

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**SIMETRIAS E SOLUÇÕES CLÁSSICAS DO MODELO DE  
GROSS-NEVEU**

PAULO MAGALHÃES MARCIANO DA ROCHA

ORIENTADOR:

ADEMIR EUGENIO DE SANTANA

Brasília, 18 de Fevereiro de 2011

## Agradecimentos

Aos meus familiares e amigos por todo o carinho e paciência. À minha mãe, em especial, por ter me ajudado e aguentado e suportado durante este trajeto. Aos meus avós por estarem lá me confortando. À Maíra, por ter me dado tantos momentos felizes. Ao meu pai, que além do papel usual de pai ainda cumpre o papel de professor e mentor. Ao meu irmão João, sem o qual esta trajetória teria sido muito menos interessante. Ao meu orientador pela atenção e motivação e a confiança. Aos meus colegas de estudo, tantos quantos são, pelas discussões, conversas e inspirações. Ao professor Amílcar por toda a ajuda e ao professor Khanna pelo suporte durante minha estadia em Edmonton. Um agradecimento especial ao CNPq e à Universidade de Brasília, por toda a infraestrutura e aos professores do Instituto de Física por terem me ensinado grande parte do que eu sei.

E sem esquecer, é claro, de todos os gigantes que vieram antes de mim, por me permitirem olhar por cima dos seus ombros.

# Resumo

O modelo de Gross-Neveu (GN) surgiu como uma teoria efetiva mais simples para a cromodinâmica quântica (QCD). Assim surgiu pois, na QCD, resultados exatos são difíceis de se obter, enquanto métodos perturbativos não são aplicáveis em todas as escalas de energia. Recentemente, aplicações do modelo GN na área de semicondutores e também em grafenos enriqueceram ainda mais a literatura relacionada. Apesar da grande aplicabilidade, soluções analíticas do modelo ainda são poucas, porém de grande utilidade. É neste contexto que apresentamos, neste trabalho, um estudo das soluções invariantes por simetrias de Lie. Usando a simetria relativística presente no modelo de Gross - Neveu, soluções clássicas são obtidas em duas, três e quatro dimensões do espaço-tempo.

# Abstract

The Gross-Neveu (GN) model first appeared as a simpler effective theory for Quantum Chromodynamics (QCD). So it was, for in QCD analytical results are extremely hard to obtain, while perturbative methods are not applicable to all energy scales. Recently, applications of the GN model on semiconductors and graphenes have further enriched the related literature. In spite of the great applicability, Analytical solutions to the GN equations are still few, but of great use. In this context, we present in the following work a study of Lie symmetry invariant solutions of the GN model. Making use of the relativistic symmetry present in the GN model, classical solutions are obtained in two, three and four space-time dimensions.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Grupos e Álgebras de Lie</b>	<b>9</b>
2.1	Grupos . . . . .	9
2.2	Espaços Topológicos . . . . .	11
2.3	Variedades Diferenciáveis . . . . .	12
2.4	Grupos de Lie . . . . .	13
2.5	Álgebras de Lie . . . . .	17
2.6	Grupo de Poincaré . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Métodos de Simetria</b>	<b>29</b>
3.1	Encontrando Simetrias de Lie de EDOs . . . . .	29
3.1.1	Órbitas e Geradores Infinitesimais . . . . .	32
3.1.2	As Equações Determinantes . . . . .	33
3.2	Simetrias de EDPs . . . . .	38
3.3	Coordenadas Canônicas . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Equações de Dirac</b>	<b>45</b>
4.1	Mecânica Quântica e Relatividade . . . . .	45
4.2	Covariância Relativística . . . . .	48
4.3	Equações de Dirac Não-Lineares . . . . .	50
4.4	A Equação de Gross-Neveu . . . . .	53

<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>55</b>
5.1	Método . . . . .	55
5.2	Equação de Gross-Neveu em 1+1 Dimensões . . . . .	57
5.3	Equação de Gross-Neveu em 2+1 Dimensões . . . . .	58
5.4	Equação de Gross-Neveu em 3+1 Dimensões . . . . .	60
<b>6</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>70</b>

# Capítulo 1

## Introdução

A teoria atual sobre a interação forte do modelo padrão da física das partículas elementares, a cromodinâmica quântica (QCD), foi proposta para descrever aspectos constitutivos da matéria hadrônica, os quarks e os glúons [1], [2], [3]. Deve prover, assim, explicação satisfatória para os seguintes aspectos experimentais: liberdade assintótica e confinamento. O primeiro, se manifesta em altíssimas temperaturas e energias (ou curtas distâncias). Através de espalhamento inelástico profundo, observa-se que os quarks se comportam aproximadamente livres nesse regime. O segundo aspecto estabelece que, em baixas energias e temperaturas, quarks e gluons estão espacialmente confinados em regiões da ordem de 1 fm, em estados desprovidos de cor. Este aspecto é também confirmado pela falta de observação de quarks livres nos processos físicos conhecidos. Entretanto, é abrangente aceitação de que em algum estágio da evolução do Universo, quarks e glúons existiram num estado não confinado. Este estado é chamado de plasma de quarks e gluons. Com o resfriamento ocorre uma transição de fase, onde os quarks e glúons dão origem a matéria hadrônica.

Devido a uma estrutura matemática intrincada, a QCD descreve as observações acima, mas apenas parcialmente, ou aproximadamente, pois resultados analíticos são extremamente difíceis, embora fundamentais para guiar corretamente os experimentos. Nos domínios de liberdade assintótica (altas temperaturas ou alta energia), é possível utilizar métodos perturbativos bem estabelecidos [2]-[7]. Na região de transição, métodos perturbativos são complicados, e um expediente muito utilizado é o cálculo na rede, implementando uma simulação do sistema confinado,

e provendo por exemplo a temperatura crítica da transição confinamento/deconfinamento, da ordem de 200 MeV [7]. Devido as dificuldades da QCD com resultados analíticos na região de baixas energia, existe um forte apelo ao desenvolvimento de modelos efetivos, que possam reproduzir propriedades importantes da matéria hadrônica. O mais simples desses modelos descreve a interação de contato de quatro férmions, e é conhecido como modelo de Gross-Neveu (GN) [8]. Neste caso, os glúons, descritos por campos de calibres não abelianos, são suprimidos, em um procedimento similar ao que acontece com o tratamento de Fermi à interação fraca. O modelo GN não é perturbativamente renormalizável para dimensões maiores que  $D = 2$ ; e a expansão na ordem dominante de  $1/N$ , onde  $N$  é o número de férmios, é usualmente empregada [9].

Nas últimas décadas o modelo GN foi analisado com detalhe no contexto de temperatura finita. As motivações e a natureza desses estudos são múltiplas, e se prestam a prover informações como modelo efetivo não somente da QCD, mas também no estudo de sistemas fermiônicos na física da matéria condensada. Exemplos típicos são as aplicações em supercondutividade e em grafenos [10]-[24]. Seguindo métodos primeiro desenvolvidos para bósons, o modelo GN tem sido também considerado em topologias com dimensões espacialmente compactificadas a temperatura finita [25]-[28].

Como as equações da relatividade geral, as equações do modelo de Gross-Neveu são um modelo matemático não-linear para a realidade física. As equações de Einstein tiveram no seu tempo uma onda de trabalhos encontrando soluções exatas para o campo gravitacional, e é sabido do grande impacto no desenvolvimento da teoria causado pelas soluções de Schwarzschild, Friedman e Kerr [29]. As equações de Gross-Neveu, por outro lado, ainda não tiveram um estudo satisfatório de suas soluções analíticas, particularmente em 2 e 3 dimensões espaciais. Nos últimos anos este quadro tem mudado, uma vez que o modelo de Gross-Neveu tem encontrado maior aplicabilidade, especialmente com os grafenos, bem como avanços significativos na área da computação algébrica. Um pacote de extrema importância para o desenvolvimento da presente dissertação é o pacote SADE (Symmetry Analysis of Differential Equations), para Maple, que reúne rotinas relacionadas à análise de simetrias de equações diferenciais [30].

Devido a essas características e aplicabilidade, o modelo GN serve como um protótipo para a análise de transições de fase na teoria quântica de campos para férmions, e nessa perspectiva



a procura por resultados analíticos passa a ser um outro aspecto importante [31], [32]. Um dos possíveis procedimentos é explorar as técnicas de grupos de Lie aplicadas a equações diferenciais parciais. Este tipo de solução já foi parcialmente analisado e classificado por Fushchich e Zhdanov [33], [34], no caso de 3+1 dimensões. A presente dissertação aborda este tipo de problema, e procura resultados analíticos para o modelo de Gross-Neveu empregando os métodos de grupos de Lie aplicados a equações diferenciais.

Este trabalho se organiza da seguinte forma: No segundo capítulo é feita uma breve revisão de conceitos de teoria de grupos necessários para o andamento deste trabalho. Particular ênfase é dada aos grupos de Lie e o exemplo do grupo de Poincaré é feito com um moderado grau de detalhe. No terceiro capítulo é feito um breve apanhado dos principais métodos de encontrar e usar simetrias de equações diferenciais. Estes métodos estão no coração desta dissertação, uma vez que são os métodos utilizados para obter as soluções das equações de Gross-Neveu. No quarto capítulo é feita uma breve discussão sobre equações de Dirac, com ênfase nas suas propriedades de simetria. Equações de Dirac não-lineares são construídas e propriedades fundamentais deste tipo de equação são demonstradas. Finalmente, no quinto capítulo são obtidas soluções invariantes de grupo das equações do modelo GN com  $N = 1$  em 1, 2 e 3 dimensões espaciais. Um método algorítmico é apresentado e este mesmo método é utilizado para obter resultados.

## Capítulo 2

# Grupos e Álgebras de Lie

O método proposto nesta dissertação tem como base matemática a teoria das simetrias de Lie e soluções invariantes de grupo[36]. Faz-se, então, necessário o estudo do ferramental relacionado a esta teoria. Antes de entrar em detalhes sobre como simetrias de equações diferenciais podem ser encontradas e utilizadas para resolver equações diferenciais, deve-se primeiro dominar os conceitos matemáticos básicos para o tratamento das simetrias.

Não existe, talvez, ferramenta mais importante para o estudo de simetrias quanto a teoria de grupos. Esta estrutura algébrica é unicamente adaptada para o tratamento matemático de conjuntos de transformações, e justamente devido a esta característica se tornou tão crucial para a física. O que segue é uma breve revisão das estruturas algébricas mais relevantes para o presente trabalho, que tem como pedra fundamental os grupos de simetria.

Em sua parte inicial este capítulo introduz definições e conceitos de maneira abstrata. Feitas as introduções conceituais, o capítulo tem em sua parte final um exemplo bastante importante para esta dissertação, quando é construída a álgebra do grupo de Poincaré. Esta revisão é baseada nas referências [1], [3], [35].

### 2.1 Grupos

Um grupo é um conjunto  $\{g_1, g_2, g_3, \dots\} = G$  munido de uma operação chamada produto

ou multiplicação do grupo (denotada por  $\circ$ ) tal que

1.  $g_i \in G, g_j \in G \Rightarrow g_i \circ g_j \in G$ . Diz-se que grupos são fechados sob o produto.
2.  $g_i \circ (g_j \circ g_k) = (g_i \circ g_j) \circ g_k$ . O produto é associativo.
3. Existe um elemento  $g_1$  tal que  $g_1 \circ g_i = g_i \circ g_1 = g_i$ . O elemento  $g_1$  é chamado de identidade.
4. Para cada elemento  $g_k$  existe um elemento inverso  $g_k^{-1}$  tal que  $g_k \circ g_k^{-1} = g_k^{-1} \circ g_k = g_1$ .

Um grupo pode ser finito ou infinito com relação ao número de elementos. Grupos infinitos podem ser ainda classificados em discretos ou contínuos, dependendo da natureza contável ou incontável de seus elementos.

## Exemplos

1. O conjunto das possíveis permutações dos pontos 1, 2, 3, 4 forma um grupo com  $4!$  elementos, chamado  $P_4$ . Um exemplo de dois elementos deste grupo (a e b) é ilustrado na figura 1, junto com a composição destes dois elementos.

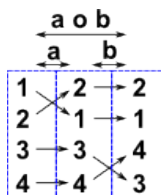


Figura 2.1: Exemplo de elementos do grupo  $P_4$  com a composição.

2. A coleção de rotações do círculo por múltiplos de  $\frac{2\pi}{n}$  radianos forma um grupo com  $n$  operações distintas. Grupos finitos desta forma são ditos de ordem  $n$ .
3. A coleção de rotações de um círculo por um ângulo  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) é um exemplo de um grupo contínuo. Existem tantas operações  $g(\theta)$  quanto pontos no intervalo  $[0, 2\pi]$ .
4. O conjunto dos números reais forma um grupo sob a adição. A identidade é o número zero e o elemento inverso de  $x$  é  $-x$ .

5. O conjunto de matrizes reais  $n \times n$  não singulares ( $\det(g) \neq 0$ ), sob a multiplicação de matrizes, forma um grupo conhecido como  $Gl(n, r)$  (General Linear). O conjunto de matrizes  $n \times n$  com determinante 1 também forma um grupo, chamado  $Sl(n, r)$  (Special Linear). O conjunto de matrizes unitárias  $n \times n$  forma o grupo  $U(n)$

Note que, em princípio, a operação  $\circ$  não é comutativa. Um grupo  $G$  que obedece  $g_i \circ g_j = g_j \circ g_i, \forall g_i, g_j \in G$  é chamado abeliano, ou comutativo.

## 2.2 Espaços Topológicos

Um espaço topológico  $T$  é composto por um conjunto de pontos, denotado por  $S$ , sobre o qual se coloca uma topologia  $\mathcal{T}$ . Uma topologia é uma coleção de subconjuntos  $S_1, S_2, S_3, \dots \subset S$  que obedece aos seguintes axiomas:

1. O conjunto vazio ( $\emptyset$ ) e o conjunto  $S$  pertencem a  $\mathcal{T}$ .

$$\emptyset \in \mathcal{T} \quad , \quad S \in \mathcal{T}$$

2. Intersecções finitas de elementos de  $\mathcal{T}$  são elementos de  $\mathcal{T}$ .

$$\overset{\text{finita}}{\bigcap}_{i=1} S_i \in \mathcal{T}$$

3. Uniões arbitrárias de elementos de  $\mathcal{T}$  são elementos de  $\mathcal{T}$ .

$$\overset{\text{todas}}{\bigcup}_{i=1} S_i \in \mathcal{T}$$

Os elementos  $S_i$  da topologia são chamados conjuntos abertos.

Um espaço topológico que obedece apenas aos axiomas 1-3 é geral demais para nosso propósito. Impõe-se ainda o seguinte axioma:

4. Se  $p \in T$ ,  $q \in T$ ,  $p \neq q$ , então existem  $S_p \in \mathcal{T}$ ,  $S_q \in \mathcal{T}$  que obedecem as propriedades  $p \in S_p$ ,  $q \in S_q$ ,  $S_p \cap S_q = \emptyset$ .

Um espaço topológico que obedece ao axioma 4 é chamado de espaço Hausdorff. Um conjunto aberto  $S_p$  contendo  $p$  é chamado uma vizinhança de  $p$ .

### Exemplo

O plano bidimensional  $R_2$  é o conjunto de pontos em que normalmente se escolhe uma topologia (chamada standard, ou padrão) formada pelo interior de círculos de centro arbitrário e raio arbitrário diferente de zero. A topologia consiste destes círculos e suas intersecções e uniões. Este espaço com esta topologia também é um espaço Hausdorff. Dois pontos  $p$  e  $q$  são separados por uma distância  $d(p, q)$ . Círculos  $S_p$ ,  $S_q$  com raio  $\frac{d(p, q)}{3}$ , por exemplo, são conjuntos sem intersecção que contém  $p$  e  $q$  respectivamente.

Definem-se três conceitos adicionais:

1. O espaço  $T$  é compacto se toda sequência infinita de pontos  $t_1, t_2, \dots \in T$  contém uma subseqüência convergente para um ponto em  $T$ .
2. Um conjunto  $T$  é fechado se contém todos os seus pontos de acumulação. Um ponto  $p$  é um ponto de acumulação se todos os conjuntos abertos contendo  $p$  contém pelo menos um ponto de  $T$  diferente de  $p$ .  $T$  junto de todos os seus pontos de acumulação é chamado de fechamento de  $T$ .
3. Seja  $\phi$  um mapa do espaço  $T$  com topologia  $\mathcal{T}$  no espaço  $U$  com topologia  $\mathcal{U}$ . O conjunto de todos os pontos  $t_1, t_2, \dots \in T$  que são levados ao mesmo ponto  $u \in U$  é chamado imagem inversa de  $u$ . O mapa  $\phi$  é dito contínuo se a imagem inversa de todos os conjuntos abertos em  $U$  é um conjunto aberto em  $T$ .

