

**ANÁLISE NÃO LINEAR DE PÓRTICOS PLANOS  
UTILIZANDO UMA FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL E  
PLASTICIDADE POR CAMADAS**

**SEBASTIÃO SIMÃO DA SILVA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS  
E CONSTRUÇÃO CIVIL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**ANÁLISE NÃO LINEAR DE PÓRTICOS PLANOS  
UTILIZANDO UMA FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL E  
PLASTICIDADE POR CAMADAS**

**SEBASTIÃO SIMÃO DA SILVA**

**ORIENTADOR: WILLIAM TAYLOR MATIAS SILVA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E  
CONSTRUÇÃO CIVIL**

**PUBLICAÇÃO: E.DM-002A/11**

**BRASÍLIA/DF: MARÇO-2011**

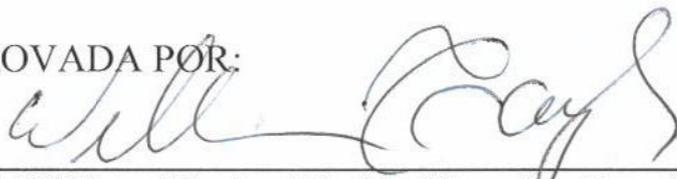
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

ANÁLISE NÃO LINEAR DE PÓRTICOS PLANOS UTILIZANDO  
UMA FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL E PLASTICIDADE  
POR CAMADAS

ENG.º SEBASTIÃO SIMÃO DA SILVA

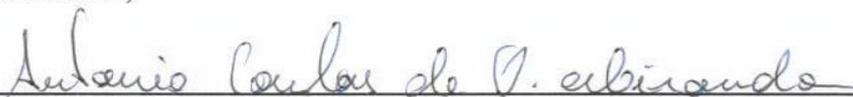
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO  
DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE  
TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE  
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE  
MESTRE EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.

APROVADA POR:



---

**Prof. William Taylor Matias Silva, Dr. Ing. (UnB)**  
(Orientador)



---

**Prof. Antonio Carlos de Oliveira Miranda, DSc (UnB)**  
(Examinador Interno)



---

**Prof. Marcos Aurélio Marques Noronha, DSc (UFSC)**  
(Examinador Externo)

BRASÍLIA/DF, 28 DE MARÇO DE 2011

## FICHA CATALOGRÁFICA

SILVA, SEBASTIÃO SIMÃO DA

Análise Não Linear de Pórticos Planos Utilizando uma Formulação Co-rotacional e Plasticidade por Camadas. [Distrito Federal] 2011.

cxlix, 164p., 210 x 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2011).

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1. Análise não linear de estruturas

2. Formulação co-rotacional

3. Plasticidade por camadas

4. Método dos elementos finitos

I. ENC/FT/UnB

II. Título (série)

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

SILVA, S. S. (2011). Análise Não Linear de Pórticos Planos Utilizando uma Formulação Co-rotacional e Plasticidade por Camadas. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil. Publicação E.DM-002A/11, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 164p.

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Sebastião Simão da Silva

TÍTULO: Análise Não Linear de Pórticos Planos Utilizando uma Formulação Co-rotacional e Plasticidade por Camadas.

GRAU: Mestre ANO: 2011

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

Sebastião Simão da Silva

UnB - Colina, Bloco K, Aptº 102 – Asa Norte

70.910-900 Brasília - DF- Brasil

e-mail: sebastiaosim@unb.br

## DEDICATÓRIA

*Aos meus pais – José Simão da Silva e Francisca Maria Simão – que acreditaram no sonho do seu menino que almejava ser engenheiro. São referências, exemplos de vida pra mim.*

*Aos meus irmãos Francisco (in memoriam), Nilton, Diva, Antônio, Rosinha, Gel, Paula, Rai e Naiara, pelo companheirismo e apoio. E a todos os meus queridos sobrinhos também.*

*"A mente que se abre a uma nova idéia  
jamais volta ao seu tamanho original."*

*Albert Einstein*

*"Ninguém pode servir a dois senhores: ou  
odiará a um e amará a outro, ou se  
apegará a um e desprezará o outro.  
Não podeis servir a Deus e ao dinheiro"*

*São Mateus 6,24*

## **AGRADECIMENTOS**

*Agradeço em primeiro lugar a Deus, pois tudo foi feito por Ele e pra Ele todas as coisas foram feitas;*

*As tantas pessoas que hoje fazem parte da minha vida. Deixam e levam experiências;*

*As casas de estudantes por onde passei... Quase dez anos;*

*Ao meu orientador William Taylor Matias Silva, por todo o apoio e disponibilidade;*

*Ao Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil pela atenção, amizade e união de seus integrantes – colaboradores, discentes e docentes;*

*Ao CNPq pelo apoio financeiro, essencial para viabilizar a pesquisa no nosso país.*

## RESUMO

### ANÁLISE NÃO-LINEAR DE PÓRTICOS PLANOS UTILIZANDO UMA FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL E PLASTICIDADE POR CAMADAS

**Autor:** Sebastião Simão da Silva

**Orientador:** William Taylor Matias Silva, Dr. Ing.

**Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil**

**Brasília, março de 2011**

Neste trabalho realiza-se uma análise não linear de pórticos planos utilizando uma formulação co-rotacional e plasticidade por camadas. Discretiza-se os pórticos planos com elementos de viga 2D de Euler-Bernoulli, de Timoshenko e de Euler-Bernoulli com acoplamento entre esforços axiais e de flexão. Obtêm-se o vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente desses elementos utilizando o princípio dos trabalhos virtuais. Adota-se um modelo de elastoplasticidade unidimensional com endurecimento isotrópico para descrever as relações constitutivas do material. Faz-se uso da quadratura de Gauss para integrar este modelo constitutivo bem como para obter o vetor de forças internas e da matriz de rigidez tangente dos elementos de viga 2D. As trajetórias de equilíbrio são fornecidas através de uma análise incremental iterativa baseada no método de Newton-Raphson combinado com uma técnica de comprimento de arco (*arc-length*). As soluções numéricas obtidas neste trabalho foram confrontadas com as encontradas por outros autores na literatura ficando comprovado o bom desempenho da formulação implementada.

**Palavras chave:** Análise não linear de estruturas; Formulação co-rotacional; Plasticidade por camadas; Método dos elementos finitos.

## **ABSTRACT**

### **NONLINEAR ANALYSIS OF PLANE FRAMES USING A CO-ROTATIONAL FORMULATION AND PLASTICITY BY LAYERS**

**Author: Sebastião Simão da Silva**

**Supervisor: William Taylor Matias Silva, Dr. Ing.**

**Postgraduate Program in Structure and Civil Construction Engineering**

**Brasília, march of 2011**

The purpose of this work is to perform a nonlinear analysis of plane frame structures using a co-rotational formulation and a layered plastic modeling. The plane frame is discretized with 2D beam elements. The main objective is to compare three different local elasto-plastic elements. Plasticity is introduced by rate-independent one-dimensional model with isotropic hardening. Numerical integration over the cross-section is performed for obtain the internal force vector and tangent stiffness matrix of these elements. At each integration point, the return-mapping algorithm is used for integration of the constitutive equations. A some examples are used in order to assess the performances of the elements and the path-following procedures.

**Key words:** Nonlinear analysis of structures; Co-rotational formulation; Plasticity in layers; Finite element method.

# SUMÁRIO

<b>1 - INTRODUÇÃO .....</b>	<b>01</b>
<b>1.1 - MOTIVAÇÕES .....</b>	<b>01</b>
<b>1.2 - OBJETIVOS .....</b>	<b>03</b>
<b>1.3 - METODOLOGIA .....</b>	<b>03</b>
<b>1.4 - APRESENTAÇÃO DO TRABALHO .....</b>	<b>04</b>
<b>2 - HISTÓRICO DA DESCRIÇÃO CO-ROTACIONAL .....</b>	<b>06</b>
<b>3 - A FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL DE PÓRTICOS PLANOS .....</b>	<b>13</b>
<b>3.1 - INTRODUÇÃO .....</b>	<b>13</b>
<b>3.2 - DESCRIÇÃO CINEMÁTICA .....</b>	<b>15</b>
<b>3.2.1 - Deslocamentos virtuais .....</b>	<b>17</b>
<b>3.2.2 - Vetor de forças internas .....</b>	<b>18</b>
<b>3.2.3 - Matriz de rigidez tangente .....</b>	<b>18</b>
<b>3.3 - ELEMENTO DE VIGA BERNOULLI .....</b>	<b>20</b>
<b>3.3.1- Definição .....</b>	<b>20</b>
<b>3.3.2 - Obtenção analítica do vetor de forças internas locais .....</b>	<b>21</b>
<b>3.3.3 - Obtenção analítica da matriz de rigidez tangente local .....</b>	<b>22</b>
<b>3.3.4 - Obtenção numérica do vetor de forças internas .....</b>	<b>23</b>
<b>3.3.5 Obtenção numérica da matriz de rigidez tangente .....</b>	<b>25</b>
<b>3.4 - ELEMENTO DE VIGA BERNOULLI 2 .....</b>	<b>26</b>
<b>3.4.1 - Definição .....</b>	<b>26</b>
<b>3.4.2 - Obtenção analítica do vetor de forças internas .....</b>	<b>27</b>
<b>3.4.3 - Obtenção analítica da matriz de rigidez tangente .....</b>	<b>28</b>
<b>3.4.4 - Obtenção numérica do vetor de forças internas .....</b>	<b>30</b>
<b>3.4.5 - Obtenção numérica da matriz de rigidez tangente .....</b>	<b>31</b>
<b>3.5 - ELEMENTO DE VIGA TIMOSHENKO .....</b>	<b>34</b>
<b>3.5.1 - Definição .....</b>	<b>34</b>
<b>3.5.2 - Obtenção analítica do vetor de forças internas .....</b>	<b>34</b>
<b>3.5.3 - Obtenção analítica da matriz de rigidez tangente .....</b>	<b>35</b>
<b>3.5.4 - Obtenção numérica do vetor de forças internas .....</b>	<b>36</b>
<b>3.5.5 - Obtenção numérica da matriz de rigidez tangente .....</b>	<b>37</b>

<b>4 - MODELO DE ELASTOPLASTICIDADE UNIDIMENSIONAL .....</b>	<b>39</b>
<b>4.1- MODELOS FRICIONAIS UNIDIMENSIONAIS .....</b>	<b>39</b>
<b>4.1.1 - Equações governantes locais .....</b>	<b>40</b>
<b>4.1.1.1 - Resposta friccional irreversível .....</b>	<b>40</b>
<b>4.1.1.2 - Condições de carregamento/descarregamento .....</b>	<b>43</b>
<b>4.1.1.3 - Escoamento friccional (fluxo plástico) .....</b>	<b>45</b>
<b>4.1.2 - Plasticidade com encruamento isotrópico .....</b>	<b>47</b>
<b>4.1.2.1 - Modelo matemático mais simples .....</b>	<b>47</b>
<b>4.1.2.2 - Módulo tangente elastoplástico .....</b>	<b>50</b>
<b>4.1.3 - Forma alternativa das condições de carregamento/descarregamento ....</b>	<b>51</b>
<b>4.2 - ALGORITMOS DE INTEGRAÇÃO PARA A PLASTICIDADE .....</b>	<b>52</b>
<b>4.2.1 - A forma incremental da plasticidade .....</b>	<b>52</b>
<b>4.2.1.1- A regra do ponto médio generalizada .....</b>	<b>52</b>
<b>4.2.1.2 - Problema do valor inicial elastoplástico. Encruamento isotrópico</b>	<b>53</b>
<b>4.2.2 - Algoritmos de mapeamento e retorno. Encruamento isotrópico .....</b>	<b>54</b>
<b>4.2.2.1- O estado elástico teste .....</b>	<b>54</b>
<b>4.2.2.2 - Forma algorítmica das condições de carregamento .....</b>	<b>55</b>
<b>4.2.2.3 - Algoritmo de mapeamento e retorno .....</b>	<b>56</b>
<b>5 - SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES .....</b>	<b>60</b>
<b>5.1 - MÉTODOS INCREMENTAIS-ITERATIVOS. NEWTON-RAPHSON</b>	
<b>COMPLETO.....</b>	<b>62</b>
<b>5.2 - MÉTODOS DE COMPRIMENTO DE ARCO.....</b>	<b>65</b>
<b>5.3 - MÉTODOS DE COMPRIMENTO DE ARCO LINEARIZADO .....</b>	<b>70</b>
<b>5.4 - MÉTODOS DE COMPRIMENTO DE ARCO CILÍNDRICOS .....</b>	<b>72</b>
<b>5.4.1 - Determinação do sinal da predição de <math>\Delta\lambda</math> .....</b>	<b>74</b>
<b>5.4.2 - Tamanho do comprimento de arco .....</b>	<b>74</b>
<b>5.5 - DETECÇÃO DE PONTOS CRÍTICOS .....</b>	<b>75</b>
<b>6 - EXEMPLOS NUMÉRICOS .....</b>	<b>77</b>

<b>6.1 - PÓRTICO DE LEE .....</b>	<b>77</b>
<b>6.2 - VIGA EM BALANÇO .....</b>	<b>83</b>
<b>6.3 - PÓRTICO TOGGLE .....</b>	<b>85</b>
<b>6.4 - PÓRTICO ASSIMÉTRICO .....</b>	<b>86</b>
<b>7 - CONCLUSÕES .....</b>	<b>89</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>91</b>
<b>APÊNDICES .....</b>	<b>96</b>
<b>APÊNDICE A – DEDUÇÃO ANALÍTICA DOS COEFICIENTES DOS VETORES DE FORÇAS INTERNAS E DA MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE DOS ELEMENTOS FINITOS PROPOSTOS .....</b>	<b>97</b>
<b>APÊNDICE B – DEDUÇÃO DOS COEFICIENTES DOS VETORES DE FORÇAS INTERNAS E DAS MATRIZES DE RIGIDEZ TANGENTE DOS ELEMENTOS FINITOS PROPOSTOS VIA INTEGRAÇÃO NUMÉRICA .....</b>	<b>126</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Descrição cinemática da formulação co-rotacional .....	07
Figura 3.1: Aspecto das deformações (a) e das tensões (b) nos pontos de Gauss.....	14
Figura 3.2: Lei bilinear elastoplástica.....	14
Figura 3.3: Formulação co-rotacional – cinemática da viga .....	15
Figura 4.1: Dispositivo unidimensional ilustrando o comportamento elastoplástico ideal.	39
Figura 4.2: Caracterização da resposta friccional para um dispositivo com $\sigma_y > 0$ .....	40
Figura 4.3: Representação esquemática da resposta mecânica de um modelo elástico-friccional unidimensional .....	46
Figura 4.4: Plasticidade com encruamento da deformação. ....	47
Figura 4.5: Resposta do modelo linear com encruamento isotrópico em um ciclo fechado. Embora a deformação plástica total no final do ciclo $\varepsilon_3^p = 0$ , o valor da variável de encruamento $\mu_3 = 2\mu_1$ .....	48
Figura 4.6: Módulo plástico.....	50
Figura 4.7: Regra do algoritmo de mapeamento e retorno.....	51
Figura 4.8: Exemplo de um passo elástico incremental de um estado plástico.....	55
Figura 4.9: O estado teste viola a condição de consistência $f_y \leq 0$ . Consequentemente, o processo incremental deve ser plástico uma vez que $\Delta\varphi > 0$ para alcançar $\sigma_{n+1} \neq \sigma_{n+1}^{teste}$ ...	56
Figura 4.10: A tensão final é obtida pelo retorno da tensão teste a superfície de escoamento através do escalonamento, daí a denominação mapeamento e retorno.....	59
Figura 5.1: Padrões de resposta não linear básicos e mais complexos .....	60
Figura 5.2: Método de comprimento de arco esférico.....	70
Figura 5.3: Método do comprimento de arco cilíndrico .....	73
Figura 6.1: Geometria, condições de contorno e parâmetros físicos utilizados no pórtico de Lee.....	78

Figura 6.2: Resposta elástica do pórtico de Lee para os três elementos de viga utilizados e uma malha com 10 elementos .....	80
Figura 6.3: Resposta elástica do pórtico de Lee para os três elementos de viga utilizados e uma malha com 20 elementos. ....	80
Figura 6.4: Resposta elástica do pórtico de Lee para o elemento de viga Timoshenko e uma malha com 20 elementos. ....	81
Figura 6.5: Resposta elastoplástica do pórtico de Lee para o elemento de viga Bernoulli e uma malha com 20 elementos. ....	81
Figura 6.6: Resposta elastoplástica do pórtico de Lee para o elemento de viga Bernoulli 2; malha com 20 elementos e; 7 e 15 pontos de Gauss. ....	82
Figura 6.7: Perfil de deformadas para a resposta elastoplástica .....	82
Figura 6.8: Dimensões, condições de contorno e propriedades do material usadas na viga em balanço. ....	83
Figura 6.9: Resposta elastoplástica para viga em balanço usando elemento de viga Bernoulli 2; malha com 10 elementos e 15 pontos de Gauss .....	84
Figura 6.10: Detalhe da resposta elastoplástica para viga em balanço usando elemento de viga Bernoulli 2; malha com 10 elementos e 15 pontos de Gauss.....	84
Figura 6.11: Dimensões, condições de contorno e propriedades do material usadas na viga em balanço. ....	85
Figura 6.12: Resposta elástica e elastoplástica para o pórtico toggle usando elemento de viga Bernoulli 2; malha com 8 elementos e 15 pontos de Gauss .....	86
Figura 6.13: Dimensões, condições de contorno e propriedades do material usadas na viga em balanço .....	87
Figura 6.14: Resposta elástica do pórtico assimétrico usando elemento de viga Bernoulli 2; malha com 16 elementos.....	88
Figura 6.15: Resposta elastoplástica para o pórtico assimétrico usando elemento de viga Bernoulli 2; malha com 16 elementos e 15 pontos de Gauss.....	88

## LISTA DE SÍMBOLOS, NOMECLATURAS E ABREVIACÕES

$A$  - área da seção transversal;

$\mathbf{B}$  - matriz de transformação;

$C^1$  - classe de continuidade das funções de forma dos elementos de viga Bernoulli e Bernoulli 2;

$C^0$  - classe de continuidade das funções de forma do elemento de viga Timoshenko;

$C_0$  - configuração inicial ou indeformada do elemento;

$C_R$  - configuração co-rotacional do elemento;

$C$  - configuração atual ou deformada do elemento;

$E$  - módulo de Young no âmbito elástico;

$E_t$  - módulo de Young no âmbito elastoplástico;

$\mathbf{f}$  - vetor de forças internas da estrutura em coordenadas globais;

$f(x_i)$  - valor do polinômio no ponto de Gauss  $x_i$ ;

$f_y$  - função condição de escoamento;

$\mathbf{f}_g$  - vetor de forças internas do elemento em coordenadas globais;

$\mathbf{f}_l$  - vetor de forças internas locais do elemento;

$\mathbf{g}$  - vetor de forças residuais ou desequilibradas;

$h$  - altura do elemento finito de viga;

$H$  - módulo plástico;

$I$  - momento de inércia;

$k$  - curvatura;

$\mathbf{K}$  - matriz de rigidez da estrutura em coordenadas globais;

$\mathbf{K}_g$  - matriz de rigidez tangente global;

$\mathbf{K}_l$  - matriz de rigidez tangente local;

$l_0$  - comprimento inicial do elemento de viga;

$l_n$  - comprimento atual do elemento de viga;

$M_i$  - momento fletor no nó  $i$ ;

$N$  - esforço normal;

$\mathbf{p}$  - vetor de forças externas;

$pg(i)$  - coordenada do ponto de Gauss  $i$ ;

$Tol$  - tolerância para convergência no método de comprimento de arco;  
 $\bar{u}$  - deformação axial do elemento finito de viga;  
 $u$  - movimento axial do campo de deslocamento do elemento de viga;  
 $\mathbf{u}_g$  - vetor de deslocamentos nodais do elemento em coordenadas globais;  
 $\mathbf{u}_l$  - vetor de deslocamentos deformacionais locais do elemento;  
 $V$  - trabalho virtual;  
 $\mathbf{x}$  - vetor de deslocamentos da estrutura em coordenadas globais;  
 $w$  - movimento vertical do campo de deslocamento do elemento de viga;  
 $w(x_i)$  - peso no ponto de Gauss de coordenada  $x_i$  ;  
 $wg(i)$  - peso do ponto de Gauss  $i$  .

$\alpha$  - rotação de corpo rígido do elemento finito de viga;  
 $\beta_0$  - inclinação inicial do elemento finito de viga;  
 $\bar{\theta}_i$  - deformação rotacional do elemento finito de viga;  
 $\theta$  - movimento de rotação do campo de deslocamento do elemento de viga;  
 $\varepsilon$  - deformação (devida aos esforços flexional e axial);  
 $\gamma$  - deformação devida aos esforços cisalhantes;  
 $\varepsilon^e$  - deformação elástica;  
 $\varepsilon^p$  - deformação plástica;  
 $\mu$  - variável interna de encruamento;  
 $\delta \bar{\theta}_i$  - variação virtual do deslocamento deformacional  $\bar{\theta}$  no nó  $i$  ;  
 $\delta \bar{u}$  - variação virtual do deslocamento deformacional  $\bar{u}$  ;  
 $\sigma$  - tensão axial;  
 $\lambda$  - fator de carga;  
 $\varphi$  - taxa de escoamento;  
 $\sigma^{teste}$  - tensão axial teste;  
 $\mathbb{S}_\sigma$  - espaço de tensões admissíveis;  
 $\sigma_y$  - tensão de escoamento;  
 $\delta \mathbf{x}$  - deslocamento iterativo no método de comprimento de arco;  
 $\Delta \mathbf{x}$  - deslocamento incremental no método de comprimento de arco;  
 $\Delta L$  - tamanho do comprimento de arco;

$\delta \mathbf{x}_{Ti}$  - deslocamento iterativo correspondente a totalidade da carga externa;  
 $\delta \mathbf{x}_{Ri}$  - deslocamento iterativo correspondente ao método com controle de carga;  
 $\nu$  - coeficiente de Poisson;  
 $\Delta L_{\max}$  - tamanho do comprimento de arco máximo;  
 $\Delta L_{\min}$  - tamanho do comprimento de arco mínimo.

MEF - método dos elementos finitos;  
LT - descrição lagrangiana total;  
LA - descrição lagrangiana atualizada;  
CR - descrição co-rotacional;  
ANDES - Assumed Natural Deviatoric Strains;  
CSP - Current Stiffness Parameter;  
EICR - Element Independent Co-Rotational Formulation;  
CSSE - Consistent Simetrizable Self-equilibrated;  
 $PG$  - ponto de Gauss.

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 MOTIVAÇÕES

Neste capítulo descreve-se as considerações iniciais sobre os conceitos de não linearidade física e geométrica, os objetivos que norteiam o presente trabalho, a metodologia aplicada, bem como, a organização dos capítulos subsequentes.

De acordo com Felippa (2001) a análise estática linear lida com problemas cujas respostas no sentido causa-efeito são lineares. Dessa forma, se dobrássemos as forças aplicadas, os deslocamentos e tensões internas na estrutura também dobrariam. Ainda de acordo com o citado autor, problemas fora desse domínio são classificados como não lineares.

A análise linear-elástica, que considera uma relação linear entre tensões e deformações (linearidade física) e entre deformações e deslocamentos (linearidade geométrica), é muito importante e ainda a mais utilizada devido à grande gama de situações que esta compreende, maior simplicidade de aplicação e ao fato de que o seu conhecimento já se encontra consolidado. Entretanto, uma das dificuldades da análise linear é sua inaptidão em refletir o real comportamento de estruturas menos comuns, sob condições de carregamento não ordinárias ou ainda próximas ao colapso.

Há uma tendência crescente das normas atuais de se incorporar, direta ou indiretamente, os efeitos das não linearidades nos projetos. Isto se dá em detrimento dos vertiginosos avanços dos materiais e recursos computacionais empregados na engenharia, os quais têm possibilitado a construção de estruturas cada vez mais altas, esbeltas, flexíveis e com aplicações que levam as mesmas a funcionarem sobre variados tipos e intensidades de solicitações. Esses fatores fazem com que as estruturas estejam sujeitas a grandes mudanças de forma e/ou trabalhando com seu material em condições para as quais o emprego das leis de Hooke não mais se justifica. Nesse contexto, a análise não-linear física e geométrica tem grande aplicabilidade na engenharia estrutural, já que possibilita o

conhecimento da capacidade resistente remanescente, depois da análise ultrapassar os pontos críticos e/ou atingir deformações inelásticas finitas.

Para Menin (2006), na análise não-linear geométrica utilizando o método dos elementos finitos (MEF), três diferentes tipos de descrições cinemáticas têm sido amplamente utilizadas: descrição lagrangiana total (LT), descrição lagrangiana atualizada (LA) e descrição co-rotacional (CR). Na primeira, as equações do MEF são formuladas em relação a uma configuração de referência fixa que, em geral, é a própria configuração inicial assumida pela estrutura. A segunda descrição caracteriza-se pelo fato de que a configuração de referência é mantida fixa durante o processo iterativo porém, atingido o equilíbrio, os esforços internos e deformações passam a ser definidos a partir daquela nova configuração de equilíbrio. Por fim, a descrição co-rotacional está baseada na separação explícita entre os movimentos de corpo rígido e deformacionais.

A não-linearidade física, por sua vez, está diretamente relacionada ao comportamento mecânico dos materiais constituintes da estrutura. Neste tipo de análise torna-se necessário, portanto, o conhecimento do comportamento dos materiais para que se possa definir um modelo a ser utilizado na análise computacional.

Quando a resposta do sólido que constitui a estrutura é elástica, após cessada a carga o corpo não apresenta deformações residuais. As deformações que ocorrem são reversíveis no nível atômico. Os efeitos dessas deformações são observáveis numa escala macroscópica, resultantes da variação do espaço interatômico para balancear as cargas externas, e também dos movimentos reversíveis de deslocamento. Já quando a resposta é plástica, após cessado o carregamento a deformação não se desfaz, sendo portanto irreversível ou permanente, Owen e Hinton (1980), Chen e Han (1988) e Lemaitre e Chaboche (1994). Essas deformações irreversíveis ocorrem no interior dos grãos ou cristais do material e soma-se a parcela de deformação elástica. Correspondem ao deslocamento atômico relativo que permanece após a remoção da carga.

A teoria da plasticidade fornece leis e modelos capazes de descrever o comportamento da relação tensão-deformação para materiais que apresentam uma resposta elastoplástica quando submetidos a carregamentos externos.

## 1.2 OBJETIVOS

O objetivo principal deste trabalho é realizar uma análise não linear de pórticos planos utilizando a formulação co-rotacional e plasticidade por camadas. Discretiza-se o pórtico plano com diferentes elementos de viga 2D. Utiliza-se o modelo matemático de viga Euler-Bernoulli ( $C^1$ ) sem o acoplamento dos esforços axiais e de flexão, a partir de agora denominado elemento de viga Bernoulli; utiliza-se, também, o modelo anterior com acoplamento entre os esforços axiais e de flexão, aqui denominado de elemento de viga Bernoulli 2; por último, faz-se o uso do modelo matemático de viga Timoshenko, denominado de elemento de viga Timoshenko ( $C^0$ ). Utiliza-se o modelo de plasticidade unidimensional bilinear com encruamento isotrópico para integrar as tensões normais ao longo da altura da seção transversal, Simo e Hughes (1998). Neste trabalho adotam-se seções transversais retangulares.

Para validar a formulação proposta serão comparadas as soluções numéricas obtidas neste trabalho com as encontradas na literatura por outros autores.

## 1.3 METODOLOGIA

Para realizar as simulações numéricas com a formulação proposta neste trabalho serão implementados no programa de elementos finitos denominado 2D\_Beam\_f90 os elementos de viga descritos no item anterior utilizando a descrição co-rotacional. Este programa foi desenvolvido no âmbito do Programa de Pós Graduação em Estruturas e Construção Civil (PECC) da Universidade de Brasília – UnB, pelos seguintes autores: Menin (2006), Cortivo (2004) e Belo (2009).

Para simular a plasticidade por camadas foi utilizado um modelo de plasticidade unidimensional com encruamento isotrópico. Integra-se este modelo utilizando um algoritmo implícito denominado na literatura de “*return mapping*”, Simo e Hughes (1998). Para obter os esforços seccionais, integra-se as tensões normais, utilizando sete ou quinze pontos de Gauss ao longo da altura da seção transversal. Por outro lado, não se

implementou a plasticidade no elemento de viga Timoshenko. O mesmo requer esquemas de integração para o estado plano de tensão, tal qual apresentado por Crisfield (1991).

Para obter o vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente dos três elementos acima descritos, utiliza-se o princípio dos trabalhos virtuais. Os coeficientes destes vetores e matrizes serão obtidos analiticamente e por integração numérica empregando dois pontos de Gauss ao longo do comprimento do elemento. Para evitar travamento por corte utiliza-se apenas um ponto de Gauss no caso do elemento de viga Timoshenko.

Para obter a trajetória de equilíbrio não-linear adota-se uma análise incremental-iterativa baseada no método de Newton-Raphson e na técnica do comprimento de arco (*arc-length*).

## 1.4 APRESENTAÇÃO DO TRABALHO

Este capítulo introdutório apresentou um apanhado geral sobre a análise não-linear de estruturas, bem como as justificativas, os objetivos propostos, e a metodologia utilizada no desenvolvimento deste trabalho.

A seguir, o capítulo 2 apresenta um breve histórico da formulação co-rotacional aplicada no contexto do método dos elementos finitos.

No capítulo 3 é desenvolvida a formulação co-rotacional para elementos de pórticos planos discretizados através dos elementos de viga Bernoulli, Bernoulli 2 e Timoshenko. Ademais obtêm-se o vetor de forças internas e matriz de rigidez tangente tanto analítica quanto numericamente para esses elementos de viga.

O capítulo 4 é destinado à descrição do modelo matemático da plasticidade unidimensional bem como o seu modelo numérico, a fim de mensurar a presença de deformações inelásticas e sua influência no comportamento global.

No capítulo 5 serão apresentados diferentes métodos para a resolução do sistema de equações não-lineares, bem como, alguns métodos indiretos para a detecção e classificação de pontos críticos (limites ou bifurcação) e “*turnings points*”.

O capítulo 6 traz os exemplos numéricos analisados bem como a discussão dos seus resultados.

No capítulo 7 apresenta-se as conclusões finais deste trabalho. Além disso, são apontadas algumas sugestões para trabalhos futuros.

No Apêndice A, mostra-se a dedução analítica completa dos vetores de forças internas e das matrizes de rigidez tangente dos elementos de viga propostos. Enquanto que no Apêndice B, descreve-se a dedução numérica dos entes matemáticos mencionados.

## Capítulo 2

### HISTÓRICO DA DESCRIÇÃO CO-ROTACIONAL

Na análise não-linear geométrica utilizando o método dos elementos finitos (MEF), três diferentes tipos de descrições cinemáticas têm sido amplamente utilizadas – Menin (2006). Estas são: descrição lagrangiana total (LT), descrição lagrangiana atualizada (LA) e descrição co-rotacional (CR). Neste capítulo faz-se um breve levantamento histórico da descrição co-rotacional.

Na descrição lagrangiana total (LT) as equações do MEF são formuladas em relação a uma configuração de referência fixa, em geral, a própria configuração inicial assumida pela estrutura. Assim, os deslocamentos calculados numa análise incremental, se referem a um mesmo referencial fixo (origem).

A descrição lagrangiana atualizada (LA) caracteriza-se pelo fato das equações do MEF serem formuladas em relação a uma última configuração de equilíbrio. Para tanto, a configuração de referência é mantida fixa durante o processo iterativo, dentro de um mesmo passo de carga e, atingido o equilíbrio, os esforços internos e deformações passam a ser definidos a partir daquela nova configuração de equilíbrio.

De acordo com Reddy (2004), a formulação co-rotacional tem origem no teorema da decomposição polar desenvolvido no âmbito da Mecânica dos Meios Contínuos. Esse foi estudado pela primeira vez por Cauchy em 1827 (Truesdell, 1966) e, posteriormente, em problemas geológicos por Biot (1965) e estabelece que a deformação total de uma superfície contínua pode ser decomposta em movimento de corpo rígido e deformação relativa (Figura 2.1). Outros avanços desta descrição cinemática se deram na indústria aeronáutica e aeroespacial nas décadas de 50 e 60 do século passado.

A extensão da idéia utilizada na indústria aeronáutica para a análise não-linear geométrica de estruturas utilizando o MEF baseia-se numa idéia bastante simples: ao invés de se utilizar um sistema de eixos único para a estrutura como um todo, deveria ser utilizado um sistema de eixos por elemento. Isto possibilita o atendimento de uma premissa básica: que os deslocamentos e rotações deformacionais do elemento sejam pequenos em relação ao sistema de eixos co-rotacionais. Caso esta hipótese não seja atendida por um elemento em

particular, o mesmo pode ser sub-dividido em mais elementos por meio de um refinamento de malha. Como são excluídos os movimentos de corpo rígido trabalhando-se apenas com a parte deformacional, existe a possibilidade do uso de elemento finitos lineares em problemas envolvendo não linearidade geométrica com esta descrição do movimento.

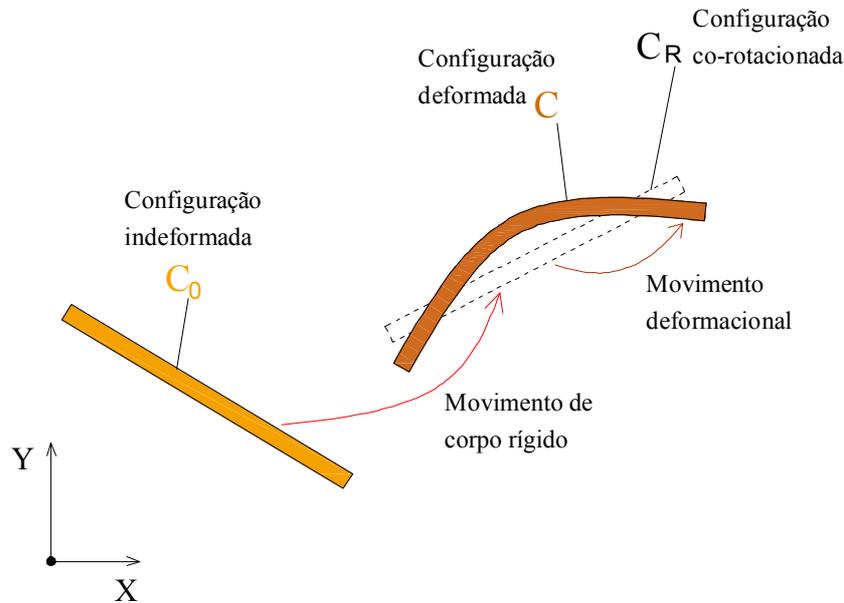


Figura 2.1: Descrição cinemática da formulação co-rotacional

Conforme apontado por Reddy (2004), o conceito da descrição cinemática co-rotacional foi introduzido em um contexto do MEF com os trabalhos de Argyris (1965). Este foi o precursor do conceito de decomposição do movimento, o qual foi inicialmente denominado de “aproximação natural”. Wempner em 1969 também aplica a mesma idéia no estudo de rotações finitas de cascas flexíveis. Belytschko e Hsieh (1973) usam a abordagem co-rotacional em elementos finitos de viga submetidos a grandes rotações e propuseram um método baseado em um sistema de coordenadas curvilíneas denominadas “*convected coordinates*”.

No ano de 1976, Oran estudou grandes deformações e a análise da estabilidade de pórticos estruturais. Fraeijs de Veubeke (1976) desenvolveu uma formulação co-rotacional para a análise dinâmica de estruturas na indústria aeronáutica, fazendo uso de um único sistema de eixos co-rotacionais para a estrutura como um todo - “*shadow element*”. Entretanto, este

trabalho estava mais voltado à uma solução analítica do problema, do que através de uma formulação pelo MEF

A adoção de um sistema de eixos para estrutura como um todo gerava uma série de dificuldades, de modo que o conceito de configuração fantasma (*shadow*) foi levado para o nível do elemento por vários pesquisadores, dentre eles Bergan e Horrigmoe (1976) e Bergan e Nygard (1989).

O conceito de configuração fantasma facilitou o entendimento da formulação co-rotacional e foi usado por vários autores para eliminar o movimento de corpo rígido de cada um dos elementos e com a parte deformacional remanescente realizar-se o cômputo do vetor de forças internas do elemento. Todavia, as derivadas do vetor de forças internas não foram utilizadas diretamente na montagem da matriz de rigidez tangente, o que conduziu a uma perda de consistência.

Belytschko e Glaum (1979) introduziram o termo “co-rotacional” para se referir ao movimento do sistema de coordenada local anexado ao elemento, e esta terminologia se tornou a adotada na maior parte dos artigos publicados a partir de então.

Rankin e Brogan (1986) introduziram a formulação EICR – “*Element Independent Corotational Formulation*”, que foi posteriormente refinada por Rankin e Nour-Omid (1988) e por Nour-Omid e Rankin (1991) e implementada no programa STAGS (Almroth *et al.*, 1979). A formulação EIRC não faz uso explícito do conceito “*shadow element*” na obtenção dos deslocamentos deformacionais, utilizando em vez disso operadores de projeção, processo bastante similar utilizado por Bergan e Nygard (1989). Estes autores usaram a formulação co-rotacional diretamente para formar uma matriz de rigidez tangente consistente.

A formulação proposta por Nour-Omid e Rankin (1991) ainda apresentava restrições no número de grau de liberdade que poderiam participar na rotação do sistema de coordenadas do elemento e manter simultaneamente a consistência da matriz de rigidez tangente. Haugen (1994) resolve este problema desenvolvendo um trabalho aplicado ao estudo de cascas planas discretizadas por elementos triangulares e quadrangulares que apresentavam o grau de liberdade de rotação torcional, combinando a natureza invariável da formulação de Bergan e o equilíbrio e a consistência da formulação de Rankin.

Crisfield (1990) apresentou uma formulação consistente para a análise não linear geométrica de pórticos espaciais; Peng e Crisfield (1992) apresentaram uma formulação

consistente para o estudo de estruturas de cascas, utilizando uma combinação do elemento triangular de membrana com deformações constantes e do elemento triangular de placa com curvatura constante; Crisfield e Moita (1996) apresentaram um procedimento teórico, inicialmente voltado para o estudo de elementos finitos sólidos e em seguida modificado para abranger o estudo de vigas e pórticos espaciais.

Rodrigues (2000) desenvolveu ferramentas numéricas para a análise estática não-linear física e geométrica de estruturas reticuladas espaciais na exploração de petróleo offshore. A formulação co-rotacional para elementos de pórtico tridimensional com não linearidade geométrica é empregada para fornecer um tratamento preciso das rotações finitas. As técnicas do controle de deslocamento, do comprimento do arco constante e do controle de deslocamento generalizado são utilizadas para se obter a completa trajetória não-linear de equilíbrio e permitir a correta avaliação da carga limite ou de colapso.

De Souza (2000) apresentou uma formulação baseada no método das forças para a análise inelástica e de grandes deslocamentos em pórticos planos e espaciais, e sua implementação numérica consistente em um programa geral de elementos finitos. A idéia principal do método é a utilização de funções de interpolação de força que satisfazem estritamente o equilíbrio na configuração deformada do elemento. O sistema de referência adequado para estabelecer estas funções de interpolação de força é um sistema de coordenadas básico sem modos de corpo rígido. Neste sistema, o elemento de rigidez tangente é não singular e pode ser obtido pela inversão da matriz de flexibilidade. A não-linearidade geométrica é tratada empregando-se a formulação co-rotacional.

Battini (2002) implementou elementos finitos de viga numa formulação co-rotacional, além de procedimentos numéricos que detectam pontos limites e de bifurcações, e que obtêm as trajetórias secundárias, para a análise de problemas de instabilidade elástica e elastoplástica em estruturas bi e tridimensionais.

Alguns trabalhos de pesquisa que foram orientados no âmbito do Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil da UnB trataram da formulação co-rotacional e/ou da não linearidade física no âmbito do MEF. Entre esses temos:

- Cortivo (2004) estudou problemas de não linearidades física e geométrica de estruturas de cascas finas, no domínio de pequenas deformações, adotando o modelo elastoplástico por camadas baseado no critério de escoamento de von Mises. Utilizou-se como ponto de partida a formulação cinemática co-rotacional

CSSE (*Consistent Simetrizable Self-equilibrated*), o elemento finito de casca linear elástico triangular de três nós ANDES (*Assumed Natural Deviatoric Strain*) e o método de comprimento de arco. Como extensão para acomodar a não-linearidade física (plasticidade), o autor adotou o modelo elastoplástico por camadas baseado no critério de escoamento plástico de von Mises, tanto para materiais com encruamento isotrópico quanto para materiais perfeitamente plásticos. Cria-se ainda um novo termo (termo de acoplamento entre as rijezas básica e de alta ordem) para a matriz de rigidez material do elemento finito ANDES, através da derivação do vetor das forças internas, termo este que tem grande influência na convergência global do processo iterativo da análise.

- Menin (2006) aplicou a descrição co-rotacional na análise não-linear geométrica de estruturas discretizadas por elementos finitos de treliça, vigas e cascas. Avaliou-se assim, o comportamento não-linear geométrico de diversas tipologias estruturais. No estudo de treliças e pórticos planos, as equações de transformação que permitem a separação dos movimentos de corpo rígido e deformacional puderam ser obtidas de forma exata, considerando apenas argumentos puramente geométricos. Para o caso de pórticos espaciais e cascas, os deslocamentos deformacionais foram obtidos utilizando operadores de projeção. Métodos indiretos como o parâmetro de rigidez *CSP – Current Stiffness Parameter* e a alteração do número de pivôs negativos da matriz de rigidez foram capazes de detectar e classificar com grande precisão a ocorrência de pontos críticos (limites ou de bifurcação) e *turning points*. Na resolução do sistema de equações não-lineares e obtenção das trajetórias de equilíbrio, foram implementados diversos métodos combinados com o método de Newton-Raphson completo.
- Belo (2009) desenvolveu a formulação co-rotacional em elementos finitos de casca para análises hiperelásticas. O autor avaliou o problema da não-linearidade material de estruturas submetidas a grandes deslocamentos e rotações. Elementos bidimensionais derivados do contexto da formulação de deformação deviatória natural (ANDES), da formulação co-rotacional de elemento independente (EICR) e do comprimento de arco são adaptados ao comportamento dos materiais hiperelásticos.

Segundo Menin (2006), a descrição cinemática co-rotacional é a mais recente das formulações utilizadas na análise não-linear geométrica de estruturas e, em função disto,

ainda não atingiu o mesmo nível de desenvolvimento da formulação lagrangiana e, conseqüentemente, uma grande variedade de assuntos ainda pode ser pesquisada.

Para Felippa (2001), a formulação lagrangiana total (LT) ainda é a formulação mais utilizada atualmente, ao passo que o interesse pela formulação lagrangiana atualizada (LA) vem decaindo bastante e sendo substituída pela formulação co-rotacional (CR).

Conforme apontado por Menin (2006), dentre as principais vantagens da formulação co-rotacional em relação à formulação lagrangiana pode-se destacar:

- Eficiência no tratamento de problemas envolvendo grandes rotações e pequenas deformações, lembrando que este assunto está associado a uma grande variedade de problemas práticos de engenharia estrutural, sendo particularmente importante em estruturas aeroespaciais;
- Permite a reutilização de bibliotecas de elementos finitos lineares pré-existentes, em uma análise não-linear geométrica de estruturas, em especial, se a formulação EICR for empregada.
- Facilidade no estudo de não-linearidades materiais, caracterizadas por pequenas deformações, juntamente, com não-linearidades geométricas.
- Facilidade de adaptação ao estudo de elementos estruturais com graus de liberdade de rotação (vigas, placas e cascas) submetidos a grandes rotações, lembrando que tais elementos são razoavelmente complicados de serem estudados com descrições cinemáticas lagrangianas.
- Facilidade de interface com programas envolvendo *multibody dynamics* (MBD).

Ainda de acordo com o autor antes mencionado, dentre as desvantagens dessa descrição cinemática do movimento, se enumeram:

- A formulação co-rotacional não é vantajosa no estudo de problemas envolvendo grandes deformações plásticas.
- Pode levar a uma matriz de rigidez tangente não simétrica para elementos com graus de liberdade de rotação no espaço. Entretanto, conforme já foi apresentado por um grande número de pesquisadores, pode-se utilizar processos de simetrização sem prejudicar os resultados finais ou mesmo o grau de convergência da solução.
- Envolve formulações matemáticas mais complexas na avaliação dos graus de liberdade de rotação.

- A formulação é eficiente somente para o caso de elementos finitos com geometria inicial simples: elementos de treliças e vigas contendo dois nós e elementos de placas ou cascas contendo três ou quatro nós. Para elementos com geometrias mais complexas, o nível de dificuldade aumenta. Felizmente, os elementos com geometria mais simples são, geralmente, os elementos utilizados com maior frequência na análise não-linear geométrica de estruturas.

## Capítulo 3

### FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL DE PÓRTICOS PLANOS

#### 3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo demonstra-se por meio do princípio dos trabalhos virtuais a formulação matemática da descrição co-rotacional para um elemento de viga qualquer que se movimenta no plano. Além disso, é apresentada a obtenção analítica e numérica dos vetores de força internas  $f_l$  e das matrizes de rigidez tangente  $K_l$  local dos elementos finitos de viga Bernoulli, Bernoulli 2 e Timoshenko. A dedução pormenorizada desses entes matemáticos é exibida nos Apêndices A e B.

Uma vez que a energia de deformação elástica é um polinômio de segunda ordem no eixo  $x$ , com o intuito de se obter a solução exata da integração, usou-se dois pontos de Gauss ao longo do eixo dos elementos de viga que adotam as hipóteses de Bernoulli. Suas posições localizam-se no intervalo  $0 < x < L$  e, juntamente com seus pesos, são dadas respectivamente por:

$$x_1 = \frac{L}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right); \left( \frac{L}{2} \right) \quad \text{e} \quad (3.1a)$$

$$x_2 = \frac{L}{2} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right); \left( \frac{L}{2} \right). \quad (3.1b)$$

De acordo com Battini (2002) a adoção de um número de pontos de Gauss maior que dois ao longo do eixo da viga poderia aumentar a precisão no caso elastoplástico, porém mediante algum custo computacional.

Os números de pontos de Gauss empregados ao longo da altura da seção transversal, tal qual considerado por Battini (2002), foram sete e quinze. As posições dos pontos de Gauss ao longo do eixo do elemento e sobre a altura da seção transversal, bem como uma configuração típica das deformações e tensões que se desenvolve durante o processo de integração numérica, é ilustrado na Figura 3.1.

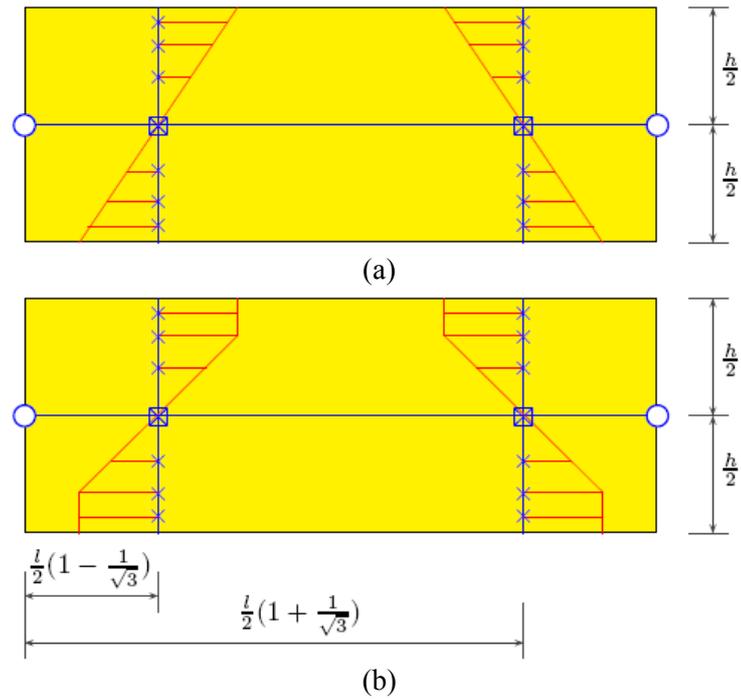


Figura 3.1: Aspecto das deformações (a) e das tensões (b) nos pontos de Gauss (2 ao longo do eixo do elemento e, 7 ou 15 sobre a altura  $h$  das seções transversais).

Com o intuito de evitar travamento por cisalhamento (*shear locking*) no elemento de viga Timoshenko, obtêm-se as expressões para o vetor de forças internas e matriz de rigidez tangente integrando a expressão dos trabalhos virtuais em um ponto localizado no centro do seu comprimento.

Nas equações deste capítulo o módulo de Young será denotado por  $\hat{E} = E$  no âmbito elástico e  $\hat{E} = E_t$  no âmbito elastoplástico conforme mostra-se na Figura 3.2.

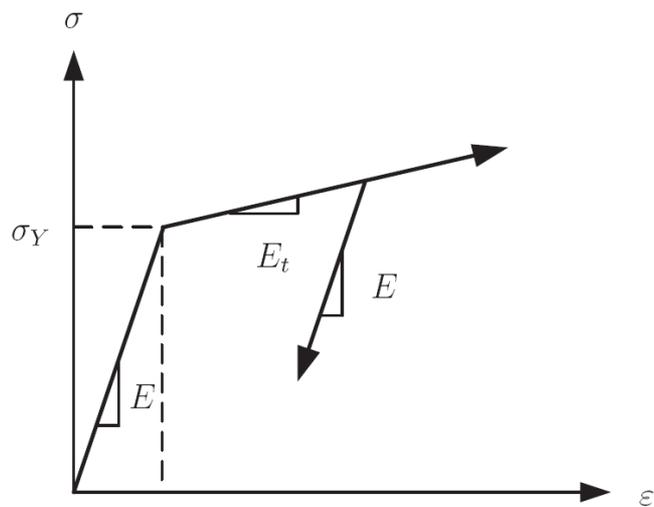


Figura 3.2: Lei bilinear elastoplástica. Fonte: Battini (2006).

