Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Cotas Superiores para a ordem do Quadrado Tensorial não-abeliano de um Grupo

por

Bruno César Rodrigues Lima

2010

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

por

Bruno César Rodrigues Lima

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 2010.

Comissão Examinadora:

Prof. Noraí Romeu Rocco - MAT/UnB (Orientador)

Profa. - Aline Gomes da Silva Pinto - MAT/UNB (membro)

Profa. - Marta Morigi - Univ. Bologna, (It) (membro)

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus por todas as bençãos e graças alcançadas. À minha familia pelo incetivo e encorajamento para enfrentar mais essa batalha.

Ao professor Noraí Romeu Rocco pela valiosa orientação, paciência e ajuda durante a realização desse trabalho.

Aos professores da banca examinadora: Aline Gomes da Silva Pinto e Marta Morige, pelas correções e sugestões enriquecendo este trabalho.

À professora Shirlei Serconnek que me confiou e recomendou para essa empreitada e também pelos conselhos e incentivos que me motivaram a estudar matemática.

Aos amigos Bruno Nunes, Eduardo, Marcelo, Wesley e Tarcisio pelo apoio e companherismo nessa caminhada e pelos momentos de brincadeiras e descontrações.

Enfim a agradeço todos os colegas, funcionários e professores do Departamento de Matemática-UnB, que contríbuiram de algum modo para o nosso enriquecimento pessoal e profissional.

RESUMO

Neste trabalho estudamos o quadrado tensorial não-abeliano, $G \otimes G$, de um grupo G, bem como algumas construções relacionadas. Abordamos resultados que estabelecem cotas superiores para a ordem de $G \otimes G$, para certas classes especiais de grupos finitos, particularmente para p-grupos, p um primo, e para grupos metabelianos.

Palavras-chave: quadrado tensorial não-abeliano, quadrado exterior, p-grupos finitos, grupos metabelianos finitos.

ABSTRACT

In this work we study the non-abelian tensor square, $G \otimes G$, of a group G , as well as some related group constructions. We treat of results concerning upper bounds for the order of $G \otimes G$, for G in certain special classes of finite group such as p-groups, p a prime number, and metabelian groups.

Key words: non-abelian tensor square, exterior square, finite p-groups, metabelian groups.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O produto tensorial não-abeiano, $G \otimes H$, de grupos G e H, foi introduzido por R. Brown e J.L. Loday [4] e provém de aplicações em um teorema de Van Kampen generalizado em teoria de homotopia. Da maneira como foi introduzido, ele generaliza o produto tensorial "usual", $G/G' \otimes_{\mathbb{Z}} H/H'$, dos grupos abelianizados, uma vez que leva em conta ações de G sobre H e de H sobre G.

Especificamente, sejam G e H grupos munidos com uma ação (à direita) de G sobre H, $(h, g) \mapsto h^g$, e uma ação de H sobre G, $(g, h) \mapsto g^h$. Suponhamos, ainda, que cada um desses grupos atue sobre si mesmo por conjugação, i.e., para g, x, $\in G$, h, $y \in H$, $g^x = x^{-1}gx$ e $h^y = y^{-1}hy$. As dadas ações são *compatíveis* se, para todos g, g_1, $\in G$ h, $h_1 \in H$,

$$g^{(h^{g_1})} = g^{{g_1}^{-1}hg_1} := ((g^{{g_1}^{-1}})^h)^{g_1}$$
$$h^{(g^{h_1})} = h^{{h_1}^{-1}gh_1} := ((h^{{h_1}^{-1}})^g)^{h_1}$$

Se G e H agem um sobre o outro compativelmente, então o produto tensorial não-abeliano de G e H é definido como sendo o grupo gerado por todos os símbolos $g \otimes h$, $g \in G$, $h \in H$, satisfazendo as relações

$$gg_1 \otimes h = (g^{g_1} \otimes h^{g_1})(g_1 \otimes h) \tag{0.0.1}$$
$$g \otimes hh_1 = (g \otimes h_1)(g^{h_1} \otimes h^{h_1}) \tag{0.0.2}$$

para todos g, $g_1 \in G$ e h, $h_1 \in H$. Tal grupo é denotado por $G \otimes H$.

