relacionado com a questão (I), é dado pelo seguinte teorema:

Teorema 4.0.15. *(Moravec) Sejam G e H grupos localmente finitos, agindo um no outro. Então o grupo $G\otimes H$ é localmente finito. Se além disso, G e H tem expoente finito que são π-números, então $exp(G\otimes H)$ é também um π-número e pode ser limitado por uma função dependendo de $exp(G)$ e $exp(H)$.*

Moravec [31] obteve uma estimativa para $exp(G\otimes G)$ em termos de $exp(G)$ e $exp(G\wedge G)$ e observou que para grupos metabelianos finitos, $exp(G\wedge G)$ divide $(exp(G))^2 exp([G,G])$. Consequentemente $exp(G\otimes G)$ divide $(exp(G))^3\ exp([G,G])$. Este limite foi melhorado para grupos nilpotentes finitos de classe ≤ 3.

Teorema 4.0.16. *(Moravec) Seja G um grupo nilpotente finito de classe ≤ 3. Então $exp(G\otimes G)$ divide $exp(G)$.*

O Teorema 4.0.16 não pode ser estendido para grupos com classe de nilpotência ≥ 4. Um exemplo é obtido quando consideramos G um grupo de ordem 64, com expoente 4 e classe de nilpotência 4, que pode ser obtido por uma involução e um elemento de ordem 4. O citado grupo é verificado na biblioteca do GAP para grupos pequenos como SmallGroups(64,34). Usando o pacote do GAP para grupos policíclicos, calculamos $exp(G \wedge G)$ e $G \otimes G$. Em particular, $(G \wedge G)$ é um grupo de ordem 64 e expoente 8.

Neste capítulo estendemos resultados apresentados por Moravec sob a forma do Teorema 4.0.16 e do Teorema 4.0.15 para o quadrado q-tensorial de grupos.

Em [11] foi mostrado, via construção relacionada $\nu^q(G)$, que $G \otimes^q G$ preserva proriedades do argumento G, tais como: finitude, nilpotência e solubilidade. Se G é localmente finito, mostramos que o grupo $G \otimes^q G$ também preserva esta estrutura.

Proposição 4.0.17. *Se G é um grupo localmente finito, então $G \otimes^q G$ é localmente finito.*

Para demonstrarmos a proposição supracitada, se fez necessário agregarmos, nesta parte de nosso trabalho, o seguinte resultado:

Teorema 4.0.18. *(Schmidt) [33] Se $N \triangleleft G$ e ambos N e G/N são localmente finitos , então G é localmente finito.*

Demonstração da Proposição 4.0.17. Temos que $\dfrac{\Upsilon^q(G)}{T} \cong \dfrac{G}{G'}$ (Proposição 2.5, [11]). Por outro lado, T é localmente finito (Teorema 4.0.15). Assim, pelo Teorema 4.0.18, $\Upsilon^q(G)$ é localmente finito. $\square$

Relembremos que o produto q-exterior é definido por $G \wedge^q G = \dfrac{G \otimes^q G}{\Delta(G)}$. Logo, $exp(G \wedge^q G) \leq exp(G \wedge^q G)exp(G)$. Mostramos que este limite pode ser melhorado para grupos nilpotentes de classes ≤ 3, por meio dos seguintes resultados:

Teorema 4.0.19. *Seja G um grupo nilpotente finito de classe ≤ 2. Então*

(i) $exp(G \otimes^q G) \leq exp(G)$, q é ímpar ou q é par e 4 divide q;

(ii) $exp(G \otimes^q G) \leq 2exp(G)$, se $q \equiv 2(mod 4)$.

Teorema 4.0.20. *Se G é nilpotente finito de classe 3 com $exp(G) = n$, então*

(i) $exp(G \otimes^q G) \leq exp(G)$, se n é ímpar;

(ii) $exp(G \otimes^q G) \leq 2exp(G)$, *com n é par.*

Antes de demonstrarmos os citados teoremas, mencionamos algumas identidades que são válidas para grupos metabelianos.

Lema 4.0.21. *[31] Seja G um grupo metabeliano e sejam* $a, b, x_1, ..., x_r \in G$.

(i) $[a, b^n] = \prod_{k=0}^{n-1} [\underbrace{b, [b, \ldots, [b}_{k-vezes}, [a, b]] \ldots]]^{\binom{n}{k+1}}$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) $[x_1, [x_2, ..., [x_n, [a, b]] ...]] = \left[x_{\sigma(1)}, \left[x_{\sigma(2)}, ..., \left[x_{\sigma(n)}, [a, b]\right] ...\right]\right]$, *para qualquer permutação* σ *do conjunto* $\{1, 2, ..., n\}$.