A formulação co-rotacional descrita a seguir é, a apresentada em Battini (2002) que se diferencia da exibida em Crisfield (1991), onde diferentes definições de deslocamentos locais foram usadas.

### 3.2 DESCRIÇÃO CINEMÁTICA

Na Figura 3.2 apresenta-se as coordenadas dos nós 1 e 2 no sistema de coordenadas global  $(x, z)$ ,  $(x_1, z_1)$ ,  $(x_2, z_2)$ . O vetor de deslocamento global é definido por:

$$\mathbf{u}_g = \{u_1 \quad w_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad w_2 \quad \theta_2\}^T. \quad (3.2)$$

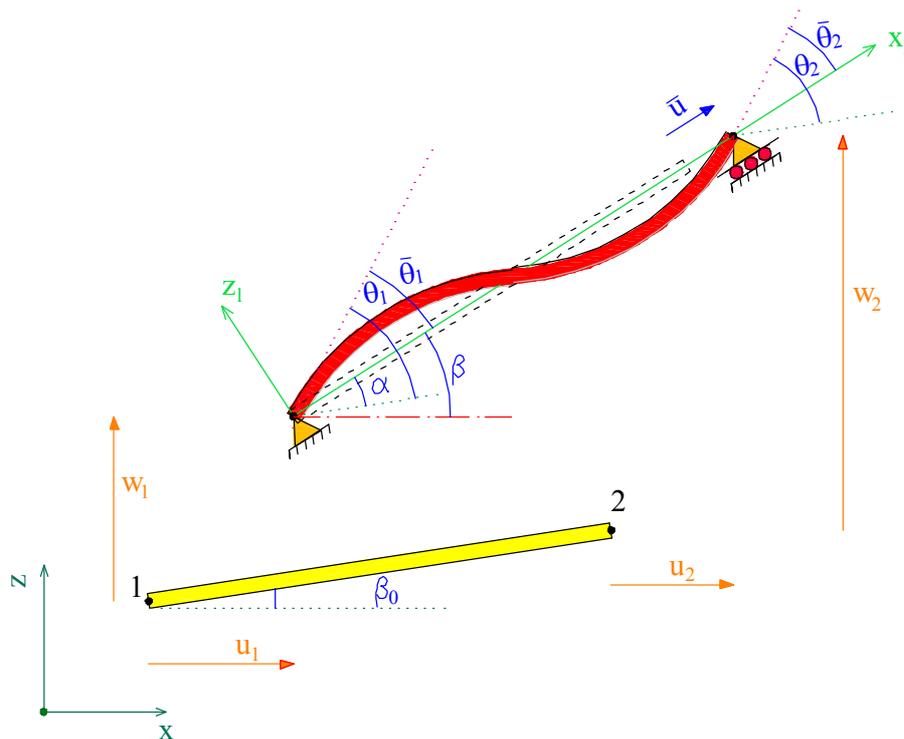


Figura 3.3: Formulação co-rotacional – cinemática da viga.

Por outro lado, o vetor de deslocamentos locais é dado por:

$$\mathbf{u}_l = \{\bar{u} \quad \bar{\theta}_1 \quad \bar{\theta}_2\}^T. \quad (3.3)$$

As componentes de  $\mathbf{u}_l$  podem ser calculadas através das seguintes equações,

$$\bar{u} = l_n - l_0, \quad (3.4a)$$

$$\bar{\theta}_1 = \theta_1 - \alpha \quad \text{e} \quad (3.4b)$$

$$\bar{\theta}_2 = \theta_2 - \alpha. \quad (3.4c)$$

Nas equações acima  $l_0$  e  $l_n$  denotam os comprimentos inicial e atual, respectivamente.

Após se fazer simples relações trigonométricas podem-se reescrevê-las como,

$$l_0 = \left[ (x_2 - x_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \right]^{1/2} \quad \text{e} \quad (3.5a)$$

$$l_n = \left[ (x_2 + u_2 - x_1 - u_1)^2 - (z_2 + w_2 - z_1 - w_1)^2 \right]^{1/2} \quad (3.5b)$$

onde  $\alpha$  denota a rotação de corpo rígido. Esta pode estar relacionada trigonometricamente por

$$\text{sen} \alpha = c_0 s - s_0 c \quad \text{e} \quad (3.6a)$$

$$\text{cos} \alpha = c_0 c + s_0 s \quad (3.6b)$$

as quais, após desenvolvidas chega-se a:

$$c_0 = \text{cos} \beta_0 = \frac{1}{l_0} (x_2 - x_1), \quad (3.7a)$$

$$s_0 = \text{sen} \beta_0 = \frac{1}{l_0} (z_2 - z_1), \quad (3.7b)$$

$$c = \text{cos} \beta = \frac{1}{l_n} (x_2 + u_2 - x_1 - u_1) \quad \text{e} \quad (3.7c)$$

$$s = \text{sen} \beta = \frac{1}{l_n} (z_2 + w_2 - z_1 - w_1). \quad (3.7d)$$

Assim, para um  $|\alpha| < \pi$ ,  $\alpha$  é dado por:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \text{sen}^{-1}(\text{sen}\alpha) \text{ se } \text{sen}\alpha \geq 0 \text{ e } \cos\alpha \geq 0, \\
\alpha &= \cos^{-1}(\cos\alpha) \text{ se } \text{sen}\alpha \geq 0 \text{ e } \cos\alpha < 0, \\
\alpha &= \text{sen}^{-1}(\text{sen}\alpha) \text{ se } \text{sen}\alpha < 0 \text{ e } \cos\alpha \geq 0 \text{ e} \\
\alpha &= -\cos^{-1}(\cos\alpha) \text{ se } \text{sen}\alpha < 0 \text{ e } \cos\alpha < 0.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

### 3.2.1 Deslocamentos virtuais

Diferenciando-se as Equações (3.4) obtêm-se os deslocamentos virtuais locais,

$$\delta\bar{u} = c(\delta u_2 - \delta u_1) + s(\delta w_2 - \delta w_1) = \{-c \quad -s \quad 0 \quad c \quad s \quad 0\} \delta \mathbf{u}_g, \tag{3.9a}$$

$$\delta\bar{\theta}_1 = \delta\theta_1 - \delta\alpha = \delta\theta_1 - \delta\beta \quad (\alpha = \beta - \beta_0) \quad \text{e} \tag{3.9b}$$

$$\delta\bar{\theta}_2 = \delta\theta_2 - \delta\alpha = \delta\theta_2 - \delta\beta. \tag{3.9c}$$

Por outro lado,  $\delta\beta$  pode ser calculada pela diferenciação de (3.7d)

$$\delta\beta = \frac{1}{cl_n^2} [(\delta w_2 - \delta w_1)l_n - (z_2 + w_2 - z_1 - w_1)\delta l_n], \tag{3.10}$$

onde  $\delta l_n = \delta\bar{u}$  é dado por (3.9a). Usando (3.7d), a expressão de  $\delta\beta$  torna-se

$$\delta\beta = \frac{1}{cl_n} [(\delta w_2 - \delta w_1)l_n - sc(\delta u_2 - \delta u_1) - s^2(\delta w_2 - \delta w_1)], \tag{3.11}$$

a qual, após simplificações, produz

$$\delta\beta = \frac{1}{l_n} \{-c \quad -s \quad 0 \quad c \quad s \quad 0\} \delta \mathbf{u}_g. \tag{3.12}$$

Desta forma, a matriz de transformação  $\mathbf{B}$  é definida como,

$$\delta \mathbf{u}_l = \mathbf{B} \delta \mathbf{u}_g, \quad (3.13)$$

e dada por,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -c & -s & 0 & c & s & 0 \\ -s/l_n & c/l_n & 1 & s/l_n & -c/l_n & 0 \\ -s/l_n & c/l_n & 0 & s/l_n & -c/l_n & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

### 3.2.2 Vetor de forças internas

A relação entre o vetor de forças internas local  $\mathbf{f}_l$  e global  $\mathbf{f}_g$  é obtida pela equação dos trabalhos virtuais nos sistemas local e global

$$V = \delta \mathbf{u}_g^T \mathbf{f}_g = \delta \mathbf{u}_l^T \mathbf{f}_l = \delta \mathbf{u}_g^T \mathbf{B}^T \mathbf{f}_l. \quad (3.15)$$

A equação (3.15) deve ser aplicada a um  $\delta \mathbf{u}_g$  arbitrário, e assim, o vetor de forças internas global  $\mathbf{f}_g$  é dado por

$$\mathbf{f}_g = \mathbf{B}^T \mathbf{f}_l, \quad (3.16)$$

no qual o vetor de forças internas local  $\mathbf{f}_l = \{N \quad M_1 \quad M_2\}^T$  depende da definição do elemento finito de viga específico empregado.

### 3.2.3 Matriz de rigidez tangente

A matriz de rigidez tangente global  $\mathbf{K}_g$  definida por

$$\delta \mathbf{f}_g = \mathbf{K}_g \delta \mathbf{u}_g \quad (3.17)$$

é obtida pela variação de (3.16)

$$\delta \mathbf{f}_g = \mathbf{B}^T \delta \mathbf{f}_l + \mathbf{N} \delta b_1 + \mathbf{M}_1 \delta b_2 + \mathbf{M}_2 \delta b_3. \quad (3.18)$$

Na equação anterior,  $b_2$  é, por exemplo, a segunda coluna de  $\mathbf{B}^T$ . As seguintes notações são introduzidas,

$$\mathbf{r} = \{-c \quad -s \quad 0 \quad c \quad s \quad 0\}^T \mathbf{e} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{z} = \{s \quad -c \quad 0 \quad -s \quad c \quad 0\}^T, \quad (3.20)$$

as quais por diferenciação tornam-se,

$$\delta \mathbf{r} = \mathbf{z} \delta \beta \mathbf{e} \quad (3.21a)$$

$$\delta \mathbf{z} = -\mathbf{r} \delta \beta. \quad (3.21b)$$

As equações (3.9a) e (3.12) pode ser reescrita como,

$$\delta \bar{u} = \delta l_n = \mathbf{r}^T \delta \mathbf{u}_g \mathbf{e} \quad (3.22a)$$

$$\delta \beta = \mathbf{z}^T \frac{1}{l_n} \delta \mathbf{u}_g. \quad (3.22b)$$

Introduz-se expressões auxiliares,

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{r} \quad (3.23a)$$

$$\mathbf{b}_2 = \{0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T - \mathbf{z} \frac{1}{l_n} \mathbf{e} \quad (3.23b)$$

$$\mathbf{b}_3 = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1\}^T - \mathbf{z} \frac{1}{l_n}, \quad (3.23c)$$

as quais diferenciadas produzem,

$$\delta \mathbf{b}_1 = \delta \mathbf{r} = \frac{\mathbf{z}\mathbf{z}^T}{l_n} \delta p_g \mathbf{e} \quad (3.24a)$$

$$\delta \mathbf{b}_2 = \delta \mathbf{b}_3 = -\frac{1}{l_n} \delta z + z \frac{\delta l_n}{l_n^2} = \frac{1}{l_n^2} (\mathbf{r}\mathbf{z}^T + \mathbf{z}\mathbf{r}^T) \delta \mathbf{u}_g. \quad (3.24b)$$

O primeiro termo na equação (3.18) é calculado pela introdução da matriz de rigidez tangente local  $\mathbf{K}_l$ , a qual depende da definição do elemento.

$$\delta \mathbf{f}_l = \mathbf{K}_l \delta \mathbf{u}_l = \mathbf{K}_l \mathbf{B} \delta \mathbf{u}_g. \quad (3.25)$$

Finalmente, de (3.17), (3.18), (3.24a), (3.24b) e (3.25), a expressão da matriz de rigidez tangente global torna-se,

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{B}^T \mathbf{K}_l \mathbf{B} + \frac{N}{l_n} \mathbf{z}\mathbf{z}^T + \frac{1}{l_n^2} (\mathbf{r}\mathbf{z}^T + \mathbf{z}\mathbf{r}^T) (M_1 + M_2) \quad (3.26)$$

As equações (3.16) e (3.26) acima dão as relações entre os valores das forças internas  $\mathbf{f}_l$  e matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}_l$  locais e os valores destes entes em coordenadas globais,  $\mathbf{f}_g$  e  $\mathbf{K}_g$ . Estas relações são independentes da definição local do elemento adotado sendo, portanto, válidas para os três elementos de viga supracitados que tem suas formulações apresentadas a seguir.

### 3.3 ELEMENTO DE VIGA BERNOULLI

#### 3.3.1 Definição

Este elemento é baseado na teoria clássica de viga, usando-se uma interpolação linear para os deslocamentos axiais  $u$  e cúbica para os deslocamentos verticais  $w$ . Estas são dadas como:

$$u = \frac{x}{L} \bar{u} \quad \text{e} \quad (3.27a)$$

$$w = x \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \bar{\theta}_1 + \frac{x^2}{L} \left(\frac{x}{L} - 1\right)^2 \bar{\theta}_2. \quad (3.27b)$$

De acordo com a hipótese de Bernoulli, a curvatura  $k$  e a deformação  $\varepsilon$  são definidas por,

$$k = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \left(-\frac{4}{L} + 6\frac{x}{L^2}\right)\bar{\theta}_1 + \left(-\frac{2}{L} + 6\frac{x}{L^2}\right)\bar{\theta}_2 \quad \text{e} \quad (3.28a)$$

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} - kz = \frac{\bar{u}}{L} + z \left[ \left(\frac{4}{L} - 6\frac{x}{L^2}\right)\bar{\theta}_1 + \left(\frac{2}{L} - 6\frac{x}{L^2}\right)\bar{\theta}_2 \right]. \quad (3.28b)$$

### 3.3.2 Obtenção analítica do vetor de forças internas locais

As forças internas locais são calculadas usando-se as seguintes hipóteses: definição de deformação linear de Bernoulli; relação constitutiva linear elástica e; o princípio dos trabalhos virtuais. Este último é expresso por:

$$V = \int_v \sigma \delta \varepsilon dv = N \delta \bar{u} + M_1 \delta \bar{\theta}_1 + M_2 \delta \bar{\theta}_2, \quad (3.29)$$

o qual pela introdução de (3.28b) torna-se

$$V = \int_v \sigma \left[ \frac{\delta \bar{u}}{L} + z \left( \frac{4}{L} - 6\frac{x}{L^2} \right) \delta \bar{\theta}_1 + z \left( \frac{2}{L} - 6\frac{x}{L^2} \right) \delta \bar{\theta}_2 \right] dv. \quad (3.30)$$

Através da Equação (3.30) chega-se as forças internas locais, as quais são dadas por,

$$N = \int_v \frac{\sigma}{L} dv \quad (3.31a)$$

$$M_1 = \int_v \sigma z \left( \frac{4}{L} - 6\frac{x}{L^2} \right) dv \quad (3.31b)$$

$$M_2 = \int_v \sigma z \left( \frac{2}{L} - 6\frac{x}{L^2} \right) dv \quad (3.31c)$$

Uma integração das expressões anteriores sobre o volume do elemento considerando rigidez axial ( $EA$ ) e a flexão ( $EI$ ) constantes ao longo do eixo- $x$  produz coeficientes mais simples para o vetor de forças internas, o qual é dado por:

$$\mathbf{f}_I = \begin{Bmatrix} N \\ M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{EA}{l_0} \bar{u} \\ \frac{EI}{l_0} (4\bar{\theta}_1 + 2\bar{\theta}_2) \\ \frac{EI}{l_0} (4\bar{\theta}_2 + 2\bar{\theta}_1) \end{Bmatrix}. \quad (3.32)$$

### 3.3.3 Obtenção analítica da matriz de rigidez tangente local

As mesmas hipóteses adotadas na aquisição do vetor de forças internas são tomadas. A diferenciação da tensão  $\sigma$  produz

$$\delta\sigma = E\delta\varepsilon = E \left[ \frac{\delta\bar{u}}{L} + z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \delta\bar{\theta}_1 + z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \delta\bar{\theta}_2 \right]. \quad (3.33)$$

A matriz de rigidez tangente local  $\mathbf{K}_I$  é obtida pela diferenciação da equação (3.31)

$$\delta N = \frac{1}{L} \int_v \delta\sigma dv, \quad (3.34a)$$

$$\delta M_1 = \int_v \delta\sigma z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv \quad \text{e} \quad (3.34b)$$

$$\delta M_2 = \int_v \delta\sigma z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv. \quad (3.34c)$$

o qual, com o auxílio de (3.33) fornece:

$$K_{11} = \frac{\partial N}{\partial \bar{u}} = \frac{1}{L} \int_v E dv \quad (3.35a)$$

$$K_{22} = \frac{\partial M_1}{\partial \theta_1} = \int_v Ez^2 \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dv, \quad (3.35b)$$

$$K_{33} = \frac{\partial M_2}{\partial \theta_2} = \int_v Ez^2 \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dv, \quad (3.35c)$$

$$K_{12} = \frac{\partial N}{\partial \theta_1} = \frac{\partial M_1}{\partial \bar{u}} = \frac{1}{L} \int_v Ez \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv, \quad (3.35d)$$

$$K_{13} = \frac{\partial N}{\partial \theta_2} = \frac{\partial M_2}{\partial \bar{u}} = \frac{1}{L} \int_v Ez \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv, \quad (3.35e)$$

$$K_{23} = \frac{\partial M_1}{\partial \theta_2} = \frac{\partial M_2}{\partial \theta_1} = \int_v Ez^2 \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv, \quad (3.35f)$$

$$K_{21} = K_{12}, \quad K_{31} = K_{13} \text{ e } K_{132} = K_{123}.$$

A integração das Equações (3.35) sobre o volume do elemento considerando rigidez axial e a flexão constantes ao longo do eixo-x produz coeficientes mais simples para a matriz de rigidez tangente, a qual tem sua forma final dada por:

$$\mathbf{K}_t = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{l_0} & \frac{2EI}{l_0} \\ 0 & \frac{4EI}{l_0} & \frac{4EI}{l_0} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

### 3.3.4 Obtenção numérica do vetor de forças internas

Integrando numericamente as Equações (3.31) com o uso de dois pontos de Gauss ao longo do eixo-x temos,

$$N = \frac{1}{2} \left[ \int_{A_1} \sigma dA_1 + \int_{A_2} \sigma dA_2 \right] \quad (3.37a)$$

$$M_1 = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \int_{A_1} \sigma z dA_1 + \frac{1-\sqrt{3}}{2} \int_{A_2} \sigma z dA_2 \quad (3.37b)$$

$$M_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \int_{A_1} \sigma z dA_1 - \frac{\sqrt{3}+1}{2} \int_{A_2} \sigma z dA_2 \quad (3.37c)$$

Finalmente, uma nova integração numérica é efetuada ao longo da altura da seção transversal do elemento de modo a se obter os mesmos coeficientes, porém do mesmo formato que se implementou no programa 2D\_beam\_nl.f90. Uma transformação de coordenadas é realizada com a finalidade de se trabalhar com coordenadas naturais. O Quadro 3.1 mostra o algoritmo programado, onde se pode perceber que as tensões são preliminarmente calculadas no âmbito elástico e, caso estas violem determinadas condições de admissibilidade do material, um rotina que considera a elastoplasticidade é requisitada para solucionar o problema. O fenômeno da elastoplasticidade unidimensional é tratado de forma detalhada no capítulo 4, e em maior profundidade em Simo e Hughes (1998).

```

N = 0
M1 = 0
M2 = 0

faça i = 1, número de pontos de Gauss
  z =  $\frac{h}{2} \times pg(i)$ 
   $\varepsilon_1 = \frac{\bar{u}}{l} + \frac{z}{l} \left[ (1 + \sqrt{3}) \bar{\theta}_1 + (\sqrt{3} - 1) \bar{\theta}_2 \right]$ 
   $\varepsilon_2 = \frac{\bar{u}}{l} + \frac{z}{l} \left[ (1 - \sqrt{3}) \bar{\theta}_1 - (1 + \sqrt{3}) \bar{\theta}_2 \right]$ 
  caso elástico:  $\sigma_1 = E \varepsilon_1$ 
  caso elastoplástico: chamar algoritmo "return mapping" →  $\sigma_1$ 
  caso elástico:  $\sigma_2 = E \varepsilon_2$ 
  caso elastoplástico: chamar algoritmo "return mapping" →  $\sigma_2$ 
   $N = N + \frac{1}{2} \left( \sigma_1 \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) + \sigma_2 \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) \right)$ 
   $M_1 = M_1 + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \left( \sigma_1 \times z \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) \right) + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \left( \sigma_2 \times z \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) \right)$ 
   $M_2 = M_2 + \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \left( \sigma_1 \times z \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) \right) - \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \left( \sigma_2 \times z \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) \right)$ 
fim faça

```

Quadro 3.1: Algoritmo implementado para obtenção numérica do vetor de forças internas local – Elemento de viga Bernoulli.

No Quadro 3.1,  $pg(i)$  denota a coordenada do  $i$ -ésimo ponto de Gauss e  $wg(i)$  seu respectivo peso.

### 3.3.5 Obtenção numérica da matriz de rigidez tangente

Aplicando a quadratura de Gauss nas Equações (3.35) com a adoção de dois pontos de Gauss na direção do eixo do elemento finito se obtêm os coeficientes da matriz de rigidez tangente, os quais são dados por:

$$K_{11} = \frac{1}{2L} \left[ \int_{A_1} \hat{E} dA_1 + \int_{A_2} \hat{E} dA_2 \right], \quad (3.38a)$$

$$K_{22} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2L} \int_{A_1} \hat{E} z^2 dA_1 + \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2L} \int_{A_2} \hat{E} z^2 dA_2, \quad (3.38b)$$

$$K_{33} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2L} \int_{A_1} \hat{E} z^2 dA_1 + \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2L} \int_{A_2} \hat{E} z^2 dA_2, \quad (3.38c)$$

$$K_{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2L} \int_{A_1} \hat{E} z dA_1 + \frac{1-\sqrt{3}}{2L} \int_{A_2} \hat{E} z dA_2, \quad (3.38d)$$

$$K_{13} = \frac{\sqrt{3}-1}{2L} \int_{A_1} \hat{E} z dA_1 - \frac{\sqrt{3}+1}{2L} \int_{A_2} \hat{E} z dA_2, \quad (3.38e)$$

$$K_{23} = \frac{1}{L} \int_{A_1} \hat{E} z^2 dA_1 + \frac{1}{L} \int_{A_2} \hat{E} z^2 dA_2. \quad (3.38f)$$

$$K_{21} = K_{12}, \quad K_{31} = K_{13} \text{ e } K_{32} = K_{23}.$$

Integra-se numericamente os coeficientes de rigidezes anteriores ao longo da altura da seção transversal do elemento de modo a se obter os mesmos no formato programado - (Quadro 3.2). Verifica-se que o módulo de elasticidade pode assumir dois valores distintos caso as tensões desenvolvidas no material, estejam no regime elástico ou elastoplástico.

$$\begin{aligned}
k_{11} &= 0 \\
k_{22} &= 0 \\
k_{23} &= 0 \\
k_{33} &= 0 \\
\text{faça } i &= 1, \text{ número de pontos de Gauss} \\
z &= \frac{h}{2} \times pg(i) \\
\text{caso elástico: } \hat{E}_1 &= E \\
\text{caso elastoplástico: } \hat{E}_1 &= \frac{EH}{E+H} \\
\text{caso elástico: } \hat{E}_2 &= E \\
\text{caso elastoplástico: } \hat{E}_2 &= \frac{EH}{E+H} \\
k_{11} &= k_{11} + \frac{1}{2l} \left( \hat{E}_1 \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) + \hat{E}_2 \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) \right) \\
k_{22} &= k_{22} + \frac{(1+\sqrt{3})^2}{2l} \left( \hat{E}_1 \times z^2 \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) \right) + \frac{(1-\sqrt{3})^2}{2l} \left( \hat{E}_2 \times z^2 \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) \right) \\
k_{23} &= k_{23} + \frac{1}{l} \left( \hat{E}_1 \times z^2 \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) \right) + \frac{1}{l} \left( \hat{E}_2 \times z^2 \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) \right) \\
k_{32} &= k_{22} + \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2l} \left( \hat{E}_1 \times z^2 \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) \right) + \frac{(1+\sqrt{3})^2}{2l} \left( \hat{E}_2 \times z^2 \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) \right) \\
\text{fim faça}
\end{aligned}$$

Quadro 3.2: Algoritmo implementado para obtenção numérica da matriz de rigidez tangente – Elemento de viga Bernoulli.

### 3.4 ELEMENTO DE VIGA BERNOULLI 2

#### 3.4.1 Definição

O elemento de viga Bernoulli 2 usa a seguinte definição para a deformação local,

$$\varepsilon = \varepsilon_f - kz = \frac{1}{L} \int_L \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx - kz . \quad (3.39)$$

Uma deformação axial média é introduzida na equação anterior com o objetivo de evitar o travamento de membrana (*membrane locking*). Usando a mesma definição de curvatura e a mesma interpolação que na seção 3.3.1, tem-se

$$\varepsilon = \frac{\bar{u}}{L} + \frac{1}{15}\bar{\theta}_1^2 - \frac{1}{30}\bar{\theta}_1\bar{\theta}_2 + \frac{1}{15}\bar{\theta}_2^2 + z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6\frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6\frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right]. \quad (3.40)$$

A fim de simplificar as expressões subsequentes serão usadas as seguintes variáveis auxiliares:

$$g = \frac{\bar{u}}{L} + \frac{1}{15}\bar{\theta}_1^2 - \frac{1}{30}\bar{\theta}_1\bar{\theta}_2 + \frac{1}{15}\bar{\theta}_2^2, \quad (3.41a)$$

$$g_1 = \frac{2}{15}\bar{\theta}_1 - \frac{1}{30}\bar{\theta}_2 \quad \text{e} \quad (3.41b)$$

$$g_2 = \frac{2}{15}\bar{\theta}_2 - \frac{1}{30}\bar{\theta}_1. \quad (3.41c)$$

Desta forma (3.40) toma a forma

$$\varepsilon = g + z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6\frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6\frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right]. \quad (3.42)$$

### 3.4.2 Obtenção analítica do vetor de forças internas

As forças internas locais são calculadas usando-se as seguintes hipóteses: definição de deformação *shallow arch* de Bernoulli; relação constitutiva linear elástica e; o princípio dos trabalhos virtuais, o qual é expresso por,

$$V = \int_v \sigma \delta \varepsilon dv = N \delta \bar{u} + M_1 \delta \bar{\theta}_1 + M_2 \delta \bar{\theta}_2 \quad (3.43)$$

com  $\delta \varepsilon$  calculado de (3.42) por,

$$\delta \varepsilon = \delta g + z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6\frac{x}{L^2} \right) \delta \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6\frac{x}{L^2} \right) \delta \bar{\theta}_2 \right]. \quad (3.44)$$

Assim, de (3.43) e (3.44),

$$N = \int_v \frac{\sigma}{L} dv, \quad (3.45a)$$

$$M_1 = g_1 \int_v \sigma dv + \int_v \sigma z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv \quad e \quad (3.45b)$$

$$M_2 = g_2 \int_v \sigma dv + \int_v \sigma z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv. \quad (3.45c)$$

Coefficientes mais simples são obtidos efetuando-se uma integração das expressões anteriores sobre o volume do elemento e considerando rigidez axial e à flexão constante ao longo do eixo-x. O vetor de forças internas é então dado por:

$$\mathbf{f}_I = \begin{Bmatrix} N \\ M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} EA g \\ EA l_0 g g_1 + \frac{EI}{l_0} (4\bar{\theta}_1 + 2\bar{\theta}_2) \\ EA l_0 g g_2 + \frac{EI}{l_0} (4\bar{\theta}_2 + 2\bar{\theta}_1) \end{Bmatrix}. \quad (3.46)$$

### 3.4.3 Obtenção analítica da matriz de rigidez tangente

As mesmas hipóteses adotadas na aquisição do vetor de forças internas são tomadas. A matriz de rigidez tangente local é calculada pela diferenciação de (3.45) fornecendo:

$$\delta N = \frac{1}{L} \int_v \delta \sigma dv, \quad (3.47a)$$

$$\delta M_1 = \delta g_1 \int_v \sigma dv + g_1 \int_v \delta \sigma dv + \int_v \delta \sigma z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv \quad e \quad (3.47b)$$

$$\delta M_2 = \delta g_2 \int_v \sigma dv + g_2 \int_v \delta \sigma dv + \int_v \delta \sigma z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv \quad (3.47c)$$

com  $\delta \sigma = E \delta \varepsilon$  e  $\delta \varepsilon$  dada em (3.44), seus coeficientes são então fornecidos por,

$$K_{11} = \frac{\partial N}{\partial \bar{u}} = \frac{1}{2L^2} \int_{\mathbf{v}} E dv, \quad (3.48a)$$

$$K_{12} = \frac{\partial N}{\partial \bar{\theta}_1} = \frac{1}{L} \int_{\mathbf{v}} E g_1 dv + \frac{1}{L} \int_{\mathbf{v}} E z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv, \quad (3.48b)$$

$$K_{13} = \frac{\partial N}{\partial \bar{\theta}_2} = \frac{1}{L} \int_{\mathbf{v}} E g_2 dv + \frac{1}{L} \int_{\mathbf{v}} E z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv, \quad (3.48c)$$

$$K_{22} = \frac{\partial M_1}{\partial \bar{\theta}_1} = \frac{2}{15} \left\{ E g \int_{\mathbf{v}} dv + E \int_{\mathbf{v}} z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right] dv \right\} \quad (3.48d)$$

$$+ g_1^2 \int_{\mathbf{v}} E dv + g_1 \int_{\mathbf{v}} E z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv$$

$$+ \int_{\mathbf{v}} E z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) g_1 dv + \int_{\mathbf{v}} E z^2 \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dv,$$

$$K_{33} = \frac{\partial M_2}{\partial \bar{\theta}_2} = \frac{2}{15} \left\{ \int_{\mathbf{v}} E g dv + \int_{\mathbf{v}} E z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right] dv \right\} \quad (3.48e)$$

$$+ g_2^2 \int_{\mathbf{v}} E dv + g_2 \int_{\mathbf{v}} E z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv$$

$$+ \int_{\mathbf{v}} E z g_2 \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv + \int_{\mathbf{v}} E z^2 \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dv \quad e$$

$$K_{23} = \frac{\partial M_1}{\partial \bar{\theta}_2} = -\frac{1}{30} \left\{ \int_{\mathbf{v}} E g dv + \int_{\mathbf{v}} E z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right] dv \right\} \quad (3.48f)$$

$$+ g_1 g_2 \int_{\mathbf{v}} E dv + g_1 \int_{\mathbf{v}} E z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv$$

$$+ \int_{\mathbf{v}} E z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) g_2 dv + \int_{\mathbf{v}} E z^2 \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dv.$$

$$K_{21} = K_{12}, \quad K_{31} = K_{13} \quad e \quad K_{32} = K_{23}.$$

Integrando-se as Equações (3.48) sobre o volume do elemento com a consideração da constância nas rigidezes axial e de flexão ao longo do eixo-x. A matriz de rigidez tangente tem sua forma geral dada por:

$$\mathbf{K}_t = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_0} & & \\ EA g_1 & EAl_0 \left( \frac{2}{15} g + g_1^2 \right) + \frac{4EI}{l_0} & EAl_0 \left( -\frac{1}{30} g + g_1 g_2 \right) + \frac{2EI}{l_0} \\ EA g_2 & EAl_0 \left( -\frac{1}{30} g + g_1 g_2 \right) + \frac{2EI}{l_0} & EAl_0 \left( \frac{2}{15} g + g_2^2 \right) + \frac{4EI}{l_0} \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

#### 3.4.4 Obtenção numérica do vetor de forças internas

O uso da integração numérica nas Equações (3.45) com dois pontos de Gauss fornece,

$$N = \frac{1}{2} \left[ \int_{A_1} \sigma dA_1 + \int_{A_2} \sigma dA_2 \right], \quad (3.50a)$$

$$M_1 = \frac{L}{2} g_1 \left[ \int_{A_1} \sigma dA_1 + \int_{A_2} \sigma dA_2 \right] + \frac{\sqrt{3}+1}{2} \int_{A_1} \sigma z dA_1 + \frac{1-\sqrt{3}}{2} \int_{A_2} \sigma z dA_2 \quad e \quad (3.50b)$$

$$M_2 = \frac{L}{2} g_2 \left[ \int_{A_1} \sigma dA_1 + \int_{A_2} \sigma dA_2 \right] + \frac{\sqrt{3}-1}{2} \int_{A_1} \sigma z dA_1 - \frac{\sqrt{3}+1}{2} \int_{A_2} \sigma z dA_2. \quad (3.50c)$$

Integra-se esses coeficientes ao longo da altura da seção transversal do elemento de modo a obtê-los no mesmo formato implementado (Quadro 3.3). As tensões são inicialmente calculadas considerando o material linear elástico e, caso essas violem determinadas condições de restrição, uma rotina que considera a elastoplasticidade é chamada reconduzindo-as para uma situação admissível.

$$N = 0$$

$$M_1 = 0$$

$$M_2 = 0$$

faça  $i = 1$ , número de pontos de Gauss

$$z = \frac{h}{2} \times pg(i)$$

$$\varepsilon_1 = g + \frac{z}{l} \left[ (1 + \sqrt{3}) \bar{\theta}_1 + (\sqrt{3} - 1) \bar{\theta}_2 \right]$$

$$\varepsilon_2 = g + \frac{z}{l} \left[ (1 - \sqrt{3}) \bar{\theta}_1 - (1 + \sqrt{3}) \bar{\theta}_2 \right]$$

$$\text{caso elástico: } \sigma_1 = \hat{E} \varepsilon_1$$

caso elastoplástico: chamar algoritmo “return mapping”  $\rightarrow \sigma_1$

$$\text{caso elástico: } \sigma_2 = \hat{E} \varepsilon_2$$

caso elastoplástico: chamar algoritmo “return mapping”  $\rightarrow \sigma_2$

$$N = N + \frac{1}{2} \left( \sigma_1 \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) + \sigma_2 \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) \right)$$

$$M_1 = M_1 + \frac{l}{2} \times g_1 \left( \sigma_1 \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) + \sigma_2 \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) \right) + \\ + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \left( \sigma_1 \times z \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) \right) + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \left( \sigma_2 \times z \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) \right)$$

$$M_2 = M_2 + \frac{l}{2} \times g_2 \left( \sigma_1 \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) + \sigma_2 \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) \right) + \\ + \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \left( \sigma_1 \times z \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) \right) - \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \left( \sigma_2 \times z \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) \right)$$

fim faça

Quadro 3.3: Algoritmo implementado para obtenção numérica do vetor de forças internas local – Elemento de viga Bernoulli 2.

### 3.4.5 Obtenção numérica da matriz de rigidez tangente

Integrando as Equações (3.48) com o uso de dois pontos de Gauss ao longo do eixo-x se obtêm os seguintes coeficientes de rigidez para o elemento,

$$K_{11} = \frac{\partial N}{\partial \bar{u}} = \frac{1}{2L} \left[ \int_{A_1} \hat{E} dA_1 + \int_{A_2} \hat{E} dA_2 \right], \quad (3.51a)$$

$$K_{12} = \frac{\partial N}{\partial \bar{\theta}_1} = \frac{1}{2} g_1 \left[ \int_{A_1} \hat{E} dA_1 + \int_{A_2} \hat{E} dA_2 \right] + \frac{\sqrt{3} + 1}{2L} \int_{A_1} \hat{E} z dA_1 + \frac{1 - \sqrt{3}}{2L} \int_{A_2} \hat{E} z dA_2, \quad (3.51b)$$

$$K_{13} = \frac{\partial N}{\partial \theta_2} = \frac{1}{2} g_2 \left[ \int_{A_1} \hat{E} dA_1 + \int_{A_2} \hat{E} dA_2 \right] + \frac{\sqrt{3}-1}{2L} \int_{A_1} \hat{E} z dA_1 - \frac{\sqrt{3}+1}{2L} \int_{A_2} \hat{E} z dA_2, \quad (3.51c)$$

$$K_{22} = \frac{\partial M_1}{\partial \theta_1} = \frac{1}{2} L g_1^2 \left[ \int_{A_1} \hat{E} dA_1 + \int_{A_2} \hat{E} dA_2 \right] + g_1 \left[ (\sqrt{3}+1) \int_{A_1} \hat{E} z dA_1 + (1-\sqrt{3}) \int_{A_2} \hat{E} z dA_2 \right] \quad (3.51d)$$

$$+ \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2L} \int_{A_1} \hat{E} z^2 dA_1 + \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2L} \int_{A_2} \hat{E} z^2 dA_2 + \frac{L}{15} \left[ \int_{A_1} \sigma dA_1 + \int_{A_2} \sigma dA_2 \right],$$

$$K_{33} = \frac{\partial M_2}{\partial \theta_2} = \frac{1}{2} L g_2^2 \left[ \int_{A_1} \hat{E} dA_1 + \int_{A_2} \hat{E} dA_2 \right] + g_2 \left[ (\sqrt{3}-1) \int_{A_1} \hat{E} z dA_1 - (\sqrt{3}+1) \int_{A_2} \hat{E} z dA_2 \right] \quad (3.51e)$$

$$+ \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2L} \int_{A_1} \hat{E} z^2 dA_1 + \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2L} \int_{A_2} \hat{E} z^2 dA_2 + \frac{L}{15} \left[ \int_{A_1} \sigma dA_1 + \int_{A_2} \sigma dA_2 \right],$$

$$K_{23} = \frac{\partial M_1}{\partial \theta_2} = \frac{1}{2} L g_1 g_2 \left[ \int_{A_1} \hat{E} dA_1 + \int_{A_2} \hat{E} dA_2 \right] + \left[ \frac{\sqrt{3}-1}{2} g_1 + \frac{\sqrt{3}+1}{2} g_2 \right] \int_{A_1} \hat{E} dA_1 \quad (3.51f)$$

$$- \left[ \frac{\sqrt{3}+1}{2} g_1 + \frac{\sqrt{3}-1}{2} g_2 \right] \int_{A_2} \hat{E} dA_2 + \left[ \int_{A_1} \hat{E} z^2 dA_1 + \int_{A_2} \hat{E} z^2 dA_2 \right]$$

$$+ \frac{L}{60} \left[ \int_{A_1} \sigma dA_1 + \int_{A_2} \sigma dA_2 \right].$$

$$K_{21} = K_{12} \quad , \quad K_{31} = K_{13} \quad \text{e} \quad K_{32} = K_{23} .$$

Integrando-se numericamente os coeficientes anteriores ao longo da altura da seção transversal do elemento pode-se obtê-lo no formato tal qual computacionalmente implementado. O Quadro 3.4 mostra esse algoritmo, no qual o módulo de elasticidade pode assumir dois valores distintos dependendo das tensões desenvolvidas no material estarem no regime elástico ou elastoplástico.

$$\begin{aligned}\sigma_1 \\ \sigma_2 \\ k_{11} = 0 \\ k_{12} = 0 \\ k_{13} = 0 \\ k_{22} = 0 \\ k_{23} = 0 \\ k_{33} = 0\end{aligned}$$

faça  $i=1$ , número de pontos de Gauss

$$z = \frac{h}{2} \times pg(i)$$

$$\text{caso elástico: } \hat{E}_1 = E$$

$$\text{caso elastoplástico: } \hat{E}_1 = \frac{EH}{E+H}$$

$$\text{caso elástico: } \hat{E}_2 = E$$

$$\text{caso elastoplástico: } \hat{E}_2 = \frac{EH}{E+H}$$

$$k_{11} = k_{11} + \frac{1}{2l} \left( \hat{E}_1 \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) + \hat{E}_2 \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) \right)$$

$$k_{12} = k_{12} + \frac{1}{2} g_1 \left( \hat{E}_1 \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) + \hat{E}_2 \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) \right)$$

$$k_{13} = k_{13} + \frac{1}{2} g_2 \left( \hat{E}_1 \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) + \hat{E}_2 \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) \right)$$

$$\begin{aligned}k_{22} = k_{22} + \frac{1}{2} l g_1^2 \left( \hat{E}_1 \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) + \hat{E}_2 \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) \right) + \\ + \frac{(1+\sqrt{3})^2}{2l} \left( \hat{E}_1 \times z^2 \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) \right) + \frac{(1-\sqrt{3})^2}{2l} \left( \hat{E}_2 \times z^2 \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) \right) + \\ + \frac{l}{15} \left( \sigma_1 \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) + \sigma_2 \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_{23} = k_{23} + \frac{1}{2} l g_1 g_2 \left( \hat{E}_1 \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) + \hat{E}_2 \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) \right) + \\ + \frac{1}{l} \left( \hat{E}_1 \times z^2 \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) \right) + \frac{1}{l} \left( \hat{E}_2 \times z^2 \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) \right) - \\ - \frac{l}{60} \left( \sigma_1 \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) + \sigma_2 \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_{33} = k_{33} + \left( \hat{E}_1 \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) + \hat{E}_2 \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) \right) + \\ + \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2l} \left( \hat{E}_1 \times z^2 \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) \right) + \frac{(1+\sqrt{3})^2}{2l} \left( \hat{E}_2 \times z^2 \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) \right) + \\ + \frac{l}{15} \left( \sigma_1 \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) + \sigma_2 \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) \right)\end{aligned}$$

fim faça

Quadro 3.4: Algoritmo implementado para obtenção numérica da matriz de rigidez tangente – Elemento de viga Bernoulli 2.

### 3.5 ELEMENTO DE VIGA TIMOSHENKO

#### 3.5.1 Definição

O elemento de viga Timoshenko clássico com dois nós é definido com interpolações lineares para  $u$ ,  $w$  e  $\theta$  no sistema de coordenada local. Estas são dadas por,

$$u = \frac{x}{L} \bar{u}, \quad (3.52a)$$

$$w = 0 \quad \text{e} \quad (3.52b)$$

$$\theta = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \bar{\theta}_1 + \frac{x}{L} \bar{\theta}_2. \quad (3.52c)$$

A curvatura  $k$ , a deformação por cisalhamento e a deformação  $\varepsilon$  são definidas por

$$k = \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1}{L}, \quad (3.53a)$$

$$\gamma = \frac{\partial w}{\partial x} - \theta = -\left(1 - \frac{x}{L}\right) \bar{\theta}_1 - \frac{x}{L} \bar{\theta}_2 \quad \text{e} \quad (3.53b)$$

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} - kz = \frac{\bar{u}}{L} - \frac{\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1}{L} z. \quad (3.53c)$$

#### 3.5.2 Obtenção analítica do vetor de forças internas

As forças internas locais são calculadas usando-se as seguintes hipóteses: definição de deformação linear de Timoshenko; relação constitutiva linear elástica e; o princípio dos trabalhos virtuais, que neste caso contabiliza a deformação por cisalhamento, sendo expresso como,

$$V = \int_v (\sigma \delta \varepsilon + \tau \delta \gamma) dv = N \delta \bar{u} + M_1 \delta \bar{\theta}_1 + M_2 \delta \bar{\theta}_2. \quad (3.54)$$

O cálculo de  $\delta\varepsilon$  e  $\delta\gamma$  pela diferenciação de (3.53b-c) e sua introdução na equação anterior produz,

$$V = \int_v \left\{ \frac{\sigma}{L} \left[ \delta\bar{u} - z(\delta\bar{\theta}_2 - \delta\bar{\theta}_1) \right] - \tau \left[ \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \delta\bar{\theta}_1 + \frac{x}{L} \delta\bar{\theta}_2 \right] \right\} dv. \quad (3.55)$$

As forças internas locais são calculadas de (3.54) e (3.55) fazendo  $x = \frac{L}{2}$  para evitar travamento por cisalhamento (*shear locking*), obtendo-se dessa forma,

$$N = \int_v \frac{\sigma}{L} dv, \quad (3.56a)$$

$$M_1 = \int_v \left( \frac{\sigma}{L} z - \frac{\tau}{2} \right) dv \text{ e} \quad (3.56b)$$

$$M_2 = \int_v \left( -\frac{\sigma}{L} z - \frac{\tau}{2} \right) dv. \quad (3.56c)$$

O vetor de forças internas é dado de uma maneira mais simples integrando os coeficientes anteriores sobre o volume do elemento e considerando rigidez axial e a flexão constantes ao longo do eixo-x.

$$\mathbf{f}_i = \begin{Bmatrix} N \\ M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{EA}{l_0} \bar{u} \\ \frac{EI}{l_0} (\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2) + \frac{1}{4} GA l_0 (\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2) \\ \frac{EI}{l_0} (\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1) + \frac{1}{4} GA l_0 (\bar{\theta}_2 + \bar{\theta}_1) \end{Bmatrix}. \quad (3.57)$$

### 3.5.3 Obtenção analítica da matriz de rigidez tangente

As mesmas hipóteses adotadas na aquisição do vetor de forças internas são tomadas. Com a diferenciação das Equações (3.56) se obtêm os coeficientes da matriz de rigidez tangente local, os quais são dados por,

$$K_{11} = \frac{\partial N}{\partial \bar{u}} = \frac{1}{L^2} \int_v E dv, \quad (3.58a)$$

$$K_{22} = \frac{\partial M_1}{\partial \theta_1} = \frac{1}{L^2} \int_v E z^2 dv + \frac{1}{2} \int_v G \left(1 - \frac{x}{L}\right) dv, \quad (3.58b)$$

$$K_{33} = \frac{\partial M_2}{\partial \theta_2} = \frac{1}{L^2} \int_v E z^2 dv + \frac{1}{2L} \int_v G x dv, \quad (3.58c)$$

$$K_{12} = \frac{\partial N}{\partial \theta_1} = \frac{1}{L^2} E \int_v z dv, \quad (3.58d)$$

$$K_{13} = \frac{\partial N}{\partial \theta_2} = -\frac{1}{L^2} \int_v E z dv \quad e \quad (3.58e)$$

$$K_{23} = -\frac{1}{L^2} \int_v E z^2 dv + \frac{1}{2} \int_v G \left(1 - \frac{x}{L}\right) dv. \quad (3.58f)$$

$$K_{21} = K_{12}, \quad K_{31} = K_{13} \quad e \quad K_{32} = K_{23}.$$

Integrando as Equações (3.58) sobre o volume do elemento com a consideração da constância nas rigidezes axial e de flexão ao longo do eixo-x, são fornecidos coeficientes mais simples para a matriz de rigidez tangente, a qual tem sua forma geral dada por:

$$K_t = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI}{l_0} + \frac{1}{4} GAl_0 & -\frac{EI}{l_0} + \frac{1}{4} GAl_0 \\ 0 & -\frac{EI}{l_0} + \frac{1}{4} GAl_0 & \frac{EI}{l_0} + \frac{1}{4} GAl_0 \end{bmatrix}. \quad (3.59)$$

### 3.5.4 Obtenção numérica do vetor de forças internas

O uso da integração numérica nas Equações (3.56) com um pontos de Gauss ao longo do eixo-x fornece,

$$N = \int_A \sigma dA, \quad (3.60a)$$

$$M_1 = \int_A \sigma z dA - \frac{L}{2} \int_A \tau dA \quad e \quad (3.60b)$$

$$M_2 = -\int_A \sigma z dA - \frac{L}{2} \int_A \tau dA. \quad (3.60c)$$

Faz-se uma nova integração ao longo da altura da seção transversal do elemento determinando-se os coeficientes de esforços internos no mesmo formato que foi implementado - Quadro 3.5. Para a integração no regime elastoplástico, um algoritmo que integra as tensões sobre um estado plano é requerido. Entretanto esse não foi contemplado neste trabalho.

<pre> N = 0 M<sub>1</sub> = 0 M<sub>2</sub> = 0  faça i = 1, número de pontos de Gauss z = <math>\frac{h}{2} \times pg(i)</math> <math>\varepsilon = \frac{\bar{u}}{l} - \frac{(\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1)}{l}</math> <math>\gamma = -\frac{1}{2}(\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2)</math> caso elástico: <math>\sigma = E\varepsilon</math>; <math>\tau = G\gamma</math> caso elastoplástico: chamar algoritmo "radial return" → (<math>\sigma, \tau</math>) N = N + <math>\sigma \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i)</math> M<sub>1</sub> = M<sub>1</sub> + <math>\sigma \times z \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) + \frac{l}{2} \times \tau \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i)</math> M<sub>2</sub> = M<sub>2</sub> - <math>\sigma \times z \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i) - \frac{l}{2} \times \tau \times b \times \frac{h}{2} \times wg(i)</math> fim faça </pre>
---

Quadro 3.5: Algoritmo implementado para obtenção numérica do vetor de forças internas local – Elemento de viga Timoshenko.

### 3.5.5 Obtenção numérica da matriz de rigidez tangente

Integrando as Equações (3.58) com o uso de um ponto de Gauss ao longo do eixo-x se obtêm os seguintes coeficientes de rigidez para o elemento,

$$K_{11} = \frac{\partial N}{\partial \bar{u}} = \frac{1}{L} \int_A E dA \quad (3.61a)$$

$$K_{22} = \frac{1}{L} \int_A E z^2 dA + \frac{L}{4} \int_A G dA \quad (3.61b)$$

$$K_{33} = \frac{1}{L} \int_A E z^2 dA + \frac{L}{4} \int_A G dA \quad (3.61c)$$

$$K_{12} = 0 \quad (3.61d)$$

$$K_{13} = 0 \quad (3.61e)$$

$$K_{23} = -\frac{1}{L} \int_A E z^2 dA + \frac{L}{4} \int_A G dA \quad (3.61f)$$

Integrando numericamente os coeficientes anteriores ao longo da altura da seção transversal do elemento pode-se obtê-los tal qual programado (Quadro 3.6).

```

k11 = 0
k22 = 0
k23 = 0
k33 = 0

faça i = 1, número de pontos de Gauss
y = h/2 × pg(i)
k11 = k11 + 1/l × E × b × h/2 × wg(i)
k22 = k22 + 1/l × E × z2 × b × h/2 × wg(i) + l/4 × G × b × h/2 × wg(i)
k23 = k23 - 1/l × E × z2 × b × h/2 × wg(i) + l/4 × G × b × h/2 × wg(i)
k33 = k33 + 1/l × E × z2 × b × h/2 × wg(i) + l/4 × G × b × h/2 × wg(i)
fim faça

```

Quadro 3.6: Algoritmo implementado para obtenção numérica da matriz de rigidez tangente – Elemento de viga Timoshenko.