Como a ação por conjugação de um grupo G sobre si mesmo satisfaz 0.0.1 e 0.0.2, o *quadrado tensorial* não abeliano $G \otimes G$, de um grupo G, está sempre definido.

O objetivo deste trabalho é estudar cotas para a ordem do quadrado tensorial em certas classes de grupos finitos.

O Capítulo I é dedicado à recapitulação de conceitos e resultados preliminares que serão utilizados no desenvolvimento subsequente do trabalho, de modo a facilitar as referências. Neste mesmo capítulo fazemos um estudo detalhado do quadrado exterior $G \wedge G$ de um grupo G, na abordagem original de C. Miller [10], uma vez que este está relacionado com todo o assunto do presente trabalho.

No Capítulo II abordamos alguns resultados gerais sobre o produto tensorial não-abeliano de grupos, com ênfase no estudo de grupos nilpotentes finitos. Tratamos também do grupo $\nu(G)$, uma construção relacionada ao quadrado tensorial não abeliano, introduzido por Rocco [17], (veja também [5]) definido como segue: Sejam G e G^{φ} grupos isomorfos por $\varphi : G \mapsto G^{\varphi}$, $\forall g \in G$. O grupo $\nu(G)$ é definido por

$$\nu(G) = \langle G, G^{\varphi} \mid [g_1, {g_2}^{\varphi}]^{g_3} = [g_1^{g_3}, ({g_2}^{g_3})^{\varphi}] = [g_1, {g_2}^{\varphi}]^{{g_3}^{\varphi}},\ \forall\ g_1,\ g_2,\ g_3 \in G\rangle.$$

A relação entre $\nu(G)$ e $G \otimes G$ está no fato de que o subgrupo comutador $[G, G^{\varphi}]$ de $\nu(G)$ é isomorfo a $G \otimes G$.

Rocco [17] encontrou uma limitação para $|G \otimes G|$, em que G é um p-grupo finito. Posteriormente, G. Ellis e A. McDermott melhoraram a cota de Rocco e estenderam para o produto tensorial não abeliano de um p-grupo finito e um q-grupo finito, onde p e q são primos (não necessariamente iguais). Exibimos essa cota em uma abordagem dada por R. D. Blyth, F. Fumagalli e M. Morigi [2], para o quadrado tensorial não abeliano de um p-grupo, como segue o teorema.

Teorema: *Sejam G um p-grupo finito de ordem p^n e $d = d(G)$ o número minimo de geradores de G. Então $p^{d^2} \leq |[G, G^{\varphi}]| \leq p^{nd}$.*

Verificamos que essa cota é a melhor possível; estudamos em detalhes o grupo $\nu(Q_8)$ para o grupo dos quatérnios Q_8 e com isso verificamos que $Q_8 \otimes Q_8 \cong (\mathbb{Z}_2)^2 \times (\mathbb{Z}_4)^2$, de modo que este limite é atingido para $G = Q_8$.

No Capítulo III consideramos o produto tensorial não abeliano de grupo solúveis, e em especial estudamos limitações para a ordem de $G \otimes G$. Para isso apresentamos também uma generalização do grupo $\nu(G)$, definida em [14] como segue: Sejam G, H grupos agindo compativelmente um sobre o outro e H^{φ} uma cópia de H, isomorfa por

$\varphi : H \mapsto H^{\varphi},\ h \mapsto h^{\varphi},\ \forall h \in H.$ Então

$$\eta(G,H) := \langle G,\ H^{\varphi} \mid [g,h^{\varphi}]^{g_1} = [g^{g_1},(h^{g_1})^{\varphi}],\ [g,h^{\varphi}]^{h_1{}^{\varphi}} = [g^{h_1},(h^{h_1})^{\varphi}],$$
$$\forall\, g,\ g_1, \in G\, h,\ h_1, \in H\rangle.$$

Quando $H = G$ e as ações são por conjugação, então $\eta(G,G)$ torna-se $\nu(G)$.