## 2.3 Variedades Diferenciáveis

Uma variedade diferenciável consiste num espaço Hausdorff  $(T, \mathcal{T})$  munido de uma coleção  $\Phi$  de mapas  $\phi_p \in \Phi$

$$\phi_p : T \rightarrow \mathbb{R}^N \quad p \in T$$

Que obedece as seguintes propriedades:

1.  $\phi_p$  é um mapa 1-1 de um conjunto aberto  $T_p$  ( $p \in T_p$ ) em um conjunto aberto de  $\mathbb{R}^N$ .
2.  $\bigcup T_p = T$ , Ou seja, a união de todos os conjuntos abertos  $T_p$  forma o espaço  $T$ .
3. Se  $T_p \cap T_q$  não for vazio, então  $\phi_p(T_p \cap T_q)$  é um conjunto aberto em  $\mathbb{R}^N$ .  $\phi_q(T_p \cap T_q)$  também é um conjunto aberto em  $\mathbb{R}^N$  distinto de  $\phi_p(T_p \cap T_q)$ . O mapa  $\phi_p \circ \phi_q^{-1}$  deve ser contínuo e diferenciável.
4. Os mapas  $\phi_p \circ \phi_q^{-1}$  e  $\phi_q \circ \phi_p^{-1}$  são elementos de  $\Phi$ .

Variedades são úteis porque são a vizinhança de cada ponto pode ser transportada para um espaço euclidiano. Por meio de  $\Phi$ , todos os conceitos e métodos usados no estudo de  $\mathbb{R}^N$  podem ser transferidos para a variedade.

## 2.4 Grupos de Lie

Um grupo de Lie é um grupo especificado pelas seguintes propriedades:

1. Uma variedade diferenciável  $\eta$ -dimensional denotada por  $\mathcal{M}$
2. Uma função  $\phi$  que leva dois pontos  $(\beta, \alpha)$  da variedade em um terceiro ponto  $\gamma$  também dentro da variedade.
3. Em termos de um sistema de coordenadas dentro da variedade podemos escrever

$$\gamma^\mu = \phi^\mu(\beta^1, \dots, \beta^\eta, \alpha^1, \dots, \alpha^\eta) \quad ; \quad \mu = 1, \dots, \eta$$

As funções

$$\phi : \beta \times \alpha \rightarrow \gamma = \beta\alpha$$

$$\psi : \alpha \rightarrow \alpha^{-1}$$

Devem ser contínuas  $C^\infty$ . Esta condição é na verdade forte demais, e no caso geral basta que seja  $C^k$  para  $k$  finito, porém é imposta a condição mais restritiva para que os métodos subsequentemente utilizados tenham validade garantida.

Grupos de Lie tem dois tipos de estrutura, uma estrutura algébrica e uma estrutura topológica. Algébricamente, eles são grupos e obedecem a todos os axiomas de grupo. Topologicamente são variedades diferenciáveis e devem obedecer a todos os axiomas relacionados a este tipo de estrutura. Os axiomas de grupo são então traduzidos como condições sobre  $\phi$ , isto é,

$\alpha$ . Fechamento

$$\gamma^\mu = \phi^\mu(\beta, \alpha) \quad ; \quad \gamma, \beta, \alpha \in \mathcal{M}$$

$\beta$ . Associatividade

$$\phi(\beta, \phi(\alpha, \gamma)) = \phi(\phi(\beta, \alpha), \gamma)$$

$\gamma$ . Identidade

$$\phi^\mu(\epsilon, \alpha) = \alpha^\mu = \phi^\mu(\alpha, \epsilon)$$

$\delta$ . Inversa

$$\phi^\mu(\alpha, \alpha^{-1}) = \epsilon^\mu = \phi^\mu(\alpha^{-1}, \alpha)$$

## Geradores Infinitesimais

Seja  $(\mathcal{T}, \phi)$  um grupo de Lie que age sobre um espaço  $G_N$  por meio de transformações de coordenadas  $f(\alpha, x)$ . Em outras palavras um grupo de Lie de transformações.

Agora seja  $F(p)$  qualquer função definida em todos os pontos  $p \in G_N$ . Uma vez definido um sistema de coordenadas  $S$  para  $G_N$ , podemos escrever  $p$  como uma  $N$ -upla de coordenadas,

$$p \rightarrow (x^1(p), x^2(p), \dots, x^N(p))$$

A Função  $F(p)$  pode ser escrita, então, em função dos parâmetros  $x^i(p)$  no sistema de coordenadas  $S$ , ou seja,

$$F(p) = F^S [x^1(p), \dots, x^N(p)] .$$

Em um outro sistema  $S'$  as coordenadas de  $p$  mudarão. É natural esperar que a forma da função  $F$  mude para manter o valor fixo  $F(p)$ , assim escrevemos

$$F(p) = F^{S'} [x'^1(p), \dots, x'^N(p)] . \quad (2.1)$$

Sabe-se que  $S$  e  $S'$  estão relacionados por um elemento do grupo de transformações da seguinte forma

$$x'^i(p) = f^i[\alpha, x(p)] .$$

Para relacionar  $F^{S'}$  com  $F^S$ , basta então escrever  $x'^i(p)$  em função de  $x^i(p)$ . Temos

$$x^i(p) = f^i[\alpha^{-1}, x'(p)] . \quad (2.2)$$

Substituindo a Eq. (2.2) na Eq. (2.1), obtemos

$$F^{S'} [x'^1(p), \dots, x'^N(p)] = F^S [f^1(\alpha^{-1}, x'(p)), \dots, f^N(\alpha^{-1}, x'(p))] . \quad (2.3)$$



Esta expressão não está em uma forma muito útil. É mais conveniente para nosso propósito tratar de transformações próximas a identidade.

Para uma operação do grupo  $\mathbf{0} + \delta\alpha^\mu$  próxima da identidade  $\mathbf{0}$  a inversa é dada por  $(\delta\alpha^{-1})^\mu = -\delta\alpha^\mu$ , uma vez que  $(\mathbf{0} + \delta\alpha^\mu)(\mathbf{0} - \delta\alpha^\mu) = \mathbf{0} + O(\delta\alpha^2)$ . Escrevemos então

$$\begin{aligned} x^i(p) &= f^i[-\delta\alpha, x'(p)] \\ &= f^i[0, x'(p)] + \frac{\partial f^i[\beta, x'(p)]}{\partial\beta^\mu}\Big|_{\beta=0}(-\delta\alpha) + \dots \\ &= x'^i(p) - \delta\alpha \frac{\partial f^i[\beta, x'(p)]}{\partial\beta^\mu}\Big|_{\beta=0}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Substituindo a Eq. (2.4) na Eq. (2.3) encontramos

$$\begin{aligned} F^{S'}[x'(p)] &= F^S \left[ x'^i(p) - \delta\alpha \frac{\partial f^i[\beta, x'(p)]}{\partial\beta^\mu}\Big|_{\beta=0} \right] \\ &= F^S [x'^i(p)] - \delta\alpha \frac{\partial f^i[\beta, x'(p)]}{\partial\beta^\mu}\Big|_{\beta=0} \frac{\partial}{\partial x'^i} F^S [x'(p)]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Em primeira ordem, a variação em  $F$  é dada por

$$\begin{aligned} F^{S'}[x'(p)] - F^S [x'^i(p)] &= -\delta\alpha \frac{\partial f^i[\beta, x'(p)]}{\partial\beta^\mu}\Big|_{\beta=0} \frac{\partial}{\partial x'^i} F^S [x'(p)] \\ &= \delta\alpha X_\mu(x') F^S [x']. \end{aligned} \quad (2.6)$$

O operador

$$X_\mu = -\frac{\partial f^i[\beta, x'(p)]}{\partial\beta^\mu}\Big|_{\beta=0} \frac{\partial}{\partial x'^i}$$

é chamado gerador infinitesimal do grupo de Lie. Através da aplicação repetida destes operadores podemos obter todos os elementos do grupo de Lie gerados por eles.

Note que os geradores de grupos de Lie só são capazes de gerar todos os elementos do grupo devido a natureza de variedade diferenciável e conexa dos grupos de Lie[35]. isto faz com que o teorema de Taylor seja válido e aproximações próximas a identidade possam ser feitas. Os geradores infinitesimais de um grupo formam uma base de um espaço vetorial, de modo que

qualquer combinação linear destes também é um gerador infinitesimal, e um elemento finito do grupo de transformações pode ser escrito em termos de seu gerador como

$$T = \exp(\varepsilon^\mu X_\mu) . \quad (2.7)$$

## 2.5 Álgebras de Lie

Se um grupo é comutativo então vale a seguinte relação, com  $\alpha$  e  $\beta$  elementos do grupo,

$$\alpha\beta\alpha^{-1} = \beta .$$

Se o grupo não é comutativo, define-se o  $\gamma$  como uma medida do quanto o resultado difere de  $\beta$ , ou seja o quanto não comutativo é o grupo.

$$\alpha\beta\alpha^{-1} = \gamma\beta .$$

Note que  $\gamma$  é necessariamente um elemento do grupo

$$\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = \gamma . \quad (2.8)$$

Se  $\alpha$  e  $\beta$  são próximos da identidade, podemos expandi-los em termos dos geradores infinitesimais como

$$\begin{aligned} \alpha &= I + \delta\alpha^\mu X_\mu + \frac{1}{2}\delta\alpha^\mu X_\mu \delta\alpha^\nu X_\nu , \\ \beta &= I + \delta\beta^\mu X_\mu + \frac{1}{2}\delta\beta^\mu X_\mu \delta\beta^\nu X_\nu . \end{aligned} \quad (2.9)$$

Substituindo a Eq. (2.9) na Eq. (2.8) e mantendo apenas termos até segunda ordem nos geradores, obtemos

$$(\alpha\beta)(\beta\alpha)^{-1} = I + \delta\alpha\delta\beta [X_\mu, X_\nu] ,$$

onde  $[X_\mu, X_\nu] = X_\mu X_\nu - X_\nu X_\mu$  é o comutador entre  $X_\mu$  e  $X_\nu$ .

Como  $(\alpha\beta)(\beta\alpha)^{-1}$  é um elemento do grupo,  $[X_\mu, X_\nu]$  deve estar no espaço vetorial de geradores do grupo e pode ser expandido como uma combinação linear da base. Em outras palavras, podemos escrever

$$[X_\mu, X_\nu] = C_{\mu\nu}^\lambda X_\lambda, \quad (2.10)$$

onde  $C_{\mu\nu}^\lambda$  são constantes a serem especificadas de acordo com a natureza do grupo. Como os geradores já formavam um espaço vetorial, ao munir o espaço de um produto entre os vetores (o comutador) constrói-se uma álgebra.

Uma álgebra cujo produto é anticomutativo

$$[X_\mu, X_\nu] = -[X_\nu, X_\mu],$$

e obedece a identidade de Jacobi

$$[X_\mu [X_\nu, X_\rho]] + [X_\nu [X_\rho, X_\mu]] + [X_\rho [X_\mu, X_\nu]] = 0,$$

é chamada de Álgebra de Lie. O comutador é um candidato natural a produto de uma álgebra de Lie, uma vez que estas propriedades são automaticamente satisfeitas.

Vemos, portanto, que os geradores infinitesimais de um grupo de Lie formam uma álgebra de Lie. Apesar de todo grupo de Lie ter uma álgebra associada a ele, a correspondência não é 1-1. De fato, vários grupos diferentes podem vir a ter a mesma álgebra de Lie. As constantes de estrutura  $C_{\mu\nu}^\lambda$  definem completamente a estrutura da álgebra de Lie, de modo que duas álgebras com as mesmas constantes de estrutura são, necessariamente, a mesma álgebra.

## 2.6 Grupo de Poincaré

Como um exemplo prático da aplicação das técnicas acima, construiremos a álgebra de Lie para o grupo de Poincaré. Dito ser o conjunto de isometrias do espaço de Minkowski, o grupo de

Poincaré é um dos grupos de simetria mais importantes para a física. Nesta dissertação será feito amplo uso de propriedades deste grupo e da álgebra de Lie relacionada a ele, tornando necessário um tratamento especial deste grupo. Por ser um grupo de transformações, para definir o grupo deve-se antes definir sobre o que o grupo age. Para tanto, define-se o espaço de Minkowski, o chamado espaço de definição do grupo.

O espaço-tempo de Minkowski é um espaço-tempo plano pseudo-euclidiano que tem em algum sistema de coordenadas a métrica

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$\mu, \nu = 0 \dots d-1,$$

Com  $d$  a dimensão do espaço. As coordenadas nas quais a métrica toma esta forma são escritas como  $(x^\mu) = (x^0, \dots, d-1)$  e as componentes covariantes se relacionam as contravariantes pela regra  $x^\mu = g^{\mu\nu}x_\nu$ . Vale a notação de soma de Einstein em que índices repetidos são somados. No espaço de Minkowski a distância entre dois pontos é chamada de intervalo. Se tratando de um espaço métrico, o intervalo é escrito como

$$x^\mu y_\mu = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu.$$

Particularmente, o comprimento ao quadrado de um vetor pode ser escrito como

$$\begin{aligned} x^\mu x_\mu &= g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \\ &= \mathbf{x}^2 - (x^0)^2. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Note que, ao contrário do espaço euclidiano usual, o produto interno não é positivo definido.

Neste espaço podem ser definidas transformações lineares que mantêm este intervalo constante. Estas transformações, chamadas transformações de Lorentz, são de especial interesse, uma vez que, como será mostrado a seguir, compoem um subgrupo do grupo de Poincaré.

## Grupo de Lorentz

O grupo de Lorentz consiste nas transformações lineares e homogêneas que mantêm invariante o intervalo dado pela Eq. (2.11). Uma transformação de Lorentz é escrita como

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} . \quad (2.12)$$

Ao combinar a Eq. (2.12) com a condição imposta que a distância como dada na Eq. (2.11) deve ser invariante, a matriz  $\Lambda^{\mu}_{\nu}$  satisfaz a condição

$$g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\sigma} = g_{\rho\sigma} . \quad (2.13)$$

Para explicitar a natureza de grupo destas transformações, verificam-se as quatro condições necessárias para que um conjunto seja um grupo.

### 1. Fechamento

Sob a multiplicação usual de matrizes, o produto de duas transformações de Lorentz é

$$\Lambda^{\mu}_{\sigma} = \Lambda_1^{\mu}_{\nu} \Lambda_2^{\nu}_{\sigma} ,$$

com  $\Lambda_1$  e  $\Lambda_2$  satisfazendo a Eq. (2.13). De fato,

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} \Lambda_1^{\mu}_{\rho} \Lambda_1^{\nu}_{\sigma} &= g_{\rho\sigma} , \\ g_{\mu\nu} \Lambda_1^{\mu}_{\rho} \Lambda_1^{\nu}_{\sigma} \Lambda_2^{\rho}_{\delta} \Lambda_2^{\sigma}_{\gamma} &= g_{\rho\sigma} \Lambda_2^{\rho}_{\delta} \Lambda_2^{\sigma}_{\gamma} , \\ &= g_{\delta\gamma} , \\ g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\delta} \Lambda^{\nu}_{\gamma} &= g_{\delta\gamma} . \end{aligned} \quad (2.14)$$

Logo, fica claro que duas transformações de Lorentz sucessivas ainda são uma trans-

formação de Lorentz.

## 2. Associatividade

A transformação tem caráter matricial; e como o produto matricial é associativo, esta condição é automaticamente satisfeita.

## 3. Identidade

A transformação  $\Lambda_I^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$  mantém a Eq. (2.11) invariante e tem como propriedade que  $\Lambda \cdot \delta = \delta \cdot \Lambda = \Lambda$ . Portanto, o papel de identidade é cumprido pela matriz  $\delta^\mu{}_\nu$ .

## 4. Inversa

A Eq. (2.13) pode ser reescrita

$$\begin{aligned}\Lambda_{\nu\rho}\Lambda_\sigma^\nu &= g_{\rho\sigma} , \\ \Lambda_{\nu'}^\rho\Lambda_\sigma^\nu &= \delta_\sigma^\rho .\end{aligned}$$

Desta forma, toda transformação tem inversa escrita como

$$(\Lambda^{-1})_\sigma^\nu = (\Lambda)^\nu{}_\sigma . \quad (2.15)$$

Este conjunto de propriedades garante que as transformações de Lorentz formam um grupo contínuo.

Voltando a atenção à álgebra de Lie relacionada ao grupo de Lorentz, é relevante escrever as transformações em sua forma infinitesimal

$$\begin{aligned}\Lambda_\nu^\mu &= \delta_\nu^\mu + \delta\omega_\nu^\mu , \\ (\Lambda^{-1})_\nu^\mu &= \delta_\nu^\mu - \delta\omega_\nu^\mu , \\ \Lambda_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} - \delta\omega_{\mu\nu} = \Lambda_{\nu\mu} .\end{aligned} \quad (2.16)$$

Logo

$$\delta\omega_{\mu\nu} = -\delta\omega_{\nu\mu} . \quad (2.17)$$

Ou seja,  $\delta\omega_{\mu\nu}$  é uma matriz antissimétrica de entradas pequenas, de modo que as transformações acima sejam próximas a identidade. Seja  $d$  a dimensão do espaço-tempo sobre o qual as transformações de Lorentz são realizadas. Por ser antissimétrica,  $\delta\omega_{\mu\nu}$  tem apenas  $\frac{1}{2}d(d-1)$  componentes independentes. Logo, as transformações infinitesimais acima são geradas por  $\frac{1}{2}d(d-1)$  geradores infinitesimais independentes.