## Capítulo 4

### MODELOS DE ELASTOPLASTICIDADE UNIDIMENSIONAL

Neste capítulo apresentam-se sumariamente as leis, as equações e os algoritmos que governam o fenômeno da plasticidade em nível unidimensional. Esta recapitulação é integralmente obtida de Simo e Hughes (1998). O critério de ruptura de material adotado é o de von Mises e a lei de encruamento do material, após alcançado o seu limite elástico, é o isotrópico.

#### 4.1 MODELOS FRICIONAIS UNIDIMENSIONAIS

Para se estudar o fenômeno da plasticidade geralmente se idealiza o mesmo através de modelos simples compostos de dispositivos com respostas conhecidas que tentam representar o que ocorre fisicamente na realidade. Com este intuito, examina-se inicialmente a resposta mecânica do dispositivo friccional unidimensional mostrado na Figura 4.1.

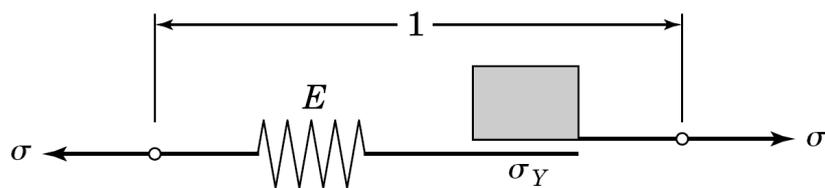


Figura 4.1: Dispositivo unidimensional ilustrando o comportamento elastoplástico ideal.

Fonte: Simo e Hughes (1998).

Assume-se que o dispositivo possui comprimento e área unitária, composto de uma mola com constante arbitrária  $E$  e de uma interface com atrito  $\sigma_y > 0$ .

### 4.1.1 Equações governantes locais

Fornecendo-se uma tensão  $\sigma$  ao dispositivo pode-se observar no mesmo que a deformação total  $\varepsilon$  é a soma de uma parte elástica  $\varepsilon^e$  sobre a mola com parcela plástica  $\varepsilon^p$  sobre a interface com atrito,

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p. \quad (4.1)$$

A tensão sobre a mola é então dada por

$$\sigma = E\varepsilon^e \equiv E(\varepsilon - \varepsilon^p). \quad (4.2)$$

#### 4.1.1.1 Resposta friccional irreversível

Assume-se que  $\varepsilon^e$ ,  $\varepsilon^p$  e  $\sigma$  são funções do tempo no intervalo  $[0, T] \subset \mathbb{R}$ . Assim,

$$\varepsilon^p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \text{ e} \quad (4.3)$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{\partial \varepsilon^p}{\partial t}$$

Mudança na configuração do dispositivo friccional só é possível se  $\dot{\varepsilon}^p \neq 0$ . Para caracterizar esta mudança, isola-se o dispositivo friccional (Figura 4.2).

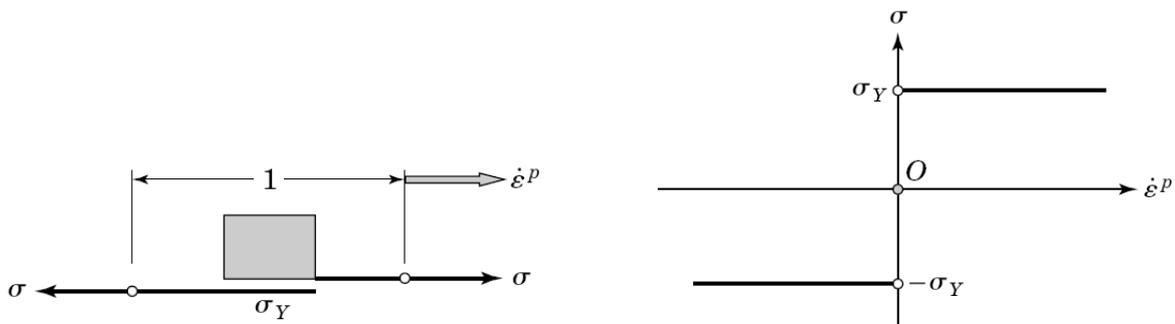


Figura 4.2: Caracterização da resposta do dispositivo com  $\sigma_y > 0$ . Fonte: Simo e Hughes (1998).

Fazem-se então as seguintes hipóteses físicas:

1. A tensão na interface de atrito não pode ser maior em valor absoluto que  $\sigma_y > 0$ .

Isto significa que a tensão admissível é forçada a situar-se no intervalo fechado  $[-\sigma_y, \sigma_y] \subset \mathbb{R}$ . Denomina-se  $\sigma_y$  como a tensão de escoamento no dispositivo friccional.

Define-se o espaço de tensões admissíveis por,

$$\mathbb{S}_\sigma = \{ \tau \in \mathbb{R} / f_y(\tau) = |\tau| - \sigma_y \leq 0 \} \quad (4.4)$$

e a função condição de escoamento  $f_y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como sendo,

$$f_y(\tau) = |\tau| - \sigma_y. \quad (4.5)$$

2. Se o valor absoluto da tensão aplicada  $\sigma$  é menor que a tensão de escoamento  $\sigma_y$ , não acontece mudança na deformação plástica  $\varepsilon^p$  ( $\dot{\varepsilon}^p = 0$ ). Esta condição implica

$$\dot{\varepsilon}^p = 0 \text{ se } f_y(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y < 0. \quad (4.6)$$

De (4.2) e (4.6) segue que,

$$f_y(\sigma) < 0 \Rightarrow \dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}, \quad (4.7)$$

e o dispositivo apresenta uma resposta instantânea elástica. Isto motiva a denominação de intervalo elástico dado pelo espaço aberto

$$\text{int}(\mathbb{S}_\sigma) = \{ \tau \in \mathbb{R} / f_y(\tau) = |\tau| - \sigma_y < 0 \}. \quad (4.8)$$

3. Devido a hipótese 1, estados de tensão tais que

$$f_y(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y > 0$$

são inadmissíveis e  $\dot{\varepsilon}^p = 0$  para  $f_y(\sigma) < 0$  pela hipótese 2. Assim, uma mudança em  $\varepsilon^p$  pode acontecer apenas se

$$f_y(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y = 0 \quad (4.9)$$

e dessa maneira a superfície de atrito experimenta escoamento na direção da tensão aplicada  $\sigma$  com taxa de escoamento constante. Assumindo-se  $\varphi \geq 0$  como sendo o valor absoluto dessa taxa, as hipóteses físicas precedentes tomam a forma

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}^p &= \varphi \geq 0 \text{ se } \sigma = \sigma_y > 0 \text{ e} \\ \dot{\varepsilon}^p &= -\varphi \leq 0 \text{ se } \sigma = -\sigma_y < 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Se  $\varphi \geq 0$  é positiva ( $\varphi > 0$  ou  $\varphi = 0$ ), depende de futuras condições envolvendo a taxa de deformação aplicada  $\dot{\varepsilon}$  as quais estão discutidas a seguir e são referenciadas como condições de carregamento/descarregamento. Nota-se que (4.10) pode ser reformulada numa só equação denominada de regra de fluxo,

$$\dot{\varepsilon}^p = \varphi \text{sign}(\sigma) \text{ se } f_y(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y = 0, \quad (4.11)$$

onde  $\varphi \geq 0$ . O contorno  $\partial\mathbb{S}_\sigma$  do espaço convexo  $\mathbb{S}_\sigma$  definido por

$$\partial\mathbb{S}_\sigma = \{\tau \in \mathbb{R} / f_y(\tau) = |\tau| - \sigma_y = 0\} \quad (4.12)$$

é chamado de superfície de escoamento. No presente modelo unidimensional,  $\partial\mathbb{S}_\sigma = \{-\sigma_y, \sigma_y\}$  reduz-se a dois pontos. Nota-se que

$$\mathbb{S}_\sigma = \text{int}(\mathbb{S}_\sigma) \cup \partial\mathbb{S}_\sigma, \quad (4.13)$$

em que  $\mathbb{S}_\sigma$  é o encerrado no intervalo elástico  $\text{int}(\mathbb{S}_\sigma)$ . Para a descrição completa do modelo resta apenas determinar a taxa de escoamento  $\varphi \geq 0$ . Isto envolve as condições essenciais que inclui a noção de irreversibilidade inerente a resposta do modelo na Figura 4.1.

#### 4.1.1.2 Condições de carregamento/descargamento

A avaliação de  $\dot{\varepsilon}^p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  pode ser completamente descrita, para algum estado de tensão admissível  $\sigma \in \mathbb{S}_\sigma$ , com a equação de evolução simples

$$\dot{\varepsilon}^p = \varphi \text{sign}(\sigma) \quad (4.14)$$

desde que  $\varphi$  e  $\sigma$  estejam limitadas por restrições unilaterais:

i) A tensão  $\sigma$  deve ser admissível, isto é,  $\sigma \in \mathbb{S}_\sigma$  pela hipótese 1, e deve ser não negativa pela hipótese 3. Consequentemente,

$$\varphi \geq 0,$$

e

$$(4.15a)$$

$$f_y(\sigma) \leq 0.$$

ii) Pela hipótese 2,  $\varphi = 0$  se  $f_y(\sigma) < 0$ . Por outro lado, pela hipótese 3,  $\dot{\varepsilon}^p \neq 0$ , e assim,

$\varphi > 0$  apenas se  $f_y(\sigma) = 0$ . Estas observações implicam nas condições:

$$\left. \begin{array}{l} f(\sigma) < 0 \Rightarrow \varphi = 0 \\ \varphi > 0 \Rightarrow f_y(\sigma) = 0 \end{array} \right\}.$$

Em seguida se requer que

$$\varphi f_y(\sigma) = 0. \quad (4.15b)$$

Essas condições (4.15) são conhecidas na literatura como condições Kuhn-Tucker e expressam os requerimentos físicos de que a tensão deve ser admissível e que a taxa de deformação plástica sendo diferente de zero  $\dot{\varepsilon}^p \neq 0$  pode acontecer apenas sobre a superfície de escoamento  $\partial\mathbb{S}_\sigma$ .

Descrevendo-se a última condição, possibilita-se determinar o valor atual de  $\varphi \geq 0$  em algum tempo dado  $t \in [0, T]$  o que é referida como requerimento de consistência.

iii) Sendo  $\{\varepsilon(t), \varepsilon^p(t)\}$  dadas em um tempo  $t \in [0, T]$ ,  $\sigma(t)$  também é conhecida em um tempo  $t$  pela relação elástica (4.2), isto é,  $\sigma(t) = E[\varepsilon(t) - \varepsilon^p(t)]$ . Assume que se fixa de antemão a taxa de deformação total  $\dot{\varepsilon}(t)$  no tempo  $t$ . Em seguida considera-se o caso onde

$$\sigma(t) \in \partial\mathbb{S}_\sigma \Leftrightarrow \hat{f}_y(t) := f_y[\sigma(t)] = 0.$$

no tempo  $t$ . É facilmente mostrado que  $\hat{f}_y(t) \leq 0$ , uma vez que se  $\hat{f}_y(t)$  pudesse ser positiva, implicaria que  $\hat{f}_y(t + \Delta t) > 0$  para algum  $\Delta t > 0$ , o que violaria a lei do escoamento. Adicionalmente, especifica-se que  $\varphi > 0$  apenas se  $\hat{f}_y(t) = 0$ , e se estabelece que  $\varphi = 0$  se  $\hat{f}_y(t) < 0$  de modo que, retirando o chapéu para simplificar a notação, fixa-

se

$$\varphi > 0 \Rightarrow \dot{f}_y = 0,$$

$$\dot{f}_y < 0 \Rightarrow \varphi = 0.$$

Assim, tem-se a condição adicional

$$\varphi \dot{f}_y(\sigma) = 0, \quad (4.15c)$$

que é alternativamente referenciada como condição de persistência e corresponde ao requerimento físico que para que  $\dot{\varepsilon}^p$  seja diferente de zero (isto é,  $\varphi > 0$ ) a tensão pontual  $\sigma \in \partial\mathbb{S}_\sigma$  deve “persistir” sobre  $\partial\mathbb{S}_\sigma$  de modo que  $\dot{f}_y[\sigma(t)] = 0$ .

#### 4.1.1.3 Escoamento friccional (fluxo plástico)

Para o modelo em estudo, a expressão para  $\varphi > 0$  quando a condição de consistência (4.15.c) se mantém, toma uma forma particularmente simples. Pela regra da cadeia e as condições (4.2) e (4.14),

$$\begin{aligned} \dot{f}_y &= \frac{\partial f_y}{\partial \sigma} E (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) \quad \text{ou} \\ \dot{f}_y &= \frac{\partial f_y}{\partial \sigma} E \dot{\varepsilon} - \varphi \frac{\partial f_y}{\partial \sigma} E \text{sign}(\sigma). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Todavia,

$$\frac{\partial |\sigma|}{\partial \sigma} = \text{sign}|\sigma| \Rightarrow \frac{\partial f_y}{\partial \sigma} = \text{sign}(\sigma). \quad (4.17)$$

Consequentemente, sendo  $[\text{sign}(\sigma)]^2 = 1$ , (4.16) e (4.17) implica

$$\dot{f}_y = 0 \Rightarrow \varphi = \dot{\varepsilon} \text{sign}(\sigma). \quad (4.18)$$

Substituindo (4.18) em (4.14) se produz como resultado

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\varepsilon} \quad \text{para} \quad f_y(\sigma) = 0, \quad \dot{f}_y(\sigma) = 0, \quad (4.19)$$

descrevendo que o escoamento “plástico” no dispositivo friccional se iguala a taxa de deformação aplicada. A resposta do dispositivo mostrado na Figura 4.1 é ilustrada na Figura 4.3. A teoria representada até então é chamada plasticidade perfeita e se encontra resumida no Quadro 4.1.

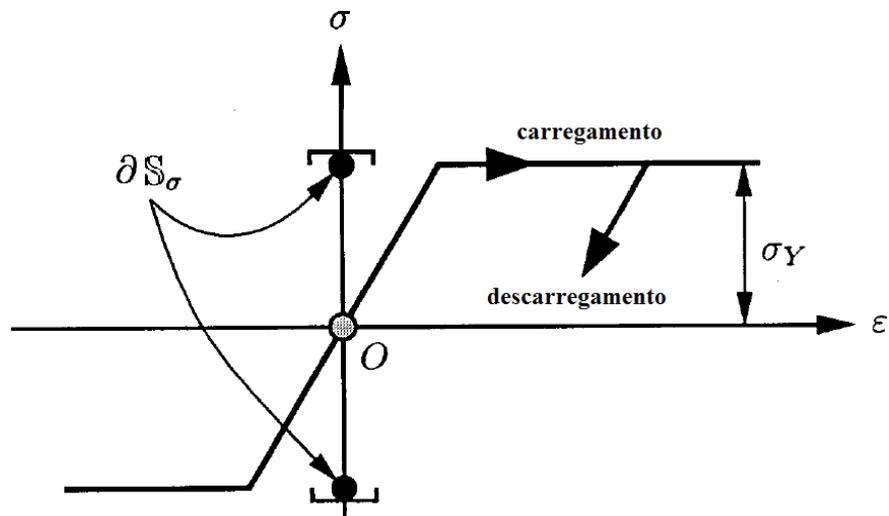


Figura 4.3: Representação esquemática da resposta mecânica de um modelo elasto-plástico perfeito friccional unidimensional. Fonte: Simo e Hughes (1998)

i) Relação tensão-deformação elástica

$$\sigma = E\varepsilon^e \equiv E(\varepsilon - \varepsilon^p)$$

ii) Regra de fluxo

$$\dot{\varepsilon}^p = \varphi \text{sign}(\sigma)$$

iii) Condição de escoamento

$$f_y(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y < 0$$

iv) Condições de complementariedade de Kuhn-Tucker

$$\varphi \geq 0, f_y(\sigma) \leq 0, \varphi f_y(\sigma) = 0$$

v) Condições de consistência

$$\varphi \dot{f}_y(\sigma) = 0 \quad (\text{Se } \dot{f}_y(\sigma) = 0)$$

Quadro 4.1: Plasticidade perfeita unidimensional.

### 4.1.2 Plasticidade com encruamento isotrópico

Ilustra-se na Figura 4.4 um efeito observado experimentalmente em muitos metais, chamado encruamento. Devido à ocorrência deste fenômeno há uma expansão de  $\mathbb{S}_\sigma$  com o aumento do escoamento no sistema (isto é, aumento do fluxo plástico). Um modelo matemático que captura este efeito é considerado em seguida.

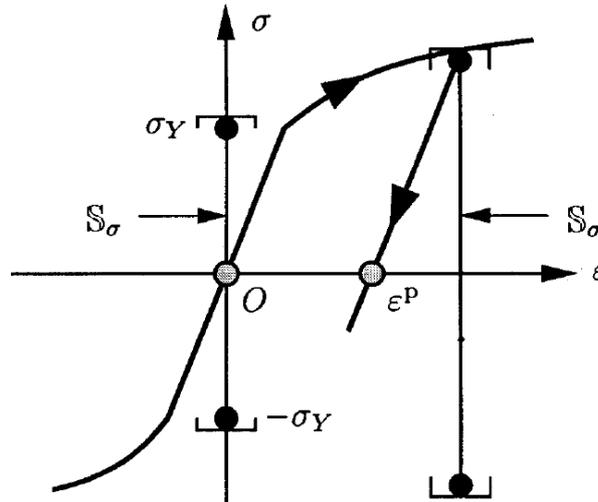


Figura 4.4: Plasticidade com encruamento. Fonte: Simo e Hughes (1998), adaptado.

#### 4.1.2.1 Modelo matemático mais simples

As hipóteses básicas relativas à resposta elástica do modelo com encruamento permanecem inalteradas. A expansão (encruamento) experimentalada por  $\mathbb{S}_\sigma$  (conforme mostrada na Figura 4.5) é assumida como obedecendo a duas condições: o encruamento é isotrópico no sentido de que para algum estado de carregamento, o centro de  $\mathbb{S}_\sigma$  permanece na origem; o encruamento é linear no ramo do fluxo plástico (isto é, linear em  $|\dot{\epsilon}^p|$ ) e independe de  $\text{sign}(\dot{\epsilon}^p)$ . A primeira condição leva a um critério de escoamento na forma

$$f_y(\sigma, \mu) = |\sigma| - [\sigma_y + H\mu] \leq 0, \quad \mu \geq 0, \quad (4.20)$$

onde:  $\sigma_y > 0$  e  $H \geq 0$  são constantes dadas;

$H$  é denominado de módulo plástico;

$\mu: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função não negativa do ramo do fluxo plástico (escoamento) chamada de variável de encruamento.

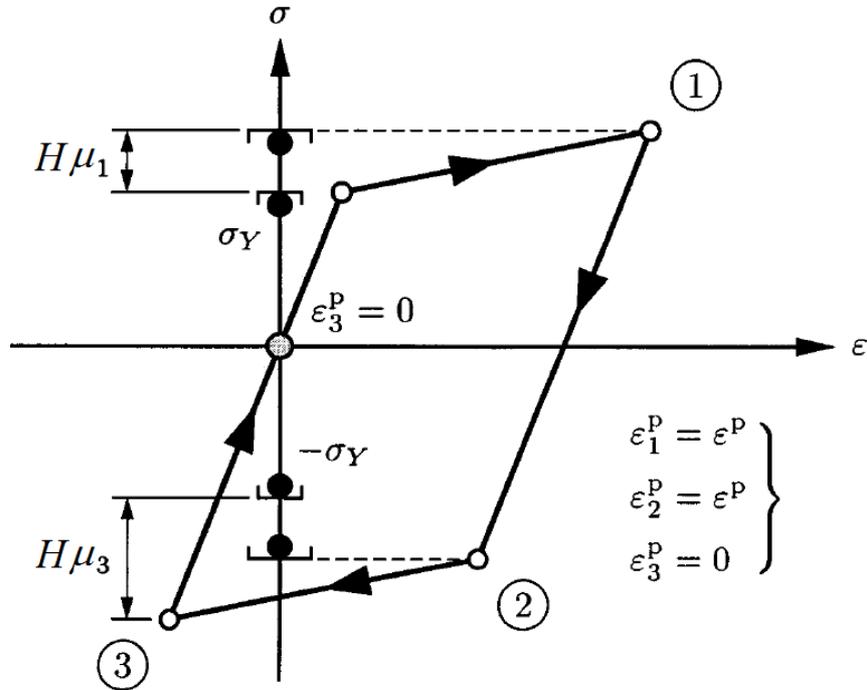


Figura 4.5: Resposta do modelo linear com encruamento isotrópico em um ciclo fechado. Embora a deformação plástica total no final do ciclo  $\epsilon_3^p = 0$ , o valor da variável de encruamento  $\mu_3 = 2\mu_1$ . Fonte: Simo e Hughes (1998), adaptado.

Com a condição ii) em mente, considera-se a equação de evolução mais simples para  $\mu$ ,

$$\dot{\mu} = |\dot{\epsilon}^p| \quad (4.21)$$

O mecanismo irreversível que governa a evolução do escorregamento no sistema (fluxo plástico), o qual é definido pela regra de fluxo, permanece inalterada. Consequentemente, assume-se que,

$$\dot{\epsilon}^p = \phi \text{sign}(\sigma) \quad (4.22)$$

O mecanismo irreversível do fluxo plástico é novamente capturado por meio das condições carga/descarga de Kuhn-Tucker, as quais no presente contexto compreendem,

$$\varphi \geq 0, f_y(\sigma, \mu) \leq 0 \text{ e } \varphi f_y(\sigma, \mu) = 0, \quad (4.23)$$

onde  $\varphi \geq 0$  é determinada pela condição de consistência

$$\varphi \dot{f}_y(\sigma, \mu) = 0. \quad (4.24)$$

Um resumo da teoria da plasticidade com encruamento isotrópico é mostrado no Quadro 4.2.

<p>i) Relação tensão-deformação elástica</p> $\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p)$
<p>ii) Regra de fluxo e lei de encruamento isotrópico</p> $\dot{\varepsilon}^p = \varphi \text{sign}(\sigma)$ $\dot{\mu} = \varphi$
<p>iii) Condição de escoamento</p> $f_y(\sigma, \mu) =  \sigma  - [\sigma_y + H\mu] \leq 0$
<p>iv) Condições de complementariedade de Kuhn-Tucker</p> $\varphi \geq 0, f_y(\sigma, \mu) \leq 0, \varphi f_y(\sigma, \mu) = 0$
<p>v) Condições de consistência</p> $\varphi \dot{f}_y(\sigma, \mu) = 0 \quad (\text{Se } f_y(\sigma, \mu) = 0)$

Quadro 4.2: Plasticidade unidimensional com encruamento isotrópico.

#### 4.1.2.2 Módulo tangente elastoplástico

A condição de consistência (4.24) permite que se resolva explicitamente  $\varphi$  e se relacione as taxas de tensão com as de deformação. De (4.20), (4.21) e (4.22), juntamente com a relação tensão-deformação elástica,

$$\begin{aligned} \dot{f}_y &= \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} - \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\mu} \quad \text{ou} \\ \dot{f}_y &= \text{sign}(\sigma) E (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) - H \dot{\mu} \quad \text{ou} \\ \dot{f}_y &= \text{sign}(\sigma) E \dot{\varepsilon} - \varphi [E + H] \leq 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Observe mais uma vez que a relação  $\dot{f}_y > 0$  não pode manter-se. De (4.22) e (4.24) segue que  $\varphi$  pode ser diferente de zero apenas se

$$f_y = \dot{f}_y = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\text{sign}(\sigma) E \dot{\varepsilon}}{E + H}. \quad (4.26)$$

Então a forma do intervalo da relação elástica (4.19) juntamente com (4.26) produz,

$$\sigma = \begin{cases} E \dot{\varepsilon} & \text{se } \varphi = 0 \\ \frac{EH}{E + H} \dot{\varepsilon} & \text{se } \varphi > 0 \end{cases} \quad (4.27)$$

onde a quantidade  $EH/E + H$  é chamada módulo tangente elastoplástico (Figura 4.6).

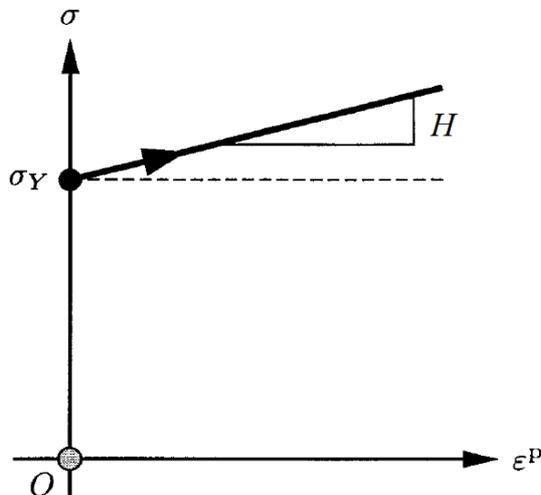


Figura 4.6: Módulo plástico. Fonte: Simo e Hughes (1998).

### 4.1.3 Forma alternativa das condições de carregamento/descarregamento.

As restrições unilaterais de Kuhn-Tucker fornecem a formulação apropriada das condições de carregamento/descarregamento para a plasticidade clássica. Para motivar a implementação algorítmica subsequente, descreve-se um procedimento passo a passo no formato do algoritmo de plasticidade.

Dado  $(\sigma, \mu) \in \mathbb{S}$  e uma taxa de deformação pré-estabelecida  $\dot{\varepsilon}$ ,

a) calcula-se  $\dot{\sigma}^{teste} = E\dot{\varepsilon}$  e  $\dot{\mu}^{teste} = 0$ ;

b) se  $f_y(\sigma, \mu) < 0$  ou  $f_y(\sigma, \mu) = 0$  e  $[\partial f_y / \partial \sigma(\sigma, \mu)] \dot{\sigma}^{teste} \leq 0$ , então

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma}^{teste} \text{ e } \dot{\mu} = \dot{\mu}^{teste} = 0 \quad (\text{processo elástico instantâneo) e,}$$

c) se  $f_y(\sigma, \mu) = 0$  e  $[\partial f_y / \partial \sigma(\sigma, \mu)] \dot{\sigma}^{teste} > 0$ , então

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma}^{teste} - \varphi E \partial f_y(\sigma, \mu) / \partial \sigma \text{ e } \dot{\mu} = \varphi,$$

$$\text{onde } \varphi = \frac{[\partial f_y / \partial \sigma] \dot{\sigma}^{teste}}{E + H} > 0 \quad (\text{Processo plástico instantâneo}).$$

## 4.2 ALGORITMOS DE INTEGRAÇÃO PARA A PLASTICIDADE

O processo de integração do modelo elastoplástico se dá no espaço local acontecendo, portanto, em pontos específicos do corpo. Estes pontos correspondem tipicamente a pontos de quadratura de um elemento finito. Um fluxograma básico das variáveis envolvidas no problema pode ser observado na Figura 4.7.

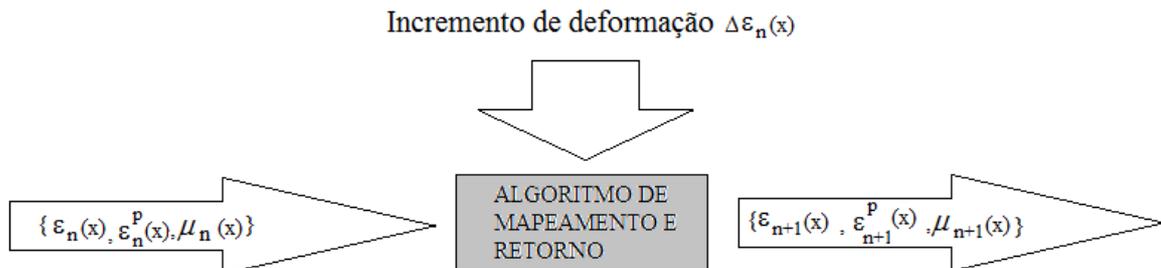


Figura 4.7: Regra do algoritmo de mapeamento e retorno.

## 4.2.1 A forma incremental da plasticidade

### 4.2.1.1 A regra do ponto médio generalizada

Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, e considere o problema do valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) \\ x(0) &= x_n \end{aligned} \quad \text{em } [0, T] \quad (4.28)$$

Interessa-se na seguinte classe de parâmetros de algoritmos de integração, chamada de regra do ponto médio generalizada,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \Delta t f(x_{n+v}) \\ x_{n+v} &= vx_{n+1} + (1-v)x_n \end{aligned}, \quad v \in [0, 1] \quad (4.29)$$

onde  $x_{n+1} \cong x(t_{n+1})$  denota a aproximação algorítmica para o valor exato  $x(t_{n+1})$  em um tempo  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ . Nota-se que esta família de algoritmos contém esquemas integrativos bem conhecidos, em particular

- $v = 0 \Rightarrow$  *forward Euler* (explícito);
  - $v = 1/2 \Rightarrow$  Regra do ponto médio e
  - $v = 1 \Rightarrow$  *backward Euler* (implícito)
- (4.30)

Objetiva-se ilustrar a aplicação da classe de algoritmo (4.29) para o problema de integração de valor inicial elastoplástico. É válido pontuar a diferença fundamental entre (4.28) e o modelo no Quadro 4.2. Em (4.28), a curva  $t \in \mathbb{R} \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$  o “fluxo” é livre, enquanto que no modelo do Quadro 4.2, a curva

$$t \in \mathbb{R} \mapsto (\sigma(t), \mu(t)) \in \mathbb{S}_\sigma \quad (4.31)$$

é forçada a encontrar-se dentro de um domínio elástico  $\mathbb{S}_\sigma$ . Assim, fala-se em problema de evolução com restrição. Note que pelo uso da relação tensão-deformação pode-se equivalentemente considerar a curva

$$t \in \mathbb{R} \mapsto (\varepsilon(t), \varepsilon^p(t), \mu(t)) \in \mathbb{S}_\varepsilon, \quad (4.32)$$

onde  $\mathbb{S}_\varepsilon$  é o limite do domínio elástico no espaço de deformação, definido como

$$\mathbb{S}_\varepsilon = \left\{ (\varepsilon, \varepsilon^p, \mu) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ / f_y(E(\varepsilon - \varepsilon^p), \mu) \leq 0 \right\}. \quad (4.33)$$

A presença da condição de restrição é, precisamente, o recurso essencial que caracteriza a plasticidade.

#### 4.2.1.2 Problema do valor inicial elastoplástico. Encruamento isotrópico.

Analisa-se o caso mais simples para o qual  $\nu = 1$  em (4.29). Esta escolha corresponde ao método *backward-Euler* e leva ao algoritmo de mapeamento e retorno clássico. Do Quadro 4.2, pela aplicação de (4.29) com  $\nu = 1$ , obtêm-se

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\varphi \text{sign}(\sigma_{n+1}) \quad \text{e} \quad (4.34a)$$

$$\mu_{n+1} = \mu_n + \Delta\varphi,$$

onde  $\Delta\varphi = \varphi_{n+1}\Delta t \geq 0$  é o multiplicador de Lagrange (a contrapartida algorítmica do parâmetro de consistência  $\varphi \geq 0$ ) e

$$\sigma_{n+1} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) \quad \text{e}$$

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon_n \quad (4.34b)$$

As variáveis  $(\sigma_{n+1}, \mu_{n+1})$ , juntamente com  $\Delta\varphi$  são restringida pelas seguintes versões *discretas* de Kuhn-Tucker:

$$\begin{aligned}
f_{y(n+1)} &= |\sigma_{n+1}| - (\sigma_y + H\mu_{n+1}) \leq 0, \\
\Delta\varphi &\geq 0 \quad \text{e} \\
\Delta\varphi f_{y(n+1)} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Observa-se que  $\Delta\varepsilon_n$  é dado e, portanto, a equação (4.34b) é considerada uma mera definição para  $\varepsilon_{n+1}$ . Além disso, nota-se que pela aplicação do algoritmo *Euler-backward* implícito, transforma-se o problema de restrição inicial da evolução em um problema restrito algébrico discreto pelas variáveis  $\{\varepsilon_{n+1}^p, \mu_{n+1}\}$ . Foca-se a atenção na solução do problema (4.34)-(4.35).

## 4.2.2 Algoritmos de mapeamento e retorno. Encruamento isotrópico.

### 4.2.2.1 O estado elástico teste

Considera-se inicialmente um estado auxiliar que não precisa corresponder a um estado real. Ele é obtido pelo congelamento do fluxo plástico. Em outras palavras, primeiro considera-se um passo puramente elástico (teste) definido pelas fórmulas,

$$\begin{aligned}
\sigma_{n+1}^{teste} &= E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) \equiv \sigma_n + E\Delta\varepsilon_n, \\
\varepsilon_{n+1}^{p \text{ teste}} &= \varepsilon_n^p, \\
\mu_{n+1}^{teste} &= \mu_n \quad \text{e} \\
f_{y(n+1)}^{teste} &= |\sigma_{n+1}^{teste}| - [\sigma_y + H\mu_n]
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Observa-se que o estado teste é determinado apenas em termos das condições iniciais  $\{\varepsilon_n, \varepsilon_n^p, \mu_n\}$  e da deformação incremental fornecida  $\Delta\varepsilon_n$ .

#### 4.2.2.2 Forma algóritmica das condições de carregamento

Uma vez que o estado teste é calculado por (4.36), primeiro considera-se o caso para o qual

$$f_{y(n+1)}^{teste} \leq 0. \quad (4.37)$$

Segue que o *estado teste* é admissível no sentido que

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1}^p &= \varepsilon_n^p, \\ \mu_{n+1} &= \mu_n \quad \text{e} \\ \sigma_{n+1} &= \sigma_{n+1}^{teste}, \end{aligned} \quad (4.38a)$$

satisfaz:

1. a relação tensão-deformação;
2. a regra de fluxo e a lei de encruamento com  $\Delta\varphi \equiv 0$ , e
3. as condições de Kuhn-Trucker, a partir das condições

$$f_{y(n+1)} = f_{y(n+1)}^{teste} \leq 0 \quad \text{e} \quad \Delta\varphi \equiv 0 \quad (4.38b)$$

estão consistentes com (4.35). Uma ilustração desta situação é dada na Figura 4.8.

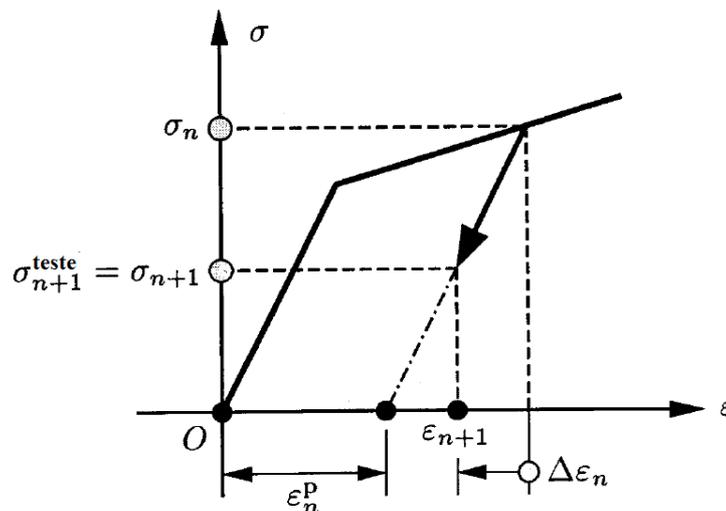


Figura 4.8: Passo elástico incremental de um estado plástico. Fonte: Simo e Hughes (1998).

Em seguida, considera-se o caso para o qual  $f_{y(n+1)}^{teste} > 0$ . Claramente, o estado teste não pode ser uma solução para o problema incremental uma vez que  $(\sigma_{n+1}^{teste}, \mu_n)$  viola a condição de consistência  $f_y(\sigma, \mu) \leq 0$ . Assim, se requer que  $\Delta\varphi > 0$  de modo que  $\varepsilon_{n+1}^p \neq \varepsilon_n^p$  para obter  $\sigma_{n+1} \neq \sigma_{n+1}^{teste}$ . Pelas condições de Kuhn-Tucker,

$$\Delta\varphi > 0$$

e

$$(4.39)$$

$$\Delta\varphi f_{y(n+1)} = 0 \Rightarrow f_{y(n+1)} = 0,$$

e o processo é incrementalmente plástico (Ver Figura 4.9).

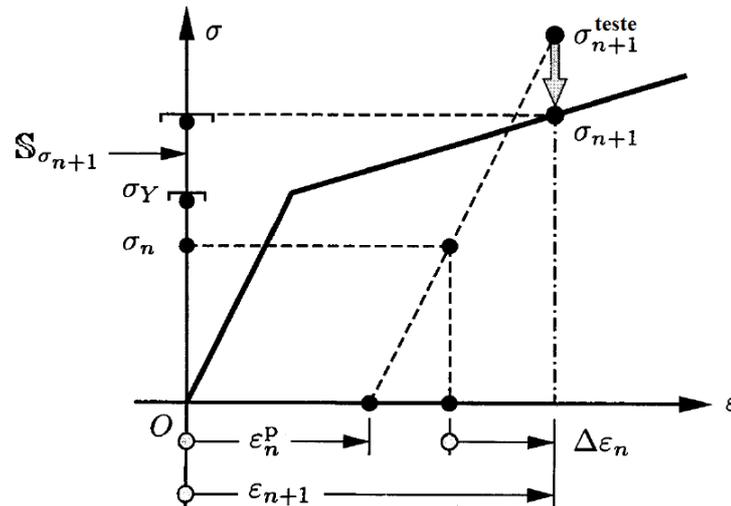


Figura 4.9: O estado teste viola a condição de consistência  $f_y \leq 0$ . Conseqüentemente, o processo incremental deve ser plástico uma vez que  $\Delta\varphi > 0$  para alcançar  $\sigma_{n+1} \neq \sigma_{n+1}^{teste}$ . Fonte: Simo e Hughes (1998).

Nota-se que a condição carga/descarga é a contrapartida algorítmica da forma alternativa das condições de Kuhn-Tucker.

#### 4.2.2.3 Algoritmo de mapeamento e retorno

Examina-se nesta seção o problema algorítmico para um processo incrementalmente plástico caracterizado pelas condições,

$$f_{y(n+1)}^{teste} > 0 \Leftrightarrow f(\sigma_{n+1}, \mu_{n+1}) = 0 \quad (4.40)$$

e

$$\Delta\varphi > 0$$

Objetiva-se determinar a solução  $\{\varepsilon_{n+1}^p, \mu_{n+1}, \sigma_{n+1}, \Delta\varphi\}$  do problema (4.34)-(4.35). Para realizar esta tarefa, primeiro se expressa a tensão final  $\sigma_{n+1}$  em termos de  $\sigma_{n+1}^{teste}$  e  $\Delta\varphi$  como segue:

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &= E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) \quad \text{ou} \\ \sigma_{n+1} &= E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) - E(\varepsilon_{n+1}^p - \varepsilon_n^p) \quad \text{ou} \\ \sigma_{n+1} &= \sigma_{n+1}^{teste} - E\Delta\varphi \text{sign}(\sigma_{n+1}). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Dessa forma, desde que  $\Delta\varphi > 0$ , (4.34)-(4.35) é escrita, tendo em vista (4.41), como

$$\begin{cases} \sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{teste} - E\Delta\varphi \text{sign}(\sigma_{n+1}), \\ \varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\varphi \text{sign}(\sigma_{n+1}), \\ \mu_{n+1} = \mu_n + \Delta\varphi \quad e \\ f_{y(n+1)} = |\sigma_{n+1}| - [\sigma_y + H\mu_{n+1}] = 0. \end{cases} \quad (4.42)$$

Agora o problema (4.42) é resolvido explicitamente em termos do estado elástico teste pelo seguinte procedimento. De (4.42),

$$|\sigma_{n+1}| \text{sign}(\sigma_{n+1}) = |\sigma_{n+1}| \text{sign}(\sigma_{n+1}^{teste}) - \Delta\varphi E \text{sign}(\sigma_{n+1}). \quad (4.43a)$$

Reorganizando os termos em (4.43a), encontra-se que

$$[|\sigma_{n+1}| + \Delta\varphi E] \text{sign}(\sigma_{n+1}) = |\sigma_{n+1}^{teste}| \text{sign}(\sigma_{n+1}^{teste}). \quad (4.43b)$$

Desde que  $\Delta\varphi > 0$  e  $E > 0$ , observa-se que os termos dentro dos colchetes em (4.43b) é necessariamente positivo. Assim, se requer que,

$$\text{sign}(\sigma_{n+1}) = \text{sign}(\sigma_{n+1}^{\text{teste}}), \quad (4.44)$$

juntamente com a condição

$$|\sigma_{n+1}| + E\Delta\varphi = |\sigma_{n+1}^{\text{teste}}|. \quad (4.45)$$

Finalmente, o parâmetro de consistência algorítmica  $\Delta\varphi > 0$  é determinado da condição de consistência discreta (4.42)<sub>4</sub> como segue. Tendo em vista (4.45), o critério de escoamento  $f_{y(n+1)}$  é escrito como,

$$\begin{aligned} f_{y(n+1)} &= |\sigma_{n+1}^{\text{teste}}| - E\Delta\varphi - [\sigma_y + H\mu_n] - H(\mu_{n+1} - \mu_n) \quad \text{ou} \\ f_{y(n+1)} &= f_{y(n+1)}^{\text{teste}} - \Delta\varphi(E + H). \end{aligned} \quad (4.46)$$

onde usa-se (4.36) e (4.42)<sub>3</sub> na obtenção de (4.46). Assim,

$$f_{y(n+1)} = 0 \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{f_{y(n+1)}^{\text{teste}}}{E + H} > 0. \quad (4.47)$$

Substituindo (4.44) e (4.47) em (4.42) chega-se ao resultado desejado:

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &= \left[ 1 - \frac{\Delta\varphi E}{|\sigma_{n+1}^{\text{teste}}|} \right] \sigma_{n+1}^{\text{teste}}, \\ \varepsilon_{n+1}^p &= \varepsilon_n^p + \Delta\varphi \text{sign}(\sigma_{n+1}^{\text{teste}}) \quad \text{e} \\ \mu_{n+1} &= \mu_n + \Delta\varphi. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Desde que  $f_{y(n+1)} = 0$ , tendo em vista (4.48)<sub>1</sub>, conclui-se que o estado de tensão final é a projeção da tensão teste na direção da superfície de escoamento (Figura 4.10). Devido a

esta interpretação, o algoritmo resumido no Quadro 4.3 é chamado de *mapeamento e retorno*.

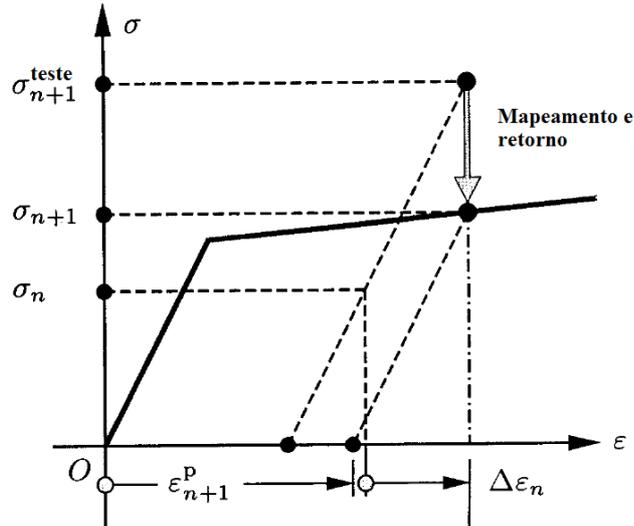


Figura 4.10: A tensão final é obtida pelo retorno da tensão teste a superfície de escoamento através do escalonamento, daí a denominação mapeamento e retorno. Fonte: Simo e Hughes (1998).

i) Dados em  $x \in \bar{B} : \{\varepsilon_n^p, \mu_n\}$

ii) Dado um campo de deformação em  $x \in \bar{B} : \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon_n$

iii) Calcule uma tensão elástica teste e verifique para o carregamento plástico

$$\sigma_{n+1}^{teste} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p)$$

$$f_{y(n+1)}^{teste} = |\sigma_{n+1}^{teste}| - [\sigma_y + H\mu_n]$$

SE  $f_{y(n+1)}^{teste} \leq 0$ , então FAZER:

Passo elástico: Fixar  $(\bullet)_{n+1} = (\bullet)_{n+1}^{teste} \rightarrow SAIR!$

SE NÃO:

Passo plástico: IR PARA PASSO iv)

FIM SE.

iv) Mapeamento e retorno

$$\Delta\varphi = \frac{f_{y(n+1)}^{teste}}{E + H} > 0$$

$$\sigma_{n+1} = \left[ 1 - \frac{\Delta\varphi E}{|\sigma_{n+1}^{teste}|} \right] \sigma_{n+1}^{teste}$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\varphi \text{sign}(\sigma_{n+1}^{teste})$$

$$\mu_{n+1} = \mu_n + \Delta\varphi$$

Quadro 4.3: Algoritmo de mapeamento e retorno.

## Capítulo 5

### SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES

Análises não lineares consideram grandes deslocamentos e rotações ou relações constitutivas dos materiais fora do escopo linear (materiais hiperelásticos, plásticos, viscoelásticos, etc), ou ainda a alteração nas condições de contorno, o que requer a solução de sistemas de equações não-lineares. Nota-se ainda nesse tipo de análise que, as estruturas ou seus componentes, usualmente, alcançam um nível de carga máximo, ficando incapazes de resistir a carregamentos mais elevados sem que uma mudança significativa na sua geometria ocorra. Estes níveis de cargas são denominados pontos críticos, limites ou de bifurcação, sendo caracterizados por uma matriz de rigidez tangente singular. Na Figura 5.1, ilustra-se algumas trajetórias com pontos críticos.

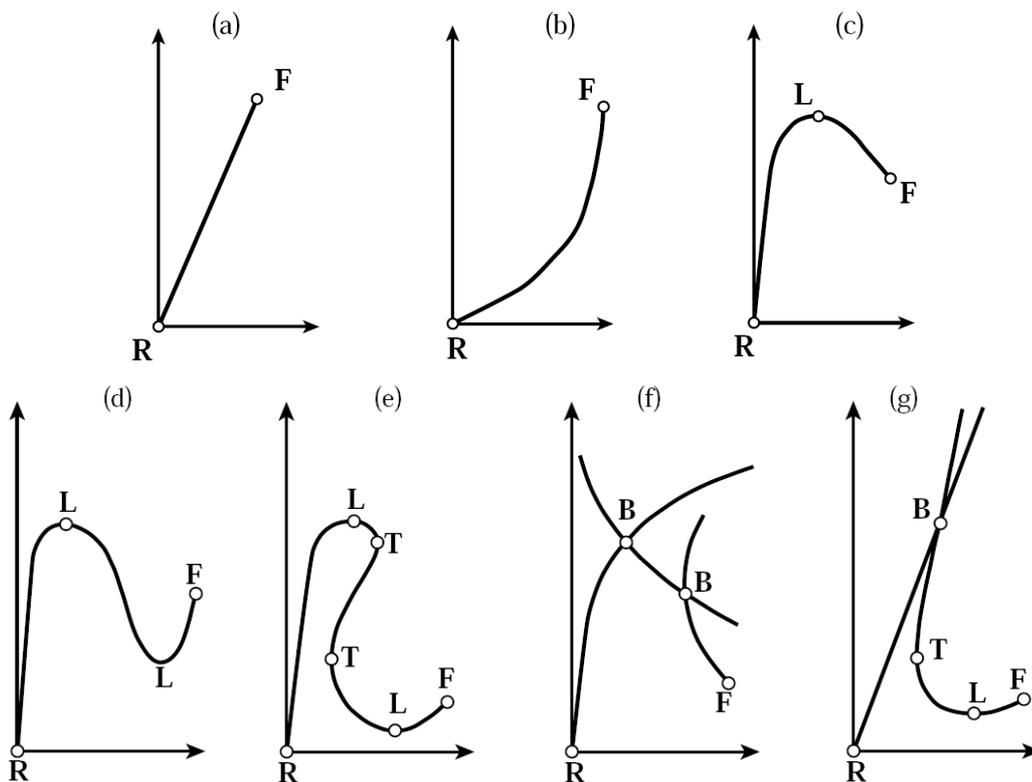


Figura 5.1: Padrões de resposta não linear básicos - (a) Falha linear frágil, (b) Enrijecimento ou endurecimento, (c) Amolecimento; e mais complexos - (d) snap-through; (e) snap-back; (f) bifurcação; (g) bifurcação combinada com ponto limite e snap-back. Fonte: Felippa (2001).

As letras R, L, T, B e F, da figura acima, expressam: configuração de referência, ponto limite, *turning point*, ponto de bifurcação e falha, respectivamente.

Nos “*turnings points*”, a tangente a trajetória de equilíbrio é vertical e podem afetar a performance de certos métodos de solução. Pontos de falha são aqueles nos quais a trajetória é repentinamente interrompida devido a falha física, podendo o fenômeno se dar a nível local ou global. Por outro lado, a presença de pontos de bifurcação estabelece que mais de uma trajetória de equilíbrio é possível.

Até meados da década de setenta do século passado, os problemas envolvendo não-linearidade em estruturas eram solucionados através de métodos puramente incrementais sob controle de carga. Estas estratégias não fazem a verificação de forças residuais ou desequilibradas, e dessa forma o erro associado é dependente do passo de carga e, frequentemente, acumulativo durante a análise, requerendo um passo de carga muito pequeno para uma análise mais precisa – Menin (2006).