Determinamos uma cota para a ordem do quadrado tensorial não abeliano de grupos solúveis dada por Nakaoka [11]:

Teorema: *Se G é um grupo finito solúvel de série derivada com comprimento l, então*

$$|G\otimes G| \leq |G^{ab}\otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}| \textstyle\prod_{i=1}^{l-1}(|G_i^{ab}\otimes G_i^{ab}|^{2^{i-1}}||G_i^{ab}\otimes_{\mathbb{Z}G/G_i} I(G/G_i))$$
$$\textstyle\prod_{i=1}^{l-2}\prod_{k=i-1}^{l-1}|G_k^{ab}\otimes_{\mathbb{Z}G_i/G_k} I(G_i/G_k)|^{2^{i-1}}.$$

Em particular, no caso de um grupo metabeliano finito, a cota acima pode ser melhorada:

Teorema: *Seja G um grupo metabeliano finito. Então*

$$|G\otimes G| \text{ divide } |G^{ab}\otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}||G'\wedge G'||G'\otimes_{\mathbb{Z}G^{ab}} I(G^{ab})|,$$

onde $G'\wedge G'$ é o quadrado exterior de $\mathbb{Z}$-módulo G'. Quando $[G',G] = \{1\}$, obtemos

$$|G\otimes G| \leq |G^{ab}\otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}||G'\otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}|.$$

Concluímos o trabalho calculando a ordem do quadrado tensorial não-abeliano de um grupo metabeliano finito G, em que G' e G^{ab} possuem ordens coprimas.

Teorema: *Se G é um grupo metabeliano finito tal que $|G'|$ e $|G^{ab}|$ são coprimos, então $|G\otimes G| = n|G'|\cdot|G^{ab}\otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}|$, onde n é a ordem do subgrupo G^{ab}-estável do Multiplicador de Schur de G'.*

CAPÍTULO 1

CONCEITOS E RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo, no intuito de facilitar a leitura do trabalho, fazemos uma breve revisão de alguns tópicos da Teoria de Grupos, como Subgrupos Comutadores, Subgrupo de Frattini, Grupos Nilpotentes, Séries p-Centrais, Sequências Exatas, Multilicador de Schur, Relações entre Comutadores e o Multiplicador de Shur.

1.1 Subgrupos Comutadores e Subgrupo de Frattini

Sejam G um grupo e $x_1, x_2, \ldots$ elementos de G. O *conjugado* de x_1 por x_2 é $x_1^{x_2} := x_2^{-1}x_1x_2$, e o comutador de x_1 e x_2 nesta ordem é

$$[x_1, x_2] := x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2 (= x_1^{-1}x_1^{x_2}).$$

O comutador simples de peso n é definido indutivamente por $[x_1] := x_1$ e para $n \geq 2$,

$$[x_1, \ldots, x_n] := [[x_1, \cdots x_{n-1}], x_n].$$

Proposição 1.1.1. *Sejam x e y elementos de um grupo. Então*

i) $[x, y] = [y, x]^{-1} = [x, y^{-1}]^{-y} = [x^{-1}, y]^{-x}$;

ii) $[xy, z] = [x, z]^y[y, z]$; $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$;

iii) $[x, y]^z = [x, y][x, y, z] = [x^z, y^z]$;

iv) $[x, y^{-1}, z]^y [y, z^{-1}, x]^z [z, x^{-1}, y]^x = 1$ *(identidade de Hall-Witt).*

Proposição 1.1.2. *Sejam x e y elementos de um grupo G e suponhamos que $[x, y]$ comuta com x e y. Então, para todo $n \in \mathbb{Z}$,*

i) $[x, y^n] = [x^n, y] = [x, y]^n$*;*

ii) $(xy)^n = x^n y^n [y, x]^{\binom{n}{2}}$.