Nem todas as transformações de Lorentz podem ser obtidas ao se compor transformações infinitesimais. Tomando o determinante na Eq. (2.13), tem-se que  $\det(\Lambda^{-1}) = \det(\Lambda)$ . Isto significa que  $\det(\Lambda) = \pm 1$ . As transformações de Lorentz que obedecem  $\det(\Lambda) = 1$  são chamadas transformações próprias. Note que o produto de duas transformações próprias é uma transformação própria e que transformações da forma  $\Lambda = 1 + \delta\omega$  também são próprias. Portanto, composição de transformações infinitesimais só pode gerar um subgrupo do grupo de Lorentz em que todas as transformações são próprias, e assim conectadas a identidade.

Um outro possível subgrupo do grupo de Lorentz é o subgrupo das transformações ortócronas. A Eq. (2.12) implica em  $(\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^i_0)^2 = 1$ . Portanto  $\Lambda^0_0 \leq -1$  ou  $\Lambda^0_0 \geq 1$ . As transformações que obedecem  $\Lambda^0_0 \geq 1$  são transformações ortócronas. Novamente, o produto de duas delas sempre é uma transformação ortócrona e as transformações infinitesimais como descritas acima são ortócronas.

Apenas o subgrupo das transformações de Lorentz próprias e ortócronas pode ser obtido através da composição de transformações infinitesimais (diz-se que apenas este subgrupo é suavemente conexo a identidade). As transformações que não satisfazem este subgrupo podem ser obtidas fazendo uso de duas transformações discretas.

- A transformação de Paridade é escrita como

$$\mathcal{P}^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

E é ortócrona, porém imprópria. Esta transformação leva transformações próprias em impróprias. Vale notar que no caso de dimensões ímpares,  $\det(\mathcal{P}) = 1$ . Em dimensões ímpares, não existe maneira fácil de se distinguir transformações próprias de impróprias.

- A transformação de reversão temporal é dada por

$$\mathcal{T}^\mu_\nu = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

e é imprópria e não-ortócrona. Leva transformações ortócronas em não ortócronas.

Para obter geradores infinitesimais para o grupo de Lorentz, é conveniente trabalhar em uma representação para os elementos do grupo em termos de operadores definidos em um espaço infinito-dimensional, como são os operadores diferenciais, por exemplo. Cada elemento  $\Lambda$  é então representado por um operador  $U(\Lambda)$  tal que seja preservada a regra de composição do grupo

$$U(\Lambda'\Lambda) = U(\Lambda')U(\Lambda). \quad (2.18)$$

Então, para uma transformação infinitesimal escreve-se

$$U(1 + \delta\omega) = I + \frac{i}{2}\delta\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}, \quad (2.19)$$



com  $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$  descrevendo os geradores da álgebra do grupo de Lorentz. Para obter a tabela de comutações desta álgebra, usa-se a Eq. (2.18) para escrever

$$U(\Lambda)^{-1} U(\Lambda') U(\Lambda) = U(\Lambda^{-1}\Lambda'\Lambda) .$$

Trata-se, então,  $\Lambda'$  como uma transformação próxima a identidade como dada na Eq. (2.19).

Expandindo e mantendo apenas termos lineares em  $\delta\omega'$ , tem-se

$$\begin{aligned} \delta\omega'_{\mu\nu} U(\Lambda)^{-1} M^{\mu\nu} U(\Lambda) &= \delta\omega'_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma M^{\rho\sigma} , \\ U(\Lambda)^{-1} M^{\mu\nu} U(\Lambda) &= \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma M^{\rho\sigma} . \end{aligned}$$

Tratando, então,  $\Lambda$  como na Eq. (2.19), expandimos novamente até primeira ordem em  $\delta\omega$  e igualamos seus coeficientes. Temos

$$\begin{aligned} \left( I - \frac{i}{2} \delta\omega_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta} \right) M^{\mu\nu} \left( I + \frac{i}{2} \delta\omega_{\rho\sigma} M^{\rho\sigma} \right) &= M^{\mu\nu} + \frac{i}{2} \delta\omega_{\rho\sigma} (M^{\mu\nu} M^{\rho\sigma} - M^{\rho\sigma} M^{\mu\nu}) , \\ &= M^{\mu\nu} + \frac{i}{2} \delta\omega_{\rho\sigma} [M^{\mu\nu} , M^{\rho\sigma}] . \end{aligned}$$

E o lado direito, de acordo com 2.17 e a antissimetria de  $M^{\mu\nu}$  fica

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \delta\omega_{\rho\sigma} [M^{\mu\nu} , M^{\rho\sigma}] &= \delta\omega^\nu_\sigma M^{\mu\sigma} + \delta\omega^\mu_\rho M^{\rho\nu} , \\ &= \delta\omega_{\rho\sigma} (g^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} - g^{\sigma\mu} M^{\rho\nu}) \\ \frac{i}{2} [M^{\mu\nu} , M^{\rho\sigma}] &= \frac{1}{2} [g^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} - g^{\sigma\mu} M^{\rho\nu} - g^{\nu\sigma} M^{\mu\rho} + g^{\rho\mu} M^{\sigma\nu}] , \\ [M^{\mu\nu} , M^{\rho\sigma}] &= i [g^{\nu\sigma} M^{\mu\rho} + g^{\sigma\mu} M^{\rho\nu} + g^{\nu\rho} M^{\sigma\mu} + g^{\mu\rho} M^{\nu\sigma}] . \end{aligned}$$

Através destas comutações é gerada a álgebra de Lorentz.

## O Grupo de Poincaré

O grupo de Poincaré é também conhecido como o grupo de Lorentz Inomogêneo. As trans-

transformações de coordenadas que o compõe são da forma

$$x' = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu, \quad (2.20)$$

com  $\Lambda$  uma matriz de transformação de Lorentz e  $a^\mu$  um vetor constante. Verificam-se as quatro condições para que transformações deste tipo formem um grupo:

### 1. Fechamento

Da Eq. (2.20) pode-se concluir que

$$\begin{aligned} x'' &= \Lambda_1^\mu{}_\nu x'^\nu + a_1^\mu, \\ &= \Lambda_1^\mu{}_\nu \Lambda_2^\nu{}_\rho x^\rho + \Lambda_1^\mu{}_\nu a_2^\nu + a_1^\mu, \\ &= \Lambda_1^\mu{}_\nu \Lambda_2^\nu{}_\rho x^\rho + a_2'^\mu + a_1^\mu. \end{aligned}$$

Uma vez já estabelecido que o produto de duas transformações de Lorentz é uma transformação de Lorentz, segue que as transformações de Poincaré são fechadas quanto à composição.

### 2. Associatividade

As operações envolvidas nas transformações de Poincaré são multiplicação e adição de matrizes. Dessa forma a associatividade é trivialmente satisfeita.

### 3. Identidade

O papel de identidade é exercido pela transformação que tem  $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$  e  $a^\mu = 0$ .

### 4. Inversa

Denota-se a transformação dada na Eq. (2.20) como

$$\begin{aligned} G \cdot x^\mu &= x'^\mu, \\ &= \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Para encontrar a inversa, escreve-se que

$$\begin{aligned} G^{-1} \cdot G \cdot x^\mu &= x^\mu , \\ G^{-1} \cdot x^\mu &= \Lambda_\nu^\mu x^\nu - \Lambda_\nu^\mu a^\nu \end{aligned}$$

Como toda matriz de Lorentz tem inversa, toda transformação de Poincaré também tem inversa.

Para se obter a álgebra de Poincaré, novamente é necessário o tratamento da representação infinito-dimensional. Para uma transformação infinitesimal, temos

$$\begin{aligned} U(\Lambda + a) &= I + \frac{i}{2} \delta\omega_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta} + \varepsilon_\alpha P^\alpha , \\ U(\Lambda + a)^{-1} &= I - \frac{i}{2} \delta\omega_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta} - \varepsilon_\alpha P^\alpha . \end{aligned}$$

Com um procedimento análogo ao do grupo de Lorentz, obtém-se a tabela de comutação para a álgebra de Poincaré

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0 , \\ [P_\mu, M_{\nu\rho}] &= i(g_{\mu\nu} P_\rho - g_{\rho\nu} P_\mu) , \\ [M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] &= i[g^{\nu\sigma} M^{\mu\rho} + g^{\sigma\mu} M^{\rho\nu} + g^{\nu\rho} M^{\sigma\mu} + g^{\mu\rho} M^{\nu\sigma}] . \end{aligned}$$

Desta forma, a álgebra de Poincaré é construída em sua forma abstrata. Vale notar que, assim como ocorreu no caso homogêneo, apenas transformações próprias e ortócronas podem ser obtidas por composição de transformações infinitesimais. A seguir construiremos representações explícitas dos geradores e estudaremos seus significados.

## Representação Explícita para os Geradores

Podemos reescrever os geradores do grupo de Lorentz de modo que sua relação com a

mecânica relativística seja mais imediata. Define-se então

$$\begin{aligned} J_i &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M^{jk} , \\ K_i &= M^{i0} . \end{aligned}$$

As relações de comutação se tornam então

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= i\varepsilon_{ijk} J_k , \\ [J_i, K_j] &= i\varepsilon_{ijk} K_k , \\ [K_i, K_j] &= -i\varepsilon_{ijk} J_k , \\ [J_i, P_j] &= i\varepsilon_{ijk} P_k , \\ [J_i, P_0] &= 0 , \\ [K_i, P_j] &= i\delta_{ij} P_0 , \\ [K_i, P_0] &= iP_i , \\ i, j, k &= 1 \dots d-1 . \end{aligned}$$

Desse modo os geradores  $J_i$  descrevem rotações do tipo as do  $\mathbb{R}^{d-1}$  e os geradores  $K_i$  descrevem rotações que, no caso do espaço de Minkowski, misturam a coordenada do tipo tempo com as coordenadas do tipo espaço. Rotações deste tipo são chamadas boosts, ou impulsos.

Nesta dissertação, os casos de maior interesse são os casos com a dimensão do espaço-tempo  $d = 2, 3, 4$ . Nestas dimensões é possível escrever os geradores de Lorentz no espaço de Minkowski como uma matriz, de modo a tornar a escrita mais compacta. Em cada uma das dimensões, escreve-se

$$J_{\mu\nu}^{(3+1)} = \begin{pmatrix} 0 & K_1 & K_2 & K_3 \\ K_1 & 0 & J_3 & -J_2 \\ K_2 & -J_3 & 0 & J_1 \\ K_3 & J_2 & -J_1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$J_{\mu\nu}^{(2+1)} = \begin{pmatrix} 0 & K_1 & K_2 \\ K_1 & 0 & J \\ K_2 & -J & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_{\mu\nu}^{(1+1)} = \begin{pmatrix} 0 & K \\ K & 0 \end{pmatrix}.$$

Os geradores  $P_\mu$  são, obviamente, os geradores de translações. Agindo sobre um espaço de funções escalares estes geradores, na representação infinito dimensional são dados por  $P_\mu = i\partial_\mu$ . Neste caso podemos escrever os geradores da álgebra de Poincaré explicitamente como

$$J_{\mu\nu} = g_{\mu\delta}x^\delta\partial_\nu - g_{\nu\delta}x^\delta\partial_\mu,$$

$$P_\mu = i\partial_\mu.$$

Note que esta representação para os geradores age sobre funções escalares. No capítulo 4 será construída uma representação sobre espinores para estes geradores.

## Capítulo 3

# Métodos de Simetria

Existe na literatura uma coleção vasta de soluções exatas de equações físicas. Curiosamente, a maior parte das soluções exatas encontradas costuma explorar alguma propriedade de simetria, seja da equação ou da solução em si. Este fato levanta a questão de que talvez exista algum método geral para tratar equações diferenciais do ponto de vista de simetria e usar este conhecimento para obter soluções da equação.

Há mais de um século, o matemático norueguês Sophus Lie propôs esta mesma pergunta. Foi então que as primeiras idéias neste sentido vieram à frente, baseando-se no que hoje chamamos de grupos e álgebras de Lie. O que segue neste capítulo é uma breve revisão de como obter e usar simetrias de equações diferenciais e está baseado em [37], [38] e [39]. Este capítulo se limita a tratar apenas de grupos de simetria de Lie.

### 3.1 Encontrando Simetrias de Lie de EDOs

Seja uma equação diferencial ordinária (EDO) de ordem  $n$  escrita como

$$y^{(n)} = \omega(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) , \quad (3.1)$$

$$y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k} , \quad (3.2)$$

onde  $\omega$  é uma função suave de todos os seus argumentos. Uma simetria da Eq. (3.1) é um difeomorfismo que mapeia o conjunto de soluções da EDO sobre si mesmo. Qualquer difeomorfismo

$$\Gamma : (x, y) \longmapsto (\hat{x}, \hat{y})$$

mapeia curvas suaves no plano em curvas suaves no plano.

A ação de  $\Gamma$  no plano  $(x, y)$  induz uma ação sobre as derivadas  $y^{(k)}$ , ou seja

$$\Gamma : (x, y, y', \dots, y^{(n)}) \longmapsto (\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}', \dots, \hat{y}^{(n)}),$$

com

$$\hat{y}^{(k)} = \frac{d^k \hat{y}}{d\hat{x}^k}.$$

Este mapa é chamado n-ésimo prolongamento de  $\Gamma$ . As funções  $y^{(k)}$  são calculadas recursivamente através do uso da regra da cadeia como

$$\begin{aligned} \hat{y}^{(k)} &= \frac{d\hat{y}^{(k-1)}}{d\hat{x}}, \\ &= \frac{D_x \hat{y}^{(k-1)}}{D_x \hat{x}}, \end{aligned}$$

onde  $D_x = \partial_x + y' \partial_y + y'' \partial_{y'} + \dots$  é a derivada total em relação a  $x$ .

Seja  $\Gamma$  uma simetria da Eq. (3.1). A transformação  $\Gamma$  mapeia, então, soluções da equação sobre soluções. Em termos matemáticos,  $\Gamma$  é uma simetria se a condição de simetria é válida.

Ou seja,

$$\hat{y}^{(n)} = \omega(\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}', \dots, \hat{y}^{(n-1)}), \quad (3.3)$$

sempre que a Eq. (3.1) for válida. No caso geral de EDOs, a Eq. (3.3) é não-linear.

O propósito de se encontrar simetrias de equações é, em última instância, resolver a equação diferencial. Reduzir EDOs a equações diferenciais parciais (EDPs) não lineares não costuma

ser uma boa troca. Portanto, como está escrita, a condição de simetria não nos é de muito uso. Porém, deve-se lembrar que transformações de Lie são continuamente conexas a identidade. Graças a esta propriedade, se nos atermos a simetrias de Lie, a condição de simetria pode ser linearizada e escrita de uma forma mais tratável. Por simplicidade, trata-se aqui de transformações dependentes de apenas um parâmetro. A extensão para mais parâmetros é direta.

Expande-se então a transformação ao redor da identidade como

$$\hat{x} = x + \varepsilon\xi + O(\varepsilon^2) , \quad (3.4)$$

$$\hat{y} = y + \varepsilon\eta + O(\varepsilon^2) , \quad (3.5)$$

$$\hat{y}^{(k)} = y^{(k)} + \varepsilon\eta^{(k)} + O(\varepsilon^2) . \quad (3.6)$$

O sobrescrito em  $\eta^{(k)}$  é apenas um índice e não indica diferenciação. Ao substituir as Eqs. (3.4)-(3.6) na Eq. (3.3) obtém-se a condição de simetria linearizada, escrita como

$$\eta^{(n)} = \xi\omega_x + \eta\omega_y + \eta^{(1)}\omega_{y'} + \dots + \eta^{(n-1)}\omega_{y^{(n-1)}} , \quad (3.7)$$

sempre que a Eq. (3.1) valer. Como o próprio nome indica, esta condição é linear. As funções  $\eta^{(k)}$  são calculadas a partir de

$$\hat{y}^{(k)} = \frac{y^{(k)} + \varepsilon D_x \eta^{(k-1)}}{1 + \varepsilon D_x \xi} .$$

Daí vem que

$$\begin{aligned} y^{(k)} + \varepsilon\eta^{(k)} &= \frac{y^{(k)} + \varepsilon D_x \eta^{(k-1)}}{1 + \varepsilon D_x \xi} , \\ \eta^{(k)} &= D_x \eta^{(k-1)} - y^{(k)} D_x \xi . \end{aligned} \quad (3.8)$$

Pode-se também definir a característica  $Q = \eta - y'\xi$  e reescrever as funções  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\eta^{(k)}$  como

$$\begin{aligned} \xi &= -Q_{y'} , \\ \eta &= Q - y'Q_{y'} , \end{aligned}$$



$$\eta^{(k)} = D_x^k Q - y^{k+1} Q_{y'} . \quad (3.9)$$

$$(3.10)$$

Este resultado é útil de um ponto de vista computacional e é generalizado facilmente para outros tipos de transformação que não transformações de Lie.