Os métodos baseados em controle de carga podem ser aptos a detectar um ponto limite, mas em geral, são incapazes de ir além desse ponto. A necessidade de atravessar um ponto limite e descrever sua continuação é importante por diversos fatores, entre os quais: o ponto limite pode ser apenas um máximo local, podendo a estrutura ainda possuir capacidade resistente que pode ser aproveitada; melhor entendimento do comportamento de ruptura da estrutura (dúctil/frágil); maior clareza se a estrutura atingiu um ponto limite ou iniciou um trecho de instabilidade; investigar o real estado (tensões, deformações, deslocamentos, zonas plásticas, etc) pós-crítico de uma estrutura e, assim, entender melhor como se deu sua falha.

As dificuldades antes mencionadas motivaram o desenvolvimento dos métodos incrementais-iterativos, nos quais os incrementos que caracterizavam a fase preditora, são seguidos pelas iterações de correção do equilíbrio ou fase corretora que trazem a solução para a trajetória de equilíbrio e dessa maneira o algoritmo passa a ser menos dependente do tamanho do passo de carga utilizado.

Na literatura existem diversas estratégias computacionais baseadas no controle carga-deslocamento pelas quais se pode ultrapassar um ponto limite e continuar capturando a resposta, dentre as quais pode-se destacar: o método das molas artificiais, métodos baseados no controle do incremento de carga utilizando o parâmetro de rigidez CSP (*Current Stiffness Parameter*) e as técnicas de controle de deslocamento.

Nas últimas décadas, importantes avanços têm sido alcançados na resolução de sistemas de equações não-lineares, possibilitando que tanto a carga quanto o deslocamento possam variar simultaneamente durante os passos incrementais. Isso permitiu que os algoritmos fossem capazes de atravessar o ponto limite e, com isso obter maior êxito na continuação da resposta. Entre os citados avanços, destacam-se os métodos de comprimentos de arco. Segundo Haugen (1994) e Crisfeld (1991) estes conseguem abranger uma grande gama de problemas de engenharia estrutural.

A formulação para a solução de sistemas de equações não lineares apresentadas a seguir foi obtida do trabalho de Menin (2006).

## 5.1 MÉTODOS INCREMENTAIS-ITERATIVOS. NEWTON-RAPHSON COMPLETO

O sistema discreto de equações não-lineares que governa os problemas estáticos com não-linearidade geométrica e física pode ser definido pela equação,

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{p} - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (5.1)$$

onde:

$\mathbf{g}$  é o vetor de forças residuais ou desequilibradas;

$\mathbf{x}$  é o vetor de deslocamentos nodais;

$\mathbf{p}$  é o vetor de forças externas e;

$\mathbf{f}$  é o vetor de forças internas da estrutura calculado em função dos deslocamentos nodais.

Argumentos numéricos e físicos motivam a divisão da carga total  $\mathbf{p}$  em vários incrementos. Deste modo, um certo nível de carga será caracterizado por uma força externa  $\mathbf{p}^{n-1}$  e o equilíbrio para este nível de carga será expresso por,

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^{n-1}) = \mathbf{p}^{n-1} - \mathbf{f}(\mathbf{x}^{n-1}) = \mathbf{0}. \quad (5.2)$$

A incógnita do problema passa a ser o deslocamento  $\mathbf{x}^{n-1}$  para este nível de carga e uma vez satisfeito o equilíbrio para o passo de carga  $n-1$ , procede-se o seguinte incremento na força externa:

$$\mathbf{p}^n = \mathbf{p}^{n-1} + \Delta\mathbf{p}^n, \quad (5.3)$$

assim, o vetor de deslocamento  $\mathbf{x}^n$  para o novo passo de carga pode ser definido pela equação abaixo, sendo que a nova incógnita do problema passará a ser o incremento de deslocamento  $\Delta\mathbf{x}^n$

$$\mathbf{x}^n = \mathbf{x}^{n-1} + \Delta\mathbf{x}^n. \quad (5.4)$$

A carga externa total  $\mathbf{p}$  pode ser dividida em incrementos de forma proporcional, utilizando-se um parâmetro escalar  $\lambda$  chamado fator de carga,

$$\mathbf{p}^n = \lambda^n \mathbf{p}. \quad (5.5)$$

Assim, a Equação (5.3) pode ser re-escrita por:

$$\lambda^n \mathbf{p} = \lambda^{n-1} \mathbf{p} + \Delta\lambda^n \mathbf{p} \quad \text{e} \quad (5.6)$$

$$\lambda^n = \lambda^{n-1} + \Delta\lambda^n. \quad (5.7)$$

O método incremental apresentado nas Equações (5.2) a (5.4) pode ser convertido em um método incremental-iterativo quando se decide resolver iterativamente para cada um dos incrementos  $\Delta\mathbf{x}^n$ . Utilizando-se uma expansão em série de Taylor de  $\mathbf{g}(\mathbf{x}^n)$  pode-se obter uma predição inicial para  $\mathbf{x}^n$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{x}^n) &= \mathbf{p}^n - \mathbf{f}(\mathbf{x}^n) = \mathbf{p}^{n-1} + \Delta\mathbf{p}^n - \mathbf{f}(\mathbf{x}^{n-1} + \Delta\mathbf{x}^n) \\ &= \mathbf{p}^{n-1} - \mathbf{f}(\mathbf{x}^{n-1}) + \Delta\mathbf{p}^n - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^{n-1}) \Delta\mathbf{x}^n \\ &= \mathbf{g}(\mathbf{x}^{n-1}) + \Delta\mathbf{p}^n - \mathbf{K}(\mathbf{x}^{n-1}) \Delta\mathbf{x}^n \\ &= \mathbf{0} + \Delta\mathbf{p}^n - \mathbf{K}(\mathbf{x}^{n-1}) \Delta\mathbf{x}^n = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

O que implica:

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}^{n-1})\Delta\mathbf{x}^n = \Delta\mathbf{p}^n. \quad (5.9)$$

O valor de  $\Delta\mathbf{x}^n$  obtido pela resolução da Equação (5.9) é tomado então como uma primeira aproximação do incremento de deslocamento, denominado  $\Delta\mathbf{x}_1^n$ . Como aproximação inicial ao deslocamento  $\mathbf{x}_0^n$  no passo de carga  $n$ , é tomado o valor  $\mathbf{x}^{n-1}$ . Portanto, tem-se uma primeira aproximação  $\mathbf{x}_1^n$ :

$$\mathbf{x}_1^n = \mathbf{x}_0^n + \Delta\mathbf{x}_1^n = \mathbf{x}^{n-1} + \Delta\mathbf{x}_1^n. \quad (5.10)$$

Caso a primeira aproximação  $\mathbf{x}_1^n$  não seja suficiente para atingir o equilíbrio do sistema, é necessário iniciar a fase iterativa ou corretora:

$$\mathbf{x}_{i+1}^n = \mathbf{x}_i^n + \delta\mathbf{x}_i. \quad (5.11)$$

O símbolo  $\delta$  é empregado para destacar que se trata de um deslocamento iterativo e não de um deslocamento incremental que corresponde a um incremento de carga  $\Delta\mathbf{p}^n$ . Vale a pena ressaltar que a Equação (5.11) pode também ser escrita para o caso dos deslocamentos incrementais:

$$\Delta\mathbf{x}_{i+1}^n = \Delta\mathbf{x}_i^n + \delta\mathbf{x}_i. \quad (5.12)$$

Da mesma forma que havia sido feito para os deslocamentos incrementais, o deslocamento iterativo  $\delta\mathbf{x}_i$  que aparece nas equações (5.11) e (5.12) pode ser obtido utilizando-se uma expansão em série de Taylor similar ao realizado na Equação (5.8):

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{x}_{i+1}^n) &= \mathbf{p}^n - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1}^n) \approx \mathbf{p}^n - \mathbf{f}(\mathbf{x}_i^n) - \mathbf{K}(\mathbf{x}_i^n)\delta\mathbf{x}_i \\ &= \mathbf{g}(\mathbf{x}_i^n) - \mathbf{K}(\mathbf{x}_i^n)\delta\mathbf{x}_i = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

o que implica em:

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}_i^n) \delta \mathbf{x}_i = \mathbf{g}(\mathbf{x}_i^n). \quad (5.14)$$

O esquema “preditor-corretor” apresentado nesta seção é conhecido como Newton-Raphson Completo, lembrando que são conhecidas modificações na Equação (5.14) que levam a métodos de Newton-Raphson modificados.

Uma observação importante é que neste esquema “preditor-corretor” se utiliza controle de carga, uma vez que o parâmetro para dividir o problema definido na Equação (5.1) em incrementos é o nível ou fator de carga  $\lambda$ . Um certo valor  $\lambda^n$  deste parâmetro caracteriza precisamente um incremento e os deslocamentos iterativos  $\delta \mathbf{x}_i$  são sempre calculados para um mesmo nível de carga que não sofre variações durante o processo iterativo.

Conforme comentado no início do capítulo, o esquema preditor-corretor que utiliza controle de carga não é um método muito apropriado para muitas situações encontradas na análise estrutural, em especial na transposição de pontos críticos. Existem outros métodos (comprimento de arco, controle de deslocamentos, etc...) nos quais se escolhe outro parâmetro para caracterizar os incrementos. Conforme será abordado a seguir, a idéia básica destes métodos é tratar o fator de carga como uma variável e impor, no lugar da sua constância, uma restrição diferente caracterizada por um certo incremento do comprimento de arco no espaço definido por forças e deslocamentos.

## 5.2 MÉTODOS DE COMPRIMENTO DE ARCO

Da mesma forma como realizado nos métodos incrementais-iterativos com controle de carga, supõe-se uma situação de equilíbrio no passo  $n-1$ , conforme definido na Equação (5.2) e busca-se uma nova situação de equilíbrio para o passo  $n$ , correspondente a uma carga  $\mathbf{p}^n$  definida em consonância com a Equação (5.6). A diferença básica nos métodos de comprimento de arco é que o incremento de carga  $\Delta \lambda^n \mathbf{p}$  é desconhecido a priori. Para determinar a incógnita adicional  $\Delta \lambda^n$  se impõe a seguinte restrição:

$$(\Delta \mathbf{x}^n)^T (\Delta \mathbf{x}^n) + b (\Delta \lambda^n)^2 \mathbf{p}^T \mathbf{p} = \Delta L^2, \quad (5.15)$$

sendo  $b$  um parâmetro de ponderação que será discutido posteriormente.

A Equação (5.15) impõe que o incremento da solução no espaço  $\mathbf{x} - \mathbf{p}$  tenha um certo comprimento de arco de valor  $\Delta L$  convenientemente escolhido a priori. A Equação (5.9) continua sendo válida para definir uma predição do deslocamento incremental:

$$\mathbf{K}^{n-1} \Delta \mathbf{x}^n = \Delta \lambda^n \mathbf{p}. \quad (5.16)$$

Pode-se ser observar que a solução predita  $\Delta \mathbf{x}^n$  definida na Equação (5.16) depende linearmente de  $\Delta \lambda^n$ , de modo que:

$$\mathbf{K}^{n-1} \Delta \mathbf{x}_T = \mathbf{p} \quad \text{e} \quad (5.17)$$

$$\Delta \mathbf{x}^n = \Delta \lambda^n \Delta \mathbf{x}_T, \quad (5.18)$$

sendo  $\Delta \mathbf{x}_T$  o incremento de deslocamento correspondente a totalidade de carga externa de referência. Em função da Equação (5.18) a restrição do método de comprimento de arco definida na Equação (5.15), pode ser re-escrita por:

$$(\Delta \lambda^n)^2 [(\Delta \mathbf{x}_T)^T (\Delta \mathbf{x}_T) + b \mathbf{p}^T \mathbf{p}] = \Delta L^2, \quad (5.19)$$

que permite calcular a predição para o fator de carga  $\Delta \lambda^n$ :

$$(\Delta \lambda^n)^2 = \frac{\Delta L^2}{(\Delta \mathbf{x}_T)^T (\Delta \mathbf{x}_T) + b \mathbf{p}^T \mathbf{p}} \quad \text{ou}$$

$$\Delta \lambda^n = \pm \frac{\Delta L}{\sqrt{(\Delta \mathbf{x}_T)^T (\Delta \mathbf{x}_T) + b \mathbf{p}^T \mathbf{p}}}. \quad (5.20)$$

Conhecido  $\Delta\lambda^n$  pode-se calcular  $\Delta\mathbf{x}^n$  na Equação (5.18), e em seguida o deslocamento para o nível de carga  $n$ , conforme a Equação (5.4). Este método puramente incremental pode ser combinado com iterações dentro de cada incremento. Deste modo, os valores de  $\Delta\lambda^n$  e  $\Delta\mathbf{x}^n$  são considerados apenas como as primeiras aproximações  $\Delta\lambda_1^n$  e  $\Delta\mathbf{x}_1^n$  a serem corrigidas de forma iterativa. Com base nas Equações (5.11) e (5.12), pode-se então escrever equações similares para o fator de carga  $\lambda^n$ :

$$\lambda_{i+1}^n = \lambda_i^n + \delta\lambda_i \quad \text{e} \quad (5.21)$$

$$\Delta\lambda_{i+1}^n = \Delta\lambda_i^n + \delta\lambda_i. \quad (5.22)$$

Recordando que o incremento  $\Delta\lambda^n$  é desconhecido a priori, deve-se determinar seu valor iterativamente, sem considerá-lo fixo dentro de um mesmo incremento. Supondo que para a  $i$ -ésima iteração não tenha sido alcançada uma posição de equilíbrio:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_i^n) = \mathbf{p}_i^n - \mathbf{f}(\mathbf{x}_i^n) = \lambda_i^n \mathbf{p} - \mathbf{f}(\mathbf{x}_i^n) \neq \mathbf{0}. \quad (5.23)$$

Então, para a iteração seguinte tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{x}_{i+1}^n) &= \mathbf{p}_{i+1}^n - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1}^n) = \lambda_{i+1}^n \mathbf{p} - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1}^n) \neq \mathbf{0} \\ &= (\lambda_i^n + \delta\lambda_i) \mathbf{p} - \mathbf{f}(\mathbf{x}_i^n + \delta\mathbf{x}_i) \\ &= \lambda_i^n \mathbf{p} - \mathbf{f}(\mathbf{x}_i^n) + \delta\lambda_i \mathbf{p} - \mathbf{K}(\mathbf{x}_i^n) \delta\mathbf{x}_i \\ &= \mathbf{g}(\mathbf{x}_i^n) + \delta\lambda_i \mathbf{p} - \mathbf{K}(\mathbf{x}_i^n) \delta\mathbf{x}_i. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Comparando-se as Equações (5.13) e (5.24), pode-se ver que esta última tem um termo adicional  $\delta\lambda_i \mathbf{p}$  que está associado a variação de carga durante o processo iterativo. Em virtude deste termo adicional, ao se admitir  $\mathbf{g}(\mathbf{x}_{i+1}^n) = \mathbf{0}$ , não se pode obter diretamente o deslocamento iterativo  $\delta\mathbf{x}_i$ , até que seja determinado o termo  $\delta\lambda_i$ , adotado graças à utilização da restrição definida na Equação (5.15):

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_{i+1}^n) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K}(\mathbf{x}_i^n) \delta \mathbf{x}_i = \mathbf{g}(\mathbf{x}_i^n) + \delta \lambda_i \mathbf{p}. \quad (5.25)$$

A equação (2.25) pode então, ser invertida para se obter a seguinte equação:

$$\delta \mathbf{x}_i = [\mathbf{K}_i^n]^{-1} \mathbf{g}_i^n + \delta \lambda_i [\mathbf{K}_i^n]^{-1} \mathbf{p} = \delta \mathbf{x}_{Ri} + \delta \lambda_i \delta \mathbf{x}_{Ti} \quad (5.26)$$

sendo  $\delta \mathbf{x}_{Ri}$  o deslocamento iterativo correspondente ao método com controle de cargas e  $\delta \mathbf{x}_{Ti}$  o deslocamento iterativo correspondente a totalidade de carga externa de referência, podendo os mesmos serem obtidos através da resolução dos seguintes sistemas:

$$\mathbf{K}_i^n \delta \mathbf{x}_{Ri} = \mathbf{g}_i^n \quad \text{e} \quad \mathbf{K}_i^n \delta \mathbf{x}_{Ti} = \mathbf{p}, \quad (5.27)$$

observando-se que na Equação (5.26) aparece novamente o termo adicional que está associado à variação de carga externa. Combinando as Equações (5.12) e (5.26) obtém-se:

$$\Delta \mathbf{x}_{i+1}^n = \Delta \mathbf{x}_i^n + \delta \mathbf{x}_i = \Delta \mathbf{x}_i^n + \delta \mathbf{x}_{Ri} + \delta \lambda_i \delta \mathbf{x}_{Ti} \quad (5.28)$$

Como a restrição definida anteriormente na Equação (5.15) admite, evidentemente, uma formulação em iterações:

$$(\Delta \mathbf{x}_{i+1}^n)^T (\Delta \mathbf{x}_{i+1}^n) + b (\Delta \lambda_{i+1}^n)^2 \mathbf{p}^T \mathbf{p} = (\Delta \mathbf{x}_i^n)^T (\Delta \mathbf{x}_i^n) + b (\Delta \lambda_i^n)^2 \mathbf{p}^T \mathbf{p} = \Delta \mathbf{L}^2, \quad (5.29)$$

e substituindo-se as equações (5.22) e (5.28) em (5.29) pode-se obter a seguinte expressão após algebrismo simples:

$$\begin{aligned} (\Delta \mathbf{x}_{i+1}^n)^T (\Delta \mathbf{x}_{i+1}^n) + b (\Delta \lambda_{i+1}^n)^2 \mathbf{p}^T \mathbf{p} &= (\delta \lambda_i)^2 \left( (\delta \mathbf{x}_{Ti})^T \delta \mathbf{x}_{Ti} + b \mathbf{p}^T \mathbf{p} \right) \\ &+ (\delta \lambda_i)^2 \left( 2(\Delta_i^n + \delta \mathbf{x}_{Ri})^T \delta \mathbf{x}_{Ti} + 2\Delta_i^n b \mathbf{p}^T \mathbf{p} \right) \\ &+ \left( (\Delta \mathbf{x}_i^n + \delta \mathbf{x}_{Ri})^T (\Delta \mathbf{x}_i^n + \delta \mathbf{x}_{Ri}) + (\Delta \lambda_i^n)^2 b \mathbf{p}^T \mathbf{p} \right) = \Delta \mathbf{L}^2, \end{aligned} \quad (5.30)$$

podendo ser compactada na forma de uma equação de segundo grau em função de  $\delta\lambda_i$ :

$$a_1 (\delta\lambda_i)^2 + a_2 \delta\lambda_i + a_3 = 0, \quad (5.31)$$

sendo:

$$a_1 = (\delta\mathbf{x}_{Ti})^T \delta\mathbf{x}_{Ti} + b \mathbf{p}^T \mathbf{p}, \quad (5.32a)$$

$$a_2 = 2(\Delta\mathbf{x}_i^n + \delta\mathbf{x}_{Ri})^T \delta\mathbf{x}_{Ti} + 2\Delta\lambda_i^n b \mathbf{p}^T \mathbf{p}, \quad (5.32b)$$

$$a_3 = (\Delta\mathbf{x}_i^n + \delta\mathbf{x}_{Ri})^T (\Delta\mathbf{x}_i^n + \delta\mathbf{x}_{Ri}) + (\Delta\lambda_i^n)^2 b \mathbf{p}^T \mathbf{p} - \Delta L^2,$$

$$a_3 = (\Delta\mathbf{x}_i^n)^T \Delta\mathbf{x}_i^n + (\Delta\lambda_i^n)^2 b \mathbf{p}^T \mathbf{p} - \Delta L^2 + 2(\Delta\mathbf{x}_i^n)^T \delta\mathbf{x}_{Ri} + (\delta\mathbf{x}_{Ri})^T \delta\mathbf{x}_{Ri}$$

$$a_3 = \Delta L^2 - \Delta L^2 + 2(\Delta\mathbf{x}_i^n)^T \delta\mathbf{x}_{Ri} + (\delta\mathbf{x}_{Ri})^T \delta\mathbf{x}_{Ri} \text{ e}$$

$$a_3 = 2(\Delta\mathbf{x}_i^n)^T \delta\mathbf{x}_{Ri} + (\delta\mathbf{x}_{Ri})^T \delta\mathbf{x}_{Ri}. \quad (5.32c)$$

Supondo que a Equação (5.31) tenha duas raízes reais  $\delta\lambda_i^{(1)}$  e  $\delta\lambda_i^{(2)}$ , isto implica na existência de dois deslocamentos incrementais:

$$\Delta\mathbf{x}_{i+1}^{n(1)} = \Delta\mathbf{x}_i^n + \delta\mathbf{x}_i^{(1)} = \Delta\mathbf{x}_i^n + \delta\mathbf{x}_{Ri} + \delta\lambda_i^{(1)} \delta\mathbf{x}_{Ti} \quad (5.33a)$$

$$\Delta\mathbf{x}_{i+1}^{n(2)} = \Delta\mathbf{x}_i^n + \delta\mathbf{x}_i^{(2)} = \Delta\mathbf{x}_i^n + \delta\mathbf{x}_{Ri} + \delta\lambda_i^{(2)} \delta\mathbf{x}_{Ti} \quad (5.33b)$$

Na escolha de uma das duas raízes da Equação (5.31), existem várias estratégias propostas por um grande número de pesquisadores. Uma delas é impor a seguinte condição:

$$(\Delta\mathbf{x}_i^n)^T (\Delta\mathbf{x}_i^n) > 0 \Rightarrow (\Delta\mathbf{x}_i^n + \delta\mathbf{x}_{Ri} + \delta\lambda_i \delta\mathbf{x}_{Ti})^T (\Delta\mathbf{x}_i^n) > 0 \quad (5.34)$$

Esta evita que a solução retorne pela trajetória de equilíbrio, iniciando um processo de descarregamento indesejado. Caso as duas raízes satisfaçam a Equação (5.34), pode-se optar pela solução que mais se aproxime da solução linear  $\delta\lambda_i^{linear} = -a_3 / a_2$ .

O procedimento apresentado nesta seção recebe o nome de comprimento de arco esférico (*spherical arc-length procedure*) para o caso de se utilizar o parâmetro de ponderação

$b=1$ . No espaço  $\mathbf{x}-\mathbf{p}$ , as sucessivas aproximações da solução estão situadas em uma esfera de raio  $\Delta L$  e centrada no ponto de equilíbrio da iteração anterior  $(\mathbf{x}^{n-1}, \lambda^{n-1} \mathbf{p})$ , conforme pode ser visualizado na Figura 5.2.

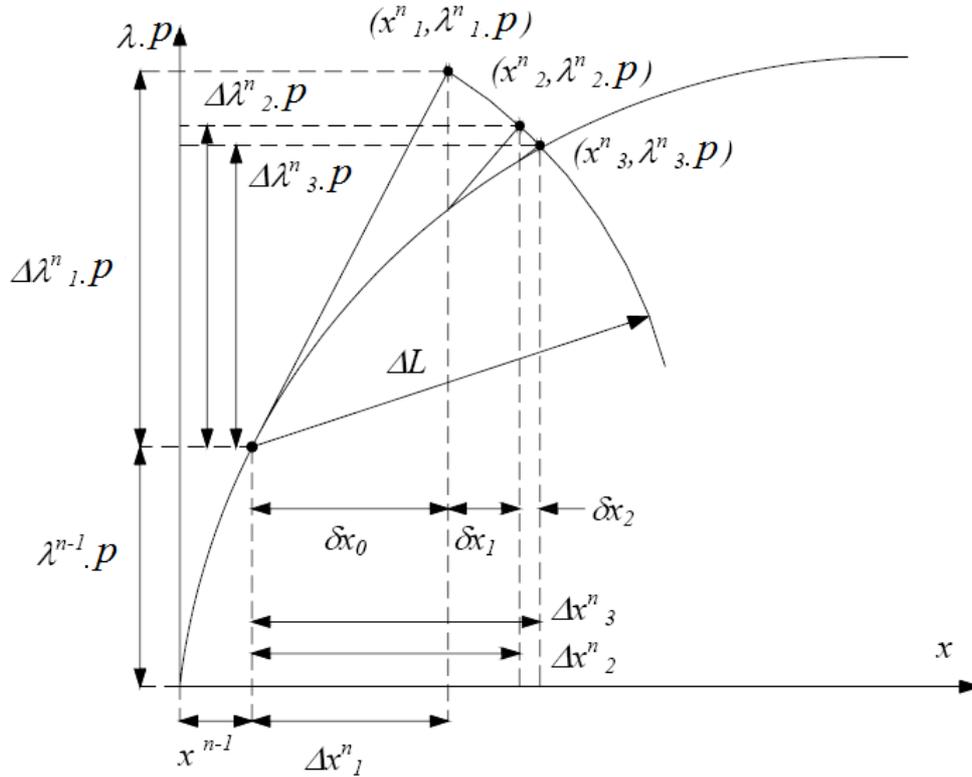


Figura 5.2: Método de comprimento de arco esférico. Fonte: Menin (2006).

### 5.3 MÉTODOS DE COMPRIMENTO DE ARCO LINEARIZADO

Pode-se utilizar uma formulação alternativa linearizada da Equação (5.31), empregando-se a seguinte restrição:

$$(\Delta \mathbf{x}_{i+1}^n)^T (\Delta \mathbf{x}_{i+1}^n) + \mathbf{b} (\Delta \lambda_{i+1}^n)^2 \mathbf{p}^T \mathbf{p} = \Delta L^2 \quad (2.35)$$

na qual os produtos escalares são entre vetores em duas iterações distintas  $i$  e  $i+1$ . Substituindo-se as Equações (5.22) e (5.28) em (5.35) pode-se obter:

$$\begin{aligned}
& (\Delta \mathbf{x}_i^n + \delta \mathbf{x}_{Ri}^n + \delta \lambda_i \delta \mathbf{x}_{Ti}^n)^T (\Delta \mathbf{x}_i^n) + \mathbf{b} (\Delta \lambda_i^n + \delta \lambda_i) (\Delta \lambda_i^n) \mathbf{p}^T \mathbf{p} = \Delta L^2 \\
& (\Delta \mathbf{x}_i^n + \delta \mathbf{x}_{Ri}^n)^T (\Delta \mathbf{x}_i^n) + \mathbf{b} (\Delta \lambda_i^n)^2 \mathbf{p}^T \mathbf{p} + \delta \lambda_i \left( (\delta \mathbf{x}_{Ti}^n)^T \Delta \mathbf{x}_i^n + \mathbf{b} \Delta \lambda_i^n \mathbf{p}^T \mathbf{p} \right) = \Delta L^2 \\
& (\Delta \mathbf{x}_i^n)^T (\Delta \mathbf{x}_i^n) + \mathbf{b} (\Delta \lambda_i^n)^2 \mathbf{p}^T \mathbf{p} + (\delta \mathbf{x}_{Ri}^n)^T \Delta \mathbf{x}_i^n + \delta \lambda_i \left( (\delta \mathbf{x}_{Ti}^n)^T \Delta \mathbf{x}_i^n + \mathbf{b} \Delta \lambda_i^n \mathbf{p}^T \mathbf{p} \right) = \Delta L^2 \\
& \Delta L^2 + (\delta \mathbf{x}_{Ti}^n)^T \Delta \mathbf{x}_i^n + \delta \lambda_i \left( (\delta \mathbf{x}_{Ti}^n)^T \Delta \mathbf{x}_i^n + \mathbf{b} \Delta \lambda_i^n \mathbf{p}^T \mathbf{p} \right) = \Delta L^2 \\
& (\delta \mathbf{x}_{Ri}^n)^T \Delta \mathbf{x}_i^n + \delta \lambda_i \left( (\delta \mathbf{x}_{Ti}^n)^T \Delta \mathbf{x}_i^n + \mathbf{b} \Delta \lambda_i^n \mathbf{p}^T \mathbf{p} \right) = \Delta L^2 \tag{5.36}
\end{aligned}$$

a partir da qual se pode extrair a correção linearizada para o fator de carga:

$$\delta \lambda_i = - \frac{(\delta \mathbf{x}_{Ri}^n)^T \Delta \mathbf{x}_i^n}{(\delta \mathbf{x}_{Ti}^n)^T \Delta \mathbf{x}_i^n + \mathbf{b} \Delta \lambda_i^n \mathbf{p}^T \mathbf{p}}. \tag{5.37}$$

Esta formulação que recebe o nome de plana normal atualizada (*update normal plane*) ou método de Ramm, pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& (\delta \mathbf{x}_{Ri}^n + \delta \lambda_i \delta \mathbf{x}_{Ti}^n)^T \Delta \mathbf{x}_i^n + \mathbf{b} (\Delta \lambda_i^n \mathbf{p}^T) (\delta \lambda_i \mathbf{p}) = \mathbf{0} \quad \text{ou} \\
& (\delta \mathbf{x}_{Ri}^n)^T \Delta \mathbf{x}_i^n + \mathbf{b} (\Delta \lambda_i^n \mathbf{p}^T) (\delta \lambda_i \mathbf{p}) = \mathbf{0}, \tag{5.38}
\end{aligned}$$

o que implica que  $(\delta \mathbf{x}_i, \delta \lambda_i \mathbf{p})$  é ortogonal a  $(\Delta \mathbf{x}_i^n, \Delta \lambda_i^n \mathbf{p})$ . Pode-se conseguir uma simplificação ainda maior em relação ao método de Ramm com a seguinte restrição linearizada:

$$(\Delta \mathbf{x}_{i+1}^n)^T (\Delta \mathbf{x}_1^n) + \mathbf{b} (\Delta \lambda_1^n) \mathbf{p}^T \mathbf{p} = \Delta L^2, \tag{5.39}$$

sendo o produto escalar obtido entre os vetores nas iterações atual  $i+1$  e inicial 1. Usando um raciocínio análogo ao método de Ramm, pode-se obter a seguinte correção linearizada para o fator de carga:

$$\delta\lambda_i = -\frac{(\delta\mathbf{x}_{Ri})^T \Delta\mathbf{x}_1^n}{(\delta\mathbf{x}_{Ti})^T \Delta\mathbf{x}_1^n + \mathbf{b}\Delta\lambda_1^n \mathbf{p}^T \mathbf{p}}. \quad (5.40)$$

Esta formulação recebe o nome de plana normal (*normal plane*), ou método de Riks-Wempner. A equação acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (\delta\mathbf{x}_{Ri} + \delta\lambda_i \delta\mathbf{x}_{Ti})^T \Delta\mathbf{x}_1^n + \mathbf{b}(\Delta\lambda_1^n \mathbf{p}^T)(\delta\lambda_i \mathbf{p}) &= \mathbf{0} \text{ ou} \\ (\delta\mathbf{x}_i)^T \Delta\mathbf{x}_1^n + \mathbf{b}(\Delta\lambda_1^n \mathbf{p}^T)(\delta\lambda_i \mathbf{p}) &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (5.41)$$

o que implica que  $(\delta\mathbf{x}_i, \delta\lambda_i \mathbf{p})$  é ortogonal a  $(\Delta\mathbf{x}_1^n, \Delta\lambda_1^n \mathbf{p})$ .

## 5.4 MÉTODOS DE COMPRIMENTO DE ARCO CILÍNDRICOS

No método de comprimento de arco esférico é considerado o mesmo peso para os termos de deslocamento e força no cálculo do comprimento de arco. Uma alternativa é considerar  $b=0$ , o que equivale a considerar unicamente os deslocamentos na determinação do incremento da solução. Vários pesquisadores comprovaram a pequena influência dos termos de carregamento e um bom funcionamento dos algoritmos com  $b=0$  para uma grande variedade de problemas práticos, sendo estes algoritmos conhecidos pelo nome de comprimento de arco cilíndrico. Uma representação gráfica é mostrada na Figura 5.3, a qual se ilustra um sistema com dois graus de liberdade. As possíveis interseções são denotadas por A e B.

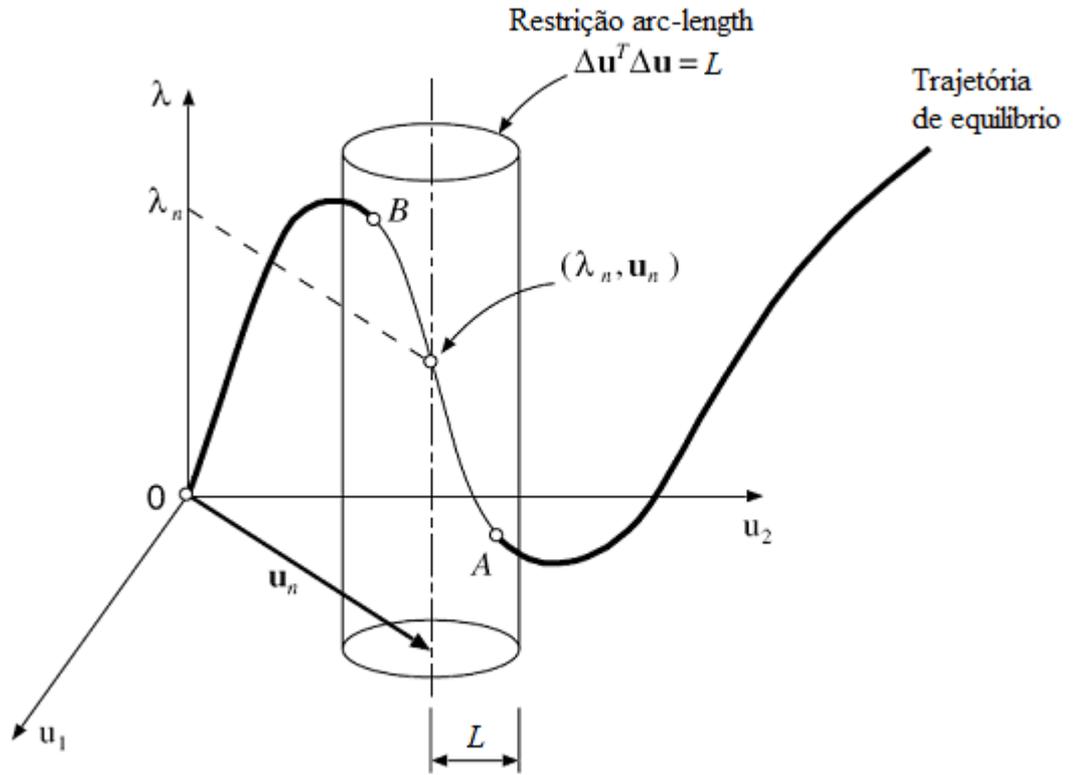


Figura 5.3: Método do comprimento de arco cilíndrico. Fonte: Neto (2008).

Uma formulação esférica pode ser transformada em uma formulação cilíndrica simplesmente anulando o parâmetro de ponderação  $b$  na definição dos coeficientes  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  das Equações (5.31) e (5.32):

$$a_1 (\delta \lambda_i)^2 + a_2 \delta \lambda_i + a_3 = 0, \quad (5.42)$$

sendo:

$$a_1 = (\delta \mathbf{x}_{Ti})^T \delta \mathbf{x}_{Ti}, \quad (5.43a)$$

$$a_2 = 2(\Delta \mathbf{x}_i^n + \delta \mathbf{x}_{Ri})^T \delta \mathbf{x}_{Ti}, \quad (5.43b)$$

$$a_3 = (\Delta \mathbf{x}_i^n + \delta \mathbf{x}_{Ri})^T (\Delta \mathbf{x}_i^n + \delta \mathbf{x}_{Ri}) - \Delta L^2$$

$$a_3 = (\Delta \mathbf{x}_i^n)^T \Delta \mathbf{x}_i^n - \Delta L^2 + 2(\Delta \mathbf{x}_i^n)^T \delta \mathbf{x}_{Ri} + (\delta \mathbf{x}_{Ri})^T \delta \mathbf{x}_{Ri},$$

$$a_3 = \Delta L^2 - \Delta L^2 + 2(\Delta \mathbf{x}_i^n)^T \delta \mathbf{x}_{Ri} + (\delta \mathbf{x}_{Ri})^T \delta \mathbf{x}_{Ri} \text{ e}$$

$$a_3 = 2(\Delta \mathbf{x}_i^n)^T \delta \mathbf{x}_{Ri} + (\delta \mathbf{x}_{Ri})^T \delta \mathbf{x}_{Ri}. \quad (5.43c)$$

Anulando-se o termo  $b$  na Equação (5.37), pode-se extrair a seguinte correção linearizada para o fator de carga em uma formulação cilíndrica:

$$\delta\lambda_i = -\frac{(\delta\mathbf{x}_{Ri})^T \Delta\mathbf{x}_i^n}{(\delta\mathbf{x}_{Ti})^T \Delta\mathbf{x}_i^n}. \quad (5.44)$$

A correção linearizada para o fator de carga na formulação plana normal cilíndrica pode ainda ser obtida anulando-se o coeficiente de ponderação  $b$  que aparece na Equação (5.40), resultando na seguinte equação:

$$\delta\lambda_i = -\frac{(\delta\mathbf{x}_{Ri})^T \Delta\mathbf{x}_1^n}{(\delta\mathbf{x}_{Ti})^T \Delta\mathbf{x}_1^n}. \quad (5.45)$$

#### 5.4.1 Determinação do sinal da predição de $\Delta\lambda$

Na formulação cilíndrica, a predição do incremento de carga pode ser obtida tomando o coeficiente de ponderação  $b = 0$  na Equação (5.20)

$$\Delta\lambda^n = \pm \frac{\Delta L}{\sqrt{(\Delta\mathbf{x}_T)^T (\Delta\mathbf{x}_T)}} = \alpha \frac{\Delta L}{\sqrt{(\Delta\mathbf{x}_T)^T (\Delta\mathbf{x}_T)}}. \quad (5.46)$$

A definição do sinal da equação acima esta associada a um processo de carga ou descarga da estrutura, que por sua vez está relacionado às características da matriz de rigidez. Um critério proposto por Crisfield (1991) é:

$$a = \text{sign}(r) \Rightarrow r = (\Delta\mathbf{x}_T)^T \mathbf{p} = (\Delta\mathbf{x}_T)^T \mathbf{K} \Delta\mathbf{x}_T. \quad (5.47)$$

#### 5.4.2 Tamanho do comprimento de arco

A idéia básica na determinação do tamanho do comprimento de arco a ser utilizado é que ele seja grande em regiões com poucas não-linearidades e pequeno em regiões com forte

comportamento não-linear. Um mecanismo automático para atualização do comprimento de arco sugerido por Crisfield (1991) é o seguinte:

$$\Delta L^n = \Delta L^{n-1} \sqrt{\frac{I_d^n}{I^{n-1}}}, \quad (5.48)$$

sendo:

$\Delta L^{n-1}$  o comprimento de arco no passo  $n-1$ ;

$I^{n-1}$  o número de iterações necessárias para convergir no passo  $n-1$ ;

$I_d^n$  o número de iterações desejadas no passo  $n$ , sendo  $I_d^n \approx 3$  segundo Crisfield (1991); e

$\Delta L^n$  o comprimento de arco a ser utilizado no passo  $n$ .

Caso a Equação (5.31) tenha duas raízes complexas, isto indica que não existem intersecções entre a esfera (ou o cilindro) de raio  $\Delta L$  e a trajetória de equilíbrio. Esta situação indica que o comprimento de arco é muito longo e o método perdeu o seu caráter de continuação da resposta, optando-se pela redução do comprimento:

$$\Delta L^{atual} = \frac{1}{2} \Delta L. \quad (5.49)$$

## 5.5 DETECÇÃO DE PONTOS CRÍTICOS

Existe uma grande quantidade de métodos indiretos na literatura que podem ser utilizados para a detecção de pontos críticos ao longo da trajetória de equilíbrio. O parâmetro de rigidez *CSP* – *current stiffness parameter* definido por Bergan (1980) é uma ferramenta bastante eficiente para fornecer uma medida do grau de não-linearidade e detecção de pontos limites. A expressão não normalizada que define o *CSP* é a seguinte:

$$k_n = \frac{p \Delta \mathbf{x}_T}{\Delta \mathbf{x}_T \Delta \mathbf{x}_T}, \quad (5.50)$$

a partir da qual pode-se obter uma expressão normalizada do parâmetro, dividindo-se o valor atual  $k_n$  pelo seu valor no início do processo de carregamento  $k_0$  :

$$CSP = \frac{k_n}{k_0}, \quad (5.51)$$

podendo ser observado que, ao se atingir um ponto limite, o  $CSP$  tende a zero enquanto que nos pontos de bifurcação o  $CSP$  assume um valor arbitrário diferente de zero.

Vale a pena ressaltar que o processo de triangularização da matriz de rigidez tangente antes da resolução do sistema de equações também fornece outra maneira bastante eficiente para detecção de pontos críticos (limites ou de bifurcação). Segundo Crisfield (1991) e Haugen (1994), o número de pivôs negativos da matriz de rigidez triangularizada é igual ao número de autovalores negativos da matriz de rigidez tangente e portanto, monitorando-se o número de pivôs negativos da matriz de rigidez triangularizada, pode-se detectar a ocorrência de pontos críticos pela alteração do número de pivôs negativos entre dois passos de carga sucessivos. Os pontos nos quais a tangente à trajetória de equilíbrio é vertical, ou seja, paralela ao eixo das cargas são chamados “*turning points*”. Estes pontos não são considerados pontos críticos e tem menor significado físico, porém, são de grande interesse pelo fato de poderem afetar o desempenho do algoritmo de resolução do sistema. Estes pontos podem ser detectados pelo  $CSP$ , entretanto, não causam alteração no número de pivôs negativos da matriz de rigidez.

## Capítulo 6

### EXEMPLOS NUMÉRICOS

Os objetivos que motivaram a seleção dos quatro exemplos numéricos constantes neste capítulo foram: verificar eficiência da formulação dos elementos introduzidos no Capítulo 3 em capturar grandes deslocamentos e rotações na presença da elastoplasticidade; realizar uma análise comparativa entre as três formulações de elementos de viga propostos; verificar a influência do número de pontos de Gauss na seção transversal; investigar o efeito do número de elementos adotados na discretização das estruturas estudadas.

As estruturas escolhidas – pórtico de Lee, viga em balanço, pórtico assimétrico e pórtico toggle – são clássicas da literatura e, dessa forma, tem servido como *benchmark* para diversos trabalhos. As mesmas foram empregadas em inúmeros estudos com a finalidade de abordar os mais variados fenômenos - impactos, calor, terremotos, ventos, vibrações, reologia, instabilidade, etc. Assim sendo, suas respostas numéricas e/ou experimentais são muito conhecidas, o que permitirá a aferição dos resultados obtidos no presente trabalho.

#### 6.1 PÓRTICO DE LEE

A geometria e os parâmetros materiais da primeira estrutura analisada estão mostrados na Figura 6.1, a qual é conhecida como o pórtico de Lee e foi apresentada inicialmente por Lee (1968) para análise de grandes deslocamentos e estabilidade de pórticos elásticos. A mesma é composta por duas barras (uma vertical e a outra horizontal) conectadas rigidamente entre si e, com apoios nas suas extremidades que liberam rotação e impedem translação. Cichon (1984) utilizou esse exemplo na análise pórticos planos submetidos a grandes deslocamentos e elastoplasticidade. Schweizerhof e Wriggers (1986) utilizaram o pórtico de Lee para avaliar um método de linearização consistente para obtenção da continuação da trajetória em análises por elementos finitos não lineares. Park e Lee (1996) utilizaram esta tipologia estrutural para examinar elementos de viga elastoplásticos tridimensionais flexíveis a cisalhamento. Meek e Xue (1996) usaram a mesma em

problemas de instabilidade de pórticos bidimensionais. Rodrigues (2000) trabalhou com este exemplo para o desenvolvimento e implementação de ferramentas numéricas para a análise não-linear física e geométrica de estruturas reticuladas na exploração de petróleo offshore. Battini (2002), por sua vez, utilizou esse pórtico para estudar elementos de viga co-rotacional em problemas de instabilidade. Menin (2006) analisou este tipo de exemplo para aplicação da descrição co-rotacional na análise não linear geométrica de estruturas discretizadas por elementos finitos de treliças, vigas e cascas.

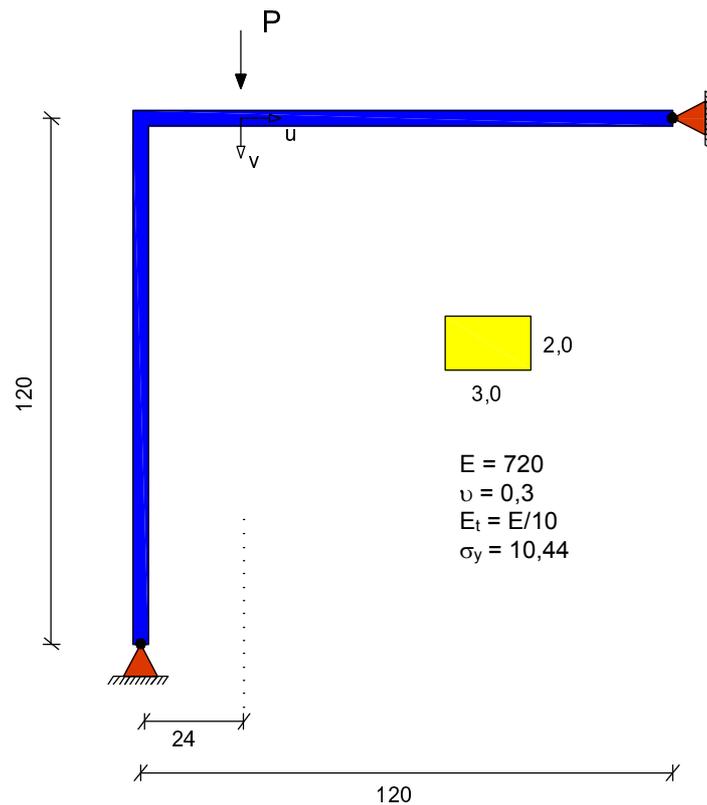


Figura 6.1: Geometria, condições de contorno e parâmetros físicos utilizados no pórtico de Lee.

Estudou-se o efeito provocado por uma única carga pontual aplicada na barra horizontal a 24 unidades de comprimento da ligação rígida. Conforme se pode observar nos resultados expostos a seguir, as configurações das trajetórias de equilíbrio para a análise elástica das estruturas são conhecidas na literatura como *snap-through* no grau de liberdade  $v$  e *snap-back* no grau de liberdade  $u$  apresentando, portanto dois pontos limites no diagrama carga-deslocamento. Na avaliação elastoplástica, as curvas em  $u$  e  $v$  exibem comportamento *snap-through*.

Efetuarão-se dois tipos de discretizações a fim de comparar os resultados obtidos com os três elementos finitos de viga estudados. Na Figura 6.2 exprimem-se as trajetórias elásticas

de equilíbrio nas direções dos graus de liberdade  $u$  e  $v$  da estrutura dividida em 10 elementos. Como se pode verificar as curvas são não coincidentes, muito embora as diferenças entre as mesmas não sejam tão acentuadas. Com o intuito de melhorar os resultados obtidos, refinou-se a malha, discretizando-se o pórtico em 20 elementos. As curvas são exibidas na Figura 6.3, nas quais se verifica uma melhora substancial na aproximação das mesmas, tornando os resultados satisfatórios.

Com o objetivo de validar os elementos ora implementados, as trajetórias elásticas obtidas com 20 elementos de viga Timoshenko foram confrontadas com as obtidas por Battini (2002) e, Park e Lee (1996). Esta comparação está exibida na Figura 6.4 onde se pode concluir que os valores obtidos são praticamente os mesmos. Este fato demonstra a eficiência da formulação e da estratégia de solução não linear empregada neste trabalho.

Em seguida obteve-se a resposta elastoplástica apresentada pela estrutura fazendo-se uso de 20 elementos de viga Bernoulli e procedendo-se a comparação com Battini (2002) e, conforme pode-se visualizar na Figura 6.5, há uma grande aproximação entre os resultados. Pode-se verificar ainda uma queda acentuada da capacidade portante da estrutura quando se compara os resultados considerando a plasticidade com aqueles obtidos tomando-se como hipótese a elasticidade do material. Todavia, nota-se uma elevação da curva elastoplástica no segundo ponto limite como consequência do encruamento do material.

Resolveu-se ainda investigar o efeito que a variação do número de pontos de Gauss teria nas respostas elastoplásticas. Assim, realizou-se a análise da estrutura usando 7 e 15 pontos de Gauss ao longo da altura da viga. Conforme exibido nas curvas da Figura 6.6, há uma boa aproximação de resultados entre as duas verificações, o que evidencia uma integração numérica eficiente das equações com a adoção de 7 pontos. Empregou-se 20 elementos de viga Bernoulli.

As deformadas da estrutura bem como os correspondentes valores de carga para diferentes passos são exibidas na Figura 6.7, onde se pode verificar que a estrutura alcança acentuadas rotações e translações que são capturadas pela formulação implementada.