Sejam X e Y subconjuntos não vazios de um grupo G. O *subgrupo comutador* de X e Y, indicado por $[X, Y]$ é, por definição o subgrupo de G gerado por todos os comutadores $[x, y]$, com x em X e y em Y.

Em símbolos,

$$[X, Y] := \langle [x, y] \mid x \in X, y \in Y \rangle.$$

Notemos que $[X, Y] = [Y, X]$.

Definição 1.1.1. Se G é um grupo e H um subgrupo de G, então dizemos que H é característico em G se $(H)\alpha = H$ para todo automorfismo $\alpha : G \to G$.

Proposição 1.1.3. *Sejam M e N subgrupos de um grupo G.*

i) Se M e N são subgrupos normais (respectivamente característicos) em G, então $[M, N]$ é subgrupo normal (respectivamente característico) de G;

ii) $[M, N] \trianglelefteq \langle M, N \rangle$*;*

iii) Se $\alpha : G \to G_1$ é homomorfismo então $([M, N])\alpha = [(M)\alpha, (N)\alpha]$;

iv) Se $N = \langle Y \rangle$ então $[M, N] = [M, Y]^N$;

v) Se $M = \langle X \rangle$ e $N = \langle Y \rangle$ então $[M, N] = [X, Y]^{MN}$.

Lema 1.1.4. *Sejam G um grupo, H e K subgrupos de G.*

i) Se H é característico em K e K é característico em G, então H é característico em G;

ii) Se H é característico em K e K é normal em G, então H é normal em G.

O subgrupo $[G, G]$ de um grupo G é chamado o *grupo derivado* de G, e é denotado por G'. Tal grupo tem a seguinte propriedade:

Proposição 1.1.5. *O grupo quociente G/G' é abeliano. Além disso, se N é um subgrupo normal de G tal que G/N é abeliano, então $G' \subseteq N$.*

Seja G um grupo.

Definição 1.1.2. Um subgrupo M de G é subgrupo *maximal* de G se $M < G$ e não existe $H \leq G$ com $M < H < G$.

Definição 1.1.3. O subgrupo de Frattini $\Phi(G)$ é definido como a interseção de todos os subgrupos maximais de G. Se o grupo (infinito) G não possui subgrupos maximais, definimos $\Phi(G) = G$.

Definição 1.1.4. Um elemento x de um grupo G é um *não-gerador* de G se, sempre que um subconjunto T de G satisfaz $G = \langle T, x\rangle$, então $G = \langle T\rangle$.

Teorema 1.1.6. *Se G é um grupo não trivial e S é o conjunto de todos os não-geradores de G, então $S = \Phi(G)$.*

Proposição 1.1.7. *Se G é um p-grupo finito então $\Phi(G) = G'G^p$, em que $G^p = \langle x^p; x \in G\rangle$. Além disso, $G/\Phi(G)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, cuja dimensão $d(G)$, é o número mínimo de geradores de G.*

Teorema 1.1.8 (Teorema da Base de Burnside)**.** *Se G é um p-grupo finito, então quaisquer dois conjuntos mínimos de geradores de G têm o mesmo número de elementos. Além disso, se $x \notin \Phi(G)$ então $\{x\}$ pode ser estendido a um conjunto mínimo de geradores de G.*

1.2 Grupos Nilpotentes

Definição 1.2.1. Um grupo G é dito *nilpotente* se existe uma cadeia finita

$$1 = G_0 < G_1 < G_2 < \ldots < G_n = G$$

tal que

i) $G_i \trianglelefteq G$;

ii) $G_{i+1}/G_i \leq Z(G/G_i), \quad i = 0, \ldots, n-1.$

Uma tal cadeia é chamada *série central* de G. A classe de nilpotência de um grupo nilpotente G, $cl(G)$, é o comprimento da menor série central de G.