### 3.1.1 Órbitas e Geradores Infinitesimais

Interessa escrever as simetrias em termos de seus geradores infinitesimais. Para tanto, define-se inicialmente a órbita de uma transformação.

**Definição:** A órbita de um grupo de Lie de simetrias a um parâmetro através de um ponto  $(x, y)$  é o conjunto de pontos dado por

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (\hat{x}(x, y; \varepsilon), \hat{y}(x, y; \varepsilon)) .$$

Ou seja, o conjunto de todos os pontos onde  $(x, y)$  pode ser levado por uma transformação do grupo. Note que  $\varepsilon = 0$  corresponde a transformação identidade. A órbita de um ponto invariante é o mesmo ponto. A órbita de um ponto não-invariante é uma curva. Define-se ainda:

**Definição:** O vetor tangente no ponto  $(\hat{x}, \hat{y})$  à órbita através de um ponto não invariante  $(x, y)$  é dado por  $(\xi(\hat{x}, \hat{y}), \eta(\hat{x}, \hat{y}))$  onde

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} &= \xi(\hat{x}, \hat{y}) , \\ \frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} &= \eta(\hat{x}, \hat{y}) . \end{aligned}$$

Lembrando da definição de gerador infinitesimal de uma transformação tem-se

$$\hat{x} = x + \varepsilon G \cdot x + \dots ,$$

$$\hat{y} = y + \varepsilon G \cdot y + \dots ,$$

onde  $G$  é o gerador infinitesimal. A partir das Eqs. (3.4)-(3.6) pode-se escrever

$$G = \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y .$$

O gerador  $G$  trata apenas de transformações em  $x$  e  $y$ . Ao considerar equações diferenciais, é importante definir como as transformações agem nas derivadas relevantes. Para tratar deste problema, introduz-se o gerador infinitesimal prolongado

$$G = \xi\partial_x + \eta\partial_y + \eta^{(1)}\partial_{y'} + \dots + \eta^{(n)}\partial_{y^{(n)}} .$$

Então escreve-se a condição de simetria linearizada como uma equação envolvendo  $G^{(n)}$  como

$$G^{(n)} \left( y^{(n)} - \omega \left( x, y, y', \dots, y^{(n-1)} \right) \right) = 0 ,$$

quando a Eq. (3.1) for válida. Esta forma é especialmente interessante, pois descreve a condição de simetria de uma forma independente de coordenadas.

### 3.1.2 As Equações Determinantes

Para encontrar as simetrias de Lie da Eq. (3.1), é necessário primeiro obter os  $\eta^{(k)}$ . Se a condição de simetria puder ser resolvida, todas as simetrias de Lie de uma equação diferencial podem ser identificadas. Da definição dada na Eq. (3.9), e como  $\xi$  e  $\eta$  só dependem de  $x$  e  $y$ , os  $\eta^{(k)}$  podem facilmente ser obtidos com algum cálculo. A seguir tem-se alguns deles:

$$\begin{aligned} \eta^{(1)} &= \eta_x + (\eta_y - \xi_x) y' - \xi_y y'^2 , \\ \eta^{(2)} &= \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx}) y' - \xi_{yy} y'^3 + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) y'^2 + (\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y') y'' , \\ \eta^{(3)} &= \eta_{xx} + (3\eta_{xxy} - \xi_{xxx}) y' + (\eta_{yyy} - 3\xi_{xyy}) y'^3 - \xi_{yyy} y'^4 \\ &\quad + 3\{\eta_{xy} - \xi_{xx} + (\eta_{yy} - 3\xi_{xy}) y' - 2\xi_{yy} y'^2\} y'' \\ &\quad - 3\xi_y y''^2 + \{\eta_y - 3\xi_x - 4\xi_y y'\} y''' . \end{aligned}$$

O número de termos em  $\eta^{(k)}$  cresce rapidamente com  $k$ , portanto álgebra computacional é praticamente obrigatória nos casos de ordens mais altas. Substitui-se então a expressão  $y^{(n)} = \omega(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  nas equações para  $\eta^{(k)}$  e, igualando a condição de simetria linearizada, a equação resultante pode ser separada (usualmente igualando coeficientes de potências de  $y'$ ) num sistema de EDPs. Este é o sistema de equações determinantes da Eq. (3.1) e tem como soluções as simetrias de Lie da Eq. (3.1).

## Exemplo

Uma EDO de segunda ordem é escrita como

$$y'' = \omega(x, y, y') . \quad (3.11)$$

As componentes  $\eta^{(k)}$  dos geradores prolongados desta equação são dados portanto

$$\eta^{(1)} = \eta_x + (\eta_y - \xi_x) y' - \xi_y y'^2 , \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \eta^{(2)} &= \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx}) y' - \xi_{yy} y'^3 + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) y'^2 + (\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y') y'' , \\ &= \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx}) y' - \xi_{yy} y'^3 + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) y'^2 + \\ &\quad (\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y') \omega(x, y, y') . \end{aligned} \quad (3.13)$$

A condição de simetria linearizada, por outro lado, leva a

$$\eta^{(2)} = \xi \omega_x + \eta \omega_y + \eta^{(1)} \omega_{y'} . \quad (3.14)$$

Igualando as Eqs. (3.13) e (3.14), temos

$$\begin{aligned} \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx}) y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) y'^2 + (\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y') \omega(x, y, y') \\ - \xi_{yy} y'^3 - \xi \omega_x - \eta \omega_y - \{\eta_x + (\eta_y - \xi_x) y' - \xi_y y'^2\} \omega_{y'} = 0 . \end{aligned} \quad (3.15)$$

A separação da Eq. (3.15) em um sistema de EDPs só é possível se explicitado  $\omega$ . A título

de exemplo, seja

$$\begin{aligned}
 \omega(x, y, y') &= -y, \\
 \omega_x &= 0, \\
 \omega_y &= -1, \\
 \omega_{y'} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.16}$$

A Eq. (3.15) se torna então

$$\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y'^2 - \xi_{yy}y'^3 - y(\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y') + \eta = 0.$$

Igualando os coeficientes de potências iguais de  $y'$ , obtém-se

$$\eta_{xx} - y(\eta_y - 2\xi_x) + \eta = 0, \tag{3.17}$$

$$2\eta_{xy} - \xi_{xx} - 3\xi_y y = 0, \tag{3.18}$$

$$\eta_{yy} - 2\xi_{xy} = 0, \tag{3.19}$$

$$\xi_{yy} = 0, \tag{3.20}$$

que é o sistema determinante da equação em questão. Da Eq. (3.20), tem-se

$$\xi_y = A_{\xi 1}(x),$$

$$\xi = A_{\xi 1}(x)y + A_{\xi 2}(x).$$

Da Eq. (3.19)

$$\partial_y(\eta_y - 2\xi_x) = 0,$$

$$\eta_y - 2\xi_x = B(x),$$

$$\eta_y = B(x) + A'_{\xi 1}(x)y,$$

$$\eta = B(x)y + \frac{A'_{\xi_1}(x)}{2}y^2 + A_{\eta_1}(x) .$$

Da Eq. (3.18)

$$\begin{aligned} 2(B'(x) + A''_{\xi_1}(x)y) - (A''_{\xi_1}(x)y + A''_{\xi_2}(x)) - 3A_{\xi_1}(x)y &= 0 , \\ A''_{\xi_1}y + 2B'(x) - A''_{\xi_2}(x) - 3A_{\xi_1}(x)y &= 0 . \end{aligned}$$

E da Eq. (3.17)

$$\begin{aligned} B''(x)y + \frac{A'''_{\xi_1}(x)}{2}y^2 + A''_{\eta_1}(x) - y[B(x) + A'_{\xi_2}(x) - 2(A'_{\xi_1}(x)y + A'_{\xi_2}(x))] \\ + B(x)y + \frac{A'_{\xi_1}(x)}{2}y^2 + A_{\eta_1}(x) = 0 . \end{aligned}$$

Comparando, então, potências de  $y$ , vem

$$\begin{aligned} A''_{\xi_1}(x) &= 3A_{\xi_1}(x) , \\ A_{\xi_1}(x) &= c_1e^{\sqrt{3}x} + c_2e^{-\sqrt{3}x} . \\ 2B'(x) &= A''_{\xi_2}(x) . \\ A''_{\eta_1}(x) &= -A_{\eta_1}(x) , \\ A_{\eta_1}(x) &= c_3 \cos(x) + c_4 \sin(x) . \\ B''(x) + 2B(x) &= c_5 , \\ B(x) &= \frac{c_5}{2} + c_6 \cos(\sqrt{2}x) + c_7 \sin(\sqrt{2}x) . \end{aligned}$$

Isto segue da comparação dos termos com potências 0 ou 1 de  $y$  das duas equações. O termo quadrático leva a

$$\begin{aligned} A'''_{\xi_1}(x) &= -5A'_{\xi_1}(x) , \\ A_{\xi_1}(x) &= 0 . \end{aligned}$$

Resolvendo para  $A_{\xi_2}(x)$ , temos

$$A_{\xi_2}(x) = c_6 \sin(\sqrt{2}x) - c_7 \cos(\sqrt{2}x) + c_8 .$$

Finalmente, escreve-se

$$\begin{aligned} \xi &= c_6 \sin(\sqrt{2}x) - c_7 \cos(\sqrt{2}x) + c_8 , \\ \eta &= \frac{c_5}{2}y + c_6 \cos(\sqrt{2}x)y + c_7 \sin(\sqrt{2}x)y + c_3 \cos(x) + c_4 \sin(x) . \end{aligned}$$

Portanto, temos os seis geradores de simetria de  $y'' = -y$

$$\begin{aligned} G_1 &= \cos(x)\partial_y , \\ G_2 &= \sin(x)\partial_y , \\ G_3 &= y\partial_y , \\ G_4 &= \sin(\sqrt{2}x)\partial_x + \cos(\sqrt{2}x)y\partial_y , \\ G_5 &= \sin(\sqrt{2}x)y\partial_y - \cos(\sqrt{2}x)\partial_x , \\ G_6 &= \partial_x . \end{aligned}$$

Note que para encontrar simetrias de Lie, mesmo de uma equação simples como esta, é necessário executar uma quantidade grande de cálculos. Fica claro com este exemplo que equações mais intrincadas trazem complicações no volume de trabalho a ser executado. Porém o método, mesmo que pesado, tem sua funcionalidade assegurada pela garantia que cálculos intermediários são sempre lineares.

Note também que para obter as simetrias desta equação foi necessário resolver a própria equação. Isto ilustra que métodos de simetria talvez não sejam sempre os métodos mais indicados para se resolver equações lineares.

## 3.2 Simetrias de EDPs

A técnica para a obtenção de grupos de simetrias de Lie de EDPs é essencialmente a mesma que o caso ordinário, exigindo apenas algumas generalizações. Seja

$$\begin{aligned} \Delta_\beta \equiv u_{\sigma\beta} - \omega_\beta(x, u^{(n)}) &= 0, \\ \beta &= 1, \dots, M, \end{aligned} \quad (3.21)$$

um conjunto de EDPs aonde  $u = (u_1, \dots, u^M)$  são as variáveis dependentes e  $x = (x^1, \dots, x^N)$  as variáveis independentes. O símbolo  $u^{(n)}$  representa o conjunto de todas as derivadas de ordem  $n$  ou menor presentes na equação. Por outro lado  $u_{\sigma\beta}$  é a derivada de maior ordem em cada equação, e não existe nenhum outro termo no sistema que contenha  $u_{\sigma\beta}$ . Esta não é a forma mais geral para um sistema de EDPs, mas é de generalidade suficiente para tratar uma grande classe de problemas físicos, enquanto simplifica enormemente os cálculos necessários para a obtenção de simetrias. Isto se deve ao fato da substituição  $u_{\sigma\beta} = \omega_\beta(x, u^{(n)})$  ser possível ao separar o sistema determinante.

A forma do gerador infinitesimal prolongado de uma equação do tipo da Eq. (3.21) é

$$G = \xi^i(x, u)\partial_{x^i} + \eta_\alpha(x, u)\partial_{u^\alpha} + \eta_\alpha^J\partial_{u_\alpha^J},$$

onde  $u_\alpha^J = D_J u^\alpha$  é uma abreviação de todas as derivadas possíveis de  $u$ , com

$$D_J = D_{x^1}^{j_1} D_{x^2}^{j_2} \dots D_{x^M}^{j_M}.$$

e também

$$\eta_\alpha^J = D_J(\eta_\alpha - \xi^i u_{x^i}^\alpha) + \xi^i D_J u_{x^i}^\alpha.$$

A condição de simetria para EDPs é dada por

$$G\Delta_\beta = 0,$$

Sempre que a Eq. (3.21) for válida. A obtenção do sistema de equações determinantes segue o mesmo processo que EDOs. Estes métodos ficam mais bem ilustrados em um exemplo prático.

### Exemplo

Considere a equação  $u_t = u_x^2$ . O gerador infinitesimal é então escrito como

$$G = \xi \partial_x + \tau \partial_t + \eta \partial_u .$$

A condição de simetria linearizada é

$$\eta^t = 2u_x \eta^x .$$

Das definições de  $\eta^x$  e  $\eta^t$  vem

$$\eta^x = \eta_x + (\eta_u - \xi_x) u_x - \tau_x u_t - \xi_u u_x^2 - \tau_u u_x u_t ,$$

$$\eta^t = \eta_t - \xi_t u_x + (\eta_u - \tau_t) u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2 .$$

Substituindo e eliminando  $u_t$  com o auxílio da equação original, obtém-se

$$\tau_u = 0 , \tag{3.22}$$

$$\xi_u + 2\tau_x = 0 , \tag{3.23}$$

$$\eta_u + \tau_t - 2\xi_x = 0 , \tag{3.24}$$

$$\xi_t + 2\eta_x = 0 , \tag{3.25}$$

$$\eta_t = 0 . \tag{3.26}$$

Resolvendo a Eq. (3.22), temos

$$\tau = A(x, t) .$$



Da Eq. (3.23) vem

$$\xi = -2A_x u + B(x, t), \quad (3.27)$$

e com a Eq. (3.24) segue

$$\eta = -2A_{xx}u^2 + (2B_x - A_t)u + C(x, t).$$

Substituindo estes resultados nas Eqs. (3.25) e (3.26)

$$\begin{aligned} -4A_{xxx}u^2 + 4(B_{xx} - A_{xt})u + C_x(x, t) + B_t &= 0, \\ -2A_{xxt}u^2 + 2(B_{xt} - A_{tt})u + C_t(x, t) &= 0. \end{aligned}$$

Comparando potências de  $u$ , tem-se

$$C_t = 0, \quad (3.28)$$

$$B_t + 2C_x = 0, \quad (3.29)$$

$$2B_{xt} - A_{tt} = 0, \quad (3.30)$$

$$B_{xx} - A_{xt} = 0, \quad (3.31)$$

$$A_{xxt} = 0, \quad (3.32)$$

$$A_{xxx} = 0. \quad (3.33)$$

Resolvendo as Eqs. (3.28) - (3.30) obtém-se

$$C = \alpha x,$$

$$B = -2\alpha'(x)t + \beta(x),$$

$$A = -2\alpha''(x)t^2 + \gamma(x)t + \delta(x).$$

Substituir estes resultados nas Eqs. (3.31) - (3.33) permite escrever o resultado final

$$\begin{aligned}
 \xi &= -4c_1tx - 2c_2t + c_4 \left( \frac{1}{2}x^2 - 2tu \right) + c_6x + c_7 - 4c_8xu - 2c_9u , \\
 \tau &= -4c_1t^2 + c_4xt + c_5t + c_8x^2 + c_9x + c_{10} , \\
 \eta &= c_1x^2 + c_2x + c_3 + c_4xu - c_5u + 2c_6u - 4c_9u^2 ,
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

que tem 10 constantes arbitrárias, sendo assim uma álgebra 10-dimensional.

As simetrias de Lie para EDPs e EDOs, como observado, são obtidas essencialmente pelos mesmos métodos. Porém, obter simetrias de equações, por si só, não tem muito uso. Queremos explorar o conhecimento de simetrias de uma equação de modo a chegar o mais próximo possível de uma solução. O que segue é uma das várias maneiras de se usar um grupo de simetrias de Lie com este intuito.