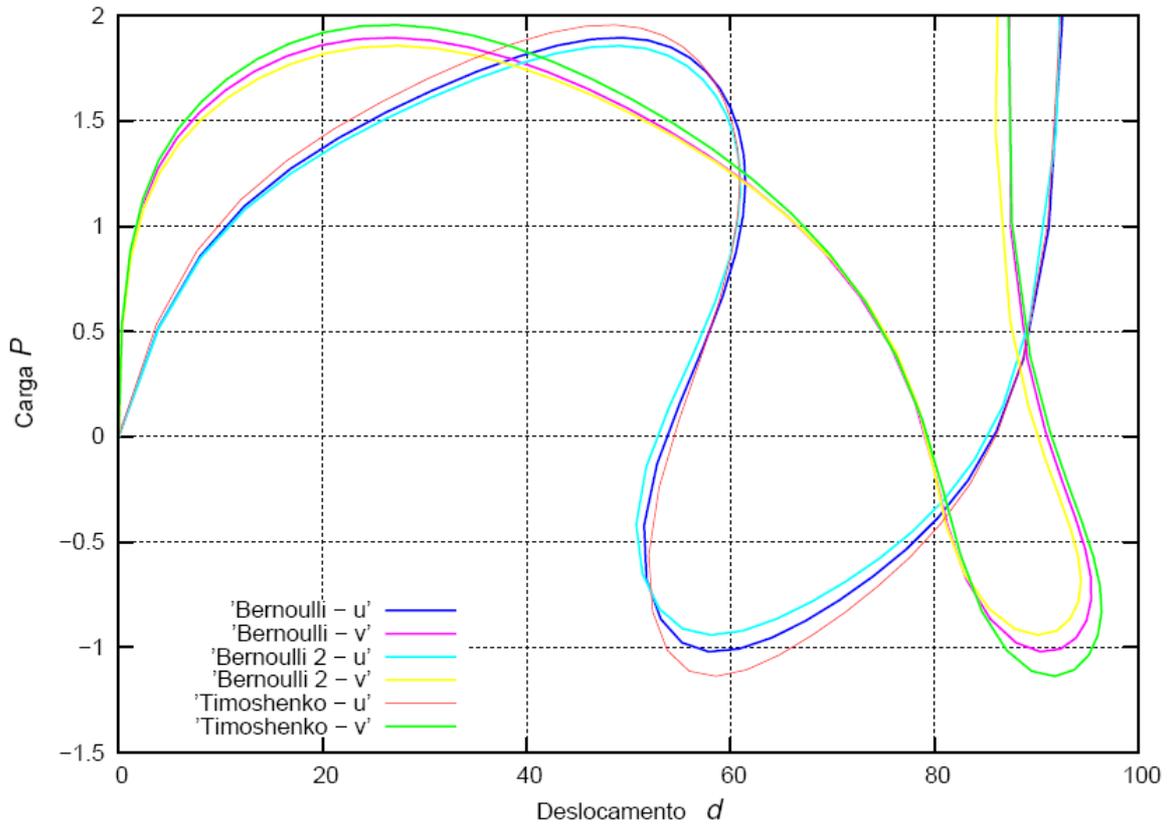


Figura 6.2: Resposta elástica do pórtico de Lee para os três elementos finitos utilizados e uma malha com 10 elementos.

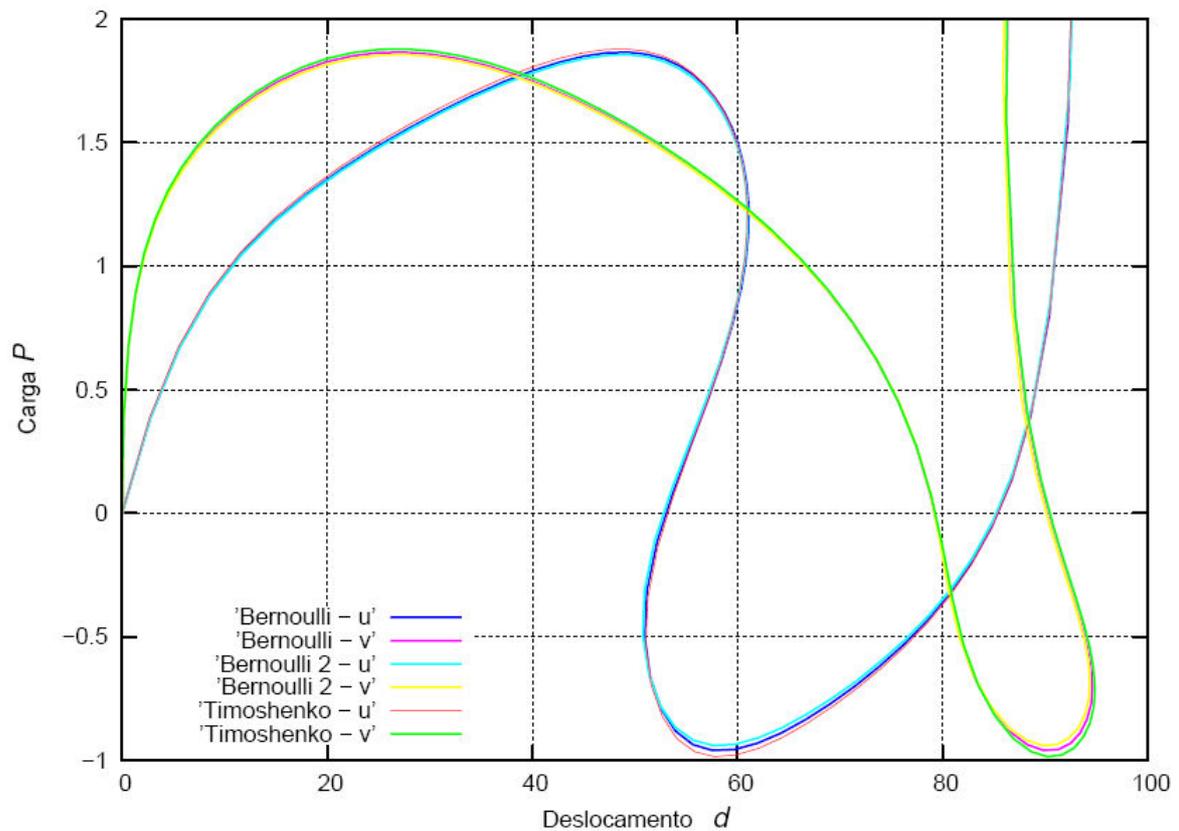


Figura 6.3: Resposta elástica do pórtico de Lee para os três elementos finitos utilizados e uma malha com 20 elementos.

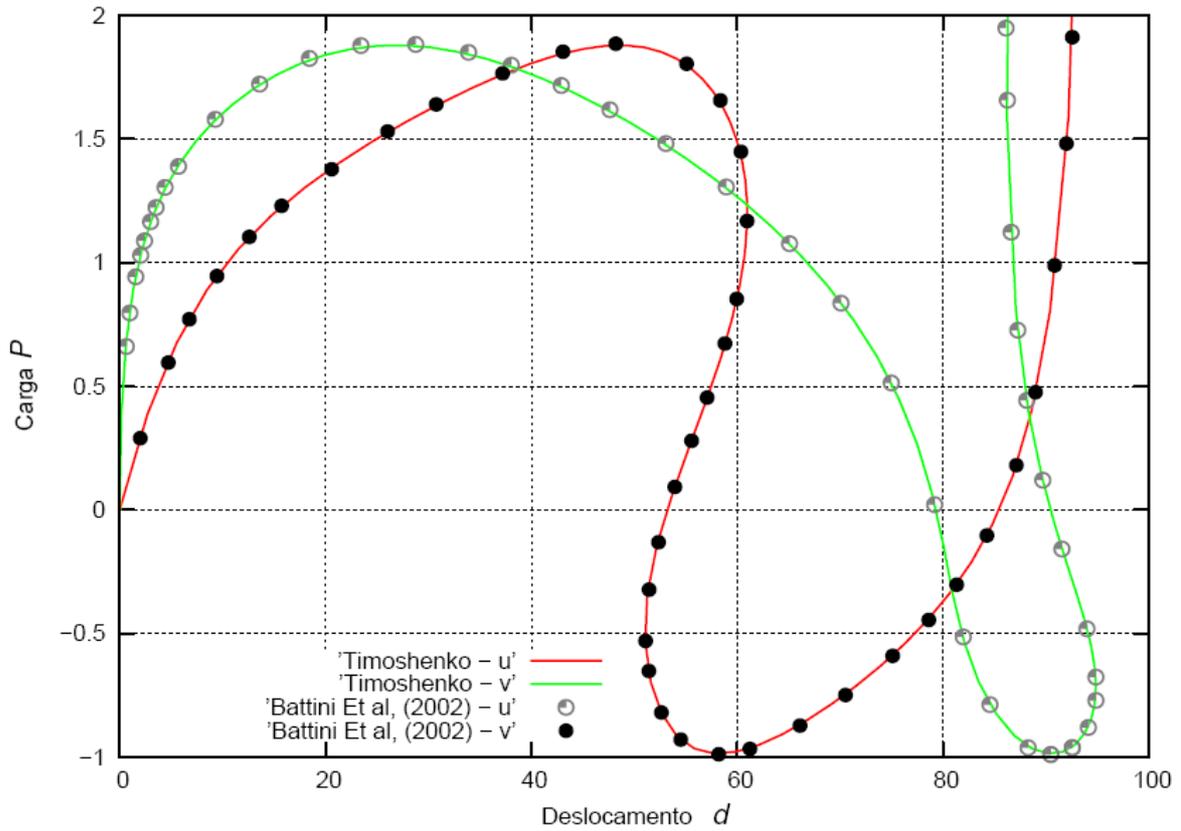


Figura 6.4: Resposta elástica do pórtico de Lee para o elemento de viga Timoshenko e uma malha com 20 elementos.

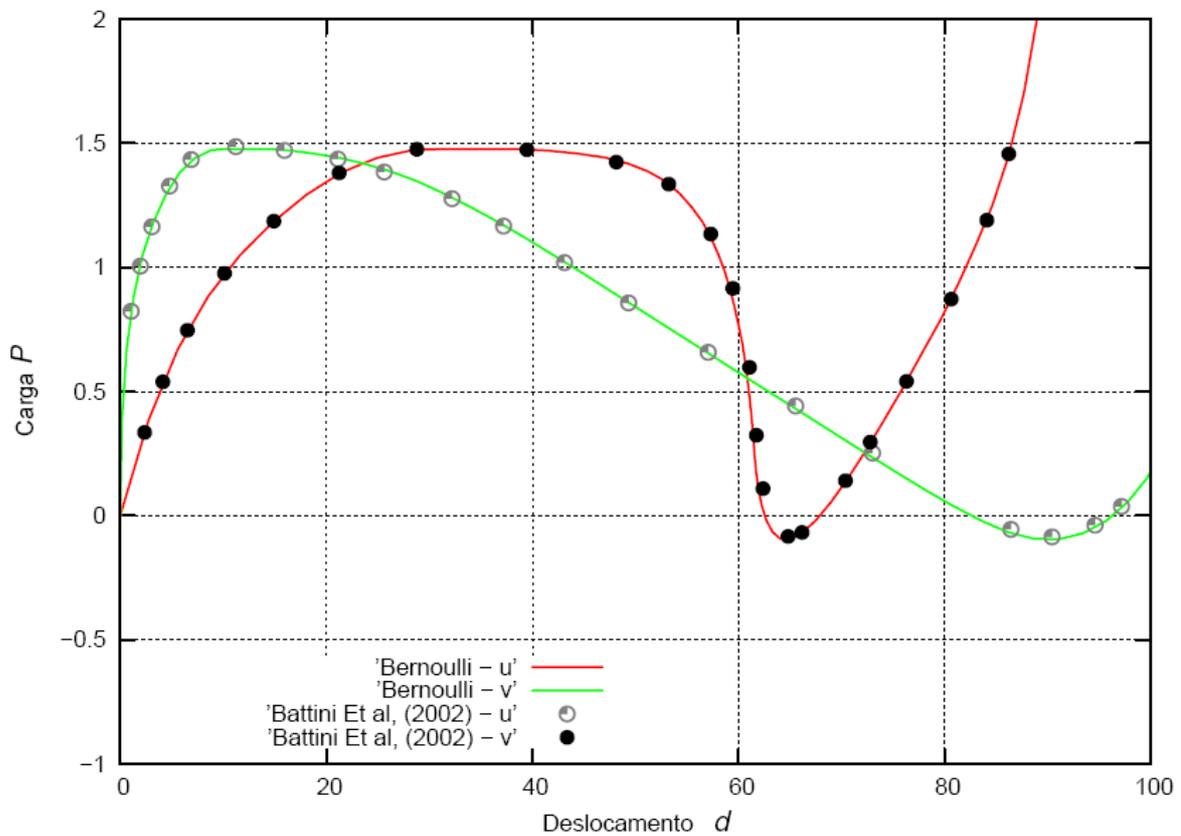


Figura 6.5: Resposta elastoplástica do pórtico de Lee para o elemento de viga Bernoulli e uma malha com 20 elementos.

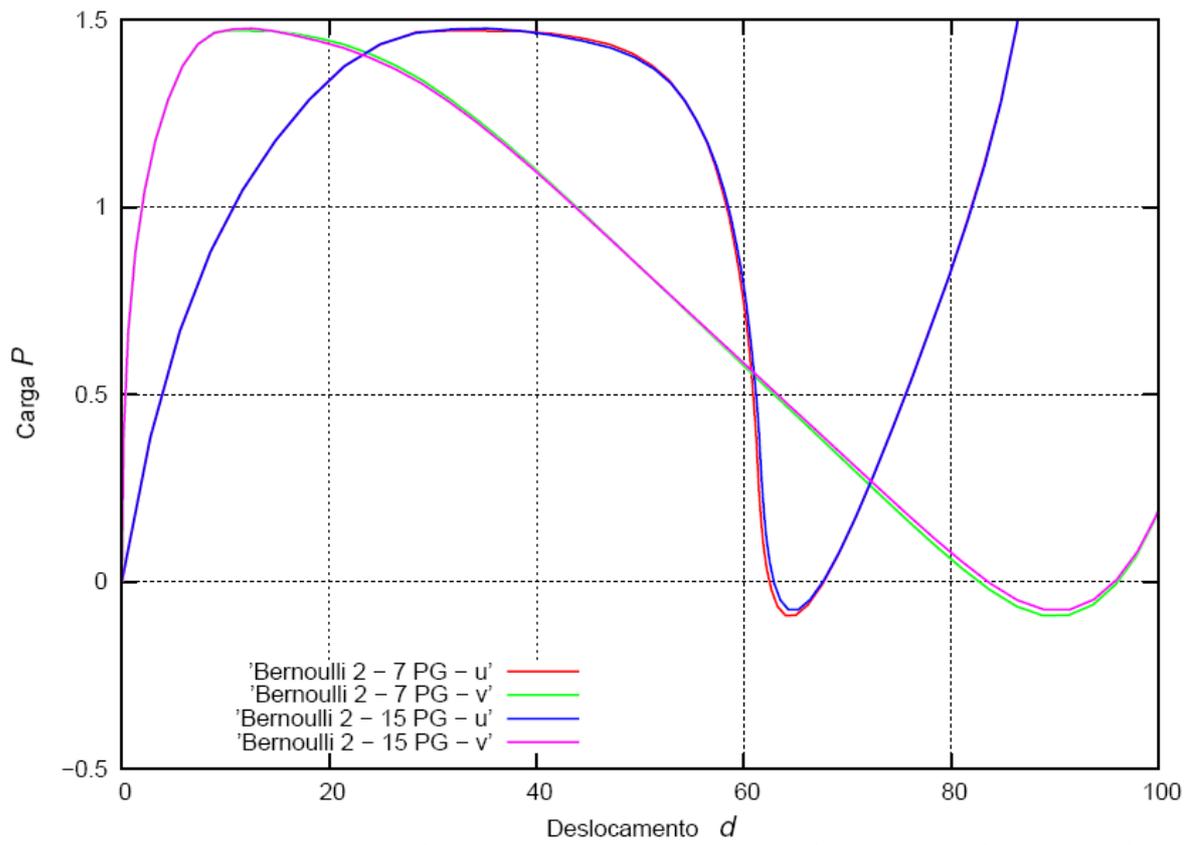


Figura 6.6: Resposta elastoplástica do pórtico de Lee para o elemento de viga Bernoulli 2; malha com 20 elementos e; 7 e 15 pontos de Gauss.

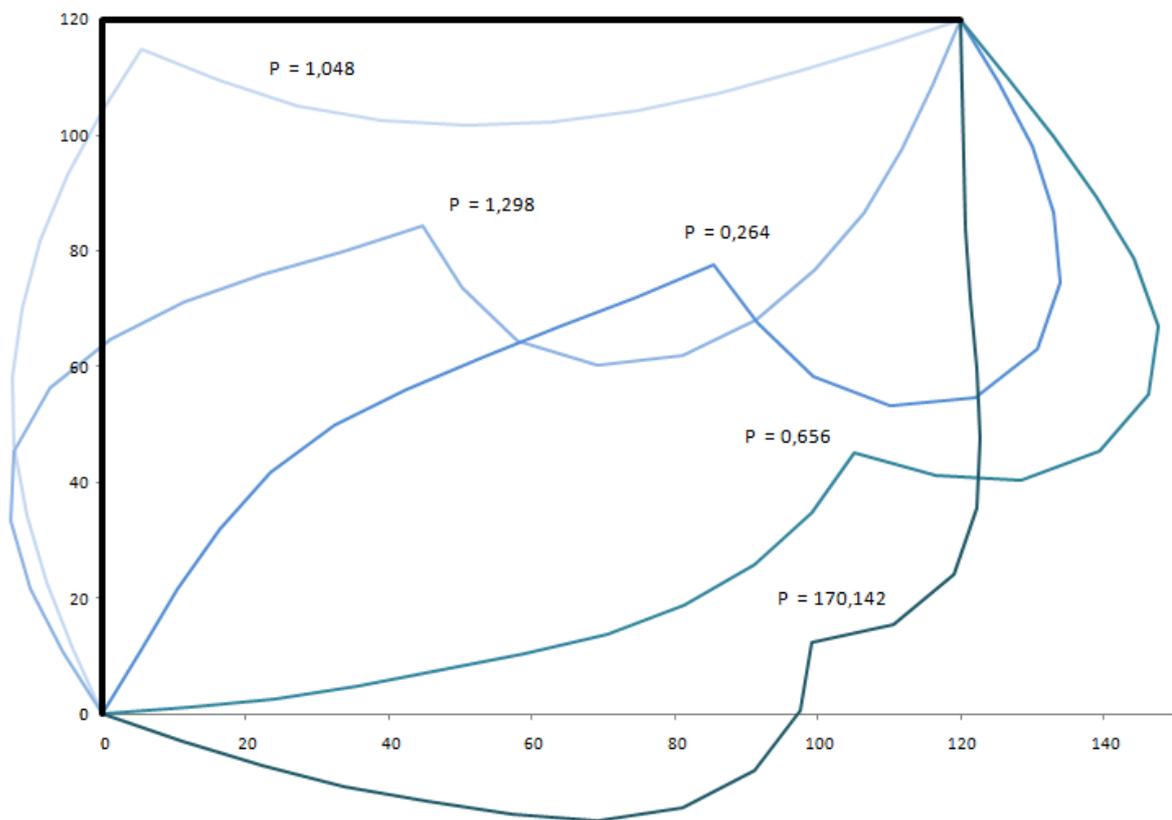


Figura 6.7: Perfil de deformadas para a resposta elastoplástica.

## 6.2 VIGA EM BALANÇO

Este problema foi resolvido inicialmente por Euler em 1744. O fato de se conhecer a sua solução analítica e, pelas características de seu comportamento não linear, leva o mesmo a ser muito utilizado para testes de formulações destinadas a análise não linear. Kondoh e Atluri (1987) empregaram esse exemplo para tratar de análise elastoplástica de pórticos que experimentam grandes deslocamentos. Marques (1990) usou uma viga em balanço no estudo da não linearidade física e geométrica de pórtico espaciais. Park e Lee (1996) utilizaram esta tipologia estrutural para examinar elementos de viga elastoplásticos tridimensionais flexíveis ao cisalhamento. Rodrigues (2000), por sua vez, trabalha com a mesma para o desenvolvimento e implementação de ferramentas numéricas para a análise não-linear física e geométrica de estruturas reticuladas. Battini (2002) utiliza essa estrutura com a finalidade de estudar elementos de viga em problemas de instabilidade.

As dimensões e os parâmetros físicos do material usados neste exemplo estão mostrados na Figura 6.8. Avaliou-se o efeito provocado por uma carga pontual aplicada na extremidade livre da estrutura.

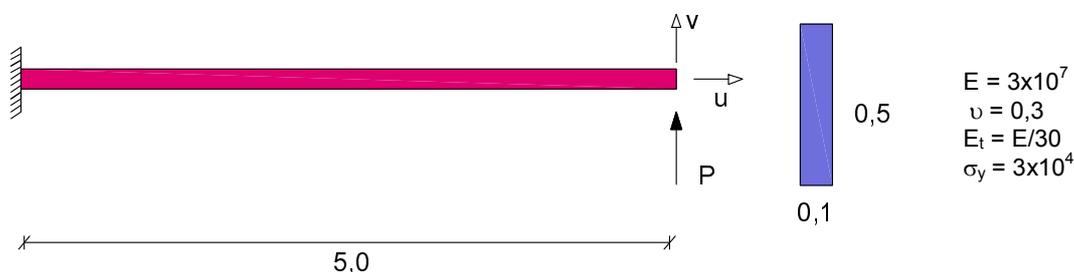


Figura 6.8: Dimensões, condições de contorno e propriedades do material usadas na viga em balanço.

A trajetória de equilíbrio da resposta elastoplástica é mostrada na Figura 6.9. Os resultados concordam com os obtidos pelos autores Battini (2002) e Kondoh e Atluri (1987). Conforme se pode ver em detalhe na Figura 6.10, a estrutura apresenta um comportamento ligeiramente linear no percurso inicial de sua trajetória de equilíbrio para em seguida exibir uma tendência não-linear suave. Salienta-se que praticamente os mesmos resultados foram obtidos com 10 elementos de viga Bernoulli 2 e quando se usou 20 elementos de Bernoulli, o que implica numa convergência com 10 elementos de Bernoulli. Como no exemplo anterior, nota-se pouca diferença entre os resultados com 7 e 15 pontos de Gauss e os efeitos do cisalhamento podem ser negligenciados.

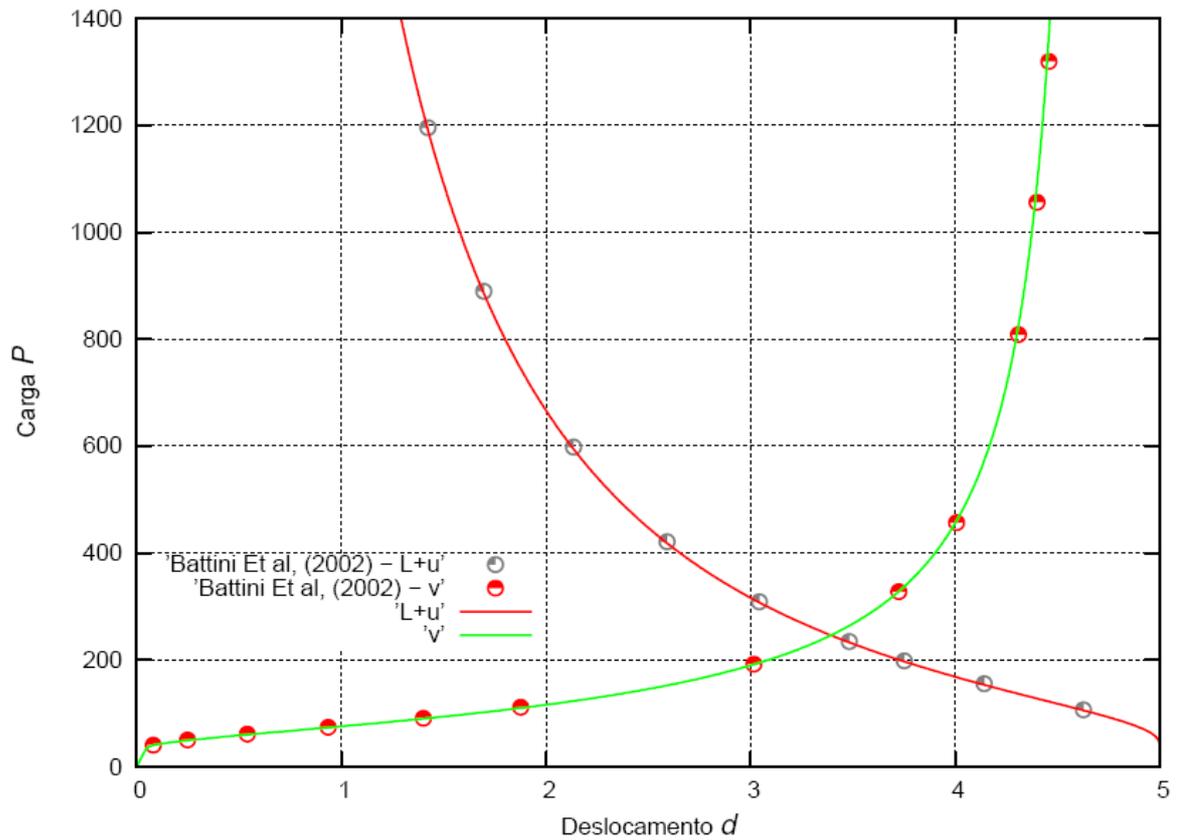


Figura 6.9: Resposta elastoplástica para viga em balanço usando elemento de viga Bernoulli 2; malha com 10 elementos e 15 pontos de Gauss.

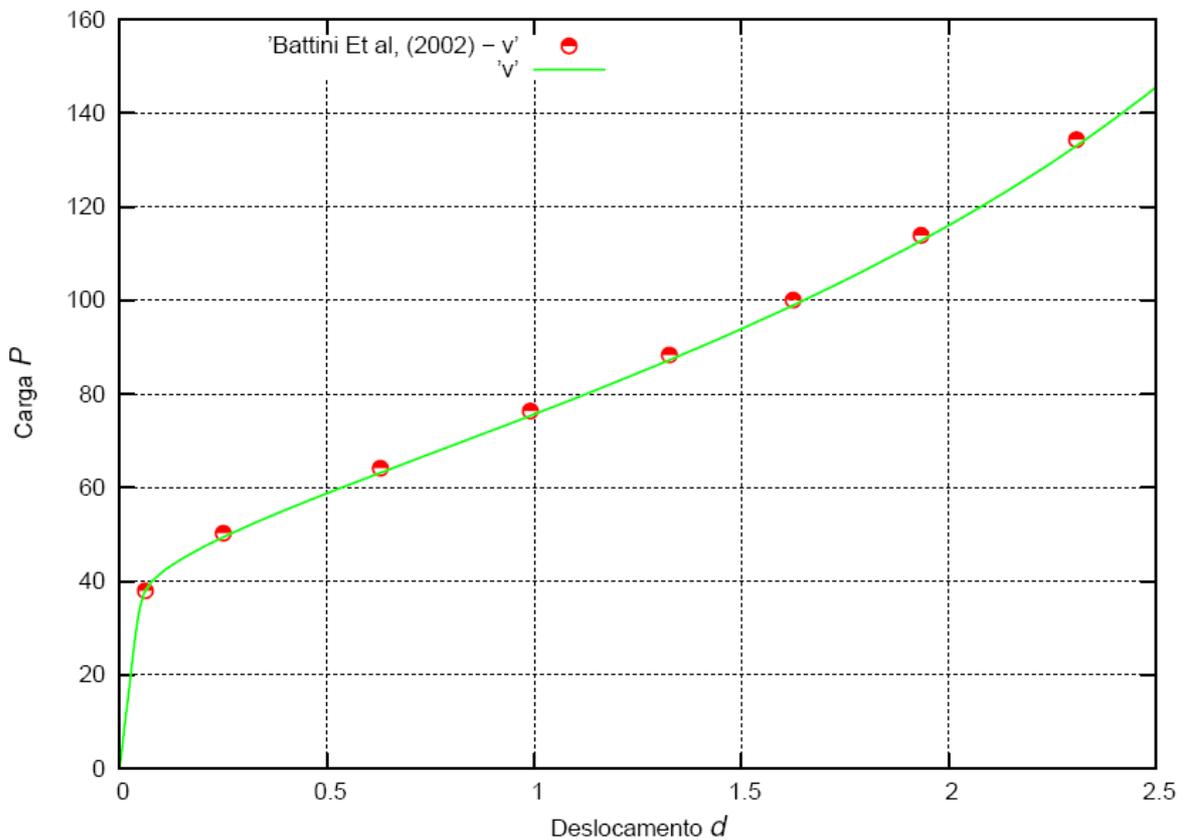


Figura 6.10: Detalhe da resposta elastoplástica para viga em balanço usando elemento de viga Bernoulli 2; malha com 10 elementos e 15 pontos de Gauss.

### 6.3 PÓRTICO TOGGLE

O pórtico toggle é uma estrutura bidimensional simétrica, composta por duas barras de igual comprimento rigidamente interligadas, que formam entre si um ângulo obtuso, e possuindo apoios nas extremidades que impedem translação e permite rotações no seu plano - Figura 6.11.

A necessidade de se verificar a eficiência de formulações numéricas no tratamento de trajetórias de equilíbrio com caráter "*snap-through*" justifica o fato de essa estrutura constar como exemplo em grande número de referências bibliográficas. Ela foi resolvida inicialmente de maneira analítica e experimental por Williams (1964). Posteriormente, outros pesquisadores a analisaram através de diversos procedimentos numéricos. Marques (1990) empregou esse pórtico para a análise da não linearidade física e geométrica de pórticos espaciais. Meek e Xue (1996) usaram esse exemplo em problemas de instabilidade de pórticos bidimensionais. Warren (1997) o utilizou na análise da probabilidade de instabilidade não linear de pórticos com imperfeições. Battini (2002), também utiliza essa estrutura com a finalidade de estudar elementos de viga co-rotacional em problemas de instabilidade.

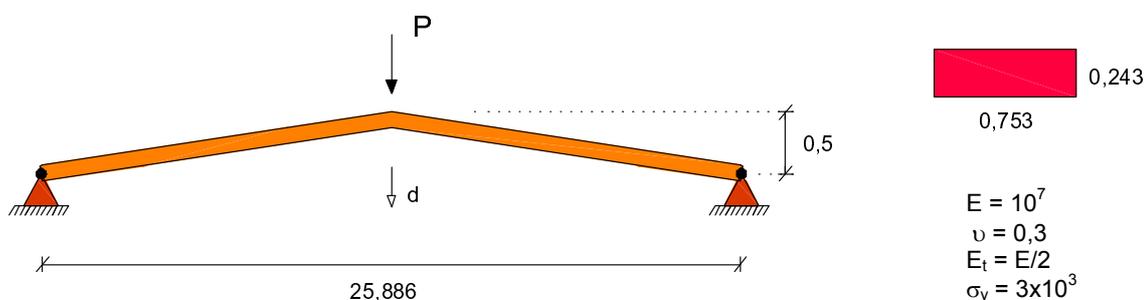


Figura 6.11: Dimensões, condições de contorno e propriedades do material usadas na viga em balanço.

Neste trabalho, analisa-se o efeito de uma carga pontual aplicada na ligação rígida da estrutura conforme se pode visualizar na ilustração antes mencionada. As respostas elástica e elastoplástica do pórtico são mostradas na Figura 6.12. Nestas pode-se perceber a característica *snap-through* das curvas e a existência de dois pontos limites. Observa-se uma queda na capacidade portante da estrutura quando se contabiliza na sua trajetória de equilíbrio os efeitos da elastoplasticidade. Por outro lado, verifica-se uma elevação da

curva em torno do segundo ponto limite resultante do encruamento do material. Plota-se sobre a trajetória de equilíbrio elástica e elastoplástica pontos extraídos de Battini (2002) e conclui-se que os resultados obtidos entre os dois trabalhos são praticamente coincidentes.

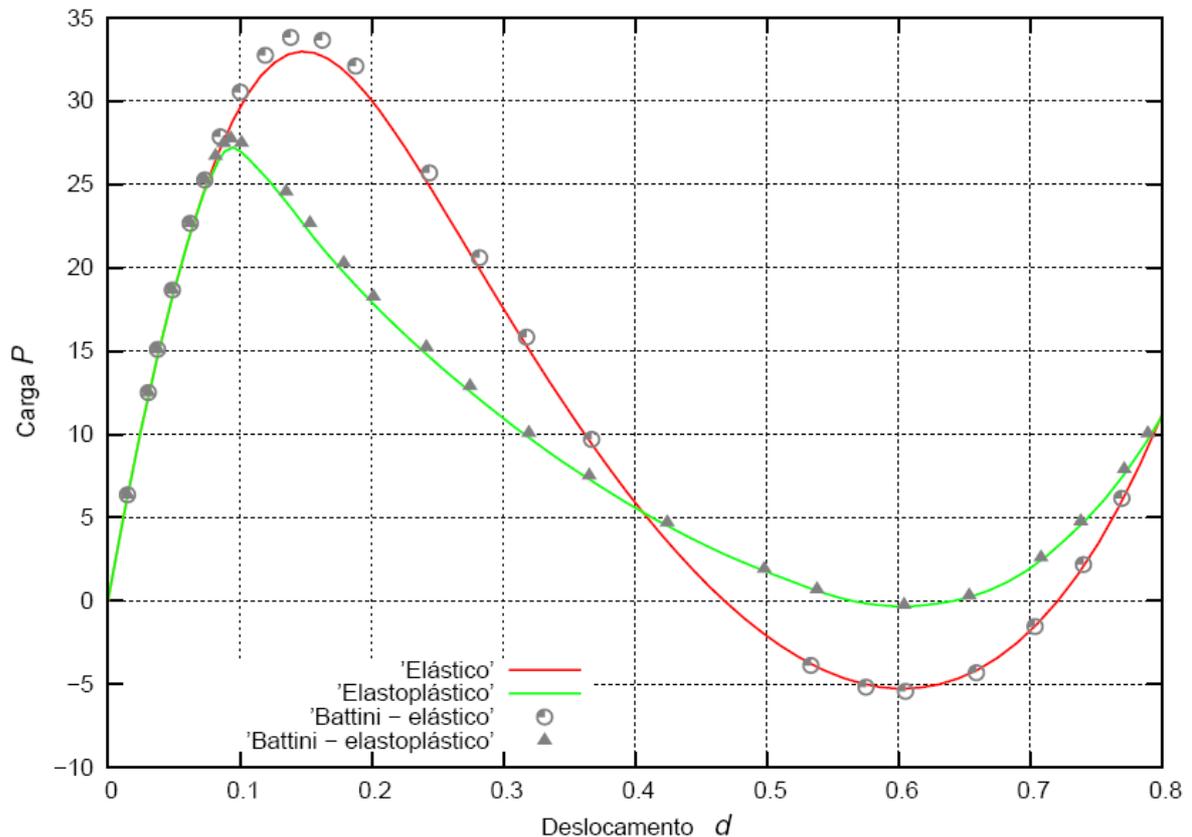


Figura 6.12: Resposta elástica e elastoplástica para o pórtico toggle usando elemento de viga Bernoulli 2; malha com 8 elementos e 15 pontos de Gauss.

#### 6.4 PÓRTICO ASSIMÉTRICO

O último exemplo estudado trata-se de um pórtico assimétrico composto de duas barras de mesmo comprimento, uma vertical e a outra horizontal, ligadas rigidamente entre si. O pórtico possui um apoio que impede rotação e translação da barra vertical e outro que libera a translação na direção vertical e trava a rotação da barra horizontal. A geometria do pórtico e os parâmetros materiais são mostrados na Figura 6.13. Battini (2002) utiliza essa estrutura com a finalidade de estudar elementos de viga co-rotacional em problemas de instabilidade.

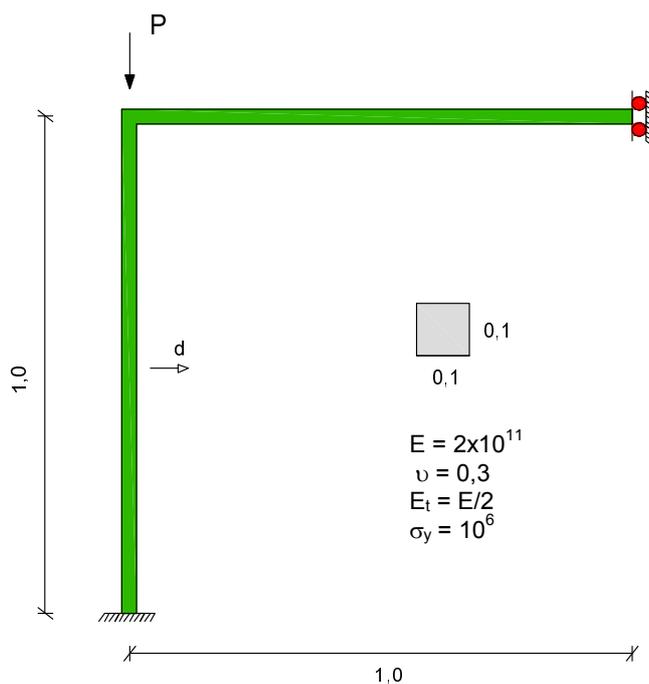


Figura 6.13: Dimensões, condições de contorno e propriedades do material usadas na viga em balanço.

Estuda-se a resposta da estrutura submetida a uma carga pontual aplicada sobre ligação rígida e na direção do eixo da barra vertical. Neste exemplo, os deslocamentos podem se dar em dois sentidos diferentes, dependendo de para onde vai ocorrer a instabilidade. O programa 2D\_beam\_nl.f90 não possui estratégias computacionais que obtenha trajetórias secundárias de equilíbrio. Para superar esse empecilho, induziu-se a resposta em um sentido, aplicando uma carga horizontal pontual de pequena magnitude na direção do grau de liberdade ( $d$ ) exposto na Figura 6.13. Logo após, empregou-se uma carga no sentido contrário, obtendo-se assim a outra trajetória secundária de equilíbrio.

A Figura 6.14 mostra a resposta elástica da estrutura. Nesta pode-se verificar a existência de um ponto de bifurcação, de onde partem duas trajetórias assimétricas que contabilizam os deslocamentos à esquerda e à direita no ponto médio da barra vertical. As mesmas têm comportamento linear e deslocamentos nulos até o ponto de bifurcação. A partir deste ponto, as curvas seguem em ramos não lineares.

Na Figura 6.15 exibem-se as trajetórias elastoplástica da estrutura. Observa-se também a existência de um ponto de bifurcação do qual iniciam trajetórias assimétricas de equilíbrio para os deslocamentos a esquerda e a direita do ponto médio da barra vertical. Observa-se que em ambas as trajetórias secundárias de equilíbrio apresentam um trecho estável antes de um ponto limite ser alcançado.

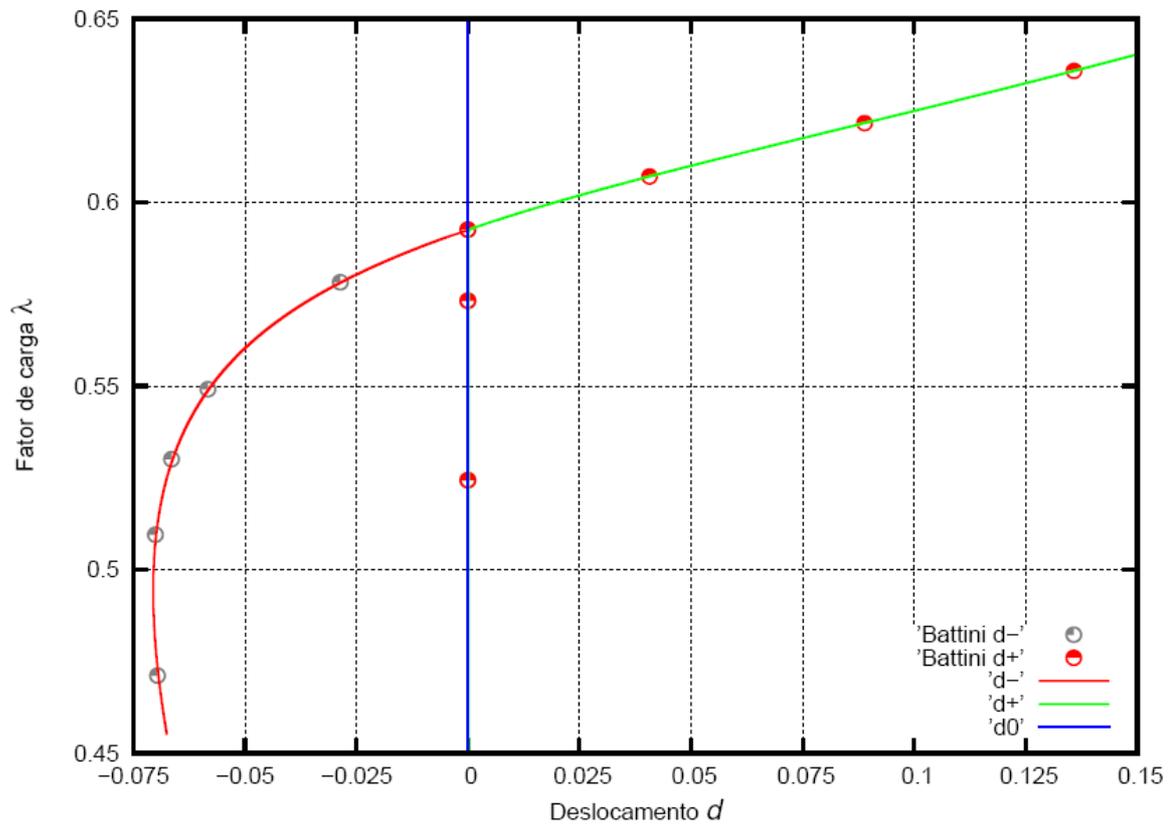


Figura 6.14: Resposta elástica do pórtico assimétrico usando elemento de viga Bernoulli 2; malha com 16 elementos.

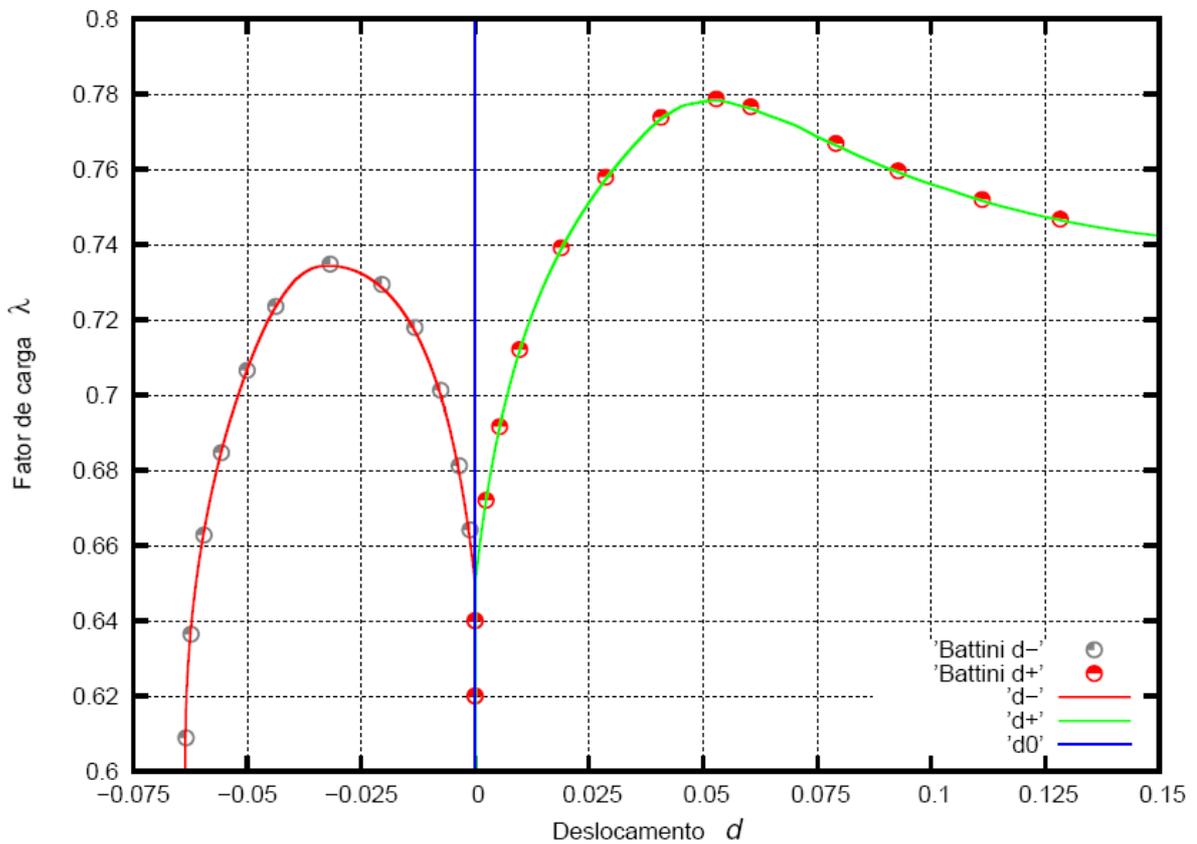


Figura 6.15: Resposta elastoplástica para o pórtico assimétrico usando elemento de viga Bernoulli 2; malha com 16 elementos e 15 pontos de Gauss.

## Capítulo 7

### CONCLUSÕES

Neste trabalho avaliou-se a eficiência de três elementos de viga 2D aplicados em um programa de elementos finitos que leva em consideração a não-linearidade geométrica e física. A primeira é abordada através da formulação co-rotacional e, a segunda por meio do modelo elastoplástico unidimensional com encruamento isotrópico.

Nos exemplos estudados – pórtico de Lee, pórtico assimétrico, viga em balanço e pórtico toggle, verificou-se a aproximação entre as trajetórias de equilíbrio dos três elementos de viga estudados, utilizando malhas com 20, 16, 10 e 8 elementos, respectivamente.

Na análise elastoplástica, o uso de quinze pontos de Gauss na altura da seção transversal em vez de sete não produz uma melhora significativa dos resultados, conforme se pode apreender das respostas obtidas para o pórtico de Lee.

Os resultados apresentados mostram que as estratégias utilizadas para evitar enrijecimento por membrana e cisalhamento nos elementos Bernoulli 2 e Timoshenko, respectivamente, foram eficientes.

No exemplo do pórtico assimétrico deve-se mensurar com cuidado o valor da carga indutora da resposta no sentido desejado. Minorá-la pode fazer com que o programa não consiga obter a trajetória secundária; majorá-la pode simular a resposta da estrutura com imperfeição.

Como esperado, a contribuição dos esforços cisalhantes nas respostas das estruturas analisadas é pequena. Isto se deve aos comprimentos dos membros das mesmas serem muito superior à sua altura.

Em todos os exemplos verifica-se uma queda na capacidade portante da estrutura quando se considera o fenômeno da elastoplasticidade. Observa-se ainda a capacidade da formulação co-rotacional em capturar grandes deslocamentos e rotações para todos os elementos implantados.

Concluída esta fase do presente trabalho, deixa-se como sugestões para continuação do mesmo:

- Desenvolvimento de interfaces para as fases de pré e pós-processamento. Isto tornaria o programa mais amigável e auxiliaria na visualização e interpretação dos resultados. Por exemplo, poderia-se visualizar graficamente a evolução das deformações plásticas em todos os pontos de Gauss da estrutura. Por outro lado, o programa seria mais atrativo com esses recursos gráficos do ponto de vista do usuário.
- Extensão do programa para elementos de viga 3D, o que possibilitaria a análise de off-shore, plataformas de telecomunicações, cobertura de grandes vãos, edifícios de grande altura, etc.;
- Consideração de outras seções transversais, o que tornaria possível o uso de seções comerciais correntes. Neste trabalho adotou-se a hipótese de seções transversais retangulares equivalentes que possuem a mesma área e inércia de seções transversais quaisquer. Os resultados preliminares foram satisfatórios quando comparados com os da literatura;
- Implementação de estratégias numéricas capazes de obter trajetórias secundárias de equilíbrio;
- Implementar o algoritmo “*radial return*” para o estado plano de tensões, possibilitando desta maneira, o uso do elemento de viga Timoshenko para análises elastoplásticas;
- Introduzir o conceito de rótulas plásticas e analisar o desempenho do mesmo na obtenção de trajetórias secundárias inelásticas; colapso plástico e análise limite;
- Comparar as respostas obtidas com programa 2D\_beam\_nl.f90 com outras fornecidas por softwares comerciais – ANSYS, ABAQUS, SAP 2000, etc. – e outros disponíveis, como o OPEN SEES por exemplo.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Argyris, J.H., (1965), “Continua and discontinua”, Proceedings 1st Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL-TR-66-80, Air Force Institute of Tecnology, Dayton, Ohio-USA.
- Battini, J.M., (2002), “Co-rotational beam elements in instability problems”, Ph.D Thesis, Royal Institute of Tecnology - Departament of Mechanics, Stockholm / Sweeden.
- Belo, I. M., (2009), Desenvolvimento da formulação co-rotacional em elementos finitos de casca para análise hiperelástica., Tese de doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina-SC, Brasil.
- Belytschko, T. & Hsieh, B.J., (1973), “Non-linear transient finite element analysis with convected co-coordinates”, Int. J. Numer. Methods in Engineering, Vol.7, pp 255-271.
- T. Belytschko and L. Glaum (1979) Application of high order corotational stretch theories to nonlinear finite element analysis. Computers and Structures, 10, 175–182.
- Bergan, P.G. & Horrigmoe, G., (1976), “Incremental variational principles and finite element models for nonlinear problems”, Computer Methods in Applied Mech. Engineering, Vol. 7, pp 201-217.
- Bergan P.G. & Nygard, M.K., (1989), “Nonlinear shell analysis using Free Formulation finite elements”, Finite Element Methods for Nonlinear Problems, Springer Verlag, Berlin, pp 317-338.
- Bergan P.G., (1980), “Solution algorithms for non-linear structural problems”, Computers & Structures, Vol. 12, pp 497-509.
- Biot, M.A., (1965), “The mechanics of incremental deformations”, McGraw-Hill, New York, USA.
- Chen, W.F.; Han, D.J. (1988), Plasticity for structural engineers. Sprinler-Verlag, New York, New York, USA.
- Chen, W.F., (1994), Constitutive equations for engineering materials, Vol. 2 - *plasticity* and modeling. Elsevier, Amsterdam, Países Baixos.
- C. Cichon., (1984), Large displacements in-plane analysis of elastic-plastic frames. Computers and Structures, 19:737–745.