Demonstração do Teorema 4.0.19. Considere $exp(G) = n$. Como T é abeliano e $\mathscr{K}$ age trivialmente sobre T (propriedades R_1 e R_2 de $\nu^q(G)$), é suficiente provarmos que se $\omega = [x, y^{\varphi}]\widehat{k}$, então $\omega^n = 1$ ou $\omega^{2n} = 1$, para todo $\omega \in \Upsilon^q(G)$.

De fato,

Caso (i): O grupo $\nu^q(G)$ é nilpotente de *classe* ≤ 3 (Teorema 2.8, [11]). Logo $\nu^q(G)$ é metabeliano. Por outro lado, para todo $x, y \in G$ temos $[y^{\varphi}, x^n] = 1$. Assim, usando o lema 4.0.21, obtemos:

$$1 = [x, y^{\varphi}]^n [x, [x, y^{\varphi}]]^{\binom{n}{2}}. \tag{4.1}$$

Agora, por meio de algumas propriedades de $\nu^q(G)$ (Lema 3.2.4) e substituindo x por xy, obtemos $[y, [x, y^{\varphi}]]^{\binom{n}{2}}$=1 e consequentemente $[x, [x, y^{\varphi}]]^{\binom{n}{2}}$=1.

Assim,

$$[x, y^{\varphi}]^n = 1. \tag{4.2}$$

Por outro lado, utilizando a propriedade R_4 de $\nu^q(G)$, a equação (4.2) e indução sobre n, segue

$$(\widehat{k})^n = [k, k^{\varphi}]^{\binom{q}{2}\binom{n}{2}}. \tag{4.3}$$

Assim, na equação (4.3), se q é ímpar ou q é par tal que 4 divide q, temos

$$(\widehat{k})^n = 1. \tag{4.4}$$

Agora, se $q \equiv 2(mod 4)$, então

$$(\widehat{k})^{2n} = 1. \tag{4.5}$$

Da equação (4.2) e equação (4.4), obtemos: $([x, y^{\varphi}]\widehat{k})^n = 1$.

Caso (ii): Segue diretamente da equação (4.2) e equação (4.5).

A seguir veremos alguns exemplos de $G \otimes^q G$ onde $\exp(G \otimes^q G)$ atinge os limites estabelecidos por meio do Teorema 4.0.19.

Exemplo 4.0.22. (i) $D_4 \otimes^q D_4 \cong D_4$ para q ímpar (veja Capítulo 3, Proposição 3.2.6-(ii));

(ii) $C_n \otimes^q C_n \cong C_{2n} \times C_d$, sendo $q \equiv 2(mod 4)$ e $d = mdc(q, n)$;

(iii) $D_4 \otimes^4 D_4 \cong {C_2}^5 \times C_4$;

(iv) $Q_4 \otimes^4 Q_4 \cong {C_2}^4 \times {C_4}^2$.

□

Observações 4.0.23. *No exemplo acima, os itens (ii) encontra-se em [11] (Teorema 3.1). Agora, os itens (iii) e (iv) foram obtidos com o auxílio do GAP.*

Demonstração do Teorema 4.0.20. Como G é nilpotente finito, então G é produto direto de seus subgrupos de Sylow, digamos $G = P_1 \times \cdots \times P_r$, então $\Upsilon^q(G) = \Upsilon^q(P_1) \times \cdots \times \Upsilon^q(P_r)$ (Corolário 2.16, [11]). Desta forma, podemos assumir que G é um p-grupo finito. Além disso, o grupo $\nu^q(G)$ é nilpotente de classe ≤ 4 (Teorema 2.8, [11]), então qualquer subgrupo 2-gerado de $\nu^q(G)$ é metabeliano. Logo, do Teorema 4.0.16, segue que

$$[x, y^{\varphi}]^n = 1. \tag{4.6}$$

Considere $\vartheta \in \Upsilon^q(G)$ tal que $\vartheta = [x, y^{\varphi}]\widehat{k}$.

Utilizando indução sobre i e o fato de $\nu^q(G)$ ter classe de nilpotência ≤ 4, obtemos:

$$([x, y^{\varphi}]\widehat{k})^n = [x, y^{\varphi}]^n \prod_{i=1}^{n-1} \left[[x, y^{\varphi}], \widehat{k}^{-i}\right] \widehat{k}^n = [x, y^{\varphi}]^n \left[[x, y^{\varphi}], k^q\right]^{-\binom{q}{2}} \widehat{k}^n \tag{4.7}$$

Portanto, da equações (4.4) e (4.6), obtemos para n é ímpar ou n par, respectivamente:

$$\left([x, y^{\varphi}]\widehat{k}\right)^n = 1, \tag{4.8}$$

$$\left([x, y^{\varphi}]\widehat{k}\right)^{2n} = 1. \tag{4.9}$$

Agora, considere $\vartheta = \omega\widehat{k}, \omega \in T$ e $\widehat{k} \in K$.