### 3.3 Coordenadas Canônicas

Suponha que a seguinte EDO,

$$\frac{dy}{dx} = \omega(x, y) ,$$

tenha como simetria as translações em  $y$

$$(x, y) \longmapsto (x, y + \varepsilon) .$$

A condição de simetria nos leva a

$$\omega_y = 0 .$$

E com isso, a equação de primeira ordem mais geral com simetria de translações em  $y$  é

$$\frac{dy}{dx} = \omega(x) ,$$

que tem como solução

$$y = \int \omega(x) dx .$$

Note que invariância por translações resolveu a EDO de primeira ordem geral. Portanto pode ser interessante escrever uma equação diferencial em um sistema de coordenadas tal que alguma de suas simetrias possa ser escrita como uma translação.

As órbitas de simetrias de translação tem o mesmo vetor tangente em todos os pontos

$$(\xi, \eta) = (0, 1) . \quad (3.35)$$

Dado um grupo de Lie de simetrias a um parâmetro, uma base na qual os vetores tangentes podem ser escritos como vetores tangentes a órbitas de translação pode ser encontrado. Para tanto, pode-se introduzir as coordenadas

$$(r, s) = (r(x, y), s(x, y))$$

de modo que

$$(\hat{r}, \hat{s}) \mapsto (r, s + \varepsilon) .$$

Da definição do vetor tangente a órbita vem

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{r}}{d\varepsilon} &= 0 , \\ \frac{d\hat{s}}{d\varepsilon} &= 1 . \end{aligned}$$

Aplicando a regra da cadeia,

$$\begin{aligned} \xi(x, y)r_x + \eta(x, y)r_y &= 0 , \\ \xi(x, y)s_x + \eta(x, y)s_y &= 1 . \end{aligned}$$

É necessário também que a transformação de coordenadas seja invertível em todos os pontos, evidenciado pela exigência que a matriz de transformação no espaço dos vetores não seja singular. Isto se traduz no presente caso como

$$r_x s_y - r_y s_x \neq 0 .$$

Se tal mudança de coordenadas for possível, as coordenadas  $r$  e  $s$  são chamadas coordenadas canônicas. O gerador de simetria nestas coordenadas é escrito como

$$G = \partial_s . \tag{3.36}$$

Geradores deste tipo podem ser usados para reduzir a ordem de uma EDO de  $n$  para  $n - 1$  ou para eliminar uma variável independente de uma EDP.

### Redução de Ordem em EDOs

Considere a EDO

$$s^{(n)} = \omega(r, s, \dots, s^{(n-1)}) ,$$

escrita em coordenadas canônicas e portanto invariante por  $G = \partial_s$ . Isto nos leva, de acordo com a condição de simetria, a

$$\omega_s = 0 .$$

Isto quer dizer que a equação pode ser escrita como

$$\begin{aligned} s^{(n)} &= \omega(r, s', \dots, s^{(n-1)}) , \\ v^{(n-1)} &= \omega(r, v, \dots, v^{(n-2)}) , \\ v &= \frac{ds}{dr} . \end{aligned} \tag{3.37}$$

A mudança de variável para  $v$  efetivamente reduziu em 1 a ordem da EDO. Isto quer dizer que  $n$  simetrias podem resolver uma EDO de ordem  $n$  por completo.

## Redução de Variáveis em EDPs

Considere a EDP

$$F(x^1, \dots, x^M; u, u_{x_1}, \dots) = 0$$

invariante sob o gerador  $G = \partial_{x^1}$ . Esta invariância leva a condição

$$F_{x_1} = 0,$$

e portanto a variável  $x_1$  pode ser eliminada da equação, efetivamente eliminando um grau de liberdade do sistema. Com o conhecimento suficiente de geradores de simetria de uma EDP, esta pode ser reduzida a uma EDO, que costuma ser bem mais simples de se resolver. Encontrar coordenadas canônicas em EDPs é um problema bem maior que em EDOs, devido ao aumento de coordenadas a serem tratadas.

Note que as relações de comutação entre geradores são independentes do sistema de coordenadas usado. Isto quer dizer que se  $n$  geradores de simetria comutam, estes  $n$  geradores podem ser simultaneamente transformados em geradores de translação, reduzindo em  $n$  o número de graus de liberdade do sistema. Isto decorre de  $[\partial_{x^i}, \partial_{x^j}] = 0$  ser a relação de comutação típica de grupos de translação, permitindo que alguma base exista em que o tratamento anterior seja possível. Este fato será relevante nos capítulos subsequentes.

# Capítulo 4

## Equações de Dirac

### 4.1 Mecânica Quântica e Relatividade

A Relatividade Especial e a Mecânica Quântica são os dois pilares da física do século XX. É portanto natural que ocorram tentativas de combinar as duas teorias. A primeira meta desta seção é, então, mostrar como construir uma equação invariante por transformações de Lorentz análoga à equação de Schrodinger. Este capítulo de revisão tem como principais referências bibliográficas [1], [2] e [3].

Na Mecânica Quântica os estados de um sistema são representados por vetores normalizados  $|\psi\rangle$  de um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ , que contêm toda a informação sobre o sistema. A quantidade  $|\langle\phi|\psi\rangle|^2$  é a probabilidade do sistema descrito por  $|\psi\rangle$  ser encontrado no estado  $|\phi\rangle$ . Observáveis físicos são representados por operadores auto-adjuntos  $A^\dagger = A$  no espaço  $\mathcal{H}$ . O valor esperado de um destes observáveis é dado por  $\langle\psi|A|\psi\rangle$ , e finalmente, a evolução temporal de sistemas que obedecem a mecânica quântica é dada pela equação de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = H|\psi\rangle .$$

Por outro lado, a Relatividade Especial diz que as leis da natureza são independentes do referencial observador, desde que faça parte da classe de referenciais relacionados um ao outro

através de transformações do grupo de Poincaré. A velocidade da luz  $c$  é um limite superior absoluto para a velocidade de qualquer sinal. Informação originando num ponto  $(x_0, t_0)$  atinge apenas pontos  $(x_1, t_1)$  dentro do cone futuro:

$$c^2 (t_1 - t_0)^2 - (x_1 - x_0)^2 \geq 0 \quad , \quad t_1 - t_0 \geq 0 .$$

Esta é a expressão relativística da causalidade.

Para combinar a invariância relativística com a Mecânica Quântica, podemos fazer uso do princípio da correspondência. Na representação usual no espaço de configurações da Mecânica Quântica, associam-se os operadores  $i\hbar(\partial/\partial t)$  e  $(\hbar/i)\nabla_i = (\hbar/i)(\partial/\partial x^i)$  à energia  $E$  e ao momento  $p_i$ , respectivamente. Partimos então da relação de dispersão relativística

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4 .$$

Deste ponto em diante nesta dissertação, será adotado um sistema de unidades em que  $c = \hbar = 1$ .

A equação acima fica como

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 .$$

Fazendo a substituição usual de grandezas físicas por operadores, obtemos então uma equação análoga a equação de Schrödinger, porém com invariância relativística

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 - m^2 \right) \psi(\mathbf{x}, t) = 0 .$$

Esta equação é conhecida como equação de Klein-Gordon. A invariância de Lorentz fica mais explícita se escrita em sua forma covariante

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \psi(\mathbf{x}, t) = 0 .$$

Esta equação, apesar de ser análoga a equação de Schrödinger, não possui uma corrente conservada positivo-definida. Isto quer dizer que não existe uma interpretação probabilística associável

a  $\psi$ . Além disso, esta equação não reproduz alguns resultados conhecidos e medidos do átomo do hidrogênio. Tais fatos levaram Dirac a tentar obter uma outra equação que resolvesse estes problemas. A idéia por trás desta equação é fatorar o operador de Klein-Gordon como

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m) = (\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\psi(\mathbf{x}, t).$$

Fica claro que esta fatoração é impossível se  $\gamma^\mu$  forem números usuais. O que Dirac percebeu é que esta fatoração é, de fato, possível se  $\gamma^\mu$  forem matrizes. Propõe-se então que  $\gamma^\mu$  sejam matrizes anticomutativas que obedecem

$$\begin{aligned}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu \\ &= 2\eta^{\mu\nu}I\end{aligned}$$

Onde  $\eta^{\mu\nu}$  é a métrica de Minkowski e  $I$  é a matriz identidade. A menor dimensão possível para as matrizes  $\gamma$  pode ser determinada notando que, para  $i \neq j$ ,

$$\begin{aligned}\det(\gamma^i\gamma^j) &= \det(-\gamma^j\gamma^i). \\ &= (-1)^d \det(\gamma^j\gamma^i).\end{aligned}$$

As matrizes  $\gamma$  tem inversa (o quadrado delas é  $\pm 1$ ), portanto seu determinante é não-nulo. Desta forma, a dimensão  $d$  deve ser par. Note também que devem existir tantas matrizes  $\gamma$  quanto dimensões do espaço tempo. Portanto em 3+1 dimensões, devem haver 4 matrizes de Dirac. Como só existem 3 matrizes  $2 \times 2$  anticomutativas, a menor dimensão das matrizes  $\gamma$  em 4 dimensões de espaço tempo é 4. A forma explícita das matrizes  $\gamma$  depende da representação escolhida para as mesmas. As representações utilizadas nesta dissertação serão explicitadas quando relevantes.

Isto nos permite, finalmente, escrever a seguinte equação, conhecida como equação de Dirac

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0.$$



A equação de Dirac funciona como um seletor de soluções da equação de Klein-Gordon. Apesar de  $\psi$  não ser mais uma função escalar simples (como  $\gamma$  é uma matriz  $n \times n$ ,  $\psi$  deve ser uma matriz  $n \times 1$ ), todas as soluções da equação de Dirac são também soluções da equação de Klein-Gordon.

Esta equação é a equação básica para os campos de spin  $\frac{1}{2}$ , como será mostrado na próxima seção. Isto a torna de importância fundamental, uma vez que a matéria é composta de estados ligados de partículas de spin  $\frac{1}{2}$ . Estudando a covariância relativística desta equação, elucidam-se fatos bastante importantes.

## 4.2 Covariância Relativística

De acordo com o princípio da relatividade, a equação de Dirac deve manter sua forma em dois referenciais relacionados por uma transformação de Poincaré. Note que a invariância de translação é direta, restando apenas a verificação de invariância por transformações de Lorentz.

Considere então uma transformação de Lorentz  $\Lambda$ . Seja o sistema descrito pela função  $\psi$  no primeiro sistema e por  $\psi'$  no sistema transformado. Ambos devem satisfazer a equação de Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0, \quad (4.1)$$

$$(i\gamma'^\mu \partial'_\mu - m) \psi'(x') = 0. \quad (4.2)$$

Deve haver uma relação local entre  $\psi$  e  $\psi'$  de modo que um observador possa reconstruir um dos dois, conhecendo o outro. Assume-se que esta relação é linear

$$\psi'(x') = S(\Lambda) \psi(x). \quad (4.3)$$

Substituindo a Eq. (4.3) na Eq. (4.2) tem-se

$$\left( i\gamma'^\mu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu - m \right) \psi'(x') = 0$$

Para que esta equação seja consequência da Eq. (4.1) para todo  $\psi$  e como  $\partial x^\nu / \partial x'^\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu$ ,

tem-se que

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \gamma^\nu . \quad (4.4)$$

Constrói-se então  $S(\Lambda)$  para uma transformação infinitesimal própria  $\Lambda$ , que é escrita como

$$\Lambda^\mu{}_\nu = g^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu ,$$

com  $\omega^\mu{}_\nu$  uma matriz infinitesimal e anti-simétrica. Escreve-se então, para  $S(\Lambda)$

$$\begin{aligned} S(\Lambda) &= I - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} + \dots \\ S^{-1}(\Lambda) &= I + \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} + \dots \end{aligned}$$

Portanto, em primeira ordem em  $\omega$ , temos que a Eq. (4.4) resulta em

$$[\gamma^\mu, \sigma_{\alpha\beta}] = 2i \left( g^\mu{}_\alpha \gamma_\beta - g^\mu{}_\beta \gamma_\alpha \right) .$$

Um conjunto de matrizes  $\sigma_{\alpha\beta}$  que satisfaz a relação é

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{2} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta]$$

Representações do grupo de Poincaré são classificadas de acordo com os autovalores dos dois operadores de Casimir  $P^2$  e  $W^2$ . O operador  $P_\mu$  é o momento, enquanto  $W_\mu = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J^{\nu\rho}P^\sigma$  é o vetor de Pauli-Lubanski. O autovalor de  $P^2$  é, de acordo com a equação de Klein-Gordon,  $m^2$ . Portanto o autovalor  $W^2$  de  $W^\mu W_\mu$  é dado

$$W^2 = -m^2 S(S+1) .$$

Aonde S é associado ao spin do campo. Para determinar S, determina-se como  $J_{\mu\nu}$  age sobre  $\psi$

$$\psi'(x) = \left( I - \frac{i}{2} J_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} \right) \psi(x) ,$$

$$\begin{aligned}
&= \left( I - \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} \right) \psi(x^\rho - \omega^\rho_\nu x^\nu) , \\
&= \left( I - \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + x_\mu \omega^{\mu\nu} \partial_\nu \right) \psi(x) .
\end{aligned}$$

E portanto,

$$J_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} + i (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) .$$

Isso nos leva a

$$W^2 = -\frac{3}{4} m^2 = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) ,$$

e o spin de  $\psi$  é  $\frac{1}{2}$ , como afirmado acima.

### 4.3 Equações de Dirac Não-Lineares

A equação de Dirac descrita nas seções anteriores descreve uma teoria livre, sem interações. Enquanto muitas informações podem ser obtidas de tal teoria, a natureza não se limita a partículas não interagentes. Para se adaptar e descrever o universo real, o primeiro passo a ser dado é adicionar interações a equação de Dirac. Uma das maneiras de se fazer isso é adicionar não linearidades na equação. Considere não linearidades da forma

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu + F(\bar{\psi}, \psi)] \psi = 0 . \quad (4.5)$$

Aonde  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ .

Fica claro que nem todas as equações do tipo (4.5) são fisicamente interessantes. Uma maneira de introduzir equações desta forma é selecionar, dentre estas equações, aquelas que se mantêm invariantes sob a ação do grupo de Poincaré. Supõe-se então que tal escolha é feita e a não-linearidade  $F$  agora é tal que, ao adicioná-la a equação a invariância pelo grupo de Poincaré é preservada. Uma propriedade muito importante decorre daí. Suponha que procuramos uma

solução desta equação invariante sob a ação de um grupo, possivelmente um subgrupo do grupo de Poincaré. Sejam  $Q_a$  geradores de uma subálgebra  $d - 1$  dimensional da álgebra relacionada a este grupo. Procuramos então solução do sistema

$$\begin{aligned} [i\gamma^\mu \partial_\mu + F] \psi &= 0 \\ Q_a \psi(x) &= 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

com  $Q_a$  dado por

$$Q_a = \xi_a^\mu \partial_\mu + (\eta_a \psi)^\alpha \partial_{\psi^\alpha} . \tag{4.7}$$

Exige-se que hajam  $d - 1$   $Q_a$  para que as  $d$  variáveis independentes possam ser reduzidas a apenas uma. Como visto no capítulo anterior, cada gerador é capaz de reduzir em 1 o número de variáveis independentes do problema. A exigência que esses geradores fechem uma subálgebra é imposta para garantir que a redução possa ser feita em um só passo, como visto no seguinte teorema.

**Teorema:** A substituição do Ansatz

$$\psi(x) = A(x)\phi(\omega(x))$$

na Eq. (4.6), desde que a matriz  $A(x)$  e o argumento da função espinorial  $\phi(\omega)$  obedeçam

$$\begin{aligned} Q_a A(x) &= \left( \xi_a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \eta_a \right) A(x) , \\ Q_a A(x) &= 0 , \\ \xi_a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \omega &= 0 , \end{aligned}$$

resulta na separação do sistema de EDPs em um sistema de EDOs para  $\phi(\omega)$ .

**Prova:** Uma forma mais completa da prova pode ser encontrada em [33], [34]. O sistema

nas Eqs. (4.6) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} [i\gamma^\mu \partial_\mu + F] \psi &= 0 , \\ \tilde{Q}_a \psi &= (\partial_a + \xi_a \partial_0 + \tilde{\eta}_a) \psi = 0 . \end{aligned}$$

O sistema aceita grupos gerados por  $\tilde{Q}_a$  se o sistema original aceita grupos gerados por  $Q_a$ , enquanto valem as relações

$$[\tilde{Q}_a, \tilde{Q}_b] = 0 .$$

É uma consequência da teoria dos grupos de Lie que existe uma mudança de variáveis

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= \eta(x) \psi(x) , \\ z^\mu &= f^\mu(x) \end{aligned}$$

tal que o gerador  $\tilde{Q}_a$  tem a forma

$$\tilde{Q}_a = \frac{\partial}{\partial z^a} . \tag{4.8}$$

O sistema (4.6) então toma a forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_0} \Psi &= F_1(z, \Psi, \bar{\Psi}) \Psi , \\ \frac{\partial}{\partial z_a} \Psi &= 0 . \end{aligned} \tag{4.9}$$

Integração destas equações garante que  $\Psi = \Psi(z_0)$ . Para retornar ao sistema original, nota-se

$$\psi(x) = [\eta]^{-1} \Psi(z_0) .$$

E portanto, a escolha

$$\begin{aligned} A(x) &= [\eta]^{-1} , \\ \omega &= z_0 \end{aligned}$$

leva a Eq. (4.6) em

$$\frac{\partial \phi}{\partial \omega} = F_1(\omega, \phi, \bar{\phi}) \phi ,$$

completando a prova do teorema.