- Cortivo, N., (2004), “Análise de estruturas de cascas finas utilizando-se uma formulação co-rotacional, um modelo plástico por camadas e o elemento finito ANDES”, Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil, Universidade de Brasília/DF, Brasil.
- Crisfield, M.A., (1990), “A consistent co-rotational formulation for non-linear threedimensional beam elements”, *Computer Methods Appl. Mech. Engineering*, Vol. 81, pp131-150.
- Crisfield, M.A., (1991), “Non-linear finite element analysis of solids and structures”, Volume 1: Essential, John Wiley & Sons, Chichester, UK.
- Crisfield, M. A. & Moita, G. F., (1996), “A unified co-rotational framework for solids, shells and beams”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 33, No 20-22, pp. 2969-2992.
- De Souza, R. M., (2000), "Force-Based Finite Element for Large Displacement Inelastic Analysis of Frames", Ph.D. Dissertation, University of California at Berkeley, Berkeley, CA, USA.
- Dunne, F.; Petrinic, N., (2005), *Introduction to Computational Plasticity*. New York: Oxford University Press, USA.
- E.A. de Souza Neto, D. Peric., D.R.J. Owen., (2008), *Computational Methods for Plasticity*, Wiley. Torquay, U. K.
- Felippa, C.A., (2001), “Non-linear finite element methods / NFEM”, Lecture notes for the course non-linear finite element methods, Center for Aerospace Structures, University of Colorado, Boulder/USA.
- Fraeijs de Veubeke, B.M., (1976), “The dynamics of flexible bodies”, *Int. J. Engineering Science*, Pergamon Press, 895-913.
- Haugen, B., (1994), “Buckling and Stability Problems for Thin Shell Structures Using High Performance Finite Elements”, Ph.D Thesis, University of Colorado, USA.
- J. N. Reddy, (1997), “Unified finite elements based on the classical and shear deformation theories of beams and axymmetric circular plates”, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 13, pp. 495-510.
- J. N. Reddy, (2005), “A corotacional finite element formulation for the analysis of planar beams”, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, pp. 553-570.

- J. N. Reddy., (2004), “An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis”, Oxford University Press : Oxford, U.K.
- K. Kondoh., N. Atluri., (1987), Large-deformation, elasto-plastic analysis of frames under nonconservative loading, using explicitly derived tangent stiffness based on assumed stresses. *Comp. Mech.*, 2:1–25.
- Khan, A.S., Huang, S., (1995), Continuum Theory of Plasticity, John Wiley & Sons. New York, USA.
- Owen, D.R.J., Hinton, E., (1980), Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice, Pineridge. Swansea, U.K.
- Lee, S. L., Manuel F. S., & Rossow, E. C., (1968), Large deflection analysis and stability of elastic frames. *J. Eng. Mech. Div. ASCE* 94 EM2, pp. 521-547.
- Lemaitre, J., Chaboche, J-L., (1994), Mechanics of Solids Materials, Cambridge University Press, Cambridge, , U.K.
- Marques, S. P. C., (1990) "Análise Não Linear Física e Geométrica de Pórticos Espaciais". Dissertação de Mestrado, UFRGS, Porto Alegre/RS/Brasil
- Menin, R.C.G. & Taylor, W.M.S, (2003), “Resposta pós-crítica de sistemas articulados com diferentes deformações utilizando uma formulação co-rotacional”, XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering / Cilamce 2003, Ouro Preto / MG, Brasil.
- Menin, R.C.G. & Taylor, W.M.S, (2004), “Análise não-linear geométrica de pórticos espaciais utilizando uma formulação co-rotacional”, XXXI Jornadas Sul Americanas de Engenharia Estrutural, Mendoza, Argentina.
- Menin, R.C.G. & Taylor, W.M.S, (2005), “Aplicação da descrição cinemática corotacional na análise não-linear geométrica de estruturas laminares”, XXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering / Cilamce 2005, Guarapari / ES, Brasil.
- Menin, R.C.G., Taylor, W.M.S, Lopes, A.P., Menin, E.C.G. (2006), “Análise não-linear geométrica de treliças utilizando diferentes medidas de deformações”, XXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering / Cilamce 2006, Belem / PA, Brasil.

- Menin, R. C. G., (2006), “Aplicação da descrição co-rotacional na análise não-linear geométrica de estruturas discretizadas por elementos finitos de treliças, vigas e cascas”, Tese de doutorado, E.TD-004A/06, Brasília : ENC/FT/UnB.
- M.S. Park., B.C. Lee., (1996), Geometrically non-linear and elastoplastic threedimensional shear flexible beam element of von-Mises-type hardening material. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 39:383–408.
- Meek, J. L., Xue, Q., (1996), A study on the instability problems for 2D-frames. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 136, pp. 347-361.
- Nour-Omid, B., Rankin, C.C., (1991), “Finite rotation analysis and consistent linearization using projectors”, *Comp. Meth. in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 93, pp. 353-384.
- Oñate, E., (1986), “Una formulación incremental para problemas de no linealidad geométrica por el metodo de los elementos finitos”, UPC / Barcelona, Espanha.
- Rankin, C.C., Nour-Omid, B., (1988), “The use of projectors to improve finite element performance”, *Computers & Structures*, Vol. 30, pp 257-267.
- Rankin, C.C., Brogan, F.A., (1986), “An element independent corotational procedure for the treatment of large rotations”, *ASME J. Pressure Vessel Technology*, Vol. 108, pp 165-174.
- Rodrigues, P. F. N., (2000), “Ferramentas Numéricas para a Análise Não-Linear Física e Geométrica de Estruturas Reticuladas na Exploração de Petróleo Offshore”, Tese de doutorado, COOPE : Rio de Janeiro, Brasil.
- R. M. Natal Jorge., L. M. J. S. Dinis., (2005), *Teoria da Plasticidade* (Apostila), Faculdade de Engenharia. Universidade do Porto, Portugal.
- Simo, J. C., (1998), *Computational Inelastic, Interdisciplinary Applied Mathematics*, vol. 7, Springer, New York, USA.
- Schweizerhof, K. H., & Wriggers, P., 1986. Consistent linearization for path following methods in nonlinear FE analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 59, pp. 269-279.
- Taylor, W.M.S., (2001), “Análisis no lineal elástico de estructuras de barras articuladas com diferentes medidas de deformacion”, XXII Cilamce, Campinas / SP, Brasil.

- Taylor, W.M.S., (2002), “El control variable de los desplazamientos en el análisis no lineal elástico de estructuras de barras”, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 18, 4, pp 549-572.
- Taylor, W.M.S, (2009), “Uma abordagem unificada da formulação co-rotacional para elementos de treliça 2D, treliça 3D e viga 2D”, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Dis. en Ingeniería*, Vol. 25, pp. 163-190.
- Truesdell, C., (1966), “Continuum mechanics I: the mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics”, Gordon & Breach, New York, USA.
- Warren, J. E., (1997), Nonlinear stability analysis of frame-type structures with random geometric imperfections using a total-lagrangian finite element formulation, Doctoral Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University.
- Wempner, G.A., (1969), “Finite elements, finite rotations and small strains of flexible shells”, *Int. J. Solids and Structures*, Vol. 5, pp 117-153.
- Wempner, G.A., (1971), “Discrete approximations related to non-linear theories of solids”, *Int. J. Solids and Structures*, Vol. 7, pp 1581-1599.
- Williams, F. W. (1964), ‘An approach to the nonlinear behaviour of the members of a rigid jointed plane framework with finite deflection’, *Quart. J. Mech. Appl. Maths.* 17(4), 451–469.

## **APÊNDICES**

## Apêndice A

### DEDUÇÃO ANALÍTICA DOS COEFICIENTES DOS VETORES DE FORÇAS INTERNAS E DA MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE DOS ELEMENTOS FINITOS PROPOSTOS

O presente apêndice traz a dedução analítica das equações que fornecem os coeficientes dos vetores de forças internas e das matrizes de rigidez tangente local dos elementos de viga Bernoulli, Bernoulli 2 e Timoshenko.

#### A1 – ELEMENTO DE VIGA BERNOULLI

##### VETOR DE FORÇAS INTERNAS

- Força axial  $N$

$$N = \int_v \frac{\sigma}{L} dv$$

$$\sigma = E\varepsilon \quad \varepsilon = \frac{\bar{u}}{L}$$

$$N = \frac{1}{L} \int_v E \frac{\bar{u}}{L} dA dx$$

$$N = \frac{1}{L} \int_0^L \int_A E \frac{\bar{u}}{L} dA dx$$

$$N = \frac{1}{L} EA \frac{\bar{u}}{L} \int_0^L dx$$

$$N = \frac{1}{L} EA \frac{\bar{u}}{L} (x) \Big|_0^L$$

$$N = \frac{1}{L} EA \frac{\bar{u}}{L} L$$

$$N = EA \frac{\bar{u}}{L} \tag{A.1}$$

• Momento fletor  $M_1$

$$M_1 = \int_v \sigma z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv$$

$$\sigma = E\varepsilon \quad \varepsilon = -kz \quad k = \left( -\frac{4}{L} + 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( -\frac{2}{L} + 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2$$

$$M_1 = \int_0^L \int_A Ekz^2 \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx$$

$$M_1 = \int_0^L \int_A Ez^2 \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right] dA dx$$

$$M_1 = EI \int_0^L \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right] dx$$

$$M_1 = EI \left[ \left( \frac{16}{L^2} x - \frac{24}{L^3} x^2 + \frac{12}{L^4} x^3 \right) + \left( \frac{8}{L^2} x - \frac{18}{L^3} x^2 + \frac{12}{L^4} x^3 \right) \right] \Bigg|_0^L$$

$$M_1 = EI \left[ \frac{4}{L} \bar{\theta}_1 + \frac{2}{L} \bar{\theta}_2 \right] = \frac{EI}{L} (4\bar{\theta}_1 + 2\bar{\theta}_2) \quad (\text{A.2})$$

• Momento fletor  $M_2$

$$M_2 = \int_v \sigma z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv$$

$$\sigma = E\varepsilon \quad \varepsilon = -kz \quad k = \left( -\frac{4}{L} + 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( -\frac{2}{L} + 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2$$

$$M_2 = \int_0^L \int_A Ekz^2 \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx$$

$$M_2 = \int_0^L \int_A Ez^2 \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right] dA dx$$

$$M_2 = EI \int_0^L \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right] dx$$

$$M_2 = EI \left[ \left( \frac{8}{L^2} x - \frac{18}{L^3} x^2 + \frac{12}{L^4} x^3 \right) + \left( \frac{4}{L^2} x - \frac{12}{L^3} x^2 + \frac{12}{L^4} x^3 \right) \right] \Bigg|_0^L$$

$$M_2 = EI \left[ \frac{2}{L} \bar{\theta}_1 + \frac{4}{L} \bar{\theta}_2 \right] = \frac{EI}{L} (2\bar{\theta}_1 + 4\bar{\theta}_2) \quad (\text{A.3})$$

## MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE

- Coeficiente  $K_{11}$

$$K_{11} = \frac{\partial N}{\partial \bar{u}}$$

$$N = \int_v \frac{\sigma}{L} dv$$

$$\frac{\partial N}{\partial \bar{u}} = \frac{1}{L} \int_v E \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{u}} dv \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} - kz = \frac{\bar{u}}{L} + z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right]$$

$$K_{11} = \frac{1}{L} \int_v E \left[ \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{u}} + z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{u}} + z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{u}} \right] dv$$

$$K_{11} = \frac{1}{L} \int_v E \left[ \frac{1}{L} \right] dv \tag{A.4a}$$

$$K_{11} = \frac{1}{L} E \frac{1}{L} \int_0^L \int_A dA dx$$

$$K_{11} = \frac{1}{L} EA \frac{1}{L} \int_0^L dx$$

$$K_{11} = \frac{1}{L} EA \frac{1}{L} (x) \Big|_0^L$$

$$K_{11} = \frac{1}{L} EA \frac{1}{L} L$$

$$K_{11} = \frac{EA}{L} \tag{A.4b}$$

- Coeficiente  $K_{22}$

$$K_{22} = \frac{\partial M_1}{\partial \bar{\theta}_1}$$

$$M_1 = \int_v \sigma z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial \bar{\theta}_1} = \int_v E \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{\theta}_1} z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} - kz = \frac{\bar{u}}{L} + z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right]$$

$$K_{22} = \int_v E \left[ \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\theta}_1} + z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{\theta}_1} + z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{\theta}_1} \right] z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv$$

$$K_{22} = \int_v Ez^2 \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dv \quad (\text{A.5a})$$

$$K_{22} = \int_0^L \int_A Ez^2 \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dA dx$$

$$K_{22} = EI \int_0^L \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dx$$

$$K_{22} = EI \left( \frac{16}{L^2} x - \frac{24}{L^3} x^2 + \frac{12}{L^4} x^3 \right) \Big|_0^L$$

$$K_{22} = EI \frac{4}{L}$$

$$K_{22} = \frac{4EI}{L} \quad (\text{A.5b})$$

• Coeficiente  $K_{33}$

$$K_{33} = \frac{\partial M_2}{\partial \theta_2}$$

$$M_2 = \int_v \sigma z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial \theta_2} = \int_v E \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_2} z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv \quad \varepsilon = \frac{\bar{u}}{L} + z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right]$$

$$K_{33} = \int_v E \left[ \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta_2} + z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \theta_2} + z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \theta_2} \right] z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv$$

$$K_{33} = \int_v Ez^2 \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dv \quad (\text{A.6a})$$

$$K_{33} = \int_0^L \int_A Ez^2 \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dA dx$$

$$K_{33} = EI \int_0^L \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dx$$

$$K_{33} = EI \int_0^L \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dx = EI \left( \frac{4}{L^2} x - \frac{12}{L^3} x^2 + \frac{12}{L^4} x^3 \right) \Big|_0^L$$

$$K_{33} = EI \frac{4}{L}$$

$$K_{33} = \frac{4EI}{L} \quad (\text{A.6b})$$

• Coeficiente  $K_{12} = K_{21}$

$$K_{12} = \frac{\partial N}{\partial \theta_1}$$

$$N = \int_v \frac{\sigma}{L} dv$$

$$\frac{\partial N}{\partial \theta_1} = \frac{1}{L} \int_v E \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_1} dv \quad \varepsilon = \frac{\bar{u}}{L} + z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right]$$

$$K_{12} = \frac{1}{L} \int_v E \left[ \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta_1} + z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \theta_1} + z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \theta_1} \right] dv$$

$$K_{12} = \frac{1}{L} \int_v E z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv \quad (\text{A.7a})$$

$$K_{12} = \frac{1}{L} \int_0^L \int_A E z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx$$

$$\int_A z dA = 0$$

$$K_{12} = E(0) \int_0^L \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dx$$

$$K_{12} = E(0) \left( \frac{4}{L} x - \frac{3}{L^2} x^2 \right) \Big|_0^L$$

$$K_{12} = E(0)(1)$$

$$K_{12} = 0 \quad (\text{A.7b})$$

• Coeficiente  $K_{13} = K_{31}$

$$K_{13} = \frac{\partial N}{\partial \theta_2}$$

$$N = \int_v \frac{\sigma}{L} dv$$

$$\frac{\partial N}{\partial \theta_2} = \frac{1}{L} \int_v E \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_2} dv \quad \varepsilon = \frac{\bar{u}}{L} + z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right]$$

$$K_{13} = \frac{1}{L} \int_v E \left[ \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\theta}_2} + z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{\theta}_1} + z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{\theta}_2} \right] dv$$

$$K_{13} = \frac{1}{L} \int_v E z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv \quad (\text{A.8a})$$

$$K_{13} = \frac{1}{L} \int_0^L \int_A E z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx$$

$$\int_A z dA = 0$$

$$K_{13} = E(0) \int_0^L \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dx$$

$$K_{13} = E(0) \left( \frac{2}{L} x - \frac{3}{L^2} x^2 \right) \Big|_0^L$$

$$K_{13} = E(0)(-1)$$

$$K_{13} = 0 \quad (\text{A.8b})$$

• Coeficiente  $K_{23} = K_{32}$

$$K_{23} = \frac{\partial M_2}{\partial \bar{\theta}_1}$$

$$M_2 = \int_v \sigma z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial \bar{\theta}_1} = \int_v E \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{\theta}_1} z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv \quad \varepsilon = \frac{\bar{u}}{L} + z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right]$$

$$K_{23} = \int_v E \left[ \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\theta}_1} + z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{\theta}_1} + z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{\theta}_1} \right] z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv$$

$$K_{23} = \int_v E z^2 \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv \quad (\text{A.9a})$$

$$K_{23} = \int_0^L \int_A E z^2 \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx$$

$$K_{23} = EI \int_0^L \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dx$$

$$K_{23} = EI \left( \frac{8}{L^2} x - \frac{18}{L^3} x^2 + \frac{12}{L^4} x^3 \right) \Big|_0^L$$

$$K_{23} = EI \frac{2}{L}$$

$$K_{23} = \frac{2EI}{L} \quad (\text{A.9b})$$

## A2 – ELEMENTO DE VIGA BERNOULLI 2

### VETOR DE FORÇAS INTERNAS

- Força axial  $N$

$$N = \int_v \frac{\sigma}{L} dv$$

$$N = \frac{1}{L} \int_v E \varepsilon dv$$

$$\sigma = E \varepsilon \quad \varepsilon = g + z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right]$$

$$g = \frac{\bar{u}}{L} + \frac{1}{15} \bar{\theta}_1^2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \bar{\theta}_2 + \frac{1}{15} \bar{\theta}_2^2$$

$$N = \frac{1}{L} \int_0^L \int_A E g dA dx$$

$$N = \frac{1}{L} E A g \int_0^L dx$$

$$N = \frac{1}{L} E A g (x) \Big|_0^L$$

$$N = \frac{1}{L} E A g L$$

$$N = E A g \quad (\text{A.10})$$

- Momento fletor  $M_1$

$$M_1 = g_1 \int_v \sigma dv + \int_v \sigma z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv$$

$$g_1 = \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_v \sigma dv &= \int_v E \varepsilon dv & \varepsilon &= g + z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right] \\ \int_v \sigma dv &= \int_v E \left\{ g + z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right] \right\} dv \\ \int_v \sigma dv &= E \int_v g dv + E \int_v z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right] dv \\ \int_v \sigma dv &= E \int_0^L \int_A g dA dx + E \int_0^L \int_A z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right] dA dx \end{aligned}$$

$$\int_A z dA = 0$$

$$\int_v \sigma dv = E g \int_0^L \int_A dA dx$$

$$\int_v \sigma dv = E A g \int_0^L dx$$

$$\int_v \sigma dv = E A g (x)_0^L$$

$$\int_v \sigma dv = E A L g$$

$$\Rightarrow \int_v \sigma z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv$$

$$\int_v E \varepsilon z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv$$

$$\varepsilon = g + z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right]$$

$$\int_v E \left\{ g + z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right] \right\} z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv$$

$$\int_v E \left\{ g + z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right] \right\} z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv$$

$$E \int_v z g \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv + E \int_v z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right] z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv$$

$$E \int_v z g \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv + E \int_v z^2 \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right] \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv$$

$$E \int_v z g \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv + E \int_v z^2 \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right] \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv$$

$$\begin{aligned}
& E \int_0^L \int_A z g \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx + E \int_0^L \int_A z^2 \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right] \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx \\
& \int_A z dA = 0 \\
& EI \int_0^L \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right] \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dx \\
& EI \left[ \left( \frac{16}{L^2} x - \frac{24}{L^3} x^2 + \frac{12}{L^4} x^3 \right) + \left( \frac{8}{L^2} x - \frac{18}{L^3} x^2 + \frac{12}{L^4} x^3 \right) \right] \Big|_0^L \\
& EI \left( \frac{4}{L} \bar{\theta}_1 + \frac{2}{L} \bar{\theta}_2 \right) \\
& \frac{EI}{L} (4\bar{\theta}_1 + 2\bar{\theta}_2) \\
& M_1 = EALg_1g + \frac{EI}{L} (4\bar{\theta}_1 + 2\bar{\theta}_2) \tag{A.11}
\end{aligned}$$

• Momento fletor  $M_2$

$$\begin{aligned}
M_2 &= g_2 \int_v \sigma dv + \int_v \sigma z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv \\
g_2 &= \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \\
\Rightarrow \int_v \sigma dv &= \int_v E \varepsilon dv \quad \varepsilon = g + z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right] \\
\int_v \sigma dv &= \int_v E \left\{ g + z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right] \right\} dv \\
\int_v \sigma dv &= E \int_v g dv + E \int_v z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right] dv \\
\int_v \sigma dv &= E \int_0^L \int_A g dA dx + E \int_0^L \int_A z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right] dA dx \\
\int_A z dA &= 0 \\
\int_v \sigma dv &= E \int_0^L \int_A g dA dx \\
\int_v \sigma dv &= EAg \int_0^L dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_v \sigma dv &= EA g(x) \Big|_0^L \\
\int_v \sigma dv &= EALg \\
\Rightarrow \int_v \sigma z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv & \\
\int_v E \varepsilon z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv & \quad \varepsilon = g + z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right] \\
\int_v E \left\{ g + z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right] \right\} z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv & \\
E \int_v z g \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv + E \int_v z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right] z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv & \\
E \int_v z g \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv + E \int_v z^2 \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right] \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv & \\
E \int_0^L \int_A z g \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx + E \int_0^L \int_A z^2 \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right] \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx & \\
\int_A z dA = 0 & \\
EI \int_0^L \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right] \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dx & \\
EI \left[ \left( \frac{8}{L^2} x - \frac{18}{L^3} x^2 + \frac{12}{L^4} x^3 \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{4}{L^2} x - \frac{12}{L^3} x^2 + \frac{12}{L^4} x^3 \right) \bar{\theta}_2 \right] \Big|_0^L & \\
EI \left( \frac{2}{L} \bar{\theta}_1 + \frac{4}{L} \bar{\theta}_2 \right) & \\
\frac{EI}{L} (2\bar{\theta}_1 + 4\bar{\theta}_2) & \\
M_2 = EALg_2g + \frac{EI}{L} (2\bar{\theta}_1 + 4\bar{\theta}_2) & \tag{A.12}
\end{aligned}$$

## MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE

### • Coeficiente $K_{11}$

$$K_{11} = \frac{\partial N}{\partial \bar{u}}$$

$$N = \int_v \frac{\sigma}{L} dv \quad N = \frac{1}{L} \int_v \sigma dv$$

$$\frac{\partial N}{\partial \bar{u}} = \frac{1}{L} \int_v E \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{u}} dv$$

$$\varepsilon = \frac{\bar{u}}{L} + \frac{1}{15} \bar{\theta}_1^2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \bar{\theta}_2 + \frac{1}{15} \bar{\theta}_2^2 + z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right]$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{u}} = \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{u}} + \frac{1}{15} \frac{\partial \bar{\theta}_1^2}{\partial \bar{u}} - \frac{1}{30} \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{u}} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{u}} + \frac{1}{15} \frac{\partial \bar{\theta}_2^2}{\partial \bar{u}} + z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{u}} + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{u}} \right]$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{u}} = \frac{1}{L}$$

$$K_{11} = \frac{1}{L} \int_v E \left( \frac{1}{L} \right) dv \tag{A.13a}$$

$$K_{11} = \frac{1}{L} E \frac{1}{L} \int_0^L \int_A dA dx$$

$$K_{11} = \frac{1}{L} EA \frac{1}{L} \int_0^L dx$$

$$K_{11} = \frac{1}{L} EA \frac{1}{L} (x) \Big|_0^L$$

$$K_{11} = \frac{1}{L} EA \frac{1}{L} L$$

$$K_{11} = \frac{EA}{L} \tag{A.13b}$$

### • Coeficiente $K_{22}$

$$K_{22} = \frac{\partial M_1}{\partial \bar{\theta}_1}$$

$$M_1 = \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \int_v \sigma dv + \int_v \sigma z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial \bar{\theta}_1} = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_1} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \int_v \sigma dv + g_1 \int_v E \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{\theta}_1} dv + \int_v \sigma z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv$$

$$\varepsilon = g + z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_1} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) = \left( \frac{2}{15} \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{\theta}_1} - \frac{1}{30} \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{\theta}_1} \right) = \frac{2}{15}$$

$$\Rightarrow \int_v \sigma dv = \int_v \hat{E} \varepsilon dv$$

$$\int_v \sigma dv = \int_v E \left\{ g + z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right] \right\} dv$$

$$\int_v \sigma dv = Eg \int_v dv + E \int_v z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right] dv$$

$$\int_v \sigma dv = Eg \int_0^L \int_A dA dx + E \int_0^L \int_A z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right] dA dx$$

$$\int_A z dA = 0$$

$$\int_v \sigma dv = Eg \int_0^L \int_A dA dx$$

$$\int_v \sigma dv = EA g \int_0^L dx$$

$$\int_v \sigma dv = EA g (x) \Big|_0^L$$

$$\int_v \sigma dv = EALg$$

$$\int_v \sigma dv = EA g L$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_1} \int_v \sigma dv = \int_v E \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{\theta}_1} dv$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{\theta}_1} = \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\theta}_1} + \frac{1}{15} \frac{\partial \bar{\theta}_1^2}{\partial \bar{\theta}_1} - \frac{1}{30} \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{\theta}_1} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{\theta}_1} + \frac{1}{15} \frac{\partial \bar{\theta}_2^2}{\partial \bar{\theta}_1} + z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{\theta}_1} + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{\theta}_1} \right]$$

$$\int_{\nu} E \left[ \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 + z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \right] d\nu$$

$$\int_{\nu} E \left[ g_1 + z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \right] d\nu$$

$$\int_{\nu} E \left[ g_1 + z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \right] d\nu = \int_{\nu} E g_1 d\nu + \int_{\nu} E z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) d\nu \quad (\text{A.14a})$$

$$\int_0^L \int_A E g_1 dA dx + \int_{\nu} E z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx$$

$$\int_A z dA = 0$$

$$\int_0^L \int_A E g_1 dA dx$$

$$E A g_1 \int_0^L dx$$

$$E A g_1(x) \Big|_0^L$$

$$E A g_1 L$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_1} \int_{\nu} \sigma z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) d\nu = \int_{\nu} E \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{\theta}_1} z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) d\nu$$

$$\varepsilon = \frac{\bar{u}}{L} + \frac{1}{15} \bar{\theta}_1^2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \bar{\theta}_2 + \frac{1}{15} \bar{\theta}_2^2 + z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right]$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{\theta}_1} = \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\theta}_1} + \frac{1}{15} \frac{\partial \bar{\theta}_1^2}{\partial \bar{\theta}_1} - \frac{1}{30} \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{\theta}_1} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{\theta}_1} + \frac{1}{15} \frac{\partial \bar{\theta}_2^2}{\partial \bar{\theta}_1} + z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{\theta}_1} + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{\theta}_1} \right]$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{\theta}_1} = g_1 + z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)$$

$$\int_{\nu} E \left[ g_1 + z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \right] z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) d\nu$$

$$\int_{\nu} Ez \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) g_1 d\nu + \int_{\nu} Ez^2 \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 d\nu \quad (\text{A.14b})$$

$$\int_0^L \int_A Ez \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) g_1 dA dx + \int_0^L \int_A Ez^2 \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dA dx$$

$$\int_A z dA = 0$$

$$\int_0^L \int_A Ez^2 \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dA dx$$

$$EI \int_0^L \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dx$$

$$EI \left( \frac{16}{L^2} x - \frac{24}{L^3} x^2 + \frac{12}{L^4} x^3 \right) \Big|_0^L$$

$$EI \frac{4}{L}$$

$$\frac{4EI}{L}$$

$$\circ \frac{2}{15} EA g L$$

$$\circ EAL g_1^2$$

$$\circ \frac{4EI}{L}$$

$$K_{22} = EAL \left( \frac{2}{15} g + g_1^2 \right) + \frac{4EI}{L} \quad (\text{A.14c})$$

• Coeficiente  $K_{33}$

$$K_{33} = \frac{\partial M_2}{\partial \bar{\theta}_2}$$

$$M_2 = \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \int_{\nu} \sigma d\nu + \int_{\nu} \sigma z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) d\nu$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial \bar{\theta}_2} = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \int_{\nu} \sigma d\nu + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2} \int_{\nu} \sigma d\nu + \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2} \int_{\nu} \sigma z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) d\nu$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= g + z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right] \\
\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) &= \left( \frac{2}{15} \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{\theta}_2} - \frac{1}{30} \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{\theta}_2} \right) = \frac{2}{15} \\
\Rightarrow \int_v \sigma dv &= \int_v E \varepsilon dv \\
\int_v \sigma dv &= \int_v E \left\{ g + z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right] \right\} dv \\
\int_v \sigma dv &= E \int_v g dv + E \int_v z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right] dv \\
\int_v \sigma dv &= E g \int_0^L \int_A dA dx + E \int_0^L \int_A z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right] dA dx \\
\int_A z dA &= 0 \\
\int_v \sigma dv &= E g \int_0^L \int_A dA dx \\
\int_v \sigma dv &= E A g \int_0^L dx \\
\int_v \sigma dv &= E A g (x) \Big|_0^L \\
\int_v \sigma dv &= E A g L \\
\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2} \int_v \sigma dv &= \int_v E \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{\theta}_2} dv \\
\frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{\theta}_2} &= \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\theta}_2} + \frac{1}{15} \frac{\partial \bar{\theta}_1^2}{\partial \bar{\theta}_2} - \frac{1}{30} \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{\theta}_2} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{\theta}_2} + \frac{1}{15} \frac{\partial \bar{\theta}_2^2}{\partial \bar{\theta}_2} + z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{\theta}_2} + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{\theta}_2} \right] \\
\frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{\theta}_2} &= g_2 + z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \\
g_2 &= \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \\
\int_v E \left[ g_2 + z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \right] dv &= \int_v E g_2 dv + \int_v E z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv \tag{A.15a} \\
\int_0^L \int_A E g_2 dA dx &+ \int_v E z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_A z dA = 0 \\
& \int_0^L \int_A E g_2 dA dx \\
& E A g_2 \int_0^L dx \\
& E A g_2 (x) \Big|_0^L \\
& E A g_2 L \\
& \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta_2} \int_v \sigma z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv = \int_v E \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_2} z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv \\
& \varepsilon = \frac{\bar{u}}{L} + \frac{1}{15} \bar{\theta}_1^2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \bar{\theta}_2 + \frac{1}{15} \bar{\theta}_2^2 + z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right] \\
& \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_2} = \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta_2} + \frac{1}{15} \frac{\partial \bar{\theta}_1^2}{\partial \theta_2} - \frac{1}{30} \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \theta_2} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \theta_2} + \frac{1}{15} \frac{\partial \bar{\theta}_2^2}{\partial \theta_2} + z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \theta_2} + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \theta_2} \right] \\
& \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_2} = g_2 + z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \\
& \int_v E \left[ g_2 + z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \right] z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv \\
& \int_v E z g_2 \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv + \int_v E z^2 \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dv \tag{A.15b} \\
& \int_0^L \int_A E z g_2 \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx + \int_0^L \int_A E z^2 \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dA dx \\
& \int_A z dA = 0 \\
& \int_0^L \int_A E z^2 \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dA dx \\
& E I \int_0^L \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dx \\
& E I \left( \frac{4}{L^2} x - \frac{12}{L^3} x^2 + \frac{12}{L^4} x^3 \right) \Big|_0^L \\
& E I \frac{4}{L} \\
& \frac{4 E I}{L}
\end{aligned}$$

- $\frac{2}{15}EA gL$
- $EALg_2^2$
- $\frac{4EI}{L}$

$$K_{33} = EAL\left(\frac{2}{15}g + g_2^2\right) + \frac{4EI}{L} \quad (\text{A.15c})$$

• Coeficiente  $K_{12} = K_{21}$

$$K_{12} = \frac{\partial N}{\partial \bar{\theta}_1}$$

$$N = \int_v \frac{\sigma}{L} dv \quad N = \frac{1}{L} \int_v \sigma dv$$

$$\frac{\partial N}{\partial \bar{\theta}_1} = \frac{1}{L} \int_v E \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{\theta}_1} dv$$

$$\varepsilon = \frac{\bar{u}}{L} + \frac{1}{15}\bar{\theta}_1^2 - \frac{1}{30}\bar{\theta}_1\bar{\theta}_2 + \frac{1}{15}\bar{\theta}_2^2 + z\left[\left(\frac{4}{L} - 6\frac{x}{L^2}\right)\bar{\theta}_1 + \left(\frac{2}{L} - 6\frac{x}{L^2}\right)\bar{\theta}_2\right]$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{\theta}_1} = \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\theta}_1} + \frac{1}{15} \frac{\partial \bar{\theta}_1^2}{\partial \bar{\theta}_1} - \frac{1}{30} \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{\theta}_1} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{\theta}_1} + \frac{1}{15} \frac{\partial \bar{\theta}_2^2}{\partial \bar{\theta}_1} + z\left[\left(\frac{4}{L} - 6\frac{x}{L^2}\right) \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{\theta}_1} + \left(\frac{2}{L} - 6\frac{x}{L^2}\right) \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{\theta}_1}\right]$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{\theta}_1} = \frac{2}{15}\bar{\theta}_1 - \frac{1}{30}\bar{\theta}_2 + z\left(\frac{4}{L} - 6\frac{x}{L^2}\right)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{\theta}_1} = g_1 + z\left(\frac{4}{L} - 6\frac{x}{L^2}\right)$$

$$K_{12} = \frac{1}{L} \int_v E \left[ g_1 + z\left(\frac{4}{L} - 6\frac{x}{L^2}\right) \right] dv$$

$$K_{12} = \frac{1}{L} \int_v E \left[ g_1 + z\left(\frac{4}{L} - 6\frac{x}{L^2}\right) \right] dv$$

$$K_{12} = \frac{1}{L} \int_v E \left[ g_1 + z\left(\frac{4}{L} - 6\frac{x}{L^2}\right) \right] dv = \frac{1}{L} \int_v E g_1 dv + \frac{1}{L} \int_v E z \left(\frac{4}{L} - 6\frac{x}{L^2}\right) dv \quad (\text{A.16a})$$

$$K_{12} = \frac{1}{L} \int_0^L \int_A E g_1 dA dx + \frac{1}{L} \int_v E z \left(\frac{4}{L} - 6\frac{x}{L^2}\right) dA dx$$

$$\int_A z dA = 0$$

$$\begin{aligned}
K_{12} &= \frac{1}{L} \int_0^L \int_A E g_1 dA dx \\
K_{12} &= \frac{1}{L} E A g_1 \int_0^L dx \\
K_{12} &= \frac{1}{L} E A g_1 (x) \Big|_0^L \\
K_{12} &= \frac{1}{L} E A g_1 L \\
K_{12} &= E A g_1
\end{aligned} \tag{A.16b}$$

• Coeficiente  $K_{13} = K_{31}$

$$\begin{aligned}
K_{13} &= \frac{\partial N}{\partial \bar{\theta}_2} \\
N &= \int_v \frac{\sigma}{L} dv \quad N = \frac{1}{L} \int \sigma dv \\
\frac{\partial N}{\partial \bar{\theta}_2} &= \frac{1}{L} \int_v E \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{\theta}_2} dv \\
\varepsilon &= \frac{\bar{u}}{L} + \frac{1}{15} \bar{\theta}_1^2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \bar{\theta}_2 + \frac{1}{15} \bar{\theta}_2^2 + z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right] \\
\frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{\theta}_2} &= \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\theta}_2} + \frac{1}{15} \frac{\partial \bar{\theta}_1^2}{\partial \bar{\theta}_2} - \frac{1}{30} \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{\theta}_2} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{\theta}_2} + \frac{1}{15} \frac{\partial \bar{\theta}_2^2}{\partial \bar{\theta}_2} + z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{\theta}_2} + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{\theta}_2} \right] \\
\frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{\theta}_2} &= \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 + z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \\
\frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{\theta}_2} &= g_2 + z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \\
K_{13} &= \frac{1}{L} \int_v E \left[ g_2 + z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \right] dv \\
K_{13} &= \frac{1}{L} \int_v E \left[ g_2 + z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \right] dv = \frac{1}{L} \int_v E g_2 dv + \frac{1}{L} \int_v E z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv
\end{aligned} \tag{A.17a}$$

$$\begin{aligned}
K_{113} &= \frac{1}{L} \int_0^L \int_A E g_2 dA dx + \frac{1}{L} \int_v E z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx \\
\int_A z dA &= 0
\end{aligned}$$

$$K_{13} = \frac{1}{L} \int_0^L \int_A E g_2 dA dx$$

$$K_{13} = \frac{1}{L} EA \int_0^L g_2 dx$$

$$K_{13} = \frac{1}{L} EA g_2 (x) \Big|_0^L$$

$$K_{13} = \frac{1}{L} EA g_2 L$$

$$K_{13} = EA g_2 \tag{A.17b}$$

• Coeficiente  $K_{23} = K_{32}$

$$K_{23} = \frac{\partial M_1}{\partial \bar{\theta}_2}$$

$$M_1 = \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \int_v \sigma dv + \int_v \sigma z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial \bar{\theta}_2} = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \int_v \sigma dv + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2} \int_v \sigma dv + \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2} \int_v \sigma z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv$$

$$\varepsilon = g + z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) = \left( \frac{2}{15} \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{\theta}_2} - \frac{1}{30} \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{\theta}_2} \right) = -\frac{1}{30}$$

$$\Rightarrow \int_v \sigma dv = \int_v E \varepsilon dv$$

$$\int_v \sigma dv = \int_v E \left\{ g + z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right] \right\} dv$$

$$\int_v \sigma dv = E \int_v g dv + E \int_v z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right] dv$$

$$\int_v \sigma dv = E \int_0^L \int_A g dA dx + E \int_0^L \int_A z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right] dA dx$$

$$\int_A z dA = 0$$

$$\int_v \sigma dv = E \int_0^L \int_A g dA dx$$

$$\int_v \sigma dv = EA g \int_0^L dx$$

$$\int_v \sigma dv = EA g(x) \Big|_0^L$$

$$\int_v \sigma dv = EALg$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta_2} \int_v \sigma dv = \int_v E \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_2} dv$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_2} = \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta_2} + \frac{1}{15} \frac{\partial \bar{\theta}_1^2}{\partial \theta_2} - \frac{1}{30} \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \theta_2} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \theta_2} + \frac{1}{15} \frac{\partial \bar{\theta}_2^2}{\partial \theta_2} + z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \theta_2} + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \theta_2} \right]$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_2} = \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 + z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_2} = g_2 + z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)$$

$$\int_v E \left[ g_2 + z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \right] dv$$

$$\int_v E \left[ g_2 + z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \right] dv = \int_v E g_2 dv + \int_v E z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv \quad (\text{A.18a})$$

$$\int_0^L \int_A E g_2 dA dx + \int_v E z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx$$

$$\int_A z dA = 0$$

$$\int_0^L \int_A E g_2 dA dx$$

$$EA g_2 \int_0^L dx$$

$$EA g_2(x) \Big|_0^L$$

$$EALg_2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2} \int_v \sigma z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv = \int_v E \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{\theta}_2} z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv$$

$$\varepsilon = g + z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_1 + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \bar{\theta}_2 \right]$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{\theta}_2} = \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\theta}_2} + \frac{1}{15} \frac{\partial \bar{\theta}_1^2}{\partial \bar{\theta}_2} - \frac{1}{30} \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{\theta}_2} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{\theta}_2} + \frac{1}{15} \frac{\partial \bar{\theta}_2^2}{\partial \bar{\theta}_2} + z \left[ \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{\theta}_2} + \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{\theta}_2} \right]$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{\theta}_2} = \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 + z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{\theta}_2} = g_2 + z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)$$

$$\int_v E \left[ g_2 + z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \right] z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv$$

$$\int_v E z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) g_2 dv + \int_v E z^2 \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dv \quad (\text{A.18b})$$

$$\int_0^L \int_A E z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) g_2 dA dx + \int_0^L \int_A E z^2 \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx$$

$$\int_A z dA = 0$$

$$\int_0^L \int_A E z^2 \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx$$

$$EI \int_0^L \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dx$$

$$EI \left( \frac{8}{L^2} x - \frac{18}{L^3} x^2 + \frac{12}{L^4} x^3 \right) \Big|_0^L$$

$$EI \frac{2}{L}$$

$$\frac{2EI}{L}$$

$$\circ - \frac{1}{30} EAgL$$

$$\circ \quad EALg_1g_2$$

$$\circ \quad \frac{2EI}{L}$$

$$K_{23} = EAL \left( -\frac{1}{30}g + g_1g_2 \right) + \frac{2EI}{L} \quad (\text{A.18c})$$

### A3 - ELEMENTO DE VIGA TIMOSHENKO

#### VETOR DE FORÇAS INTERNAS

- Força axial  $N$

$$N = \int_v \frac{\sigma}{L} dv$$

$$\sigma = E\varepsilon \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} - kz = \frac{\bar{u}}{L} - \frac{\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1}{L} z$$

$$N = \frac{1}{L} \int_v E \frac{\bar{u}}{L} dA dx$$

$$N = \frac{1}{L} \int_0^L \int_A E \frac{\bar{u}}{L} dA dx$$

$$N = \frac{1}{L} EA \frac{\bar{u}}{L} \int_0^L dx$$

$$N = \frac{1}{L} EA \frac{\bar{u}}{L} (x) \Big|_0^L$$

$$N = \frac{1}{L} EA \frac{\bar{u}}{L} L$$

$$N = EA \frac{\bar{u}}{L} \quad (\text{A.19})$$

• Momento fletor  $M_1$

$$M_1 = \int_v \left( \frac{\sigma}{L} z - \frac{\tau}{2} \right) dv$$

$$M_1 = \frac{1}{L} \int_v \sigma z dv - \int_v \frac{\tau}{2} dv$$

$$\sigma = E\varepsilon \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} - kz = \frac{\bar{u}}{L} - \frac{\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1}{L} z$$

$$\tau = G\gamma \quad \gamma = \frac{\partial w}{\partial x} - \theta = -\left(1 - \frac{x}{L}\right) \bar{\theta}_1 - \frac{x}{L} \bar{\theta}_2$$

$$M_1 = \frac{1}{L} \int_v E z^2 \left( \frac{\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2}{L} \right) dv - \int_v \frac{G}{2} \left[ -\left(1 - \frac{x}{L}\right) \bar{\theta}_1 - \frac{x}{L} \bar{\theta}_2 \right] dv$$

$$M_1 = \frac{1}{L} \left( \frac{\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2}{L} \right) \int_0^L \int_A E z^2 dA dx - \frac{G}{2} \int_0^L \int_A \left[ -\left(1 - \frac{x}{L}\right) \bar{\theta}_1 - \frac{x}{L} \bar{\theta}_2 \right] dA dx$$

$$M_1 = \frac{1}{L} EI \left( \frac{\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2}{L} \right) \int_0^L dx - \frac{G}{2} A \int_0^L \left[ -\left(1 - \frac{x}{L}\right) \bar{\theta}_1 - \frac{x}{L} \bar{\theta}_2 \right] dx$$

$$M_1 = \frac{1}{L} EI \left( \frac{\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2}{L} \right) \int_0^L dx - \frac{G}{2} A \left[ -x \bar{\theta}_1 + \frac{x^2}{2L} \bar{\theta}_1 + \frac{x^2}{2L} \bar{\theta}_2 \right]_0^L$$

$$M_1 = \frac{1}{L} EI \left( \frac{\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2}{L} \right) (x) \Big|_0^L - \frac{GA}{2} \left[ \frac{-L}{2} (\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2) \right]$$

$$M_1 = \frac{1}{L} EI \left( \frac{\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2}{L} \right) L + \frac{1}{4} GAL (\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2)$$

$$M_1 = \frac{EI}{L} (\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2) + \frac{1}{4} GAL (\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2) \tag{A.20}$$

• Momento fletor  $M_2$

$$M_2 = \int_v \left( -\frac{\sigma}{L} z - \frac{\tau}{2} \right) dv$$

$$M_2 = -\frac{1}{L} \int_v \sigma z dv - \int_v \frac{\tau}{2} dv$$

$$\sigma = E\varepsilon \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} - kz = \frac{\bar{u}}{L} - \frac{\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1}{L} z$$

$$\tau = G\gamma \quad \gamma = \frac{\partial w}{\partial x} - \theta = -\left(1 - \frac{x}{L}\right) \bar{\theta}_1 - \frac{x}{L} \bar{\theta}_2$$

$$M_2 = \int_v \left( -\frac{\sigma}{L} z - \frac{\tau}{2} \right) dv$$

$$M_2 = \frac{1}{L} \int_v E z^2 \left( \frac{\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1}{L} \right) dv - \int_v \frac{G}{2} \left[ -\left(1 - \frac{x}{L}\right) \bar{\theta}_1 - \frac{x}{L} \bar{\theta}_2 \right] dv$$

$$M_2 = \frac{1}{L} \left( \frac{\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1}{L} \right) \int_0^L \int_A E z^2 dA dx - \frac{G}{2} \int_0^L \int_A \left[ -\left(1 - \frac{x}{L}\right) \bar{\theta}_1 - \frac{x}{L} \bar{\theta}_2 \right] dA dx$$

$$M_2 = \frac{1}{L} EI \left( \frac{\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1}{L} \right) \int_0^L dx - \frac{G}{2} A \int_0^L \left[ -\left(1 - \frac{x}{L}\right) \bar{\theta}_1 - \frac{x}{L} \bar{\theta}_2 \right] dx$$

$$M_2 = \frac{1}{L} EI \left( \frac{\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1}{L} \right) \int_0^L dx - \frac{G}{2} A \left[ -x\bar{\theta}_1 + \frac{x^2}{2L} \bar{\theta}_1 + \frac{x^2}{2L} \bar{\theta}_2 \right] \Big|_0^L$$

$$M_2 = \frac{1}{L} EI \left( \frac{\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1}{L} \right) (x) \Big|_0^L - \frac{GA}{2} \left[ \frac{-L}{2} (\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2) \right]$$

$$M_2 = \frac{1}{L} EI \left( \frac{\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1}{L} \right) L + \frac{1}{4} GAL (\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2)$$

$$M_2 = \frac{EI}{L} (\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1) + \frac{1}{4} GAL (\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2) \tag{A.21}$$

### MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE

- Coeficiente  $K_{11}$

$$K_{11} = \frac{\partial N}{\partial \bar{u}}$$

$$N = \int_v \frac{\sigma}{L} dv$$

$$\frac{\partial N}{\partial \bar{u}} = \frac{1}{L} \int_v E \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{u}} dv \quad \varepsilon = \frac{\bar{u}}{L} - \frac{\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1}{L} z$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{u}} = \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{u}} - \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{u}} z + \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{u}} z = \frac{1}{L}$$

$$K_{11} = \frac{1}{L} \int_v E \left[ \frac{1}{L} \right] dv$$

$$K_{11} = \frac{1}{L} E \frac{1}{L} \int_0^L \int_A dA dx$$

$$K_{11} = \frac{1}{L} EA \frac{1}{L} \int_0^L dx$$

$$K_{11} = \frac{1}{L} EA \frac{1}{L} (x) \Big|_0^L$$

$$K_{11} = \frac{1}{L} EA \frac{1}{L} L$$

$$K_{11} = \frac{EA}{L}$$

(A.22)

• Coeficiente  $K_{22}$

$$K_{22} = \frac{\partial M_1}{\partial \bar{\theta}_1}$$

$$M_1 = \int_v \left( \frac{\sigma}{L} z - \frac{\tau}{2} \right) dv$$

$$M_1 = \frac{1}{L} \int_v \sigma z dv - \int_v \frac{\tau}{2} dv$$

$$\sigma = E\varepsilon \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} - kz = \frac{\bar{u}}{L} - \frac{\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1}{L} z$$

$$\tau = G\gamma \quad \gamma = \frac{\partial w}{\partial x} - \theta = -\left(1 - \frac{x}{L}\right) \bar{\theta}_1 - \frac{x}{L} \bar{\theta}_2$$

$$\begin{aligned}
M_1 &= \frac{1}{L} \int_v E z^2 \left( \frac{\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2}{L} \right) dv - \int_v \frac{G}{2} \left[ - \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \bar{\theta}_1 - \frac{x}{L} \bar{\theta}_2 \right] dv \\
\frac{\partial M_1}{\partial \bar{\theta}_1} &= \frac{1}{L} \int_v z E \left( \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\theta}_1} - \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{\theta}_1} z + \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{\theta}_1} z \right) dv - \int_v \frac{G}{2} \left[ - \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{\theta}_1} - \frac{x}{L} \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{\theta}_1} \right] dv \\
K_{22} &= \frac{1}{L} \int_v z E \left( \frac{1}{L} z \right) dv - \int_v \frac{G}{2} \left[ - \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \right] dv \\
K_{22} &= \frac{1}{L} E \frac{1}{L} \int_v z^2 dv + \frac{G}{2} \int_v \left( 1 - \frac{x}{L} \right) dv \\
K_{22} &= \frac{1}{L} E \frac{1}{L} \int_0^L \int_A z^2 dA dx + \frac{G}{2} \int_0^L \int_A \left( 1 - \frac{x}{L} \right) dA dx \\
K_{22} &= \frac{1}{L} E \frac{1}{L} I \int_0^L dx + \frac{GA}{2} \int_0^L \left( 1 - \frac{x}{L} \right) dx \\
K_{22} &= \frac{1}{L} E \frac{1}{L} I (x) \Big|_0^L + \frac{GA}{2} \left( x - \frac{x^2}{2L} \right) \Big|_0^L \\
K_{22} &= \frac{1}{L} E \frac{1}{L} IL + \frac{GA}{2} \frac{L}{2} \\
K_{22} &= \frac{EI}{L} + \frac{1}{4} LGA \tag{A.23}
\end{aligned}$$

• Coeficiente  $K_{33}$

$$K_{33} = \frac{\partial M_2}{\partial \bar{\theta}_2}$$

$$M_2 = \int_v \left( -\frac{\sigma}{L} z - \frac{\tau}{2} \right) dv$$

$$M_2 = -\frac{1}{L} \int_v \sigma z dv - \int_v \frac{\tau}{2} dv$$

$$\sigma = E\varepsilon \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} - kz = \frac{\bar{u}}{L} - \frac{\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1}{L} z$$

$$\tau = G\gamma \quad \gamma = \frac{\partial w}{\partial x} - \theta = -\left(1 - \frac{x}{L}\right)\bar{\theta}_1 - \frac{x}{L}\bar{\theta}_2$$

$$M_2 = -\frac{1}{L} \int_v zE \left( \frac{\bar{u}}{L} - \frac{\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1}{L} z \right) dv - \int_v \frac{G}{2} \left[ -\left(1 - \frac{x}{L}\right)\bar{\theta}_1 - \frac{x}{L}\bar{\theta}_2 \right] dv$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial \theta_2} = -\frac{1}{L} \int_v zE \left( \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta_2} - \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \theta_2} z + \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \theta_2} z \right) dv - \int_v \frac{G}{2} \left[ -\left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \theta_2} - \frac{x}{L} \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \theta_2} \right] dv$$

$$K_{33} = -\frac{1}{L} \int_v zE \left( -\frac{1}{L} z \right) dv - \int_v \frac{G}{2} \left( -\frac{x}{L} \right) dv$$

$$K_{33} = \frac{1}{L} E \frac{1}{L} \int_v z^2 dv + \frac{G}{2L} \int_v (x) dv$$

$$K_{33} = \frac{1}{L} E \frac{1}{L} \int_0^L \int_A z^2 dA dx + \frac{G}{2L} \int_0^L \int_A (x) dA dx$$

$$K_{33} = \frac{1}{L} E \frac{1}{L} I \int_0^L dx + \frac{GA}{2L} \int_0^L (x) dx$$

$$K_{33} = \frac{1}{L} E \frac{1}{L} I (x) \Big|_0^L + \frac{GA}{2L} \left( \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^L$$

$$K_{33} = \frac{1}{L} E \frac{1}{L} IL + \frac{GA}{2L} \frac{L^2}{2}$$

$$K_{33} = \frac{EI}{L} + \frac{1}{4} GAL \tag{A.24}$$

• Coeficiente  $K_{12} = K_{21}$

$$K_{12} = \frac{\partial N}{\partial \theta_1}$$

$$N = \int_v \frac{\sigma}{L} dv$$

$$\frac{\partial N}{\partial \theta_1} = \frac{1}{L} \int_v E \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_1} dv \quad \varepsilon = \frac{\bar{u}}{L} - \frac{\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1}{L} z$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{\theta}_1} = \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\theta}_1} - \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{\theta}_1} z + \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{\theta}_1} z = \frac{1}{L} z$$

$$K_{12} = \frac{1}{L} \int_{\mathcal{V}} E \frac{1}{L} z dv$$

$$K_{12} = \frac{1}{L} E \frac{1}{L} \int_{\mathcal{V}} z dv$$

$$K_{12} = \frac{1}{L} E \frac{1}{L} \int_0^L \int_A z dA dx \quad \int_A z dA = 0$$

$$K_{12} = 0 \tag{A.25}$$

• Coeficiente  $K_{13} = K_{31}$

$$K_{13} = \frac{\partial N}{\partial \bar{\theta}_2}$$

$$N = \int_{\mathcal{V}} \frac{\sigma}{L} dv$$

$$\frac{\partial N}{\partial \bar{\theta}_2} = \frac{1}{L} \int_{\mathcal{V}} E \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{\theta}_2} dv \quad \varepsilon = \frac{\bar{u}}{L} - \frac{\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1}{L} z$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{\theta}_2} = \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\theta}_2} - \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{\theta}_2} z + \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{\theta}_2} z = -\frac{1}{L} z$$

$$K_{13} = \frac{1}{L} \int_{\mathcal{V}} E \left( -\frac{1}{L} z \right) dv$$

$$K_{13} = -\frac{1}{L} E \frac{1}{L} \int_{\mathcal{V}} z dv$$

$$K_{13} = -\frac{1}{L} E \frac{1}{L} \int_0^L \int_A z dA dx \quad \int_A z dA = 0$$

$$K_{13} = 0 \tag{A.26}$$

• Coeficiente  $K_{23} = K_{32}$

$$K_{23} = \frac{\partial M_2}{\partial \theta_1}$$

$$M_2 = \int_v \left( -\frac{\sigma}{L} z - \frac{\tau}{2} \right) dv$$

$$M_2 = -\frac{1}{L} \int_v \sigma z dv - \int_v \frac{\tau}{2} dv$$

$$\sigma = E\varepsilon \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} - kz = \frac{\bar{u}}{L} - \frac{\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1}{L} z$$

$$\tau = G\gamma \quad \gamma = \frac{\partial w}{\partial x} - \theta = -\left(1 - \frac{x}{L}\right) \bar{\theta}_1 - \frac{x}{L} \bar{\theta}_2$$

$$M_2 = -\frac{1}{L} \int_v z E \left( \frac{\bar{u}}{L} - \frac{\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1}{L} z \right) dv - \int_v \frac{G}{2} \left[ -\left(1 - \frac{x}{L}\right) \bar{\theta}_1 - \frac{x}{L} \bar{\theta}_2 \right] dv$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial \theta_1} = -\frac{1}{L} \int_v z E \left( \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta_1} - \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \theta_1} z + \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \theta_1} z \right) dv - \int_v \frac{G}{2} \left[ -\left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \theta_1} - \frac{x}{L} \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \theta_1} \right] dv$$

$$K_{23} = -\frac{1}{L} \int_v z E \frac{1}{L} z dv - \int_v \frac{G}{2} \left[ -\left(1 - \frac{x}{L}\right) \right] dv$$

$$K_{23} = -\frac{1}{L} E \frac{1}{L} \int_v z^2 dv + \frac{G}{2} \int_v \left(1 - \frac{x}{L}\right) dv$$

$$K_{23} = -\frac{1}{L} E \frac{1}{L} \int_0^L \int_A z^2 dA dx + \frac{G}{2} \int_0^L \int_A \left(1 - \frac{x}{L}\right) dA dx$$

$$K_{23} = -\frac{1}{L} E \frac{1}{L} I \int_0^L dx + \frac{GA}{2} \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx$$

$$K_{23} = -\frac{1}{L} E \frac{1}{L} I (x) \Big|_0^L + \frac{GA}{2} \left( x - \frac{x^2}{2L} \right) \Big|_0^L$$

$$K_{23} = -\frac{1}{L} E \frac{1}{L} IL + \frac{GA}{2} \frac{L}{2}$$

$$K_{23} = -\frac{EI}{L} + \frac{1}{4} GAL$$

(A.27)

## Apêndice B

### DEDUÇÃO DOS COEFICIENTES DOS VETORES DE FORÇAS INTERNAS E DAS MATRIZES DE RIGIDEZ TANGENTE DOS ELEMENTOS FINITOS PROPOSTOS VIA INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Neste apêndice é mostrada a dedução das equações via integração de Gauss que fornecem os coeficientes do vetor de forças internas e da matriz de rigidez tangente local dos elementos de viga Bernoulli, Bernoulli 2 e Timoshenko.