Novamente usando a propriedade R_4, a equação (4.6) e indução sobre i, temos:

$$\left(\omega\widehat{k}\right)^n = \omega^n \prod_{i=1}^{n-1} \left[\omega, \widehat{k}^{-i}\right] \widehat{k}^n = \omega^n [\omega, k^q]^{-\binom{q}{2}} \widehat{k}^n$$

Assim, se n é ímpar ou n é par, obtemos, respectivamente:

$$\left(\omega\widehat{k}\right)^n = 1 \quad \text{ou} \quad \left(\omega\widehat{k}\right)^{2n} = 1.$$

Suponhamos que

$$\vartheta = [x, y^{\varphi}]\widehat{k}[[u, v^{\varphi}]\widehat{h} \tag{4.10}$$

Assim,

$$\vartheta = [x, y^{\varphi}]\widehat{k}[u, v^{\varphi}]\widehat{h} = [x, y^{\varphi}][u, v^{\varphi}]\left[[u, v]^{\varphi}, (k^q)^{-1}\right]\widehat{\widehat{k}\widehat{h}}. \tag{4.11}$$

Por outro lado, usando a propriedade R_4 de $\nu^q(G)$ e equação (4.6), obtemos $\widehat{kh} = \widehat{\widehat{k}\widehat{h}}$. Desta maneira, se n é ímpar $\vartheta^n = 1$. Caso contrário, $\vartheta^{2n} = 1$.

Assim, considerando ϑ um elemento qualquer de $\Upsilon^q(G)$ e usando indução sobre o seu comprimento, temos, para n é ímpar:

$$\vartheta^n = 1 \tag{4.12}$$

Caso contrário,

$$\vartheta^{2n} = 1 \tag{4.13}$$

Caso (i): Segue de 4.12;

Caso (ii): Advém de 4.13.

□

Exemplo 4.0.24. (i) $D_8 \otimes^2 D_8 \cong C_8 \times C_2 \times C_2 \times C_2$

Encerramos este mencionando que é de nosso conhecimento apenas um trabalho relacionado com o limite de $\exp(G \otimes^q G)$ de Aindan Mcdermont [29], que estabeleceu o seguinte resultado: $exp(G \otimes^p G) \leq p^c$; sendo G um p-grupo com classe de nilpotência c.

Referências Bibliográficas

[1] M. BACON e L. C. KAPPE, *The non-abelian tensor square of a 2-generator p-group of class 2*, Archiv der Mathematic vol. **61** (1993), 506 - 516.

[2] M. BACON, On the non-abelian Tensor Square of Nilpotent Group of Class Two, Glasgow Math. J., **3** (1994), 291-296.

[3] M. BACON e L. C. KAPPE e R. F. MORSE, *The nonabelian tensor square of a 2-Engel group* Arch. Math,(Bassel) **69** (1997), 353 - 364.

[4] R. D. BLYTH and R. F. MORSE, *Computing the nonabelian tensor square of polycyclic groups*, J.Algebra, **321** (2009), 2139 - 2148.

[5] R.D BLYTH, F. FUMAGALLI and M. MORIGI, *Some structural results on the non-abelian tensor square of groups*, J.Group Theory, **13** (2010), 83 - 94.

[6] R. BROWN and J. L. LODAY, *Excision homotopique en basse dimension*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math **298** (1984), 353 - 356.

[7] R. BROWN and J. L. LODAY, *Van Kampen Theorems for Diagrams of Spaces*, Topology, **26** (1987), 311 - 335.

[8] R.BROWN, D. L. JOHNSON and E . F. ROBERTSON, *Some Computations of Non-abelian Tensor Products of Groups*, J. Algebra, **111** (1987), 177 - 202

[9] R. BROWN, *q-perfect Groups and Universal q-central Extensions*, Publ. Mat. Univ. Auton. Barcelona, **34** (1990), 291 - 297.

[10] T. BUENO, *O quadrado q-tensorial de grupos*, Tese de Doutorado, UnB, Brasília, 2006.

[11] T. BUENO and N. ROCCO, *On the q-Tensor Square of a Group*, J. Group Theory, to appear.

[12] D. CONDUCHÉ and FERNANDEZ C.RODRIGUEZ, *Non-abelian Tensor Products módulo q and Universal q-central Relative Extensions*, J. Pure Appl. Algebra, **78** (1992), 139-160.