Mesmo com as limitações impostas acima, a classe de equações de Dirac que podem ser tratadas por este formalismo ainda é muito grande. Nesta dissertação, o foco está em um caso específico da função  $F(x, \psi, \bar{\psi})$ .

## 4.4 A Equação de Gross-Neveu

O modelo de Gross-Neveu foi inicialmente proposto por David Gross e André Neveu em 1974. Originalmente o modelo foi estudado em 1+1 dimensões, como um “toy model” para a QCD. Neste modelo, os gluons, bósons mediadores da interação forte, são suprimidos na Lagrangiana em favor de uma interação de contato de quatro férmions.

A Lagrangiana para o modelo de Gross-Neveu massivo é

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_a (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi^a - \lambda (\bar{\psi}_a \psi^a)^2 .$$

Onde  $a = 1 \dots N$  é um índice de sabor, cuja presença reflete a existência de  $N$  férmions diferentes. As equações de movimento são então dadas por

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi^a - \lambda (\bar{\psi}_a \psi^a) \psi^a = 0 .$$

O modelo tem uma simetria interna  $U(N)$ , como pode ser observado fazendo a transformação

$$\psi^a \rightarrow U\psi^a, \bar{\psi}_a \rightarrow U^\dagger\bar{\psi}_a, \quad (4.10)$$

onde  $U$  é uma matriz unitária  $U^\dagger = U^{-1}$ . Como existem  $N$  férmions diferentes, o grupo de simetria interna é  $U(N)$ . Além da simetria  $U(N)$ , o modelo é invariante por transformações de Poincaré. Isto é facilmente observável se notarmos que, como a equação de Dirac é invariante por Poincaré, basta verificar o termo  $\lambda(\bar{\psi}_a\psi^a)$ . A invariância de translação é óbvia (nenhuma coordenada aparece explicitamente na lagrangiana), portanto resta verificar invariância de rotação. Lembrando que rotações são transformações ortogonais, a invariância de Poincaré decorre diretamente.

Por ser invariante por transformações de Poincaré, todo o desenvolvimento acima é válido para as equações do modelo de Gross-Neveu, que serão o foco deste trabalho. Por simplicidade, nesta dissertação tratamos do caso sem massa e com  $N = 1$

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \lambda(\bar{\psi}\psi)\psi = 0.$$

Conforme estabelecido na Introdução, o modelo de Gross-Neveu tem relevância para a física no estudo de vários fenômenos. O que segue no próximo capítulo é um estudo das soluções desta equação baseado em suas propriedades de simetria.

# Capítulo 5

## Resultados

Neste capítulo soluções analíticas da equação clássica de Gross-Neveu serão apresentadas. Estas soluções são obtidas usando os métodos discutidos nos capítulos anteriores, mais especificamente, invariâncias por difeomorfismos da equação de Gross-Neveu serão exploradas. Três casos serão analisados: 1+1 dimensões, 2+1 dimensões e 3+1 dimensões, cada um em sua própria seção. Antes, porém, será especificado o método pelo qual tais soluções são encontradas. Os resultados aqui encontrados envolvem a resolução de muitas equações diferenciais. Para executar este trabalho bastante oneroso foi feito uso de várias rotinas coletadas no pacote SADE [30], em particular rotinas para a obtenção de coordenadas canônicas.

### 5.1 Método

Soluções da equação de Poincaré invariantes por grupos de Lie são procuradas como solução do sistema

$$\begin{aligned} [i\gamma^\mu \partial_\mu - \lambda (\bar{\psi}\psi)] \psi &= 0, \\ Q_a \psi(x) &= 0, \end{aligned}$$

Onde os  $Q_a$  são um conjunto de geradores de simetria da equação de Gross-Neveu. Os geradores podem ser encontrados usando-se as condições de simetria. No entanto, como a equação de



Gross-Neveu é invariante por transformações de Poincaré, os geradores  $Q_a$  são escolhidos como um conjunto de geradores do grupo de Poincaré. Além disso, é necessário mais uma restrição. É necessário que os geradores formem uma subálgebra  $d - 1$  dimensional do grupo de Poincaré. Esta restrição é imposta para que a EDP em questão possa ser reduzida a uma EDO como exposto no capítulo anterior. O problema da classificação das subálgebras do grupo de Poincaré foi resolvido em [40].

Uma vez feitas estas considerações, ansätze do tipo  $\psi = A(x)\phi(\omega)$  invariantes pela ação dos geradores  $Q_a$  são construídos impondo a condição

$$\begin{aligned} Q_a A(x) &= \left( \xi_a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \eta_a \right) A(x) , \\ Q_a A(x) &= 0 , \\ \xi_a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \omega &= 0 . \end{aligned} \tag{5.1}$$

De acordo com o capítulo anterior, a substituição destes ansätze na equação de Gross-Neveu leva a uma EDO para  $\phi(\omega)$ . Estas EDOs são, então, integradas.

A eficiência do método é garantida pelo fato de que os passos intermediários a serem resolvidos são lineares, uma vez que as equações necessárias para encontrar os ansätze são lineares. As equações (5.1) são resolvidas pelos métodos usuais, porém os cálculos são bastante enfadonhos. Aqui serão apresentados apenas os resultados finais. A representação da álgebra de Poincaré utilizada neste capítulo é

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} + i (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) , \\ P_\mu &= i \partial_\mu . \end{aligned}$$

Os respectivos comutadores são dados por

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0 , \\ [J_{\mu\nu}, P_\rho] &= i (g_{\mu\rho} P_\nu - g_{\nu\rho} P_\mu) , \\ [J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] &= i (g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + g^{\sigma\mu} J^{\rho\nu} + g^{\nu\rho} J^{\sigma\mu} + g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma}) . \end{aligned}$$

Nem todas as subálgebras de Poincaré geram equações ordinárias de fácil resolução. Neste trabalho serão suprimidos os casos em que nenhuma solução pôde ser obtida.

## 5.2 Equação de Gross-Neveu em 1+1 Dimensões

Em 1+1 dimensões do espaço tempo os espinores  $\psi$  tem duas componentes. As matrizes  $\gamma$  são escritas como

$$\gamma^\mu = (i\sigma^2, \sigma^1),$$

onde as matrizes  $\sigma$  são as matrizes de Pauli dadas por

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os ansätze construídos estão representados na tabela abaixo:

N	Subalgebras	$A(x)$	$\omega(x)$
1	$P_1$	$I$	$x_0$
2	$P_0$	$I$	$x_1$
3	$J + \alpha P_0 + \beta P_1$	$\exp \left[ \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_1 \arctan \left( \frac{x_1 + \beta}{x_0 + \alpha} \right) \right]$	$(x_0 + \alpha)^2 - (x_1 + \beta)^2$
4	$P_1 + P_0$	$I$	$x_1 + x_0$

Estes ansätze dão origem as equações:

1.  $i\gamma_0 \dot{\phi} = \lambda (\bar{\phi}\phi) \phi$
2.  $i\gamma_1 \dot{\phi} = \lambda (\bar{\phi}\phi) \phi$
3.  $\frac{1}{2}i(\gamma_0 + \gamma_1) \dot{\phi} + i[\omega(\gamma_0 + \gamma_1) + \gamma_0 - \gamma_1] \dot{\phi} = \lambda (\bar{\phi}\phi) \phi$
4.  $i(\gamma_0 + \gamma_1) \dot{\phi} = \lambda (\bar{\phi}\phi) \phi$

As soluções destas equações estão dadas a seguir:

N	Subálgebras	$\phi(x)$
1	$P_1$	$\exp(-i\lambda(\bar{\chi}\chi)\gamma_0\omega)\chi$
2	$P_0$	$\exp(i\lambda(\bar{\chi}\chi)\gamma_1\omega)\chi$
3	$J + \alpha P_0 + \beta P_1$	$\begin{bmatrix} \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ \cos(\theta) & -\sin(\theta) \end{bmatrix} \chi$
4	$P_1 + P_0$	$\chi$

Aqui  $\chi$  é um espinor constante e

$$\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} i\lambda\sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}\omega}{2}\right),$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Vale notar que as soluções do tipo 1, 2, e 4 necessariamente respeitam  $\bar{\phi}\phi = \text{const.}$ , e na verdade são soluções de uma equação de Dirac linear.

### 5.3 Equação de Gross-Neveu em 2+1 Dimensões

Em 2 + 1 dimensões do espaço tempo os espinores tem duas componentes. As matrizes  $\gamma$  são dadas por

$$\gamma_{(3)}^\mu = (i\sigma^2, \sigma^1, \sigma^3), \tag{5.2}$$

com  $\sigma^3$  dada por

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Os Ansätze invariantes por cada subálgebra de Poincaré então são:

Número	Subalgebras	$A(x)$	$\omega(x)$
1	$P_1, P_2$	$I$	$x_0$
2	$P_0, P_2$	$I$	$x_1$
3	$J_{01}, P_2$	$\exp \left[ \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_1 \ln (x_0 + x_1) \right]$	$x_0^2 - x_1^2$
4	$J_{12}, P_0$	$\exp \left[ -\frac{1}{2} \gamma_1 \gamma_2 \arctan \left( \frac{x_1}{x_2} \right) \right]$	$x_1^2 + x_2^2$
5	$P_0 + P_2, P_1$	$I$	$x_0 - x_2$
6	$J_{01}, P_0 + P_1$	$\exp \left[ \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_1 \ln (x_0 + x_1) \right]$	$x_2$
7	$G_1, P_0 + P_2$	$\exp \left[ \frac{x_1}{2(x_0 + x_2)} (\gamma_0 + \gamma_2) \gamma_1 \right]$	$x_0 + x_2$
8	$G_1 + P_0,$ $P_0 + P_2$	$\exp \left[ \frac{1}{2} (x_0 + x_3) (\gamma_0 + \gamma_3) \gamma_1 \right]$	$(x_0 + x_2)^2$ $+ 2x_1$

As equações obtidas substituindo cada caso são:

1.  $i\gamma_0 \dot{\phi} = \lambda (\bar{\phi}\phi) \phi$
2.  $i\gamma_1 \dot{\phi} = \lambda (\bar{\phi}\phi) \phi$
3.  $\frac{1}{2}i(\gamma_0 + \gamma_1) \phi + i[\omega(\gamma_0 + \gamma_1) + \gamma_0 - \gamma_1] \dot{\phi} = \lambda (\bar{\phi}\phi) \phi$
4.  $\frac{1}{2}i\omega^{-\frac{1}{2}}\gamma_2\phi + 2i\omega^{\frac{1}{2}}\gamma_2\dot{\phi} = \lambda (\bar{\phi}\phi) \phi$
5.  $i(\gamma_0 + \gamma_2) \dot{\phi} = \lambda (\bar{\phi}\phi) \phi$
6.  $\frac{1}{2}i(\gamma_0 + \gamma_1) \phi + i\gamma_2\dot{\phi} = \lambda (\bar{\phi}\phi) \phi$
7.  $\frac{1}{2}i\omega^{-1}(\gamma_0 + \gamma_2) \phi + i(\gamma_0 + \gamma_2) \dot{\phi} = \lambda (\bar{\phi}\phi) \phi$
8.  $2i\gamma_1\dot{\phi} = \lambda (\bar{\phi}\phi) \phi$

E as soluções obtidas resolvendo estas equações são:

Número	Subalgebras	$\phi(\omega)$
1	$P_1, P_2$	$\exp(i\lambda(\bar{\phi}\phi)\gamma_0\omega)\chi$
2	$P_0, P_2$	$\exp(i\lambda(\bar{\phi}\phi)\gamma_1\omega)\chi$
3	$J_{01}, P_2$	$\begin{bmatrix} \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ \cos(\theta) & -\sin(\theta) \end{bmatrix} \chi$
4	$J_{12}, P_0$	$\omega^{-\frac{1}{4}} \exp\left[\frac{1}{2}i\lambda(\bar{\chi}\chi)\gamma_2 \ln \omega\right] \chi$
5	$P_0 + P_2, P_1$	$\chi$
6	$J_{01}, P_0 + P_1$	-
7	$G_1$ $P_0 + P_2$	$\omega^{-\frac{1}{2}}\chi$ $\bar{\chi}\chi = 0$
8	$G_1 + P_0, P_0 + P_2$	$\exp\left[\frac{1}{2}\lambda(\bar{\chi}\chi)\gamma_1\omega\right] \chi$

As soluções 1, 2, 5 e 7 respeitam  $\bar{\phi}\phi = const.$ , com 5 e 7 respeitando  $\bar{\phi}\phi = 0$ . Foi encontrada também uma solução invariante por rotações espaciais no caso 4. Além da invariância por rotações, a invariância por  $P_0$  faz desta solução uma solução estacionária, pelo menos neste referencial. A solução 3 é uma solução de interpretação física não-trivial. O gráfico da densidade  $\psi^\dagger\psi$  relacionada a esta solução é apresentado na Fig. 5.1, com  $\chi_1 = 0$  e  $\chi_2 = 1$ . Note que como a solução 3 independe de  $x_2$ , podemos plotar um gráfico bidimensional.

Infelizmente,  $\psi^\dagger\psi$  oscila fortemente para  $x_1$  grande. A quantidade  $\psi^\dagger\psi$  pode ser vista como uma aproximação crua de uma função de correlação na teoria quântica, similar aos “pares” da teoria BCS.

A solução 7 é uma solução solitônica. Isto quer dizer que sua forma não muda com avanços temporais. O gráfico da densidade  $\psi^\dagger\psi$  relacionada a esta solução é apresentado com  $\chi_1 = 1$  e  $\chi_2 = 0$ , com  $x_1 = 1.1$  na 5.2.

## 5.4 Equação de Gross-Neveu em 3+1 Dimensões

Em 3 + 1 dimensões do espaço tempo os espinores tem quatro componentes. As matrizes  $\gamma$

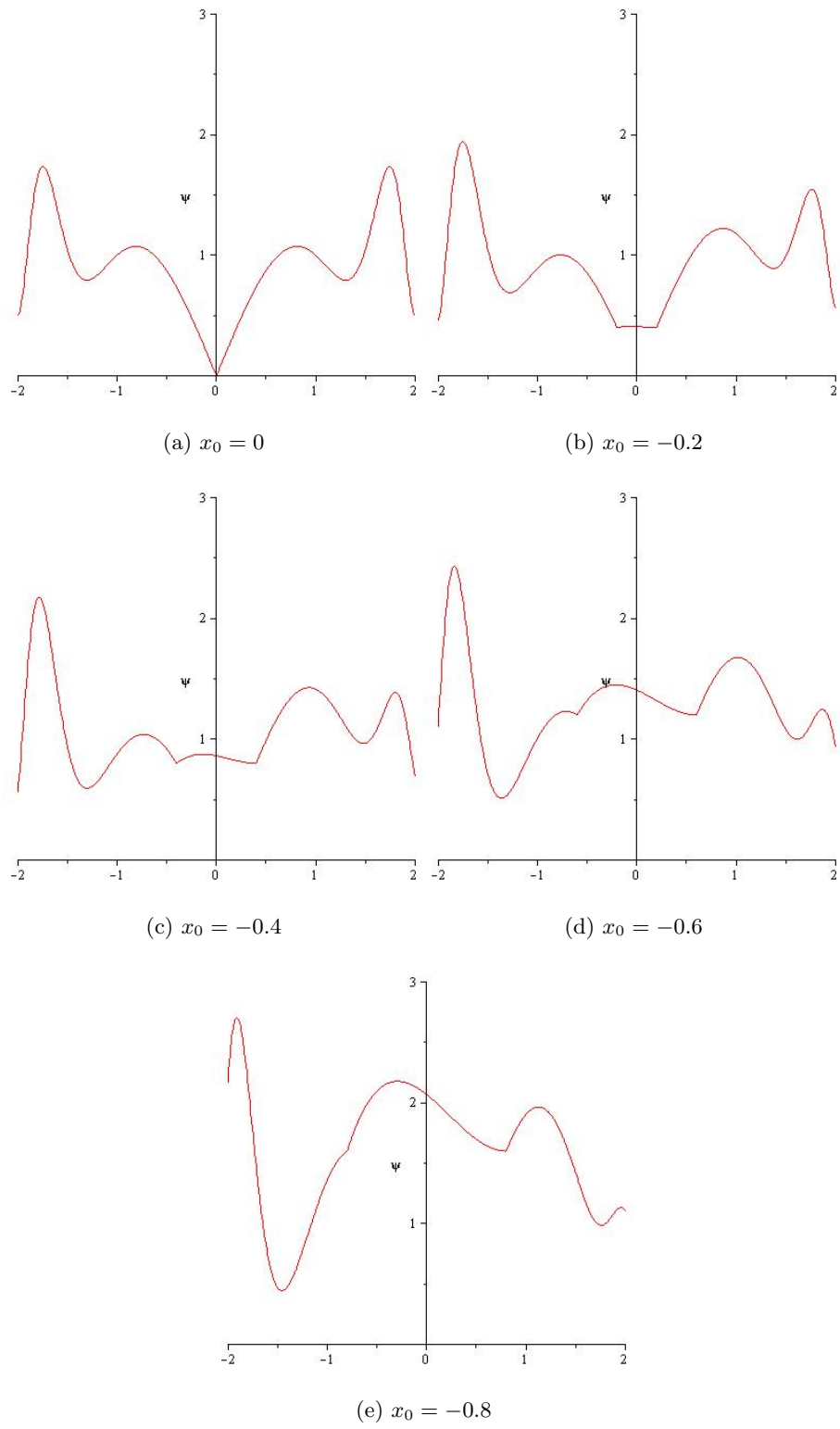


Figura 5.1: A densidade  $\psi^\dagger\psi$  relacionada a solução 3

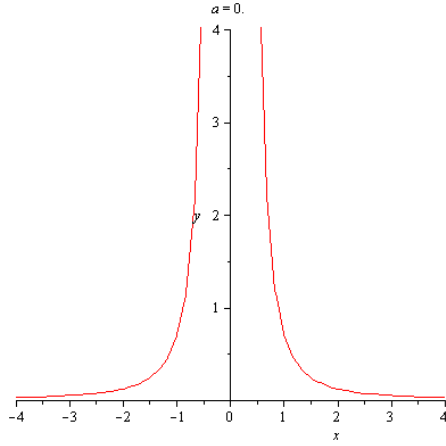


Figura 5.2:  $x_0 = 0$

são dadas por

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}.$$

Onde  $I$  representa a matriz identidade  $2 \times 2$  e as  $\sigma^i$  são as matrizes de Pauli. Os ansätze invariantes por subálgebras de Poincaré construídos para este grupo são dados por