#### B1 – ELEMENTO DE VIGA BERNOULLI

Na obtenção das equações dos coeficientes por integração numérica deste elemento fez-se uso de dois pontos de Gauss ao longo do eixo-x. As posições dos mesmos e seus respectivos pesos foram (ver Figura 5.1):

$$x_1 = \frac{L}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right); \left( \frac{L}{2} \right)$$
$$x_2 = \frac{L}{2} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right); \left( \frac{L}{2} \right).$$

No presente apêndice,  $f(x_i)$  denota o valor do polinômio no ponto  $x_i$  e,  $w(x_i)$  o seu peso.

#### VETOR DE FORÇAS INTERNAS

- Força axial  $N$

$$N = \int_v \frac{\sigma}{L} dv$$

$$N = \frac{1}{L} \int_0^L \int_A \sigma dA dx$$

$$N = \frac{1}{L} \int_0^L C dx = \frac{1}{L} C_1 f(x_1) w(x_1) + \frac{1}{L} C_2 f(x_2) w(x_2)$$

$$C = \int_A \sigma dA \quad C_1 = \int_{A_1} \sigma dA_1 \quad C_2 = \int_{A_2} \sigma dA_2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{L} C_1 (1) \left( \frac{L}{2} \right) + \frac{1}{L} C_2 (1) \left( \frac{L}{2} \right) \\
&= \left( \frac{1}{2} \right) \int_{A_1} \sigma dA_1 + \left( \frac{1}{2} \right) \int_{A_2} \sigma dA_2 \\
&= \frac{1}{2} \left[ \int_{A_1} \sigma dA_1 + \int_{A_2} \sigma dA_2 \right] \tag{B.1}
\end{aligned}$$

• Momento fletor  $M_1$

$$M_1 = \int_v \sigma z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv = \int_0^L \int_A \sigma z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx$$

$$M_1 = \int_0^L C \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dx = C_1 f(x_1) w(x_1) + C_2 f(x_2) w(x_2)$$

$$C = \int_A \sigma z dA \quad C_1 = \int_{A_1} \sigma z dA_1 \quad C_2 = \int_{A_2} \sigma z dA_2$$

$$M_1 = C_1 \left[ \frac{4}{L} - \frac{6 \left( \frac{L}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right] \frac{L}{2} + C_2 \left[ \frac{4}{L} - \frac{6 \left( \frac{L}{2} \right) \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right] \frac{L}{2}$$

$$M_1 = C_1 \left[ \frac{4}{L} - \frac{3}{L} + \frac{3}{L\sqrt{3}} \right] \frac{L}{2} + C_2 \left[ \frac{4}{L} - \frac{3}{L} - \frac{3}{L\sqrt{3}} \right] \frac{L}{2}$$

$$M_1 = C_1 \left[ \frac{4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}L} \right] \frac{L}{2} + C_2 \left[ \frac{4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3}L} \right] \frac{L}{2}$$

$$M_1 = C_1 \left[ \frac{\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}L} \right] \frac{L}{2} + C_2 \left[ \frac{\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3}L} \right] \frac{L}{2}$$

$$M_1 = C_1 \left[ \frac{3\sqrt{3} + 3}{3L} \right] \frac{L}{2} + C_2 \left[ \frac{-3\sqrt{3} + 3}{3L} \right] \frac{L}{2}$$

$$M_1 = C_1 \frac{(\sqrt{3} + 1)L}{L} \frac{L}{2} + C_2 \frac{(1 - \sqrt{3})L}{L} \frac{L}{2}$$

$$M_1 = \left( \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \right) \int_{A_1} \sigma z dA_1 + \left( \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right) \int_{A_2} \sigma z dA_2 \tag{B.2}$$

- Momento fletor  $M_2$

$$M_2 = \int_v \sigma z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv = \int_0^L \int_A \sigma z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx$$

$$M_2 = \int_0^L C \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dx = C_1 f(x_1) w(x_1) + C_2 f(x_2) w(x_2)$$

$$C = \int_A \sigma z dA \quad C_1 = \int_{A_1} \sigma z dA_1 \quad C_2 = \int_{A_2} \sigma z dA_2$$

$$M_2 = C_1 \left[ \frac{2}{L} - \frac{6 \left( \frac{L}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right] \frac{L}{2} + C_2 \left[ \frac{2}{L} - \frac{6 \left( \frac{L}{2} \right) \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right] \frac{L}{2}$$

$$M_2 = C_1 \left[ \frac{2}{L} - \frac{3}{L} + \frac{3}{L\sqrt{3}} \right] \frac{L}{2} + C_2 \left[ \frac{2}{L} - \frac{3}{L} - \frac{3}{L\sqrt{3}} \right] \frac{L}{2}$$

$$M_2 = C_1 \left[ \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}L} \right] \frac{L}{2} + C_2 \left[ \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3}L} \right] \frac{L}{2}$$

$$M_2 = C_1 \left[ \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}L} \right] \frac{L}{2} + C_2 \left[ \frac{-\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3}L} \right] \frac{L}{2}$$

$$M_2 = C_1 \left[ \frac{3\sqrt{3} - 3}{3L} \right] \frac{L}{2} + C_2 \left[ \frac{-3\sqrt{3} - 3}{3L} \right] \frac{L}{2}$$

$$M_2 = C_1 \frac{(\sqrt{3} - 1)L}{L} \frac{L}{2} - C_2 \frac{(\sqrt{3} + 1)L}{L} \frac{L}{2}$$

$$M_2 = \left( \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \right) \int_{A_1} \sigma z dA_1 - \left( \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \right) \int_{A_2} \sigma z dA_2 \quad (\text{B.3})$$

### MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE

- Coeficiente de rigidez  $K_{11}$

$$K_{11} = \frac{\partial N}{\partial \bar{u}}$$

Pela Equação (A.4a) tem-se que,

$$\begin{aligned}
K_{11} &= \frac{1}{L^2} \int_v \hat{E} dv = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_A \hat{E} dA dx \\
K_{11} &= \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_A \hat{E} dA dx = \frac{1}{L^2} C_1 f(x_1) w(x_1) + \frac{1}{L^2} C_2 f(x_2) w(x_2) \\
\int_A \hat{E} dA &= C \quad \int_{A_1} \hat{E} dA_1 = C_1 \quad \int_{A_2} \hat{E} dA_2 = C_2 \\
K_{11} &= \frac{1}{L^2} C_1 (1) \frac{L}{2} + \frac{1}{L^2} C_2 (1) \frac{L}{2} \\
K_{11} &= \frac{1}{2L} C_1 + \frac{1}{2L} C_2 \\
K_{11} &= \frac{1}{2L} \int_{A_1} \hat{E} dA_1 + \frac{1}{2L} \int_{A_2} \hat{E} dA_2 \\
K_{11} &= \frac{1}{2L} \left[ \int_{A_1} \hat{E} dA_1 + \int_{A_2} \hat{E} dA_2 \right] \tag{B.4}
\end{aligned}$$

• Coeficiente de rigidez  $K_{22}$

$$K_{22} = \frac{\partial M_1}{\partial \theta_1}$$

Pela Equação (A.5a) tem-se que,

$$\begin{aligned}
K_{22} &= \int_v \hat{E} z^2 \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dv = \int_0^L \int_A \hat{E} z^2 \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dA dx \\
K_{22} &= \int_0^L C \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dx = C_1 f(x_1) w(x_1) + C_2 f(x_2) w(x_2) \\
\int_A \hat{E} z^2 dA &= C \quad C_1 = \int_{A_1} \hat{E} z^2 dA_1 \quad C_2 = \int_{A_2} \hat{E} z^2 dA_2 \\
K_{22} &= C_1 \left[ \frac{4}{L} - \frac{6 \left( \frac{L}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right]^2 \frac{L}{2} + C_2 \left[ \frac{4}{L} - \frac{6 \left( \frac{L}{2} \right) \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right]^2 \frac{L}{2} \\
K_{22} &= C_1 \left[ \frac{4}{L} - \frac{\left( 3L - \frac{3L}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right]^2 \frac{L}{2} + C_2 \left[ \frac{4}{L} - \frac{\left( 3L + \frac{3L}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right]^2 \frac{L}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{22} &= C_1 \left( \frac{4}{L} - \frac{3}{L} + \frac{3L}{L^2} \right)^2 \frac{L}{2} + C_2 \left( \frac{4}{L} - \frac{3}{L} - \frac{3L}{L^2} \right)^2 \frac{L}{2} \\
K_{22} &= C_1 \left( \frac{4}{L} - \frac{3}{L} + \frac{3L}{\sqrt{3}L^2} \right)^2 \frac{L}{2} + C_2 \left( \frac{4}{L} - \frac{3}{L} - \frac{3L}{\sqrt{3}L^2} \right)^2 \frac{L}{2} \\
K_{22} &= C_1 \left( \frac{4}{L} - \frac{3}{L} + \frac{3}{\sqrt{3}L} \right)^2 \frac{L}{2} + C_2 \left( \frac{4}{L} - \frac{3}{L} - \frac{3}{\sqrt{3}L} \right)^2 \frac{L}{2} \\
K_{22} &= C_1 \left( \frac{4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}L} \right)^2 \frac{L}{2} + C_2 \left( \frac{4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3}L} \right)^2 \frac{L}{2} \\
K_{22} &= C_1 \left( \frac{\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}L} \right)^2 \frac{L}{2} + C_2 \left( \frac{\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3}L} \right)^2 \frac{L}{2} \\
K_{22} &= C_1 \left( \frac{3\sqrt{3} + 3}{3L} \right)^2 \frac{L}{2} + C_2 \left( \frac{3\sqrt{3} - 3}{3L} \right)^2 \frac{L}{2} \\
K_{22} &= C_1 \left( \frac{\sqrt{3} + 1}{L} \right)^2 \frac{L}{2} + C_2 \left( \frac{\sqrt{3} - 1}{L} \right)^2 \frac{L}{2} \\
K_{22} &= C_1 \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{L^2} \frac{L}{2} + C_2 \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{L^2} \frac{L}{2} \\
K_{22} &= C_1 \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2L} + C_2 \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2L} \\
K_{22} &= \int_{A_1} \hat{E}z^2 dA_1 \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2L} + \int_{A_2} \hat{E}z^2 dA_2 \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2L} \tag{B.5}
\end{aligned}$$

• Coeficiente de rigidez  $K_{33}$

$$K_{33} = \frac{\partial M_2}{\partial \theta_2}$$

Pela Equação (A.6a) sabe-se que,

$$K_{33} = \int_v \hat{E}z^2 \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dv = \int_0^L \int_A \hat{E}z^2 \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dA dx$$

$$K_{33} = \int_0^L C \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dx = C_1 f(x_1) w(x_1) + C_2 f(x_2) w(x_2)$$

$$\int_A \hat{E} z^2 dA = C \quad C_1 = \int_{A_1} \hat{E} z^2 dA_1 \quad C_2 = \int_{A_2} \hat{E} z^2 dA_2$$

$$K_{33} = C_1 \left[ \frac{2}{L} - \frac{6 \left( \frac{L}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right]^2 \frac{L}{2} + C_2 \left[ \frac{2}{L} - \frac{6 \left( \frac{L}{2} \right) \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right]^2 \frac{L}{2}$$

$$K_{33} = C_1 \left[ \frac{2}{L} - \frac{\left( 3L - \frac{3L}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right]^2 \frac{L}{2} + C_2 \left[ \frac{2}{L} - \frac{\left( 3L + \frac{3L}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right]^2 \frac{L}{2}$$

$$K_{33} = C_1 \left( \frac{2}{L} - \frac{3}{L} + \frac{\frac{3L}{\sqrt{3}}}{L^2} \right)^2 \frac{L}{2} + C_2 \left( \frac{2}{L} - \frac{3}{L} - \frac{\frac{3L}{\sqrt{3}}}{L^2} \right)^2 \frac{L}{2}$$

$$K_{33} = C_1 \left( \frac{2}{L} - \frac{3}{L} + \frac{3L}{\sqrt{3} L^2} \right)^2 \frac{L}{2} + C_2 \left( \frac{2}{L} - \frac{3}{L} - \frac{3L}{\sqrt{3} L^2} \right)^2 \frac{L}{2}$$

$$K_{33} = C_1 \left( \frac{2}{L} - \frac{3}{L} + \frac{3}{\sqrt{3} L} \right)^2 \frac{L}{2} + C_2 \left( \frac{2}{L} - \frac{3}{L} - \frac{3}{\sqrt{3} L} \right)^2 \frac{L}{2}$$

$$K_{33} = C_1 \left( \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3} L} \right)^2 \frac{L}{2} + C_2 \left( \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3} L} \right)^2 \frac{L}{2}$$

$$K_{33} = C_1 \left( \frac{-\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3} L} \right)^2 \frac{L}{2} + C_2 \left( \frac{-\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3} L} \right)^2 \frac{L}{2}$$

$$K_{33} = C_1 \left( \frac{3\sqrt{3} - 3}{3L} \right)^2 \frac{L}{2} + C_2 \left( \frac{-3\sqrt{3} - 3}{3L} \right)^2 \frac{L}{2}$$

$$K_{33} = C_1 \left( \frac{\sqrt{3} - 1}{L} \right)^2 \frac{L}{2} + C_2 \left( \frac{-\sqrt{3} - 1}{L} \right)^2 \frac{L}{2}$$

$$K_{33} = C_1 \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{L^2} \frac{L}{2} + C_2 \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{L^2} \frac{L}{2}$$

$$K_{33} = C_1 \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2L} + C_2 \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2L}$$

$$K_{33} = \int_{A_1} \hat{E}z^2 dA_1 \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2L} + \int_{A_2} \hat{E}z^2 dA_2 \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2L} \quad (\text{B.6})$$

• Coeficiente de rigidez  $K_{12}$

$$K_{12} = \frac{\partial N}{\partial \theta_1}$$

De acordo com a Expressão (A.7a) tem-se que:

$$K_{12} = \frac{1}{L} \int_V \hat{E}z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv = \frac{1}{L} \int_0^L \int_A \hat{E}z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx$$

$$K_{12} = \frac{1}{L} \int_0^L C \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dx = \frac{1}{L} C_1 f(x_1) w(x_1) + \frac{1}{L} C_2 f(x_2) w(x_2)$$

$$\int_A \hat{E}z dA = C \quad \int_{A_1} \hat{E}z dA_1 = C_1 \quad \int_{A_2} \hat{E}z dA_2 = C_2$$

$$K_{12} = \frac{1}{L} C_1 \left[ \frac{4}{L} - \frac{6 \left( \frac{L}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right] \frac{L}{2} + \frac{1}{L} C_2 \left[ \frac{4}{L} - \frac{6 \left( \frac{L}{2} \right) \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right] \frac{L}{2}$$

$$K_{12} = \frac{1}{2} C_1 \left[ \frac{4}{L} - \frac{\left( 3L - \frac{3L}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right] + \frac{1}{2} C_2 \left[ \frac{4}{L} - \frac{\left( 3L + \frac{3L}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right]$$

$$K_{12} = \frac{1}{2} C_1 \left( \frac{4}{L} - \frac{3}{L} + \frac{3L}{L^2} \right) + C_2 \left( \frac{4}{L} - \frac{3}{L} - \frac{3L}{L^2} \right)$$

$$K_{12} = \frac{1}{2} C_1 \left( \frac{4}{L} - \frac{3}{L} + \frac{3L}{\sqrt{3} L^2} \right) + C_2 \left( \frac{4}{L} - \frac{3}{L} - \frac{3L}{\sqrt{3} L^2} \right)$$

$$K_{12} = \frac{1}{2} C_1 \left( \frac{4}{L} - \frac{3}{L} + \frac{3}{\sqrt{3} L} \right) + \frac{1}{2} C_2 \left( \frac{4}{L} - \frac{3}{L} - \frac{3}{\sqrt{3} L} \right)$$

$$K_{12} = \frac{1}{2} C_1 \left( \frac{4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3} L} \right) + \frac{1}{2} C_2 \left( \frac{4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3} L} \right)$$

$$K_{12} = \frac{1}{2} C_1 \left( \frac{\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3} L} \right) + \frac{1}{2} C_2 \left( \frac{\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3} L} \right)$$

$$\begin{aligned}
K_{12} &= \frac{1}{2}C_1 \left( \frac{3\sqrt{3}+3}{3L} \right) + \frac{1}{2}C_2 \left( \frac{-3\sqrt{3}+3}{3L} \right) \\
K_{12} &= \frac{1}{2}C_1 \left( \frac{\sqrt{3}+1}{L} \right) + \frac{1}{2}C_2 \left( \frac{1-\sqrt{3}}{L} \right) \\
K_{12} &= \frac{(\sqrt{3}+1)}{2L} \int_{A_1} \hat{E}z dA_1 + \frac{(1-\sqrt{3})}{2L} \int_{A_2} \hat{E}z dA_2 \tag{B.7}
\end{aligned}$$

• Coeficiente de rigidez  $K_{13}$

$$K_{13} = \frac{\partial N}{\partial \theta_2}$$

Pela Expressão (A.8a) vê-se que,

$$K_{13} = \frac{1}{L} \int_v \hat{E}z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv = \frac{1}{L} \int_0^L \int_A \hat{E}z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx$$

$$K_{13} = \frac{1}{L} \int_0^L C \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dx = \frac{1}{L} C_1 f(x_1) w(x_1) + \frac{1}{L} C_2 f(x_2) w(x_2)$$

$$\int_A \hat{E}z dA = C \quad \int_{A_1} \hat{E}z dA_1 = C_1 \quad \int_{A_2} \hat{E}z dA_2 = C_2$$

$$K_{13} = \frac{1}{L} C_1 \left[ \frac{2}{L} - \frac{6 \left( \frac{L}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right] \frac{L}{2} + \frac{1}{L} C_2 \left[ \frac{2}{L} - \frac{6 \left( \frac{L}{2} \right) \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right] \frac{L}{2}$$

$$K_{13} = \frac{1}{2} C_1 \left[ \frac{2}{L} - \frac{\left( 3L - \frac{3L}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right] + \frac{1}{2} C_2 \left[ \frac{2}{L} - \frac{\left( 3L + \frac{3L}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right]$$

$$K_{13} = \frac{1}{2} C_1 \left( \frac{2}{L} - \frac{3}{L} + \frac{3L}{L^2} \right) + C_2 \left( \frac{2}{L} - \frac{3}{L} - \frac{3L}{L^2} \right)$$

$$K_{13} = \frac{1}{2} C_1 \left( \frac{2}{L} - \frac{3}{L} + \frac{3L}{\sqrt{3} L^2} \right) + C_2 \left( \frac{2}{L} - \frac{3}{L} - \frac{3L}{\sqrt{3} L^2} \right)$$

$$K_{13} = \frac{1}{2} C_1 \left( \frac{2}{L} - \frac{3}{L} + \frac{3}{\sqrt{3} L} \right) + \frac{1}{2} C_2 \left( \frac{2}{L} - \frac{3}{L} - \frac{3}{\sqrt{3} L} \right)$$

$$\begin{aligned}
K_{13} &= \frac{1}{2}C_1 \left( \frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}L} \right) + \frac{1}{2}C_2 \left( \frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}L} \right) \\
K_{13} &= \frac{1}{2}C_1 \left( \frac{-\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}L} \right) + \frac{1}{2}C_2 \left( \frac{-\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}L} \right) \\
K_{13} &= \frac{1}{2}C_1 \left( \frac{3\sqrt{3}-3}{3L} \right) + \frac{1}{2}C_2 \left( \frac{-3\sqrt{3}-3}{3L} \right) \\
K_{13} &= \frac{1}{2}C_1 \left( \frac{\sqrt{3}-1}{L} \right) - \frac{1}{2}C_2 \left( \frac{\sqrt{3}+1}{L} \right) \\
K_{13} &= \frac{(\sqrt{3}-1)}{2L} \int_{A_1} \hat{E}z dA_1 - \frac{(\sqrt{3}+1)}{2L} \int_{A_2} \hat{E}z dA_2 \tag{B.8}
\end{aligned}$$

• Coeficiente de rigidez  $K_{23}$

$$K_{23} = \frac{\partial M_1}{\partial \theta_2}$$

De acordo com a Equação (A.9a),

$$K_{23} = \int_v \hat{E}z^2 \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv = \int_0^L \int_A \hat{E}z^2 \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx$$

a qual integrada numericamente no eixo fornece:

$$K_{23} = \int_0^L C \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dx = C_1 f(x_1) w(x_1) + C_2 f(x_2) w(x_2)$$

$$\int_A \hat{E}z^2 dA = C \quad \int_{A_1} \hat{E}z^2 dA_1 = C_1 \quad \int_{A_2} \hat{E}z^2 dA_2 = C_2$$

$$\begin{aligned}
K_{23} &= C_1 \left[ \frac{4}{L} - \frac{6 \left( \frac{L}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right] \left[ \frac{2}{L} - \frac{6 \left( \frac{L}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right] \frac{L}{2} + \\
&C_2 \left[ \frac{4}{L} - \frac{6 \left( \frac{L}{2} \right) \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right] \left[ \frac{2}{L} - \frac{6 \left( \frac{L}{2} \right) \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right] \frac{L}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{23} &= \frac{L}{2} C_1 \left[ \frac{4}{L} - \frac{\left(3L - \frac{3L}{\sqrt{3}}\right)}{L^2} \right] \left[ \frac{2}{L} - \frac{\left(3L - \frac{3L}{\sqrt{3}}\right)}{L^2} \right] + \frac{L}{2} C_2 \left[ \frac{4}{L} - \frac{\left(3L + \frac{3L}{\sqrt{3}}\right)}{L^2} \right] \left[ \frac{2}{L} - \frac{\left(3L + \frac{3L}{\sqrt{3}}\right)}{L^2} \right] \\
K_{23} &= \frac{L}{2} C_1 \left( \frac{4}{L} - \frac{3}{L} + \frac{\frac{3L}{\sqrt{3}}}{L^2} \right) \left( \frac{2}{L} - \frac{3}{L} + \frac{\frac{3L}{\sqrt{3}}}{L^2} \right) + \frac{L}{2} C_2 \left( \frac{4}{L} - \frac{3}{L} - \frac{\frac{3L}{\sqrt{3}}}{L^2} \right) \left( \frac{2}{L} - \frac{3}{L} - \frac{\frac{3L}{\sqrt{3}}}{L^2} \right) \\
K_{23} &= \frac{L}{2} C_1 \left( \frac{4}{L} - \frac{3}{L} + \frac{3L}{\sqrt{3} L^2} \right) \left( \frac{2}{L} - \frac{3}{L} + \frac{3L}{\sqrt{3} L^2} \right) + \frac{L}{2} C_2 \left( \frac{4}{L} - \frac{3}{L} - \frac{3L}{\sqrt{3} L^2} \right) \left( \frac{2}{L} - \frac{3}{L} - \frac{3L}{\sqrt{3} L^2} \right) \\
K_{23} &= \frac{L}{2} C_1 \left( \frac{4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}L} \right) \left( \frac{2}{L} - \frac{3}{L} + \frac{3L}{\sqrt{3} L^2} \right) + \frac{L}{2} C_2 \left( \frac{4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3}L} \right) \left( \frac{2}{L} - \frac{3}{L} - \frac{3L}{\sqrt{3} L^2} \right) \\
K_{23} &= \frac{L}{2} C_1 \left( \frac{\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}L} \right) \left( \frac{-\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}L} \right) + \frac{L}{2} C_2 \left( \frac{\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3}L} \right) \left( \frac{-\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3}L} \right) \\
K_{23} &= \frac{L}{2} C_1 \left( \frac{3\sqrt{3} + 3}{3L} \right) \left( \frac{3\sqrt{3} - 3}{3L} \right) + \frac{L}{2} C_2 \left( \frac{-3\sqrt{3} + 3}{3L} \right) \left( \frac{-3\sqrt{3} - 3}{3L} \right) \\
K_{23} &= \frac{L}{2} C_1 \left( \frac{\sqrt{3} + 1}{L} \right) \left( \frac{\sqrt{3} - 1}{L} \right) - \frac{L}{2} C_2 \left( \frac{1 - \sqrt{3}}{L} \right) \left( \frac{\sqrt{3} + 1}{L} \right) \\
K_{23} &= \frac{L}{2} C_1 \frac{(3 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1)}{L^2} - \frac{L}{2} C_2 \frac{(\sqrt{3} + 1 - 3 - \sqrt{3})}{L^2} \\
K_{23} &= \frac{1}{L} C_1 + \frac{1}{L} C_2 \\
K_{23} &= \frac{1}{L} \int_{A_1} \hat{E}z^2 dA_1 - \frac{1}{L} \int_{A_2} \hat{E}z^2 dA_2 \tag{B.9}
\end{aligned}$$

## B2 - ELEMENTO DE VIGA BERNOULLI 2

### VETOR DE FORÇAS INTERNAS

- Força axial  $N$

$$N = \int_v \frac{\sigma}{L} dv$$

$$N = \frac{1}{L} \int_0^L \int_A \sigma dA dx$$

$$\begin{aligned}
N &= \frac{1}{L} \int_0^L C dx = \frac{1}{L} C_1 f(x_1) W(x_1) + \frac{1}{L} C_2 f(x_2) W(x_2) \\
C &= \int_A \sigma dA \quad C_1 = \int_{A_1} \sigma dA_1 \quad C_2 = \int_{A_2} \sigma dA_2 \\
&= \frac{1}{L} C_1 (1) \left( \frac{L}{2} \right) + \frac{1}{L} C_2 (1) \left( \frac{L}{2} \right) \\
&= \left( \frac{1}{2} \right) \int_{A_1} \sigma dA_1 + \left( \frac{1}{2} \right) \int_{A_2} \sigma dA_2 \\
&= \frac{1}{2} \left[ \int_{A_1} \sigma dA_1 + \int_{A_2} \sigma dA_2 \right] \tag{B.10}
\end{aligned}$$

• Momento fletor  $M_1$

$$\begin{aligned}
M_1 &= \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \int_v \sigma dv + \int_v \sigma z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv \\
M_1 &= \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \int_0^L \int_A \sigma dA dx + \int_0^L \int_A \sigma z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx \\
\Rightarrow M_1 &= \int_0^L \int_A \sigma z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx = \int_0^L C \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dx \\
&= \int_0^L C \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dx = C_1 f(x_1) W(x_1) + C_2 f(x_2) W(x_2) \\
C &= \int_A \sigma z dA \quad C_1 = \int_{A_1} \sigma z dA_1 \quad C_2 = \int_{A_2} \sigma z dA_2 \\
&= \int_0^L \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) C dx = C_1 f(x_1) W(x_1) + C_2 f(x_2) W(x_2) \\
&= C_1 \left[ \frac{4}{L} - \frac{6 \left( \frac{L}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right] \frac{L}{2} + C_2 \left[ \frac{4}{L} - \frac{6 \left( \frac{L}{2} \right) \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right] \frac{L}{2} \\
&= C_1 \left[ \frac{4}{L} - \frac{3}{L} + \frac{3}{L\sqrt{3}} \right] \frac{L}{2} + C_2 \left[ \frac{4}{L} - \frac{3}{L} - \frac{3}{L\sqrt{3}} \right] \frac{L}{2} \\
&= C_1 \left[ \frac{4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}L} \right] \frac{L}{2} + C_2 \left[ \frac{4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3}L} \right] \frac{L}{2} \\
&= C_1 \left[ \frac{\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}L} \right] \frac{L}{2} + C_2 \left[ \frac{\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3}L} \right] \frac{L}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C_1 \left[ \frac{3\sqrt{3}+3}{3L} \right] \frac{L}{2} + C_2 \left[ \frac{-3\sqrt{3}+3}{3L} \right] \frac{L}{2} \\
&= C_1 \frac{(\sqrt{3}+1)L}{L} \frac{L}{2} + C_2 \frac{(1-\sqrt{3})L}{L} \frac{L}{2} \\
&= \left( \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right) \int_{A_1} \sigma z dA_1 + \left( \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right) \int_{A_2} \sigma z dA_2 \\
\Rightarrow &\left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \int_0^L \int_A \sigma dA dx \\
\left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \int_0^L C dx &= \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) C_1 f(x_1) w(x_1) + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) C_2 f(x_2) w(x_2) \\
&= \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) C_1 (1) \frac{L}{2} + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) C_2 (1) \frac{L}{2} \\
&= \frac{L}{2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \int_{A_1} \sigma dA_1 + \frac{L}{2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \int_{A_2} \sigma dA_2 \\
&= \frac{L}{2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \left[ \int_{A_1} \sigma dA_1 + \int_{A_2} \sigma dA_2 \right] \\
M_1 &= \frac{L}{2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \left[ \int_{A_1} \sigma dA_1 + \int_{A_2} \sigma dA_2 \right] + \left( \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right) \int_{A_1} \sigma dA_1 + \left( \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right) \int_{A_2} \sigma dA_2 \quad (\text{B.11})
\end{aligned}$$

• Momento fletor  $M_2$

$$\begin{aligned}
M_2 &= \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \int_v \sigma dv + \int_v \sigma z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv \\
M_2 &= \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \int_0^L \int_A \sigma dA dx + \int_0^L \int_A \sigma z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx \\
\Rightarrow &\int_0^L \int_A \sigma z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx = \int_0^L C \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dx \\
\int_0^L C \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dx &= C_1 f(x_1) w(x_1) + C_2 f(x_2) w(x_2) \\
C &= \int_A \sigma z dA \quad C_1 = \int_{A_1} \sigma z dA_1 \quad C_2 = \int_{A_2} \sigma z dA_2 \\
\int_0^L C \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dx &= C_1 f(x_1) w(x_1) + C_2 f(x_2) w(x_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C_1 \left[ \frac{2}{L} - \frac{6 \left( \frac{L}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right] \frac{L}{2} + C_2 \left[ \frac{2}{L} - \frac{6 \left( \frac{L}{2} \right) \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right] \frac{L}{2} \\
&= C_1 \left[ \frac{2}{L} - \frac{3}{L} + \frac{3}{L\sqrt{3}} \right] \frac{L}{2} + C_2 \left[ \frac{2}{L} - \frac{3}{L} - \frac{3}{L\sqrt{3}} \right] \frac{L}{2} \\
&= C_1 \left[ \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}L} \right] \frac{L}{2} + C_2 \left[ \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3}L} \right] \frac{L}{2} \\
&= C_1 \left[ \frac{-\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}L} \right] \frac{L}{2} + C_2 \left[ \frac{-\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3}L} \right] \frac{L}{2} \\
&= C_1 \left[ \frac{3\sqrt{3} - 3}{3L} \right] \frac{L}{2} + C_2 \left[ \frac{-3\sqrt{3} - 3}{3L} \right] \frac{L}{2} \\
&= C_1 \frac{(\sqrt{3} - 1)L}{L} \frac{L}{2} - C_2 \frac{(\sqrt{3} + 1)L}{L} \frac{L}{2} \\
&= \left( \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \right) \int_{A_1} \sigma z dA_1 - \left( \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \right) \int_{A_2} \sigma z dA_2 \\
&\Rightarrow \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \int_0^L \int_A \sigma dA dx \\
&\left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \int_0^L C dx = \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) C_1 f(x_1) w(x_1) + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) C_2 f(x_2) w(x_2) \\
&= \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) C_1 (1) \frac{L}{2} + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) C_2 (1) \frac{L}{2} \\
&= \frac{L}{2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \int_{A_1} \sigma dA_1 + \frac{L}{2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \int_{A_2} \sigma dA_2 \\
&= \frac{L}{2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \left[ \int_{A_1} \sigma dA_1 + \int_{A_2} \sigma dA_2 \right] \\
M_2 &= \frac{L}{2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \left( \int_{A_1} \sigma dA_1 + \int_{A_1} \sigma dA_1 \right) + \left( \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \right) \int_{A_1} \sigma z dA_1 - \left( \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \right) \int_{A_2} \sigma z dA_2 \quad (\text{B.12})
\end{aligned}$$

## MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE

- Coeficiente de rigidez  $K_{11}$

$$K_{11} = \frac{\partial N}{\partial \bar{u}}$$

De acordo com a Equação (A.13a),

$$K_{11} = \frac{1}{L} \int_v \hat{E} \left( \frac{1}{L} \right) dv$$

que desenvolvida usando dois pontos de Gauss no eixo x, fornece:

$$K_{11} = \frac{1}{L^2} \int_v \hat{E} dv$$

$$K_{11} = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_A \hat{E} dA dx$$

$$K_{11} = \frac{1}{L^2} \int_0^L C dx = C_1 f(x_1) w(x_1) + C_2 f(x_2) w(x_2)$$

$$K_{11} = \frac{1}{L^2} \int_0^L C dx = \frac{1}{L^2} C_1 (1) \frac{L}{2} + \frac{1}{L^2} C_2 (1) \frac{L}{2}$$

$$K_{11} = \frac{1}{2L} \left( \int_{A_1} \hat{E} dA_1 + \int_{A_2} \hat{E} dA_2 \right) \quad (\text{B.13})$$

- Coeficiente de rigidez  $K_{22}$

$$K_{22} = \frac{\partial M_1}{\partial \bar{\theta}_1}$$

Pela Expressão (A.14a),

$$M_1 = \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \int_v \sigma dv + \int_v \sigma z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial \bar{\theta}_1} = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_1} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \int_v \sigma dv + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_1} \int_v \sigma dv + \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_1} \int_v \sigma z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv$$

O desenvolvimento dessa equação usando dois pontos de Gauss produz:

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_1} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) = \left( \frac{2}{15} \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{\theta}_1} - \frac{1}{30} \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{\theta}_1} \right) = \frac{2}{15}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \int_v \sigma dv \\
&= \int_0^L \int_A \sigma dA dx = \int_0^L C dx = C_1 f(x_1) w(x_1) + C_2 f(x_2) w(x_2) \\
&\qquad C = \int_A \sigma dA \quad C_1 = \int_{A_1} \sigma dA_1 \quad C_2 = \int_{A_2} \sigma dA_2 \\
&= \int_0^L C dx = C_1 (1) \frac{L}{2} + C_2 (1) \frac{L}{2} \\
&= \int_{A_1} \sigma dA_1 \frac{L}{2} + \int_{A_2} \sigma dA_2 \frac{L}{2} \\
&= \frac{L}{2} \left( \int_{A_1} \sigma dA_1 + \int_{A_2} \sigma dA_2 \right) \\
&\Rightarrow \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_1} \int_v \sigma dv
\end{aligned}$$

Pela Equação (A.14b),

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_1} \int_v \sigma dv &= \int_0^L \int_A \hat{E} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) dA dx + \int_0^L \int_A \hat{E} z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx \\
&\triangleright \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \int_0^L \int_A \hat{E} dA dx = \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \int_0^L C dx \\
\left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \int_0^L C dx &= \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) C_1 f(x_1) w(x_1) + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) C_2 f(x_2) w(x_2) \\
&\qquad \int_A \hat{E} dA \quad \int_{A_1} \hat{E} dA_1 \quad \int_{A_2} \hat{E} dA_2 \\
\left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \int_0^L C dx &= \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) (1) \frac{L}{2} + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) (1) \frac{L}{2} \\
\left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \int_0^L C dx &= \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \frac{L}{2} \int_{A_1} \hat{E} dA_1 + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \frac{L}{2} \int_{A_2} \hat{E} dA_2 \\
\left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \int_0^L C dx &= \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \frac{L}{2} \left( \int_{A_1} \hat{E} dA_1 + \int_{A_2} \hat{E} dA_2 \right) \\
&\triangleright \int_0^L \int_A \hat{E} z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx
\end{aligned}$$

$$\int_0^L \int_A \hat{E}z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx$$

$$\int_0^L C \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dx = C_1 f(x_1) w(x_1) + C_2 f(x_2) w(x_2)$$

$$\int_A \hat{E}z dA = C \quad \int_{A_1} \hat{E}z dA_1 = C_1 \quad \int_{A_2} \hat{E}z dA_2 = C_2$$

$$= C_1 \left[ \frac{4}{L} - \frac{6 \left( \frac{L}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right] \frac{L}{2} + C_2 \left[ \frac{4}{L} - \frac{6 \left( \frac{L}{2} \right) \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right] \frac{L}{2}$$

$$= C_1 \left[ \frac{4}{L} - \frac{\left( 3L - \frac{3L}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right] \frac{L}{2} + C_2 \left[ \frac{4}{L} - \frac{\left( 3L + \frac{3L}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right] \frac{L}{2}$$

$$= C_1 \left( \frac{4}{L} - \frac{3}{L} + \frac{\frac{3L}{\sqrt{3}}}{L^2} \right) \frac{L}{2} + C_2 \left( \frac{4}{L} - \frac{3}{L} - \frac{\frac{3L}{\sqrt{3}}}{L^2} \right) \frac{L}{2}$$

$$= C_1 \left( \frac{4}{L} - \frac{3}{L} + \frac{3L}{\sqrt{3} L^2} \right) \frac{L}{2} + C_2 \left( \frac{4}{L} - \frac{3}{L} - \frac{3L}{\sqrt{3} L^2} \right) \frac{L}{2}$$

$$= C_1 \left( \frac{4}{L} - \frac{3}{L} + \frac{3}{\sqrt{3} L} \right) \frac{L}{2} + C_2 \left( \frac{4}{L} - \frac{3}{L} - \frac{3}{\sqrt{3} L} \right) \frac{L}{2}$$

$$= C_1 \left( \frac{4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3} L} \right) \frac{L}{2} + C_2 \left( \frac{4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3} L} \right) \frac{L}{2}$$

$$= C_1 \left( \frac{\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3} L} \right) \frac{L}{2} + C_2 \left( \frac{\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3} L} \right) \frac{L}{2}$$

$$= C_1 \left( \frac{3\sqrt{3} + 3}{3L} \right) \frac{L}{2} + C_2 \left( \frac{-3\sqrt{3} + 3}{3L} \right) \frac{L}{2}$$

$$= C_1 \left( \frac{\sqrt{3} + 1}{L} \right) \frac{L}{2} + C_2 \left( \frac{1 - \sqrt{3}}{L} \right) \frac{L}{2}$$

$$\int_0^L \int_A \hat{E}z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx = \frac{(\sqrt{3} + 1)}{2} \int_{A_1} \hat{E}z dA_1 + \frac{(1 - \sqrt{3})}{2} \int_{A_2} \hat{E}z dA_2$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_1} \int_v \sigma dv &= \frac{L}{2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right)^2 \left( \int_{A_1} \hat{E} dA_1 + \int_{A_2} \hat{E} dA_2 \right) \\ &\quad + \frac{(\sqrt{3}+1)}{2} \int_{A_1} \hat{E} z dA_1 + \frac{(1-\sqrt{3})}{2} \int_{A_2} \hat{E} z dA_2 \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_1} \int_v \sigma z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv & \end{aligned}$$

Pela Equação (A.14b),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_1} \int_v \sigma z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv &= \int_v \hat{E} z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) dv + \int_v \hat{E} z^2 \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dv \\ \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_1} \int_v \sigma z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv &= \int_0^L \int_A \hat{E} z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) dA dx + \int_0^L \int_A \hat{E} z^2 \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dA dx \\ \blacktriangleright \int_0^L \int_A \hat{E} z^2 \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dA dx &= \int_0^L C \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dx \end{aligned}$$

$$\int_0^L C \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dx = C_1 f(x_1) w(x_1) + C_2 f(x_2) w(x_2)$$

$$\int_A \hat{E} z^2 dA = C \quad \int_{A_1} \hat{E} z^2 dA_1 = C_1 \quad \int_{A_2} \hat{E} z^2 dA_2 = C_2$$

$$\int_0^L C \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dx = C_1 \left[ \frac{4}{L} - \frac{6 \left( \frac{L}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right]^2 \frac{L}{2} + C_2 \left[ \frac{4}{L} - \frac{6 \left( \frac{L}{2} \right) \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right]^2 \frac{L}{2}$$

$$\int_0^L C \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dx = C_1 \left[ \frac{4}{L} - \frac{\left( 3L - \frac{3L}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right]^2 \frac{L}{2} + C_2 \left[ \frac{4}{L} - \frac{\left( 3L + \frac{3L}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right]^2 \frac{L}{2}$$

$$\int_0^L C \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dx = C_1 \left( \frac{4}{L} - \frac{3}{L} + \frac{3L}{L^2} \right)^2 \frac{L}{2} + C_2 \left( \frac{4}{L} - \frac{3}{L} - \frac{3L}{L^2} \right)^2 \frac{L}{2}$$

$$\int_0^L C \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dx = C_1 \left( \frac{4}{L} - \frac{3}{L} + \frac{3L}{\sqrt{3} L^2} \right)^2 \frac{L}{2} + C_2 \left( \frac{4}{L} - \frac{3}{L} - \frac{3L}{\sqrt{3} L^2} \right)^2 \frac{L}{2}$$

$$\int_0^L C \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dx = C_1 \left( \frac{4}{L} - \frac{3}{L} + \frac{3}{\sqrt{3}L} \right)^2 \frac{L}{2} + C_2 \left( \frac{4}{L} - \frac{3}{L} - \frac{3}{\sqrt{3}L} \right)^2 \frac{L}{2}$$

$$\int_0^L C \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dx = C_1 \left( \frac{4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}L} \right)^2 \frac{L}{2} + C_2 \left( \frac{4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3}L} \right)^2 \frac{L}{2}$$

$$\int_0^L C \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dx = C_1 \left( \frac{\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}L} \right)^2 \frac{L}{2} + C_2 \left( \frac{\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3}L} \right)^2 \frac{L}{2}$$

$$\int_0^L C \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dx = C_1 \left( \frac{3\sqrt{3} + 3}{3L} \right)^2 \frac{L}{2} + C_2 \left( \frac{3\sqrt{3} - 3}{3L} \right)^2 \frac{L}{2}$$

$$\int_0^L C \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dx = C_1 \left( \frac{\sqrt{3} + 1}{L} \right)^2 \frac{L}{2} + C_2 \left( \frac{\sqrt{3} - 1}{L} \right)^2 \frac{L}{2}$$

$$\int_0^L C \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dx = C_1 \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{L^2} \frac{L}{2} + C_2 \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{L^2} \frac{L}{2}$$

$$\int_0^L C \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dx = C_1 \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2L} + C_2 \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2L}$$

$$\int_0^L C \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dx = \int_{A_1} \hat{E}z^2 dA_1 \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2L} + \int_{A_2} \hat{E}z^2 dA_2 \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2L}$$

$$\triangleright \int_0^L \int_A \hat{E}z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) dA dx = \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \int_0^L \int_A \hat{E}z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx$$

$$\int_0^L \int_A \hat{E}z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) dA dx = \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) C_1 f(x_1) w(x_1)$$

$$+ \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) C_2 f(x_2) w(x_2)$$

$$= \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) C_1 \left[ \frac{4}{L} - \frac{6 \left( \frac{L}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right] \frac{L}{2} + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) C_2 \left[ \frac{4}{L} - \frac{6 \left( \frac{L}{2} \right) \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right] \frac{L}{2}$$

$$\int_A \hat{E}z dA = C \quad \int_{A_1} \hat{E}z dA_1 = C_1 \quad \int_{A_2} \hat{E}z dA_2 = C_2$$

$$= \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) C_1 \left[ \frac{4}{L} - \frac{3}{L} + \frac{3}{L\sqrt{3}} \right] \frac{L}{2} + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) C_2 \left[ \frac{4}{L} - \frac{3}{L} - \frac{3}{L\sqrt{3}} \right] \frac{L}{2}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) C_1 \left[ \frac{4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}L} \right] \frac{L}{2} + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) C_2 \left[ \frac{4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3}L} \right] \frac{L}{2} \\
&= \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) C_1 \left[ \frac{\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}L} \right] \frac{L}{2} + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) C_2 \left[ \frac{\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3}L} \right] \frac{L}{2} \\
&= \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) C_1 \left[ \frac{3\sqrt{3} + 3}{3L} \right] \frac{L}{2} + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) C_2 \left[ \frac{-3\sqrt{3} + 3}{3L} \right] \frac{L}{2} \\
&= \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) C_1 \frac{(\sqrt{3} + 1)L}{L} \frac{L}{2} + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) C_2 \frac{(1 - \sqrt{3})L}{L} \frac{L}{2} \\
&= \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \left( \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \right) \int_{A_1} \hat{E}z dA_1 + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \left( \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right) \int_{A_2} \hat{E}z dA_2 \\
&= \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \left( \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \right) \int_{A_1} \hat{E}z dA_1 + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \left( \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right) \int_{A_2} \hat{E}z dA_2
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_1} \int_v \sigma z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv &= \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \left( \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \right) \int_{A_1} \hat{E}z dA_1 + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \left( \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right) \int_{A_2} \hat{E}z dA_2 \\
&\quad + \int_{A_1} \hat{E}z^2 dA_1 \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2L} + \int_{A_2} \hat{E}z^2 dA_2 \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2L}
\end{aligned}$$