Definição 1.2.2. Seja G um grupo. Definimos os seguintes subgrupos de G indutivamente.

$$\begin{aligned} \gamma_1(G) &= G, \\ \gamma_2(G) &= [\gamma_1(G), G] = [G, G] = G', \\ \gamma_3(G) &= [\gamma_2(G), G], \\ &\vdots \\ \gamma_i(G) &= [\gamma_{i-1}(G), G]. \end{aligned}$$

Lema 1.2.1. *Seja G um grupo, então $\gamma_i(G)$ é característico em G para todo inteiro positivo i.*

Assim segue que a cadeia

$$G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \ldots \geq \gamma_i(G) \geq \ldots$$

é uma série central e é dita *série central inferior* do grupo G.

Definição 1.2.3. Seja G um grupo. Definimos indutivamte

$$\begin{aligned} \zeta_0(G) &= 1 \\ \zeta_1(G) &= Z(G) \text{ e, para } i \geq 1, \end{aligned}$$

$\zeta_i(G)$ é definido como sendo o único subgrupo de G tal que $\zeta_i(G)/\zeta_{i-1}(G) = Z(G/\zeta_{i-1}(G))$

A cadeia

$$1 = \zeta_0(G) \leq \zeta_1(G) \leq \ldots \leq \zeta_i(G) \leq \ldots \tag{1.2.1}$$

é chamada *série central superior* de G.

A proposição a seguir justifica os adjetivos *inferior* e *superior* das séries acima.

Proposição 1.2.2. *Seja $G = A_1 \geq A_2 \geq \ldots \geq A_{n+1} = 1$ uma série central de G. Então*

i) $\gamma_i(G) \leq A_i \quad , \quad i = 1, \ldots, n+1$

ii) $A_{n+1-i} \leq \zeta_i(G) \quad , \quad i = 0, 1, \ldots, n$

Colorário 1.2.3. *Em um grupo nilpotente G as séries centrais inferior e superior têm comprimento finito. Além disso, ambas as séries têm o mesmo comprimento e este número é a classe de nilpotência de G.*

Proposição 1.2.4. *Sejam G um grupo nilpotente de classe c e $H \leq G$. Então*

i) H é nilpotente de classe menor ou igual a c.

ii) Se $H \trianglelefteq G$ então G/H é nilpotente de classe menor ou igual a c.

Proposição 1.2.5. *Valem as seguinte afirmações:*

i) Um produto direto de um número finito de grupos nilpotentes é nilpotente;

ii) Todo p-grupo finito é nilpotente;

iii) Sejam G um grupo nilpotente e H um subgrupo próprio. Então $H \neq N_G(H)$;

iv) Um grupo finito G é nilpotente se, e somente se, é o produto direto de seus subgrupos de Sylow.

1.3 Série p-Central Inferior

Definição 1.3.1. Sejam G um grupo, p um número primo e $G^p = \langle g^p \mid g \in G \rangle$. Definimos indutivamente a seguinte cadeia de subgrupos de G

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1(G) & = & G \\ \lambda_2(G) & = & [\lambda_1(G), G]\lambda_1(G)^p \\ \lambda_3(G) & = & [\lambda_2(G), G]\lambda_2(G)^p \\ \vdots & & \\ \lambda_i(G) & = & [\lambda_{i-1}(G), G]\lambda_{i-1}(G)^p \end{array}$$

A cadeia $G = \lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \ldots \geq \lambda_i(G) \geq \ldots$ é denominada *série p-central inferior* de G.

Note que $\gamma_2(G) = G' \leq \lambda_2(G)$ e, indutivamente, $\gamma_i(G) = [\gamma_{i-1}(G), G] \leq [\lambda_{i-1}(G), G] \leq \lambda_i(G)$.

Proposição 1.3.1. *Se $G = \lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \ldots \geq \lambda_i(G) \geq \ldots$ é a série p- central inferior de G, para cada $i = 1, 2, \ldots$ temos:*

i) $\lambda_i(G) \trianglelefteq G$

ii) $\lambda_i(G)/\lambda_{i+1}(G) \leq Z(G/\lambda_{i+1}(G))$

iii) $\lambda_i(G)/\lambda_{i+1}(G)$ *tem expoente p.*

.