N	Subálgebras	$A(x)$	$\omega(x)$
1	$P_0, P_1, P_2$	$I$	$x_3$
2	$P_1, P_2, P_3$	$I$	$x_0$
3	$P_0 + P_3, P_1, P_2$	$I$	$x_0 - x_3$
4	$J_{03}, P_1, P_2$	$\exp \left[ \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_3 \ln(x_0 + x_3) \right]$	$x_1^2 + x_2^2$

N	Subalgebras	$A(x)$	$\omega(x)$
5	$J_{03}, P_0 + P_3,$ $P_1$	$\exp \left[ \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_3 \ln(x_0 + x_3) \right]$	$x_2$
6	$J_{03} + \alpha P_2, P_0,$ $P_3$	$\exp \left[ \frac{x_2}{2\alpha} \gamma_0 \gamma_3 \right]$	$x_1$
7	$J_{03} + \alpha P_2,$ $P_0 + P_3, P_1$	$\exp \left[ \frac{x_2}{2\alpha} \gamma_0 \gamma_3 \right]$	$\alpha \ln(x_0 + x_3) - x_2$
8	$J_{12}, P_0, P_3$	$\exp \left[ -\frac{1}{2} \gamma_1 \gamma_2 \arctan \left( \frac{x_1}{x_2} \right) \right]$	$x_1^2 + x_2^2$
9	$J_{12} + \alpha P_0, P_1,$ $P_2$	$\exp \left[ -\frac{x_0}{2\alpha} \gamma_1 \gamma_2 \right]$	$x_3$
10	$J_{12} + \alpha P_3, P_1,$ $P_2$	$\exp \left[ \frac{x_3}{2\alpha} \gamma_1 \gamma_2 \right]$	$x_0$
11	$J_{12} + P_0 + P_3$ $P_1, P_2$	$\exp \left[ \frac{1}{4} (x_3 - x_0) \gamma_1 \gamma_2 \right]$	$x_0 + x_3$
12	$G_1, P_2$ $P_0 + P_3$	$\exp \left[ \frac{x_1}{2(x_0 + x_3)} (\gamma_0 + \gamma_3) \gamma_1 \right]$	$x_0 + x_3$
13	$G_1, P_0 + P_3,$ $P_1 + \alpha P_2$	$\exp \left[ \frac{\alpha x_1 - x_2}{2\alpha(x_0 + x_3)} (\gamma_0 + \gamma_3) \gamma_1 \right]$	$x_0 + x_3$
14	$G_1 + P_2, P_1,$ $P_0 + P_3$	$\exp \left[ \frac{1}{2} x_2 (\gamma_0 + \gamma_3) \gamma_1 \right]$	$x_0 + x_3$
15	$G_1 + P_0, P_2$ $P_0 + P_3$	$\exp \left[ \frac{1}{2} (x_0 + x_3) (\gamma_0 + \gamma_3) \gamma_1 \right]$	$(x_0 + x_3)^2 +$ $2x_1$
16	$G_1 + P_0, P_0 + P_3,$ $P_1 + \alpha P_2$	$\exp \left[ \frac{1}{2} (x_0 + x_3) (\gamma_0 + \gamma_3) \gamma_1 \right]$	$-\alpha (x_0 + x_3)^2$ $2(x_2 - \alpha x_1)$
17	$J_{03} + \alpha J_{12}, P_0, P_3$	$\exp \left[ -\frac{\gamma_0 \gamma_3 + \alpha \gamma_1 \gamma_2}{2\alpha} \arctan \left( \frac{x_1}{x_2} \right) \right]$	$x_1^2 + x_2^2$



N	Subalgebras	$A(x)$	$\omega(x)$
18	$J_{03} + \alpha J_{12}$ $P_1, P_2$	$\exp \left[ \frac{\gamma_0 \gamma_3 + \alpha \gamma_1 \gamma_2}{2} \ln(x_0 + x_3) \right]$	$x_0^2 - x_3^2$
19	$G_1, G_2,$ $P_0 + P_3$	$\exp \left[ \frac{\gamma_0 + \gamma_3}{2(x_0 + x_3)} (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2) \right]$	$x_0 + x_3$
20	$G_1 + P_2, P_0 + P_3$ $G_2 + \alpha P_1 + \beta P_2$	$\exp \left( \frac{\gamma_0 + \gamma_3}{2[(x_0 + x_3)(x_0 + x_3 + \beta) - \alpha]} \right.$ $\times \{ \gamma_1 [(x_0 + x_3 + \beta) x_1 - \alpha x_2]$ $\left. + \gamma_2 [(x_0 + x_3) x_2 - x_1] \}$	$x_0 + x_3$
21	$G_2 + P_1 + \beta P_2,$ $G_1, P_0 + P_3$	$\exp \left[ \frac{x_1}{2(x_0 + x_3)} (\gamma_0 + \gamma_3) \gamma_1 \right.$ $\left. + \frac{x_2}{2(x_0 + x_3 + \beta)} (\gamma_0 + \gamma_3) \right.$ $\left. [\gamma_2 (x_0 + x_3) - \gamma_1] \right]$	$x_0 + x_3$
22	$G_2 + P_2$ $G_1, P_0 + P_3$	$\exp \left[ (\gamma_0 + \gamma_3) \left( \frac{x_1}{2(x_0 + x_3)} \gamma_1 \right. \right.$ $\left. \left. + \frac{x_2}{2(x_0 + x_3 + 1)} \gamma_2 \right) \right]$	$(x_0 + x_3)$
23	$G_1, J_{03}, P_2$	$\exp \left( \frac{x_1}{2(x_0 + x_3)} (\gamma_0 + \gamma_3) \gamma_1 \right)$ $\exp \left[ \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_3 \ln(x_0 + x_3) \right]$	$x_0^2 - x_1^2 - x_3^2$
24	$J_{03} + \alpha P_1 + \beta P_2$ $G_1, P_0 + P_3$	$\exp \left( \frac{x_1 - \alpha \ln(x_0 + x_3)}{2(x_0 + x_3)} (\gamma_0 + \gamma_3) \gamma_1 \right)$ $\exp \left[ \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_3 \ln(x_0 + x_3) \right]$	$x_2 - \beta \ln(x_0 + x_3)$
25	$J_{12} + P_0 + P_3,$ $G_1, G_2$	$\exp \left( \frac{\gamma_0 + \gamma_3}{2(x_0 + x_3)} (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2) \right)$ $\exp \left( -\frac{x \cdot x}{4(x_0 + x_3)} \gamma_1 \gamma_2 \right)$	$x_0 + x_3$
26	$J_{03} + \alpha J_{12}, G_1, G_2$	$\exp \left( \frac{\gamma_0 + \gamma_3}{2(x_0 + x_3)} (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2) \right)$ $\exp \left[ \frac{1}{2} (\gamma_0 \gamma_3 + \alpha \gamma_1 \gamma_2) \ln(x_0 + x_3) \right]$	$x \cdot x$

Nesta tabela  $G_k = J_{0k} + J_{3k}$ . As equações resultantes são:

1.  $i \gamma_2 \dot{\phi} = \lambda (\bar{\phi} \phi) \phi$
2.  $i \gamma_0 \dot{\phi} = \lambda (\bar{\phi} \phi) \phi$
3.  $i (\gamma_0 + \gamma_3) \dot{\phi} = \lambda (\bar{\phi} \phi) \phi$
4.  $\frac{1}{2} i (\gamma_0 + \gamma_3) \phi + i [\omega (\gamma_0 + \gamma_3) + \gamma_0 - \gamma_3] \dot{\phi} = \lambda (\bar{\phi} \phi) \phi$

5.  $\frac{1}{2}i(\gamma_0 + \gamma_3)\phi + i\gamma_2\dot{\phi} = \lambda(\bar{\phi}\phi)\phi$
6.  $-\frac{i}{2\alpha}\gamma_1\gamma_4\phi + i\gamma_1\dot{\phi} = \lambda(\bar{\phi}\phi)\phi$
7.  $-\frac{i}{2\alpha}\gamma_1\gamma_4\phi + i[\alpha(\gamma_0 + \gamma_3)e^{-\omega/\alpha} - \gamma_2]\dot{\phi} = \lambda(\bar{\phi}\phi)\phi$
8.  $\frac{1}{2}i\omega^{-1/2}\gamma_2\phi + 2i\omega^{1/2}\gamma_2\dot{\phi} = \lambda(\bar{\phi}\phi)\phi$
9.  $-\frac{i}{2\alpha}\gamma_3\gamma_4\phi + i\gamma_3\dot{\phi} = \lambda(\bar{\phi}\phi)\phi$
10.  $\frac{i}{2\alpha}\gamma_0\gamma_4\phi + i\gamma_0\dot{\phi} = \lambda(\bar{\phi}\phi)\phi$
11.  $\frac{1}{4}i(\gamma_0 - \gamma_3)\gamma_4\phi + i(\gamma_0 + \gamma_3)\dot{\phi} = \lambda(\bar{\phi}\phi)\phi$
12.  $\frac{1}{2}i\omega^{-1}(\gamma_0 + \gamma_3)\phi + i(\gamma_0 + \gamma_3)\dot{\phi} = \lambda(\bar{\phi}\phi)\phi$
13.  $\frac{i}{2\alpha}\omega^{-1}(\alpha + \gamma_4)(\gamma_0 + \gamma_3)\phi + i(\gamma_0 + \gamma_3)\dot{\phi} = \lambda(\bar{\phi}\phi)\phi$
14.  $\frac{1}{2}i(\gamma_0 - \gamma_3)\gamma_4\phi + i(\gamma_0 + \gamma_3)\dot{\phi} = \lambda(\bar{\phi}\phi)\phi$
15.  $2i\gamma_1\dot{\phi} = \lambda(\bar{\phi}\phi)\phi$
16.  $2i(\gamma_2 - \alpha\gamma_1)\dot{\phi} = \lambda(\bar{\phi}\phi)\phi$
17.  $\frac{i}{2\alpha}\omega^{-1/2}\gamma_2(\alpha - \gamma_4)\phi + 2i\omega^{1/2}\gamma_2\dot{\phi} = \lambda(\bar{\phi}\phi)\phi$
18.  $\frac{1}{2}i(\gamma_0 + \gamma_3)(1 + \alpha\gamma_4)\phi + i[\omega(\gamma_0 + \gamma_3) + \gamma_0 - \gamma_3]\dot{\phi} = \lambda(\bar{\phi}\phi)\phi$
19.  $i\omega^{-1}(\gamma_0 + \gamma_3)\phi + i(\gamma_0 + \gamma_3)\dot{\phi} = \lambda(\bar{\phi}\phi)\phi$
20.  $\frac{1}{2}i[\omega(\omega + \beta) - \alpha]^{-1}(\gamma_0 + \gamma_3)\{[2\omega(\omega + \beta) - \alpha - 1]\gamma_4 - 2\omega - \beta\}\phi + i(\gamma_0 + \gamma_3)\dot{\phi} = \lambda(\bar{\phi}\phi)\phi$
21.  $\frac{1}{2}i[\omega(\omega + \beta)]^{-1}(\gamma_0 + \gamma_3)(2\omega + \beta - \gamma_4)\phi + i(\gamma_0 + \gamma_3)\dot{\phi} = \lambda(\bar{\phi}\phi)\phi$
22.  $\frac{1}{2}i[\omega(\omega + 1)]^{-1}(2\omega + 1)(\gamma_0 + \gamma_3)\phi + i(\gamma_0 + \gamma_3)\dot{\phi} = \lambda(\bar{\phi}\phi)\phi$
23.  $i(\gamma_0 + \gamma_3)\phi + i[\omega(\gamma_0 + \gamma_3) + \gamma_0 - \gamma_3]\dot{\phi} = \lambda(\bar{\phi}\phi)\phi$
24.  $i(\gamma_0 + \gamma_3)\phi + i[\gamma_2 - \beta(\gamma_0 + \gamma_3)]\dot{\phi} = \lambda(\bar{\phi}\phi)\phi$
25.  $i(\gamma_0 + \gamma_3)\dot{\phi} + i[(\gamma_0 + \gamma_3)\omega^{-1} + \frac{1}{4}(\gamma_0 - \gamma_3)\gamma_4]\phi = \lambda(\bar{\phi}\phi)\phi$

$$26. \frac{1}{2}i(\gamma_0 + \gamma_3)(3 + \alpha\gamma_4)\phi + i[(\gamma_0 + \gamma_3)\omega + \gamma_0 - \gamma_3]\dot{\phi} = \lambda(\bar{\phi}\phi)\phi$$

Onde  $\gamma_4 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ . As soluções para  $\phi$  são listadas a seguir:

N	Subalgebras	$\phi(\omega)$
1	$P_0, P_1, P_2$	$\exp(i\lambda(\bar{\chi}\chi)\gamma_2\omega)\chi$
2	$P_1, P_2, P_3$	$\exp(-i\lambda(\bar{\chi}\chi)\gamma_0\omega)\chi$
3	$P_0 + P_3, P_1, P_2$	$\chi$
4	$J_{03}, P_1, P_2$	$\dagger$
5	$J_{03}, P_0 + P_3, P_1$	-
6	$J_{03} + \alpha P_2, P_0, P_3$	$\exp(\theta_1\gamma_0\gamma_3\omega) \left[ (\theta_1\gamma_2 - \frac{1}{2\alpha}\gamma_1)\gamma_4 - i\lambda\tau_1 \right] \chi$
7	$J_{03} + \alpha P_2, P_0 + P_3, P_1$	-
8	$J_{12}, P_0, P_3$	$\omega^{-\frac{1}{4}} \exp\left[\frac{1}{2}i\lambda(\bar{\chi}\chi)\gamma_2 \ln \omega\right] \chi$
9	$J_{12} + \alpha P_0, P_1, P_2$	$\exp(\theta_2\gamma_1\gamma_2\omega) \left( \left[ \theta_2\gamma_0 - \frac{1}{2\alpha}\gamma_3 \right] \gamma_4 - i\lambda\tau_2 \right) \chi$
10	$J_{12} + \alpha P_3, P_1, P_2$	$\exp(\theta_3\gamma_1\gamma_2\omega) \left( \left[ \theta_3\gamma_0 - \frac{1}{2\alpha}\gamma_3 \right] \gamma_4 - i\lambda\tau_3 \right) \chi$
11	$J_{12} + P_0 + P_3, P_1, P_2$	$\exp(\theta_4\gamma_1\gamma_2\omega) \left( \left[ \theta_4\gamma_0 - \frac{1}{2\alpha}\gamma_3 \right] \gamma_4 - i\lambda\tau_4 \right) \chi$
12	$G_1, P_2$ $P_0 + P_3$	$\omega^{-\frac{1}{2}}\chi$ $\bar{\chi}\chi = 0$
13	$G_1, P_0 + P_3,$ $P_1 + \alpha P_2$	$\exp\left[-\frac{\alpha+\gamma_4}{2\alpha} \ln \omega\right] \chi$ $\bar{\chi}\chi = 0$
14	$G_1 + P_2, P_1,$ $P_0 + P_3$	$\exp\left[-\frac{1}{2}\gamma_4\omega\right] \chi$ $\bar{\chi}\chi = 0$
15	$G_1 + P_0, P_2, P_0 + P_3$	$\exp\left[\frac{1}{2}\lambda(\bar{\chi}\chi)\gamma_1\omega\right] \chi$
16	$G_1 + P_0, P_0 + P_3,$ $P_1 + \alpha P_2$	$\exp\left[\frac{i\lambda}{2(1+\alpha^2)}(\bar{\chi}\chi)(\gamma_2 - \alpha\gamma_1)\omega\right] \chi$
17	$J_{03} + \alpha J_{12}, P_0, P_3$	-
18	$J_{03} + \alpha J_{12}, P_1, P_2$	-
19	$G_1, G_2, P_0 + P_3$	$\omega\chi$