- $\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_1} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) = \left( \frac{2}{15} \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{\theta}_1} - \frac{1}{30} \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{\theta}_1} \right) = \frac{2}{15}$
- $\int_v \sigma dv = \frac{L}{2} \left( \int_{A_1} \sigma dA_1 + \int_{A_2} \sigma dA_2 \right)$
- $\left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_1} \int_v \sigma dv = \frac{L}{2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right)^2 \left( \int_{A_1} \hat{E} dA_1 + \int_{A_2} \hat{E} dA_2 \right)$
- $\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_1} \int_v \sigma z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv = \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \left( \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \right) \int_{A_1} \sigma z dA_1$   
 $+ \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \left( \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right) \int_{A_2} \sigma z dA_2 + \int_{A_1} \hat{E}z^2 dA_1 \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2L} + \int_{A_2} \hat{E}z^2 dA_2 \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2L}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_1}{\partial \bar{\theta}_1} &= \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_1} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \int_v \sigma dv + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_1} \int_v \sigma dv + \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_1} \int_v \sigma z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv \\
K_{22} &= \frac{L}{15} \left( \int_{A_1} \sigma dA_1 + \int_{A_2} \sigma dA_2 \right) + \frac{L}{2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right)^2 \left( \int_{A_1} \hat{E} dA_1 + \int_{A_2} \hat{E} dA_2 \right) \\
&+ \int_{A_1} \hat{E} z^2 dA_1 \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2L} + \int_{A_2} \hat{E} z^2 dA_2 \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2L} \\
&+ \frac{1}{2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \left[ (\sqrt{3}+1) \int_{A_1} \sigma z dA_1 + (1-\sqrt{3}) \int_{A_2} \sigma z dA_2 \right] \tag{B.14}
\end{aligned}$$

• Coeficiente de rigidez  $K_{33}$

$$K_{33} = \frac{\partial M_2}{\partial \bar{\theta}_2}$$

$$M_2 = \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \int_v \sigma dv + \int_v \sigma z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial \bar{\theta}_2} = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \int_v \sigma dv + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2} \int_v \sigma dv + \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2} \int_v \sigma z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv$$

O desenvolvimento dessa equação usando dois pontos de Gauss produz:

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) = \left( \frac{2}{15} \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{\theta}_2} - \frac{1}{30} \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{\theta}_2} \right) = \frac{2}{15}$$

$$\Rightarrow \int_v \sigma dv$$

$$= \int_0^L \int_A \sigma dA dx = \int_0^L C dx = C_1 f(x_1) w(x_1) + C_2 f(x_2) w(x_2)$$

$$C = \int_A \sigma dA \quad C_1 = \int_{A_1} \sigma dA_1 \quad C_2 = \int_{A_2} \sigma dA_2$$

$$= \int_0^L C dx = C_1 (1) \frac{L}{2} + C_2 (1) \frac{L}{2}$$

$$= \int_{A_1} \sigma dA_1 \frac{L}{2} + \int_{A_2} \sigma dA_2 \frac{L}{2}$$

$$= \frac{L}{2} \left( \int_{A_1} \sigma dA_1 + \int_{A_2} \sigma dA_2 \right)$$

$$\Rightarrow \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \frac{\partial}{\partial \theta_2} \int \sigma dv$$

Pela Equação (A.15a),

$$\frac{\partial}{\partial \theta_2} \int \sigma dv = \int_0^L \int_A \hat{E} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) dA dx + \int_0^L \int_A \hat{E} z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx$$

$$\triangleright \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \int_0^L \int_A \hat{E} dA dx = \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \int_0^L C dx$$

$$\left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \int_0^L C dx = \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) C_1 f(x_1) w(x_1) + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) C_2 f(x_2) w(x_2)$$

$$\int_A \hat{E} dA \quad \int_{A_1} \hat{E} dA_1 \quad \int_{A_2} \hat{E} dA_2$$

$$\left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \int_0^L C dx = \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) (1) \frac{L}{2} + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) (1) \frac{L}{2}$$

$$\left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \int_0^L C dx = \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \frac{L}{2} \int_{A_1} \hat{E} dA_1 + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \frac{L}{2} \int_{A_2} \hat{E} dA_2$$

$$\left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \int_0^L C dx = \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \frac{L}{2} \left( \int_{A_1} \hat{E} dA_1 + \int_{A_2} \hat{E} dA_2 \right)$$

Assim,

$$\left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \frac{\partial}{\partial \theta_2} \int \sigma dv = \frac{L}{2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right)^2 \left( \int_{A_1} \hat{E} dA_1 + \int_{A_2} \hat{E} dA_2 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta_2} \int \sigma z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv$$

Pela Equação (A.15b),

$$\frac{\partial}{\partial \theta_2} \int \sigma z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv = \int \hat{E} z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) dv + \int \hat{E} z^2 \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dv$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_2} \int \sigma z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv = \int_0^L \int_A \hat{E} z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) dA dx + \int_0^L \int_A \hat{E} z^2 \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dA dx$$

$$\triangleright \int_0^L \int_A \hat{E} z^2 \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dA dx = \int_0^L C \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dx$$

$$\int_0^L C \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dx = C_1 f(x_1) w(x_1) + C_2 f(x_2) w(x_2)$$

$$\int_{A_1} \hat{E} z^2 dA = C \quad \int_{A_1} \hat{E} z^2 dA_1 = C_1 \quad \int_{A_2} \hat{E} z^2 dA_2 = C_2$$

$$\int_0^L C \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dx = C_1 \left[ \frac{2}{L} - \frac{6 \left( \frac{L}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right]^2 \frac{L}{2} + C_2 \left[ \frac{2}{L} - \frac{6 \left( \frac{L}{2} \right) \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right]^2 \frac{L}{2}$$

$$\int_0^L C \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dx = C_1 \left[ \frac{2}{L} - \frac{\left( 3L - \frac{3L}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right]^2 \frac{L}{2} + C_2 \left[ \frac{2}{L} - \frac{\left( 3L + \frac{3L}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right]^2 \frac{L}{2}$$

$$\int_0^L C \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dx = C_1 \left( \frac{2}{L} - \frac{3}{L} + \frac{\frac{3L}{\sqrt{3}}}{L^2} \right)^2 \frac{L}{2} + C_2 \left( \frac{2}{L} - \frac{3}{L} - \frac{\frac{3L}{\sqrt{3}}}{L^2} \right)^2 \frac{L}{2}$$

$$\int_0^L C \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dx = C_1 \left( \frac{2}{L} - \frac{3}{L} + \frac{3L}{\sqrt{3} L^2} \right)^2 \frac{L}{2} + C_2 \left( \frac{2}{L} - \frac{3}{L} - \frac{3L}{\sqrt{3} L^2} \right)^2 \frac{L}{2}$$

$$\int_0^L C \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dx = C_1 \left( \frac{2}{L} - \frac{3}{L} + \frac{3}{\sqrt{3} L} \right)^2 \frac{L}{2} + C_2 \left( \frac{2}{L} - \frac{3}{L} - \frac{3}{\sqrt{3} L} \right)^2 \frac{L}{2}$$

$$\int_0^L C \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dx = C_1 \left( \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3} L} \right)^2 \frac{L}{2} + C_2 \left( \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3} L} \right)^2 \frac{L}{2}$$

$$\int_0^L C \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dx = C_1 \left( \frac{-\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3} L} \right)^2 \frac{L}{2} + C_2 \left( \frac{-\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3} L} \right)^2 \frac{L}{2}$$

$$\int_0^L C \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dx = C_1 \left( \frac{3\sqrt{3} - 3}{3L} \right)^2 \frac{L}{2} + C_2 \left( \frac{-3\sqrt{3} - 3}{3L} \right)^2 \frac{L}{2}$$

$$\int_0^L C \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dx = C_1 \left( \frac{\sqrt{3} - 1}{L} \right)^2 \frac{L}{2} + C_2 \left( \frac{-\sqrt{3} - 1}{L} \right)^2 \frac{L}{2}$$

$$\int_0^L C \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dx = C_1 \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{L^2} \frac{L}{2} + C_2 \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{L^2} \frac{L}{2}$$

$$\int_0^L C \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dx = C_1 \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2L} + C_2 \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2L}$$

$$\int_0^L C \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right)^2 dx = \int_{A_1} \hat{Ez}^2 dA_1 \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2L} + \int_{A_2} \hat{Ez}^2 dA_2 \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2L}$$

$$\triangleright \int_0^L \int_A \hat{Ez} \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) dA dx = \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \int_0^L \int_A \hat{Ez} \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx$$

$$\int_0^L C \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) dx = \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) C_1 f(x_1) w(x_1) + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) C_2 f(x_2) w(x_2)$$

$$= \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) C_1 \left[ \frac{2}{L} - \frac{6 \left( \frac{L}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right] \frac{L}{2} + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) C_2 \left[ \frac{2}{L} - \frac{6 \left( \frac{L}{2} \right) \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right] \frac{L}{2}$$

$$\int_A \hat{Ez} dA = C \quad \int_{A_1} \hat{Ez} dA_1 = C_1 \quad \int_{A_2} \hat{Ez} dA_2 = C_2$$

$$= \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) C_1 \left[ \frac{2}{L} - \frac{3}{L} + \frac{3}{L\sqrt{3}} \right] \frac{L}{2} + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) C_2 \left[ \frac{2}{L} - \frac{3}{L} - \frac{3}{L\sqrt{3}} \right] \frac{L}{2}$$

$$= \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) C_1 \left[ \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}L} \right] \frac{L}{2} + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) C_2 \left[ \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3}L} \right] \frac{L}{2}$$

$$= \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) C_1 \left[ \frac{-\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}L} \right] \frac{L}{2} + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) C_2 \left[ \frac{-\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3}L} \right] \frac{L}{2}$$

$$= \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) C_1 \left[ \frac{3\sqrt{3} - 3}{3L} \right] \frac{L}{2} + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) C_2 \left[ \frac{-3\sqrt{3} - 3}{3L} \right] \frac{L}{2}$$

$$= \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) C_1 \frac{(\sqrt{3}-1)L}{L} \frac{L}{2} - \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) C_2 \frac{(\sqrt{3}+1)L}{L} \frac{L}{2}$$

$$= \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \left( \frac{\sqrt{3}-1}{2} \right) \int_{A_1} \hat{Ez} dA_1 - \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \left( \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right) \int_{A_2} \hat{Ez} dA_2$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \left[ (\sqrt{3}-1) \int_{A_1} \hat{Ez} dA_1 - (\sqrt{3}+1) \int_{A_2} \hat{Ez} dA_2 \right]$$

Assim,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2} \int \sigma_z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \left[ (\sqrt{3}-1) \int_{A_1} \hat{Ez} dA_1 - (\sqrt{3}+1) \int_{A_2} \hat{Ez} dA_2 \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{A_1} \hat{E}z^2 dA_1 \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2L} + \int_{A_2} \hat{E}z^2 dA_2 \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2L} \\
\circ \quad & \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) = \left( \frac{2}{15} \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{\theta}_2} - \frac{1}{30} \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{\theta}_2} \right) = \frac{2}{15} \\
\circ \quad & \int_v \sigma dv = \frac{L}{2} \left( \int_{A_1} \sigma dA_1 + \int_{A_2} \sigma dA_2 \right) \\
\circ \quad & \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2} \int_v \sigma dv = \frac{L}{2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right)^2 \left( \int_{A_1} \hat{E} dA_1 + \int_{A_2} \hat{E} dA_2 \right) \\
\circ \quad & \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2} \int_v \sigma z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \left[ (\sqrt{3}-1) \int_{A_1} \hat{E}z dA_1 - (\sqrt{3}+1) \int_{A_2} \hat{E}z dA_2 \right] \\
& + \int_{A_1} \hat{E}z^2 dA_1 \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2L} + \int_{A_2} \hat{E}z^2 dA_2 \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2L}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial \bar{\theta}_2} = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \int_v \sigma dv + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2} \int_v \sigma dv + \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2} \int_v \sigma z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv$$

$$\begin{aligned}
K_{33} = & \frac{L}{15} \left( \int_{A_1} \sigma dA_1 + \int_{A_2} \sigma dA_2 \right) + \frac{L}{2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right)^2 \left( \int_{A_1} \hat{E} dA_1 + \int_{A_2} \hat{E} dA_2 \right) \\
& + \frac{1}{2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \left[ (\sqrt{3}-1) \int_{A_1} \hat{E}z dA_1 - (\sqrt{3}+1) \int_{A_2} \hat{E}z dA_2 \right] \\
& + \int_{A_1} \hat{E}z^2 dA_1 \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2L} + \int_{A_2} \hat{E}z^2 dA_2 \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2L}
\end{aligned} \tag{B.15}$$

• Coeficiente de rigidez  $K_{21}$

$$K_{21} = \frac{\partial N}{\partial \bar{\theta}_1}$$

Pelas Equações (A.16a),

$$K_{21} = \frac{1}{L} \int_0^L \int_A \hat{E} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) dA dx + \frac{1}{L} \int_0^L \int_A \hat{E} z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{1}{L} \int_0^L \int_A \hat{E} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) dA dx = \frac{1}{L} \int_0^L C \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) dx \\
&\frac{1}{L} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \int_0^L C dx = \frac{1}{L} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) C_1 f(x_1) w(x_1) + \frac{1}{L} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) C_2 f(x_2) w(x_2) \\
&\int_A \hat{E} dA = C \quad \int_{A_1} \hat{E} dA_1 = C_1 \quad \int_{A_2} \hat{E} dA_2 = C_2 \\
&= \frac{1}{L} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) C_1 (1) \left( \frac{L}{2} \right) + \frac{1}{L} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) C_2 (1) \left( \frac{L}{2} \right) \\
&= \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \int_{A_1} \hat{E} dA_1 + \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \int_{A_2} \hat{E} dA_2 \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \left[ \int_{A_1} \hat{E} dA_1 + \int_{A_2} \hat{E} dA_2 \right]
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{L} \int_0^L \int_A \hat{E} z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx$$

$$\frac{1}{L} \int_0^L C \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dx = \frac{1}{L} C_1 f(x_1) w(x_1) + \frac{1}{L} C_2 f(x_2) w(x_2)$$

$$\int_A \hat{E} z dA = C \quad \int_{A_1} \hat{E} z dA_1 = C_1 \quad \int_{A_2} \hat{E} z dA_2 = C_2$$

$$\frac{1}{L} \int_0^L C \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dx = \frac{1}{L} C_1 \left[ \frac{4}{L} - \frac{6 \left( \frac{L}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right] \frac{L}{2} + \frac{1}{L} C_2 \left[ \frac{4}{L} - \frac{6 \left( \frac{L}{2} \right) \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right] \frac{L}{2}$$

$$\frac{1}{L} \int_0^L C \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dx = C_1 \frac{1}{2} \left[ \frac{3\sqrt{3} + 3}{3L} \right] + C_2 \frac{1}{2} \left[ \frac{-3\sqrt{3} + 3}{3L} \right]$$

$$\frac{1}{L} \int_0^L C \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dx = C_1 \frac{(\sqrt{3} + 1)}{2L} + C_2 \frac{(1 - \sqrt{3})}{2L}$$

$$\frac{1}{L} \int_0^L C \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dx = \left( \frac{\sqrt{3} + 1}{2L} \right) \int_{A_1} \hat{E} z dA_1 + \left( \frac{1 - \sqrt{3}}{2L} \right) \int_{A_2} \hat{E} z dA_2$$

Dessa forma,

$$K_{21} = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \left[ \int_{A_1} \hat{E} dA_1 + \int_{A_2} \hat{E} dA_2 \right] + \left( \frac{\sqrt{3} + 1}{2L} \right) \int_{A_1} \hat{E} z dA_1 + \left( \frac{1 - \sqrt{3}}{2L} \right) \int_{A_2} \hat{E} z dA_2 \quad (\text{B.16})$$

- Coeficiente de rigidez  $K_{13}$

$$K_{13} = \frac{\partial N}{\partial \bar{\theta}_2}$$

De acordo com a Equação (A.17a),

$$K_{13} = \frac{1}{L} \int_0^L \int_A \hat{E} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) dA dx + \frac{1}{L} \int_0^L \int_A \hat{E} z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{L} \int_0^L \int_A \hat{E} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) dA dx = \frac{1}{L} \int_0^L C \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) dx$$

$$\frac{1}{L} \int_0^L C dx = \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) C_1 f(x_1) w(x_1) + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) C_2 f(x_2) w(x_2)$$

$$\int_A \hat{E} dA = C \quad \int_{A_1} \hat{E} dA_1 = C_1 \quad \int_{A_2} \hat{E} dA_2 = C_2$$

$$= \frac{1}{L} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) C_1 (1) \left( \frac{L}{2} \right) + \frac{1}{L} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) C_2 (1) \left( \frac{L}{2} \right)$$

$$= \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \int_{A_1} \hat{E} dA_1 + \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \int_{A_2} \hat{E} dA_2$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \left[ \int_{A_1} \hat{E} dA_1 + \int_{A_2} \hat{E} dA_2 \right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{L} \int_0^L \int_A \hat{E} z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx$$

$$\frac{1}{L} \int_0^L C \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dx = C_1 f(x_1) w(x_1) + C_2 f(x_2) w(x_2)$$

$$\int_A \hat{E} z dA = C \quad \int_{A_1} \hat{E} z dA_1 = C_1 \quad \int_{A_2} \hat{E} z dA_2 = C_2$$

$$\frac{1}{L} \int_0^L C \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dx = C_1 \frac{1}{L} \left[ \frac{2}{L} - \frac{6 \left( \frac{L}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right] \frac{L}{2} + C_2 \frac{1}{L} \left[ \frac{2}{L} - \frac{6 \left( \frac{L}{2} \right) \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right] \frac{L}{2}$$

$$\frac{1}{L} \int_0^L C \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dx = C_1 \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{L} - \frac{3}{L} + \frac{3}{L\sqrt{3}} \right] + C_2 \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{L} - \frac{3}{L} - \frac{3}{L\sqrt{3}} \right]$$

$$\frac{1}{L} \int_0^L C \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}L} \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3}L} \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \int_0^L C \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dx &= C_1 \frac{1}{2} \left[ \frac{-\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}L} \right] + C_2 \frac{1}{2} \left[ \frac{-\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}L} \right] \\ \frac{1}{L} \int_0^L C \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dx &= C_1 \frac{1}{2} \left[ \frac{3\sqrt{3}-3}{3L} \right] + C_2 \frac{1}{2} \left[ \frac{-3\sqrt{3}-3}{3L} \right] \\ \frac{1}{L} \int_0^L C \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dx &= C_1 \frac{(\sqrt{3}-1)}{2L} - C_2 \frac{(\sqrt{3}+1)}{2L} \\ \frac{1}{L} \int_0^L C \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dx &= \left( \frac{\sqrt{3}-1}{2L} \right) \int_{A_1} \hat{E}z dA_1 - \left( \frac{\sqrt{3}+1}{2L} \right) \int_{A_2} \hat{E}z dA_2 \end{aligned}$$

Assim,

$$K_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \left[ \int_{A_1} \hat{E}z dA_1 + \int_{A_2} \hat{E}z dA_2 \right] + \left( \frac{\sqrt{3}-1}{2L} \right) \int_{A_1} \sigma z dA_1 - \left( \frac{\sqrt{3}+1}{2L} \right) \int_{A_2} \sigma z dA_2 \quad (\text{B.17})$$

• Coeficiente de rigidez  $K_{23}$

$$K_{23} = \frac{\partial M_1}{\partial \bar{\theta}_2}$$

$$M_1 = \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \int_v \sigma dv + \int_v \sigma z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial \bar{\theta}_2} = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \int_v \sigma dv + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2} \int_v \sigma dv + \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2} \int_v \sigma z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv$$

O desenvolvimento das integrais em dois pontos de Gauss fornece,

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) = \left( \frac{2}{15} \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{\theta}_2} - \frac{1}{30} \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{\theta}_2} \right) = -\frac{1}{30}$$

$$\Rightarrow \int_v \sigma dv$$

$$= \int_0^L \int_A \sigma dA dx = \int_0^L C dx = C_1 f(x_1) w(x_1) + C_2 f(x_2) w(x_2)$$

$$C = \int_A \sigma dA \quad C_1 = \int_{A_1} \sigma dA_1 \quad C_2 = \int_{A_2} \sigma dA_2$$

$$= \int_0^L C dx = C_1 (1) \frac{L}{2} + C_2 (1) \frac{L}{2}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{A_1} \sigma dA_1 \frac{L}{2} + \int_{A_2} \sigma dA_2 \frac{L}{2} \\
&= \frac{L}{2} \left( \int_{A_1} \sigma dA_1 + \int_{A_2} \sigma dA_2 \right) \\
&\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta_2} \int \sigma dv
\end{aligned}$$

Pela Equação (A.18a),

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \theta_2} \int \sigma dv &= \int_v \hat{E} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) dv + \int_v \hat{E} z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv \\
&= \int_0^L \int_A \hat{E} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) dA dx + \int_0^L \int_A \hat{E} z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx \\
&= \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \int_0^L \int_A \hat{E} dA dx + \int_0^L \int_A \hat{E} z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\triangleright \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \int_0^L \int_A \hat{E} dA dx &= \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \int_0^L C dx \\
\left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \int_0^L C dx &= \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) C_1 (1) \frac{L}{2} + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) C_2 (1) \frac{L}{2} \\
\left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \int_0^L C dx &= \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) C_1 (1) \frac{L}{2} + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) C_2 (1) \frac{L}{2} \\
\left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \int_0^L C dx &= \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \frac{L}{2} \int_{A_1} \hat{E} dA_1 + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \frac{L}{2} \int_{A_2} \hat{E} dA_2 \\
\left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \int_0^L C dx &= \frac{L}{2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \left( \int_{A_1} \hat{E} dA_1 + \int_{A_2} \hat{E} dA_2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\triangleright \int_0^L \int_A \hat{E} z \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx &= \int_0^L C \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dx \\
\int_0^L C \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dx &= C_1 f(x_1) w(x_1) + C_2 f(x_2) w(x_2) \\
\int_A \hat{E} z dA = C \quad \int_{A_1} \hat{E} z dA_1 = C_1 \quad \int_{A_2} \hat{E} z dA_2 = C_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^L C \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dx &= C_1 \left[ \frac{2}{L} - \frac{6 \left( \frac{L}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right] \frac{L}{2} + C_2 \left[ \frac{2}{L} - \frac{6 \left( \frac{L}{2} \right) \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}{L^2} \right] \frac{L}{2} \\
&= C_1 \left[ \frac{2}{L} - \frac{3}{L} + \frac{3}{L\sqrt{3}} \right] \frac{L}{2} + C_2 \left[ \frac{2}{L} - \frac{3}{L} - \frac{3}{L\sqrt{3}} \right] \frac{L}{2} \\
&= C_1 \left[ \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}L} \right] \frac{L}{2} + C_2 \left[ \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3}L} \right] \frac{L}{2} \\
&= C_1 \left[ \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}L} \right] \frac{L}{2} + C_2 \left[ \frac{-\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3}L} \right] \frac{L}{2} \\
&= C_1 \left[ \frac{3\sqrt{3} - 3}{3L} \right] \frac{L}{2} + C_2 \left[ \frac{-3\sqrt{3} - 3}{3L} \right] \frac{L}{2} \\
&= C_1 \frac{(\sqrt{3} - 1)L}{2} - C_2 \frac{(\sqrt{3} + 1)L}{2} \\
&= \left( \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \right) \int_{A_1} \hat{E}z dA_1 - \left( \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \right) \int_{A_2} \hat{E}z dA_2
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2} \int_v \sigma dv &= \left( \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \right) \int_{A_1} \sigma z dA_1 - \left( \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \right) \int_{A_2} \sigma z dA_2 + \frac{L}{2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \left( \int_{A_1} \hat{E} dA_1 + \int_{A_2} \hat{E} dA_2 \right) \\
\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2} \int_v \sigma z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv &
\end{aligned}$$

Pela Equação (A18.b),

$$\begin{aligned}
&\int_v Ez \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) dv + \int_v Ez^2 \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv \\
&\int_0^L \int_A Ez \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) dA dx + \int_0^L \int_A Ez^2 \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx \\
&\left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \int_0^L \int_A Ez \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx + \int_0^L \int_A Ez^2 \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \left( \frac{2}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx \\
\triangleright &\left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \int_0^L \int_A \hat{E}z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dA dx
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{2}{15}\bar{\theta}_2 - \frac{1}{30}\bar{\theta}_1\right) \int_0^L C \left(\frac{4}{L} - 6\frac{x}{L^2}\right) dx$$

$$\left(\frac{2}{15}\bar{\theta}_2 - \frac{1}{30}\bar{\theta}_1\right) \int_0^L C \left(\frac{4}{L} - 6\frac{x}{L^2}\right) dx = C_1 f(x_1) w(x_1) + C_2 f(x_2) w(x_2)$$

$$\int_A \hat{E}z dA = C \quad \int_{A_1} \hat{E}z dA_1 = C_1 \quad \int_{A_2} \hat{E}z dA_2 = C_2$$

$$= C_1 \left(\frac{2}{15}\bar{\theta}_2 - \frac{1}{30}\bar{\theta}_1\right) \left[ \frac{4}{L} - \frac{6\left(\frac{L}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{L^2} \right] \frac{L}{2} + C_2 \left(\frac{2}{15}\bar{\theta}_2 - \frac{1}{30}\bar{\theta}_1\right) \left[ \frac{4}{L} - \frac{6\left(\frac{L}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{L^2} \right] \frac{L}{2}$$

$$= C_1 \left(\frac{2}{15}\bar{\theta}_2 - \frac{1}{30}\bar{\theta}_1\right) \left[ \frac{4}{L} - \frac{3}{L} + \frac{3}{L\sqrt{3}} \right] \frac{L}{2} + C_2 \left(\frac{2}{15}\bar{\theta}_2 - \frac{1}{30}\bar{\theta}_1\right) \left[ \frac{4}{L} - \frac{3}{L} - \frac{3}{L\sqrt{3}} \right] \frac{L}{2}$$

$$= \left(\frac{2}{15}\bar{\theta}_2 - \frac{1}{30}\bar{\theta}_1\right) \left[ \frac{4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}L} \right] \frac{L}{2} + \left(\frac{2}{15}\bar{\theta}_2 - \frac{1}{30}\bar{\theta}_1\right) \left[ \frac{4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3}L} \right] \frac{L}{2}$$

$$= C_1 \left(\frac{2}{15}\bar{\theta}_2 - \frac{1}{30}\bar{\theta}_1\right) \left[ \frac{\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}L} \right] \frac{L}{2} + C_2 \left(\frac{2}{15}\bar{\theta}_2 - \frac{1}{30}\bar{\theta}_1\right) \left[ \frac{\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3}L} \right] \frac{L}{2}$$

$$= C_1 \left(\frac{2}{15}\bar{\theta}_2 - \frac{1}{30}\bar{\theta}_1\right) \left[ \frac{3\sqrt{3} + 3}{3L} \right] \frac{L}{2} + C_2 \left(\frac{2}{15}\bar{\theta}_2 - \frac{1}{30}\bar{\theta}_1\right) \left[ \frac{-3\sqrt{3} + 3}{3L} \right] \frac{L}{2}$$

$$= C_1 \left(\frac{2}{15}\bar{\theta}_2 - \frac{1}{30}\bar{\theta}_1\right) \frac{(\sqrt{3} + 1)}{2} + C_2 \left(\frac{2}{15}\bar{\theta}_2 - \frac{1}{30}\bar{\theta}_1\right) \frac{(1 - \sqrt{3})}{2}$$

$$= \left(\frac{2}{15}\bar{\theta}_2 - \frac{1}{30}\bar{\theta}_1\right) \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right) \int_{A_1} \hat{E}z dA_1 + \left(\frac{2}{15}\bar{\theta}_2 - \frac{1}{30}\bar{\theta}_1\right) \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right) \int_{A_2} \hat{E}z dA_2$$

$$\triangleright \int_0^L \int_A \hat{E}z^2 \left(\frac{4}{L} - 6\frac{x}{L^2}\right) \left(\frac{2}{L} - 6\frac{x}{L^2}\right) dA dx$$

$$\int_0^L C \left(\frac{4}{L} - 6\frac{x}{L^2}\right) \left(\frac{2}{L} - 6\frac{x}{L^2}\right) dx = C_1 f(x_1) w(x_1) + C_2 f(x_2) w(x_2)$$

$$\int_A \hat{E}z^2 dA = C \quad \int_{A_1} \hat{E}z^2 dA_1 = C_1 \quad \int_{A_2} \hat{E}z^2 dA_2 = C_2$$

$$\begin{aligned}
&= C_1 \left[ \frac{4}{L} - \frac{6\left(\frac{L}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{L^2} \right] \left[ \frac{2}{L} - \frac{6\left(\frac{L}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{L^2} \right] \frac{L}{2} \\
&\quad + C_2 \left[ \frac{4}{L} - \frac{6\left(\frac{L}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{L^2} \right] \left[ \frac{2}{L} - \frac{6\left(\frac{L}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{L^2} \right] \frac{L}{2} \\
&= \frac{L}{2} C_1 \left[ \frac{4}{L} - \frac{\left(3L - \frac{3L}{\sqrt{3}}\right)}{L^2} \right] \left[ \frac{2}{L} - \frac{\left(3L - \frac{3L}{\sqrt{3}}\right)}{L^2} \right] + \frac{L}{2} C_2 \left[ \frac{4}{L} - \frac{\left(3L + \frac{3L}{\sqrt{3}}\right)}{L^2} \right] \left[ \frac{2}{L} - \frac{\left(3L + \frac{3L}{\sqrt{3}}\right)}{L^2} \right] \\
&= \frac{L}{2} C_1 \left( \frac{4}{L} - \frac{3}{L} + \frac{\frac{3L}{\sqrt{3}}}{L^2} \right) \left( \frac{2}{L} - \frac{3}{L} + \frac{\frac{3L}{\sqrt{3}}}{L^2} \right) + \frac{L}{2} C_2 \left( \frac{4}{L} - \frac{3}{L} - \frac{\frac{3L}{\sqrt{3}}}{L^2} \right) \left( \frac{2}{L} - \frac{3}{L} - \frac{\frac{3L}{\sqrt{3}}}{L^2} \right) \\
&= \frac{L}{2} C_1 \left( \frac{4}{L} - \frac{3}{L} + \frac{\frac{3L}{\sqrt{3}}}{L^2} \right) \left( \frac{2}{L} - \frac{3}{L} + \frac{\frac{3L}{\sqrt{3}}}{L^2} \right) + \frac{L}{2} C_2 \left( \frac{4}{L} - \frac{3}{L} - \frac{\frac{3L}{\sqrt{3}}}{L^2} \right) \left( \frac{2}{L} - \frac{3}{L} - \frac{\frac{3L}{\sqrt{3}}}{L^2} \right) \\
&= \frac{L}{2} C_1 \left( \frac{4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}L} \right) \left( \frac{2}{L} - \frac{3}{L} + \frac{\frac{3L}{\sqrt{3}}}{L^2} \right) + \frac{L}{2} C_2 \left( \frac{4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3}L} \right) \left( \frac{2}{L} - \frac{3}{L} - \frac{\frac{3L}{\sqrt{3}}}{L^2} \right) \\
&= \frac{L}{2} C_1 \left( \frac{\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}L} \right) \left( \frac{-\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}L} \right) + \frac{L}{2} C_2 \left( \frac{\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3}L} \right) \left( \frac{-\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3}L} \right) \\
&= \frac{L}{2} C_1 \left( \frac{3\sqrt{3} + 3}{3L} \right) \left( \frac{3\sqrt{3} - 3}{3L} \right) + \frac{L}{2} C_2 \left( \frac{-3\sqrt{3} + 3}{3L} \right) \left( \frac{-3\sqrt{3} - 3}{3L} \right) \\
&= \frac{L}{2} C_1 \left( \frac{\sqrt{3} + 1}{L} \right) \left( \frac{\sqrt{3} - 1}{L} \right) - \frac{L}{2} C_2 \left( \frac{1 - \sqrt{3}}{L} \right) \left( \frac{\sqrt{3} + 1}{L} \right) \\
&= \frac{L}{2} C_1 \frac{(3 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1)}{L^2} - \frac{L}{2} C_2 \frac{(\sqrt{3} + 1 - 3 - \sqrt{3})}{L^2} \\
&= \frac{1}{L} C_1 + \frac{1}{L} C_2 \\
&= \frac{1}{L} \int_{A_1} \hat{E}z^2 dA_1 - \frac{1}{L} \int_{A_2} \hat{E}z^2 dA_2
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{L} \left( \int_{A_1} \hat{E}z^2 dA_1 - \int_{A_2} \hat{E}z^2 dA_2 \right)$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial \bar{\theta}_2} = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \int_v \sigma dv + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2} \int_v \sigma dv + \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2} \int_v \sigma z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv$$

$$\circ \quad \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) = \left( \frac{2}{15} \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{\theta}_2} - \frac{1}{30} \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{\theta}_2} \right) = -\frac{1}{30}$$

$$\circ \quad \int_v \sigma dv = \frac{L}{2} \left( \int_{A_1} \sigma dA_1 + \int_{A_2} \sigma dA_2 \right)$$

$$\circ \quad \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2} \int_v \sigma dv = \left( \frac{\sqrt{3}-1}{2} \right) \int_{A_1} \sigma z dA_1 - \left( \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right) \int_{A_2} \sigma z dA_2 + \frac{L}{2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \left( \int_{A_1} \hat{E} dA_1 + \int_{A_2} \hat{E} dA_2 \right)$$

$$\circ \quad \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2} \int_v \sigma z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv = \frac{1}{L} \left( \int_{A_1} \hat{E}z^2 dA_1 - \int_{A_2} \hat{E}z^2 dA_2 \right) + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \left( \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right) \int_{A_1} \hat{E}z dA_1 + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \left( \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right) \int_{A_2} \hat{E}z dA_2$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial \bar{\theta}_2} = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \int_v \sigma dv + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2} \int_v \sigma dv + \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2} \int_v \sigma z \left( \frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) dv$$

$$K_{23} = -\frac{L}{60} \left( \int_{A_1} \sigma dA_1 + \int_{A_2} \sigma dA_2 \right) + \left( \frac{\sqrt{3}-1}{2} \right) \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \int_{A_1} \hat{E}z dA_1 - \left( \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right) \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \int_{A_2} \hat{E}z dA_2 + \frac{L}{2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \left( \int_{A_1} \hat{E} dA_1 + \int_{A_2} \hat{E} dA_2 \right) + \frac{1}{L} \left( \int_{A_1} \hat{E}z^2 dA_1 - \int_{A_2} \hat{E}z^2 dA_2 \right) + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \left( \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right) \int_{A_1} \hat{E}z dA_1 + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \left( \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right) \int_{A_2} \hat{E}z dA_2$$

$$\begin{aligned}
K_{23} = & -\frac{L}{60} \left( \int_{A_1} \sigma dA_1 + \int_{A_2} \sigma dA_2 \right) + \left[ \left( \frac{\sqrt{3}-1}{2} \right) \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) + \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \left( \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right) \right] \int_{A_1} \hat{E}z dA_1 \\
& - \left[ \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \left( \frac{\sqrt{3}-1}{2} \right) + \left( \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right) \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \right] \int_{A_2} \hat{E}z dA_2 \\
& + \frac{L}{2} \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_2 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_1 \right) \left( \frac{2}{15} \bar{\theta}_1 - \frac{1}{30} \bar{\theta}_2 \right) \left( \int_{A_1} \hat{E} dA_1 + \int_{A_2} \hat{E} dA_2 \right) + \frac{1}{L} \left( \int_{A_1} \hat{E}z^2 dA_1 - \int_{A_2} \hat{E}z^2 dA_2 \right) \quad (B.18)
\end{aligned}$$

### B3 – ELEMENTO DE VIGA TIMOSHENKO

Fez-se uso de um ponto de Gauss no eixo do elemento cuja localização e peso são dados por:

$$x = \frac{L}{2}; (L)$$

#### VETOR DE FORÇAS INTERNAS

- Força axial  $N$

$$N = \int_v \frac{\sigma}{L} dv$$

$$\sigma = E\varepsilon \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} - kz = \frac{\bar{u}}{L} - \frac{\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1}{L} z$$

$$N = \int_v \frac{\sigma}{L} dv = \frac{1}{L} \int_v \sigma dv = \frac{1}{L} \int_0^L \int_A \sigma dA dx = \frac{1}{L} \int_0^L C dx = \frac{1}{L} C f(x) w(x) = \frac{1}{L} C(1) L = C$$

$$N = \int_A \sigma dA \quad (B.19)$$

- Momento fletor  $M_1$

$$M_1 = \int_v \left( \frac{\sigma}{L} z - \frac{\tau}{2} \right) dv$$

$$M_1 = \frac{1}{L} \int_v \sigma z dv - \int_v \frac{\tau}{2} dv$$

$$\sigma = E\varepsilon \quad \tau = G\gamma$$

$$M_1 = \frac{1}{L} \int_0^L \int_A \sigma z dA dx - \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \tau dA dx$$

$$M_1 = \frac{1}{L} \int_0^L C dx - \frac{1}{2} \int_0^L C dx$$

$$M_1 = \frac{1}{L} Cf(x)w(x) - \frac{1}{2} Cf(x)w(x)$$

$$M_1 = \frac{1}{L} C(1)(L) - \frac{1}{2} C(1)(L) = C - \frac{L}{2} C$$

$$M_1 = \int_A \sigma z dA - \frac{L}{2} \int_A \tau dA \quad (\text{B.20})$$

• Momento fletor  $M_2$

$$M_2 = \int_v \left( -\frac{\sigma}{L} z - \frac{\tau}{2} \right) dv$$

$$M_2 = -\frac{1}{L} \int_v \sigma z dv - \int_v \frac{\tau}{2} dv$$

$$\sigma = E\varepsilon \quad \tau = G\gamma$$

$$M_2 = -\frac{1}{L} \int_0^L \int_A \sigma z dA dx - \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \tau dA dx$$

$$M_2 = -\frac{1}{L} \int_0^L C dx - \frac{1}{2} \int_0^L C dx$$

$$M_2 = -\frac{1}{L} Cf(x)w(x) - \frac{1}{2} Cf(x)w(x)$$

$$M_2 = -\frac{1}{L} C(1)(L) - \frac{1}{2} C(1)(L) = C - \frac{L}{2} C$$

$$M_2 = -\int_A \sigma z dA - \frac{L}{2} \int_A \tau dA \quad (\text{B.21})$$

## MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE

- Coeficiente  $K_{11}$

$$K_{11} = \frac{\partial N}{\partial \bar{u}} \quad N = \int_v \frac{\sigma}{L} dv \quad \varepsilon = \frac{\bar{u}}{L} - \frac{\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1}{L} z$$

$$\frac{\partial N}{\partial \bar{u}} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \bar{u}} \int_v \sigma dv = \frac{1}{L} \int_v E \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{u}} dv$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{u}} = \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{u}} - \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{u}} z + \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{u}} z = \frac{1}{L}$$

$$\frac{\partial N}{\partial \bar{u}} = \frac{1}{L} \int_v E \frac{1}{L} dv$$

$$\frac{\partial N}{\partial \bar{u}} = \frac{1}{L^2} \int_v E dv$$

$$K_{11} = \frac{1}{L^2} \int_v E dv$$

$$K_{11} = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_A E dA dx = \frac{1}{L^2} \int_0^L C dx = \frac{1}{L^2} C(x) \Big|_0^L = \frac{1}{L^2} \int_A E dA(L) = \frac{1}{L} \int_A E dA$$

$$K_{11} = \frac{\partial N}{\partial \bar{u}} = \frac{1}{L} \int_A E dA \quad (\text{B.22})$$

- Coeficiente  $K_{22}$

$$K_{22} = \frac{\partial M_1}{\partial \bar{\theta}_1}$$

$$M_1 = \int_v \left( \frac{\sigma}{L} z - \frac{\tau}{2} \right) dv$$

$$M_1 = \frac{1}{L} \int_v \sigma z dv - \int_v \frac{\tau}{2} dv$$

$$\sigma = E\varepsilon \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} - kz = \frac{\bar{u}}{L} - \frac{\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1}{L} z$$

$$\tau = G\gamma \quad \gamma = \frac{\partial w}{\partial x} - \theta = -\left(1 - \frac{x}{L}\right)\bar{\theta}_1 - \frac{x}{L}\bar{\theta}_2$$

$$M_1 = \frac{1}{L} \int_{\nu} Ez^2 \left( \frac{\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2}{L} \right) dv - \int_{\nu} \frac{G}{2} \left[ -\left(1 - \frac{x}{L}\right)\bar{\theta}_1 - \frac{x}{L}\bar{\theta}_2 \right] dv$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial \bar{\theta}_1} = \frac{1}{L} \int_{\nu} zE \left( \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\theta}_1} - \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{\theta}_1} z + \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{\theta}_1} z \right) dv - \int_{\nu} \frac{G}{2} \left[ -\left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{\theta}_1} - \frac{x}{L} \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{\theta}_1} \right] dv$$

$$K_{22} = \frac{1}{L} \int_{\nu} zE \left( \frac{1}{L} z \right) dv - \int_{\nu} \frac{G}{2} \left[ -\left(1 - \frac{x}{L}\right) \right] dv$$

$$K_{22} = \frac{1}{L^2} \int_{\nu} Ez^2 dv + \frac{1}{2} \int_{\nu} G \left( 1 - \frac{x}{L} \right) dv$$

$$K_{22} = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_A Ez^2 dA dx + \frac{1}{2} \int_0^L \int_A G \left( 1 - \frac{x}{L} \right) dA dx$$

$$K_{22} = \frac{1}{L^2} \int_0^L C dx + \frac{1}{2} \int_0^L C \left( 1 - \frac{x}{L} \right) dx$$

$$K_{22} = \frac{1}{L^2} Cf(x)w(x) + \frac{1}{2} Cf(x)w(x)$$

$$K_{22} = \frac{1}{L^2} C(1)(L) + \frac{1}{2} C\left(\frac{1}{2}\right)(L)$$

$$K_{22} = \frac{1}{L} C + \frac{L}{4} C$$

$$K_{22} = \frac{1}{L} \int_A Ez^2 dA + \frac{L}{4} \int_A G dA \tag{B.23}$$

• Coeficiente  $K_{33}$

$$K_{33} = \frac{\partial M_2}{\partial \bar{\theta}_2}$$

$$M_2 = \int_{\nu} \left( -\frac{\sigma}{L} z - \frac{\tau}{2} \right) dv$$

$$M_2 = -\frac{1}{L} \int_v \sigma z dv - \int_v \frac{\tau}{2} dv$$

$$\sigma = E\varepsilon \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} - kz = \frac{\bar{u}}{L} - \frac{\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1}{L} z \quad \tau = G\gamma \quad \gamma = \frac{\partial w}{\partial x} - \theta = -\left(1 - \frac{x}{L}\right) \bar{\theta}_1 - \frac{x}{L} \bar{\theta}_2$$

$$M_2 = -\frac{1}{L} \int_v zE \left( \frac{\bar{u}}{L} - \frac{\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1}{L} z \right) dv - \int_v \frac{G}{2} \left[ -\left(1 - \frac{x}{L}\right) \bar{\theta}_1 - \frac{x}{L} \bar{\theta}_2 \right] dv$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial \bar{\theta}_2} = -\frac{1}{L} \int_v zE \left( \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\theta}_2} - \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{\theta}_2} z + \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{\theta}_2} z \right) dv - \int_v \frac{G}{2} \left[ -\left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{\theta}_2} - \frac{x}{L} \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{\theta}_2} \right] dv$$

$$K_{33} = -\frac{1}{L} \int_v zE \left( -\frac{1}{L} z \right) dv - \int_v \frac{G}{2} \left( -\frac{x}{L} \right) dv$$

$$K_{33} = \frac{1}{L^2} \int_v Ez^2 dv + \frac{1}{2L} \int_v G(x) dv$$

$$K_{33} = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_A Ez^2 dA dx + \frac{1}{2L} \int_0^L \int_A G(x) dA dx$$

$$K_{33} = \frac{1}{L^2} \int_0^L C dx + \frac{1}{2L} \int_0^L C(x) dx$$

$$K_{33} = \frac{1}{L^2} Cf(x)w(x) + \frac{1}{2L} Cf(x)w(x)$$

$$K_{33} = \frac{1}{L^2} C(1)(L) + \frac{1}{2L} C\left(\frac{L}{2}\right)(L)$$

$$K_{33} = \frac{1}{L} C + \frac{L}{4} C$$

$$K_{33} = \frac{1}{L} \int_A Ez^2 dA + \frac{L}{4} \int_A G dA \tag{B.24}$$

• Coeficiente  $K_{12}$

$$K_{12} = \frac{\partial N}{\partial \bar{\theta}_1}$$

$$N = \int_v \frac{\sigma}{L} dv$$

$$\frac{\partial N}{\partial \bar{\theta}_1} = \frac{1}{L} \int_{\mathcal{V}} E \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{\theta}_1} dv \quad \varepsilon = \frac{\bar{u}}{L} - \frac{\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1}{L} z$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{\theta}_1} = \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\theta}_1} - \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{\theta}_1} z + \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{\theta}_1} z = \frac{1}{L} z$$

$$K_{12} = \frac{1}{L} \int_{\mathcal{V}} E \frac{1}{L} z dv$$

$$K_{12} = \frac{1}{L^2} \int_{\mathcal{V}} E z dv$$

$$K_{12} = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_A E z dA dx \quad \int_A z dA = 0$$

$$K_{12} = 0 \tag{B.25}$$

• Coeficiente  $K_{13}$

$$K_{13} = \frac{\partial N}{\partial \bar{\theta}_2}$$

$$N = \int_{\mathcal{V}} \frac{\sigma}{L} dv$$

$$\frac{\partial N}{\partial \bar{\theta}_2} = \frac{1}{L} \int_{\mathcal{V}} E \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{\theta}_2} dv \quad \varepsilon = \frac{\bar{u}}{L} - \frac{\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1}{L} z$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{\theta}_2} = \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\theta}_2} - \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{\theta}_2} z + \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{\theta}_2} z = -\frac{1}{L} z$$

$$K_{13} = \frac{1}{L} \int_{\mathcal{V}} E \left( -\frac{1}{L} z \right) dv$$

$$K_{13} = -\frac{1}{L^2} \int_{\mathcal{V}} E z dv$$

$$K_{13} = -\frac{1}{L^2} \int_0^L \int_A E z dA dx \quad \int_A z dA = 0$$

$$K_{13} = 0 \tag{B.26}$$

• Coeficiente  $K_{23}$

$$K_{23} = \frac{\partial M_2}{\partial \bar{\theta}_1}$$

$$M_2 = \int_v \left( -\frac{\sigma}{L} z - \frac{\tau}{2} \right) dv$$

$$M_2 = -\frac{1}{L} \int_v \sigma z dv - \int_v \frac{\tau}{2} dv$$

$$\sigma = E\varepsilon \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} - kz = \frac{\bar{u}}{L} - \frac{\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1}{L} z$$

$$\tau = G\gamma \quad \gamma = \frac{\partial w}{\partial x} - \theta = -\left(1 - \frac{x}{L}\right) \bar{\theta}_1 - \frac{x}{L} \bar{\theta}_2$$

$$M_2 = -\frac{1}{L} \int_v z E \left( \frac{\bar{u}}{L} - \frac{\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1}{L} z \right) dv - \int_v \frac{G}{2} \left[ -\left(1 - \frac{x}{L}\right) \bar{\theta}_1 - \frac{x}{L} \bar{\theta}_2 \right] dv$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial \bar{\theta}_1} = -\frac{1}{L} \int_v z E \left( \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\theta}_1} - \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{\theta}_1} z + \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{\theta}_1} z \right) dv - \int_v \frac{G}{2} \left[ -\left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{\theta}_1} - \frac{x}{L} \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{\theta}_1} \right] dv$$

$$K_{23} = -\frac{1}{L} \int_v z E \frac{1}{L} z dv - \int_v \frac{G}{2} \left[ -\left(1 - \frac{x}{L}\right) \right] dv$$

$$K_{23} = -\frac{1}{L^2} \int_v E z^2 dv + \frac{1}{2} \int_v G \left(1 - \frac{x}{L}\right) dv$$

$$K_{23} = -\frac{1}{L^2} \int_0^L \int_A E z^2 dA dx + \frac{1}{2} \int_0^L \int_A G \left(1 - \frac{x}{L}\right) dA dx$$

$$K_{23} = -\frac{1}{L^2} \int_0^L C dx + \frac{1}{2} \int_0^L C \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx$$

$$K_{23} = -\frac{1}{L^2} C f(x) w(x) + \frac{1}{2} C f(x) w(x)$$

$$K_{23} = -\frac{1}{L^2} C(1)(L) + \frac{1}{2} C \left(\frac{1}{2}\right)(L) = -\frac{1}{L} C + \frac{L}{4} C$$

$$K_{23} = -\frac{1}{L} \int_A E z^2 dA + \frac{L}{4} \int_A G dA \tag{B.27}$$