[13] B. EICK, D. HOLT and E. A. O'BRIEN, *Handbook of computational group theory*, Discrete Math. Appl., CRC Press, 2005.

[14] G. ELLIS, *The Non-abelian Tensor Product of Finite Groups is Finite*, J. Algebra, **111** (1987), 203 - 205.

[15] G. ELLIS, *Tensor Product and q-crossed Modules*, J. London Math. Soc., **2 (51)** (1995), 243 - 258.

[16] G. ELLIS and F. LEONARD, *Computing Schur Multipliers and Tensor Products of Finite Groups*, Proc. Royal Iris Ac., **95A** (1995), 237 - 147.

[17] G. ELLIS and A. MCDERMOTT, Tensor Products of Prime-Power Groups, J. Pure Applied Algebra, **132** (2) (1998), 119 - 128.

[18] K.A. HIRSH, *On infinite soluble groups (I)*, Proceedings of the London Mathematical Society, **44** (2) (1938), 53-60.

[19] K.A. HIRSH, *On infinite soluble groups (II)*, Proceedings of the London Mathematical Society, **44** (2) (1938), 336-414.

[20] K.A. HIRSH, *On infinite soluble groups (III)*, Journal of the London Mathematical Society, **49** (2) (1946), 184-94.

[21] K.A. HIRSH, *On infinite soluble groups (IV)*, Journal of the London Mathematical Society, **27** (1952), 81 - 85.

[22] K.A. HIRSH, *On infinite soluble groups (V)*, Journal of the London Mathematical Society, **29** (1954), 250 - 251.

[23] D. L. JOHNSON, *Presentations of Groups*, London Math. Soc., Student Texts 15, Second Edition, 1997.

[24] H. JÜRGENSEN, *Calculation with the elements of a finite group given by generators and defining relations*, In J. Leech (ed.), Computational problems in abstract Algebra, Oxford: Pergamon, 47 - 57.

[25] I.N. NAKAOKA, *Sobre o Produto Tensorial não Abeliano de Grupos*, Dissertação de Mestrado, UNICAMP, Campinas, 1994.

[26] I. N. NAKAOKA, *Sobre o Produto Tensorial não Abeliano de Grupos Solúveis*, Tese de Doutorado, UNICAMP, Campinas, 1998.

[27] I. N. NAKAOKA, *Non-abelian Tensor Products of Solvable Group, J. Group Theory* , **3** (2000), 157 - 167. Tese de Doutorado, UNICAMP, Campinas, 1998.

[28] W. MAGNUS, A. KARRAS and D. SOLITAR, *Combinatorial Group Theory: Presentations of Groups in Terms of Generators and Relations*, Second Edition, Dover Publications, New York, 1976.

[29] A. MCDERMOTT, *The Nonabelian Tensor Product of Groups: Computations and Strutural Results*, PhD Thesis, Nat. Univ. Ireland, Gallway, April 1998.

[30] C. MILLER, *The Second Homology Group of a Group; Relations Among Comutators*, Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952), 588 - 595.

[31] P. MORAVEC, *The expoents of nonabelian tensor products of groups*, Journal of Pure Applied Algebra **212** (2008), 1840 - 1848.

[32] E. R. PEREIRA, *O Multiplicador de Schur e Grupos de Recobrimento*, Dissertação de Mestrado, UNB, Brasília, 1999.

[33] D. J. S. ROBINSON, *A Course in the Theory of Groups*, Second Edition, Springer, 1996.

[34] N. ROCCO, *On a Construction Related to the Non- Abelian Tensor Square of a Group*,Bol. Soc. Bras. Mat., **22** (1991), 63 - 79.

[35] N. ROCCO, *A Presentation for a Crossed Embedding of Finite Solvable Groups, Communications in Algebra*, **22 (6)** (1991), 1975 - 1998.

[36] J. J. ROTMAN, *An Introduction to Homological Algebra*, Academic Press, New York, 1979.

[37] J. J. ROTMAN, *An Introduction to the Theory of Groups*, Fourth Edition, Springer, 1999.

[38] D. SEGAL, *Polycyclic Groups*, Cambridge University Press, 1990.

[39] S. SIDKI, *On Weak Permutability between Groups*, J. Algebra **63** (1980), 186 - 225.

[40] C. C. SIMS, *Computation with finitely presented groups*, Cambridge Univesity Press, Cambridge, 1994.

[41] J.H.C. WHITEHEAD, *A certain exact sequence*, Ann. of Math. **52** (1950), 51 - 110

[42] The GAP- Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.12, 2009 (http:// www.gap-system.org).

Índice Remissivo