N	Subalgebras	$\phi(\omega)$
20	$G_1 + P_2, P_0 + P_3,$ $G_2 + \alpha P_1 + \beta P_2$	$\exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{2(\alpha-1)\gamma_4 \arctan\left(\frac{\beta+2\omega}{\sqrt{-4\alpha-\beta^2}}\right)}{\sqrt{-4\alpha-\beta^2}} \right) \right]$ $-\ln(\omega(\beta+\omega) - \alpha) + 2\gamma_4\omega] \chi$
21	$G_2 + P_1 + \beta P_2,$ $G_1, P_0 + P_3$	$\exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{(\beta-\gamma_4) \ln \omega + (\beta+\gamma_4) \ln(\beta+\omega)}{\beta} \right) \right] \chi$
22	$G_2 + P_2$ $G_1, P_0 + P_3$	$(2\omega + 1)^{-1/2} \chi$
23	$G_1, J_{03}, P_2$	†
24	$J_{03} + \alpha P_1 + \beta P_2$ $G_1, P_0 + P_3$	$\exp\{[\gamma_2(\gamma_0 + \gamma_3) + i\lambda(\bar{\chi}\chi)(\gamma_2 - \beta(\gamma_0 + \gamma_3))]\omega\} \chi$
25	$J_{12} + P_0 + P_3,$ $G_1, G_2$	-
26	$J_{03} + \alpha J_{12}, G_1, G_2$	†

As soluções marcadas como † (equações 4, 23 e 26 com  $\alpha = 0$ ) são soluções da equação

$$\frac{1}{2}m(\gamma_0 + \gamma_3)\phi + [\omega(\gamma_0 + \gamma_3) + \gamma_0 - \gamma_3]\dot{\phi} = \lambda(\bar{\phi}\phi)\phi, \quad (5.3)$$

com  $m = 1, 2, 3$  respectivamente. A solução para esta equação é dada por

- $m = 1, \bar{\phi}\phi \neq 0$

$$\begin{aligned} \phi^0 &= \chi^0 \cos\left(\frac{1}{2}\tau \ln(\omega)\right) + \chi^2 \sin\left(\frac{1}{2}\tau \ln(\omega)\right), \\ \phi^1 &= -i\omega^{-1/2} \left[ \chi^1 \cos\left(\frac{1}{2}\tau \ln(\omega)\right) - \chi^3 \sin\left(\frac{1}{2}\tau \ln(\omega)\right) \right], \\ \phi^2 &= -i\omega^{-1/2} \left[ \chi^2 \cos\left(\frac{1}{2}\tau \ln(\omega)\right) - \chi^0 \sin\left(\frac{1}{2}\tau \ln(\omega)\right) \right], \\ \phi^3 &= \chi^3 \cos\left(\frac{1}{2}\tau \ln(\omega)\right) + \chi^1 \sin\left(\frac{1}{2}\tau \ln(\omega)\right), \end{aligned}$$

aonde  $\tau = i\lambda(\chi^0\chi^{2*} - \chi^2\chi^{0*} + \chi^3\chi^{1*} - \chi^1\chi^{3*})$

- $m = 2, 3$

$$\begin{aligned}
\phi^0 &= \omega^{(1-m)/2} [\chi^0 J_\nu(z) + \chi^2 Y_\nu(z)] , \\
\phi^1 &= \omega^{(1-m)/2} \left[ \frac{-i}{\tau} \omega^{-1+m/2} [\chi^3 J_\nu(z) + \chi^1 Y_\nu(z)] - i\omega^{-1/2} \left( \chi^3 \frac{dJ_\nu(z)}{dz} + \chi^1 \frac{dY_\nu(z)}{dz} \right) \right] , \\
\phi^2 &= \omega^{(1-m)/2} \left[ \frac{-i}{\tau} \omega^{-1+m/2} [\chi^0 J_\nu(z) + \chi^2 Y_\nu(z)] - i\omega^{-1/2} \left( \chi^0 \frac{dJ_\nu(z)}{dz} + \chi^2 \frac{dY_\nu(z)}{dz} \right) \right] , \\
\phi^3 &= \omega^{(1-m)/2} [\chi^3 J_\nu(z) + \chi^1 Y_\nu(z)] ,
\end{aligned}$$

aonde  $J_\nu$  e  $Y_\nu$  são funções de Bessel,  $\tau = -\frac{2i}{\pi}(m-1)(\chi^0\chi^{2*} - \chi^2\chi^{0*} + \chi^3\chi^{1*} - \chi^1\chi^{3*})$ ,  
 $\nu = (1-m)/(1+m)$  e  $z = \tau\omega^{\frac{1-m}{2}} / (1 + \frac{m}{2})$ .

Além disso, os  $\theta_i$  e  $\tau_i$  satisfazem

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \pm \frac{1}{2\alpha} (4\alpha^2\tau_1^2\lambda^2 - 1)^{1/2} , \\
\tau_1 &= 2\lambda^2\tau_1^2(\bar{\chi}\chi) + 2i\lambda\tau_1\theta_1(\bar{\chi}\gamma_2\gamma_4\chi) - i\lambda\tau_1\alpha^{-1}(\bar{\chi}\gamma_1\gamma_4\chi) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_2 &= \pm \frac{1}{2\alpha} (1 - 4\alpha^2\tau_2^2\lambda^2)^{1/2} , \\
\tau_2 &= 2\lambda^2\tau_2^2(\bar{\chi}\chi) + 2i\lambda\tau_2\theta_2(\bar{\chi}\gamma_0\gamma_4\chi) - i\lambda\tau_2\alpha^{-1}(\bar{\chi}\gamma_3\gamma_4\chi) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_3 &= \pm \frac{1}{2\alpha} (1 + 4\alpha^2\tau_3^2\lambda^2)^{1/2} , \\
\tau_3 &= 2\lambda^2\tau_3^2(\bar{\chi}\chi) + 2i\lambda\tau_3\theta_3(\bar{\chi}\gamma_3\gamma_4\chi) + i\lambda\tau_3\alpha^{-1}(\bar{\chi}\gamma_0\gamma_4\chi) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_4 &= -\lambda^2\tau_4^2 , \\
\tau_4 &= 32\lambda^2\tau_4^2(\bar{\chi}\chi) + 8i\lambda\tau_4[\bar{\chi}(\gamma_0 - \gamma_3)\gamma_4\chi] - 32i\lambda^3\tau_4^3[\bar{\chi}(\gamma_0 + \gamma_3)\gamma_4\chi] .
\end{aligned}$$

Pode-se notar que das 26 equações acima, 5 estão sem solução (equações 5, 7, 17, 18 e 25). Isto aconteceu pois as EDOs relacionadas são complicadas e não foi possível encontrar solução para estas. As soluções de número 3, 12, 13, 14, 19, 20, 21 e 22 são soluções que respeitam

$\bar{\psi}\psi = \bar{\phi}\phi = 0$  necessariamente. Isto é especialmente visível na equação 3, ao multiplicar ambos os termos por  $(\gamma_0 + \gamma_3)$ . Portanto estas soluções são, na verdade, soluções da equação de Dirac livre que também são soluções das equações de Gross-Neveu.

Nas soluções 1, 2, 15, 16 e 24 a condição  $\bar{\phi}\phi = \text{const.}$  é mantida, fazendo destas EDOs equações lineares. Isto fica bastante claro ao observamos na equação 1

$$\begin{aligned} i\gamma_2 \dot{\phi} &= \lambda (\bar{\phi}\phi) \phi , \\ i\gamma_2 \dot{\bar{\phi}} &= -\lambda (\bar{\phi}\phi) \bar{\phi} . \end{aligned}$$

Multiplicando as duas equações, chega-se a

$$\begin{aligned} \frac{d(\bar{\phi}\phi)}{d\omega} &= 0 , \\ \bar{\phi}\phi &= \text{const.} \end{aligned}$$

Finalmente, nas equações 4, 23 e 26 vale a condição  $\bar{\phi}\phi = C\omega^{-m/2}$  com  $C$  uma constante. Isto também reduz as respectivas EDOs a casos lineares e nos permite resolver estas equações.

Vale notar que para integrar as equações acima foram usados métodos padrão, bem como métodos de simetria. O pacote SADE para Maple foi uma ferramenta indispensável para a integração de algumas destas equações.

## Capítulo 6

# Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho foram apresentadas soluções analíticas das equações de Gross - Neveu em 1+1, 2+1 e 3+1 dimensões. Estas soluções são soluções invariantes pela ação de uma subálgebra do grupo de Poincaré.

No Segundo Capítulo foram estabelecidos os axiomas e definições necessários para o desenvolvimento dos métodos deste trabalho. Definiu-se um grupo como uma estrutura algébrica respeitando 4 axiomas e uma topologia como a base do estudo de espaços topológicos. A definição de topologia levou naturalmente a definição de espaço topológico que por sua vez levou a definição de uma variedade diferenciável como um espaço Hausdorff munido de uma coleção de mapas. Mostrou-se o que era um grupo de Lie e que este tinha estrutura algébrica de um grupo e estrutura topológica de uma variedade diferenciável. Por fim, Foram apresentadas as transformações de Poincaré e através delas se construiu a álgebra de Poincaré.

No Terceiro Capítulo foram construídos métodos de obtenção de simetrias de equações diferenciais, bem como um dos vários métodos de usá-los. Uma simetria de uma equação diferencial foi definida como uma transformação no espaço de soluções que o mantém invariante. Foi mostrado uma condição que, respeitada por uma transformação, implica no caráter de simetria desta transformação. Foi mostrado um método de se obter simetrias de Lie, tanto de equações ordinárias quanto de equações parciais. Por fim, foi mostrado que estas simetrias podem ser usados para reduzir o grau de complexidade de um problema, através de transformações para coordenadas canônicas.

No Quarto Capítulo foi feito um apanhado sobre equações de Dirac. Foi mostrado como a equação de Dirac surge naturalmente de uma tentativa de combinar Mecânica Quântica e Relatividade Especial. A covariância relativística da equação de Dirac foi investigada, levando ao fato da equação de Dirac descrever um campo de spin  $1/2$  e a uma representação explícita dos geradores do grupo de Poincaré quando agindo sobre espinores. Foi discutido brevemente extensões não-lineares para a equação de Dirac, em particular as equações de Gross-Neveu. Foi demonstrada a possibilidade de redução do sistema de EDPs a um sistema de EDOs através de uma substituição.

No quinto capítulo foram expostas soluções da equação de Gross-Neveu obtidas pelos métodos descritos nos capítulos anteriores. As soluções foram expostas em 1, 2 e 3 dimensões espaciais. Foram recuperadas todas as soluções obtidas por Fushchich em Zhdanov em [34], bem como obtidas novas soluções em 1 e 2 dimensões espaciais.

Estes resultados são o início de um estudo exaustivo de soluções das equações do modelo de Gross-Neveu. Aplicações de simetrias condicionais bem como outros tipos de simetria que não as de Lie continuam largamente inexploradas e são fontes possíveis para futuros trabalhos. Uma outra possibilidade é a análise de modelos mais complexos como o de Jona-Lassinio.



# Referências Bibliográficas

- [1] S. Weinberg, *The quantum theory of fields*, Vol. I (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [2] C. Itzykson, J. Zuber *Quantum Field Theory* (McGraw - Hill, New York, 1980).
- [3] M. Srednicki *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 2007).
- [4] O.K. Kalashnikov, Fort. der Phys. ? Prog. Phys. **32**, 525 (1984)
- [5] D.J. Gross, R.D. Pisarki, L.G. Yaffe, Rev. Mod. Phys. 53, 43 (1981).
- [6] J.I. Kapusta, *Finite-Temperature Field Theory* (Cambridge University Press, N. York, 1989)
- [7] F.C. Khanna, A.P.C. Malbouisson, J.M.C. Malbouisson, A.E. Santana, *Thermal quantum field theory: algebraic aspects and applications* (World Scientific, Singapore, 2009).
- [8] D.J. Gross, A. Neveu, Phys. Rev. D **10**, 3235 (1974).
- [9] C. de Calan, P. A. Faria da Veiga, J. Magnen, and R. Sénéor, Phys. Rev. Lett. **66**, 3233 (1991).
- [10] A. Barducci, R. Casalbuoni, M. Modugno, G. Pettini, R. Gatto, Phys. Rev. D **51**, 3042 (1995)
- [11] H.R. Christiansen. A.C. Petkou, M.B. Silva-Neto, N.D. Vlachos, Phys. Rev. D **62**, 025018 (1995).
- [12] V. Schön, M. Thies, 2D model field theories at finite temperature and density, hep-th/0008175.

- [13] S.J. Hands, J.B. Kogut, C.G. Strouthos, Phys. Lett. B **515**, 407 (2001).
- [14] S.J. Hands, J.B. Kogut, C.G. Strouthos, Phys. Rev. D **65**, 114507 (2002).
- [15] M. Thies, J. Phys. A **39**, 12707 (2006).
- [16] O. Schnetz, M. Thies, Ann. Phys. (N.Y.) **80** 081405, (2009).
- [17] V. Juričić, I.F. Herbut, G.W. Semenoff, Phys. Rev. B **80**, 081405(R) (2009).
- [18] B.R. Zhou, Phys. Rev. D **57**, 3171 (1998).
- [19] B.R. Zhou, Commun. Theor. Phys. **32**, 425 (1999).
- [20] A. Brzoska, M. Thies, Phys. Rev. D **65**, 125001 (2002).
- [21] J.-L. Kneur, M.B. Pinto, R.O. Ramos, E. Staudt, Phys. Rev. D **76**, 045020 (2007).
- [22] C. Boehmer, U. Fritsch, S. Kraus, M. Thies, Phys. Rev. D **78**, 065043 (2008).
- [23] F. Höfling, C. Nowak, C. Wetterich, Phys. Rev. B **66**, 205111 (2002).
- [24] H. Kohyama, Phys. Rev. D **77**, 045016 (2008).
- [25] A.P.C. Malbouisson, J.M.C. Malbouisson, A.E. Santana, J.C. Silva, Phys. Lett. B **583**, 373 (2004).
- [26] A.P.C. Malbouisson, J.M.C. Malbouisson, J. Phys. A: Math. Gen. **35**, 2263 (2002).
- [27] A.P.C. Malbouisson, J.M.C. Malbouisson, A.E. Santana, Nucl. Phys. B **631**, 83 (2002).
- [28] F.C. Khanna, A.P.C. Malbouisson, J.M.C. Malbouisson, H. queiroz, T.M. Rocha-Filho, A.E. Santana, J.C. Silva, Phys. Lett. B **624**, 316 (2005).
- [29] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers, E. Herit *Exact Solutions of Einstein's Field Equations* (Cambridge University Press, Cambridge, 2009).
- [30] T. M. Rocha-Filho, A. Figueiredo, arXiv:1004.3339v2 [math-ph].
- [31] J. Feinberg, Int. J. Mod. Phys. **17**, 898 (2002).

- [32] M. Thies, Phys. Rev. D **69**, 067703 (2004).
- [33] W.I. Fushchich, R.Z. Zhdanov, Phys. Rep. **172**, 123 (1989).
- [34] W.I. Fushchich, R.Z. Zhdanov, J. Phys. A **20**, 4173 (1987).
- [35] R. Gillmore *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications* (John Wiley & Sons, New York, 1974).
- [36] N. H. Ibragimov Ed., *Lie Groups Analysis - Classical Heritage* (Alga Publishings, Karlskona 2004).
- [37] P. Hydon *Symmetry Methods for Differential Equations: A Beginner's Guide* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [38] P. S. Olver *Applications of Lie Groups to Differential Equations* (Springer, New York, 1993).
- [39] W. H. Steeb *Continuous Symmetries, Lie Algebras, Differential Equations and Computer Algebra* (World Scientific Publishing Company, Singapore, 2007)
- [40] J. Patera, P. Winternitz, H. Zassenhaus, J. Math. Phys **16** (1975) 1597