Demonstração. i) Para $i = 1$ temos que $\lambda_1(G) = G \trianglelefteq G$. Por indução, suponhamos que $\lambda_i(G) \trianglelefteq G$ então $\lambda_{i+i}(G) \trianglelefteq G$, já que $\lambda_{i+1}(G) = [\lambda_i(G), G]\lambda_i(G)^p$.

ii) Por definição $\lambda_{i+1}(G) = [\lambda_i(G), G]\lambda_i(G)^p \quad \Rightarrow \quad [\lambda_i(G), G] \leq \lambda_{i+1}(G)$.
Logo $\lambda_i(G)/\lambda_{i+1}(G) \leq Z(G/\lambda_{i+1}(G))$.

iii) Se $a \in \lambda_i(G)/\lambda_{i+1}(G)$, então $a = g\lambda_{i+1}(G)$ para algum $g \in \lambda_i(G)$, logo $a^p = g^p\lambda_{i+1}(G) = \lambda_{i+1}(G)$ pela definição de $\lambda_{i+1}(G)$.

□

A proposição acima justifica o termo p-central utilizado na definição anterior.

Proposição 1.3.2. *Se G é finitamente gerado, então $G/\lambda_i(G)$ é um p-grupo finito, para todo i*

Demonstração. Para $i = 1$, nada temos a demonstrar. Por indução, suponhamos que $G/\lambda_i(G)$ é p-grupo finito. Como G é finitamente gerado, $\lambda_i(G)$ também é. Portanto segue de 1.3.1 *iii)* que $\lambda_i(G)/\lambda_{i+1}(G)$ é um p-grupo abeliano elementar finito. Isso mostra que $G/\lambda_{i+1}(G)$ é p-grupo finito. □

1.4 Grupos Livres e Produtos Livres

1.4.1 Grupos Livres

Definição 1.4.1. Um grupo F é dito *livre* sobre um conjunto $X \subseteq F$ se, para qualquer grupo G e qualquer função $\theta : X \to G$, existe um único homomorfismo $\theta' : F \to G$ tal que

$$x\theta' = x\theta \tag{1.4.1}$$

para todo $x \in X$. O cardinal $|X|$ é chamado o *posto* de F.

Em outras palavras, podemos dizer que θ' estende θ ou, denotando por $i : X \to F$ a inclusão de X em F que o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\theta"'] & F \arrow[dl, "\theta'"] \\ G & \end{tikzcd}$$

é comutativo, i.é. $i\theta' = \theta$. Observe que estamos aplicando a função à direita.

Substituindo a palavra "grupo"por "grupo abeliano"nos dois lugares em que ela aparece, obtemos o conceito de *grupo abeliano livre*. A construção de um grupo livre pode ser verificada em Johnson, [7].

Proposição 1.4.1. *i) Se F é livre sobre X, então X gera F;*

ii) Grupos livres de mesmo posto são isomorfos;

iii) Grupos livres de postos diferentes não são isomorfos.

Denotaremos por e o elemento neutro de um grupo e por $F(X)$ o grupo livre sobre X.

Teorema 1.4.2. *Um grupo F é livre sobre X se, e somente se,*

i) X gera F, e

ii) não existe relação não trivial entre os elementos de X, i.e., se $n \in \mathbb{N}$, $x = x_1 \dots x_n$ onde para todo i, $x_i \in X$ ou ${x_i}^{-1} \in X$, e $x_i x_{i+1} \neq e$ para todo i com $1 \leq i \leq n-1$, então $x \neq e$.

Teorema 1.4.3 (Nielsen-Schreier)**.** *Todo subgrupo de um grupo livre é livre. Além disso, se F é grupo livre de posto r (finito) e H é subgrupo de F tal que $[F : H] = g$ (finito), então o posto de H é igual a $(r-1)g+1$.*

Proposição 1.4.4. *Todo grupo é imagem homomórfica de algum grupo livre.*

Seja G um grupo e $\phi : F(X) \to G$ um epimorfismo do grupo livre $F = F(X)$ sobre G. Temos então que $F/N \cong G$, em que N é o núcleo de ϕ. Agora seja $R \subseteq F$ um conjunto que gera N como subgrupo normal de F, i.e., $\langle R \rangle^F = N$. Observamos que X e R determinam G (a menos de isomorfismos). Assim, escrevemos $G = \langle X | R \rangle$ e chamamos este par uma *apresentação livre*, ou simplesmente apresentação de G. Os elementos de X são os *geradores* e os de R, os *relatores*. Dizemos que G é finitamente apresentado se existe uma apresentção $G = \langle X | R \rangle$ em que X e R são finitos.

Proposição 1.4.5. *Se G, H, K são grupos e $\alpha : G \to H$, $\beta : G \to K$ são homomorfismos com α sobrejetora e tais que $\mathrm{Nuc}(\alpha) \subseteq \mathrm{Nuc}(\beta)$, então existe um homomorfismo $\gamma : H \to K$ tal que $\alpha\gamma = \beta$.*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Nuc}(\beta) \arrow[dr, hook] & & H \arrow[dd, "\gamma"] \\
& G \arrow[ur, two heads, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & \\
\mathrm{Nuc}(\alpha) \arrow[uu, hook] \arrow[ur, hook] & & K
\end{tikzcd}$$

Teorema 1.4.6 (Teste de Substituição)**.** *Sejam G um grupo com apresentação $\langle X|R\rangle$, H um grupo arbitrário e $\theta : X \to H$ uma função. Então θ se estende a um homomorfismo $\theta' : G \to H$ se, e somente se, θ é consistente com os relatores de G, i.é., se para todo $x \in X$ e todo $r \in R$, o resultado da substituição de x por $x\theta$ em r dá a identidade de H.*

Proposição 1.4.7. *Se G e H são grupos com apresentações $\langle X|R\rangle$ e $\langle Y|S\rangle$ respectivamente, então o produto direto $G \times H$ tem apresentação*

$$\langle X, Y \mid R, S\ [X, Y]\rangle$$

1.4.2 Produtos Livres

Agora generalizamos a noção de grupos livres para produtos livres.

Definição 1.4.2. Sejam $\{A_i\}_{i\in I}$ uma família de grupos. Um *produto livre* dos A_i é um grupo P e uma família de homomorfismos $j_i : A_i \to P$ tal que, para todo grupo G e toda família de homomorfismos $f_i : A_i \to G$, existe um único homomorfismo $\varphi : P \to G$ com $\varphi j_i = f_i$, para todo $i \in I$.

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[r, "j_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & P \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\
& G
\end{tikzcd}$$

Proposição 1.4.8. *Sejam $\{A_i\}_{i\in I}$ uma família de grupos. Se P e Q são ambos produto livre dos A_i, então $P \cong Q$.*

Por causa da proposição acima, vamos denotar o produto livre P de $\{A_i\}$ por

$$P = *_{i\in I} A_i;$$

No caso de uma família finita de grupos $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, é comum escrever-se $A_1 * A_2 * \ldots A_n$ para inicar o produto livre.

Proposição 1.4.9. *Dada uma famila $\{A_i\}_{i\in I}$ de grupos, um produto livre sempre existe.*

Proposição 1.4.10. *Seja $G * H$ o produto livre de dois grupos não triviais. Então o subgrupo comutador $[G, H]$ de $G * H$ é normal. Além disso, $[G, H]$ é um grupo livre sobre o conjunto*

$$\{[g, h] \mid g \in G \backslash \{e\},\ h \in H \backslash \{e\}, \}$$

1.5 Sequências Exatas

Uma sequência de homomorfismos de grupos

$$\ldots G_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} G_i \xrightarrow{f_i} G_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

é *exata* em G_i se $\mathrm{Im}(f_{i-1}) = \mathrm{Nuc}(f_i)$. A sequência é dita *exata* quando for exata em cada G_i. Em Particular

i) $1 \longrightarrow B \xrightarrow{\alpha} C$ é exata se, e somente se, α é injetora.

ii) $B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 1$ é exata se, e somente se, β é sobrejetora.

iii) $1 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 1$ é exata se, e somente se, α é injetora, β é sobrejetora e β induz um isomorfismo de $B/\,\mathrm{Im}(\alpha)$ sobre C.

Dados grupos A e C, então um grupo G é uma extensão de A por C se G contém um subgrupo normal $N \cong^{\varphi} A$ tal que $G/N \cong C$. Indicando por i a imersão de A em G induzido pelo isomorfismo $\varphi : N \to A$ e por π o epimorfismo canônico $G \to G/N (\cong C)$, podemos representar a extensão pela sequência exata

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} C \longrightarrow 1$$

Definição 1.5.1. Uma extensão $1 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 1$ *cinde-se ("splits")*, se existe um homomorfismo $\gamma : C \to B$ tal que $\gamma\beta = Id_C$.

Definição 1.5.2. Uma extensão $1 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 1$ é *central*, se $\mathrm{Im}(\alpha)$ é um subgrupo central de B.

Definição 1.5.3. Seja G um grupo. Dizemos que um subgrupo H de G tem *complemento* K em G se $H \cap K = \{e\}$ e $HK = G$ onde $HK = \{hk|\ h \in H,\ k \in K\}$

Proposição 1.5.1. *Seja* $1 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 1$ *uma extensão. Então*

i) esta sequência "splits"se, e somente se, $\mathrm{Nuc}(\beta)$ *têm complemento em* B*;*

ii) existe um homomorfismo $\rho : B \to A$ *tal que* $\alpha\rho = Id_A$ *se, e somente se,* $\mathrm{Nuc}(\beta)$ *têm um complemento normal em* B*. Neste caso,* B *é isomorfo ao produto direto de* C *e* A*.*

1.6 O Multiplicador de Schur

Nesta seção vemos alguns conceitos básicos de cohomologia de grupos, necessários para definirmos o Multiplicador de Schur.

Definição 1.6.1. Sejam G e A grupos. Uma ação de G sobre A é um homomorfismo $\theta : G \to Aut(A)$.

Fixado θ, escrevemos $(a)g\theta$ como a^g, para indicar a ação à direita de g em a. Se θ é o homomorfismo trivial então dizemos que G age trivialmente sobre A ou que A é G-trivial.

Vamos considerar nesta seção uma ação fixada do grupo G, multiplicativo com identidade e, sobre o grupo A abeliano multiplicativo com identidade e.

Definição 1.6.2. Uma função $f : G^n \to A$ do produto direto de $n \geq 1$ cópias de G sobre A é chamada de *n-cocadeia* de G em A. Dizemos que uma *n-cocadeia* f é normalizada se $(g_1, \ldots, g_n)f = 1$, sempre que algum $g_i = e$, $i = 1, \ldots, n$.

Seja $C^n(G, A)$ o conjunto de todas as *n-cocadeias* de G em A. Se definirmos uma multiplicação ponto-a-ponto em $C^n(G, A)$, isto é, para todos $f_1,\ f_2\ \in C^n(G, A)$, $(g_1, \ldots, g_n)f_1f_2 = (g_1, \ldots, g_n)f_1(g_1, \ldots, g_n)f_2$, fica claro que $C^n(G, A)$ é um grupo abeliano. Estendemos a definição de $C^n(G, A)$ para o caso $n = 0$ fazendo $C^0(G, A) = A$.

Agora, para $n \geq 0$, a fórmula

$$(g_1, \ldots, g_{n+1})fd_{n+1} = (g_2, \ldots, g_{n+1})f \\ \times[\prod_{i=1}^{n}(g_1, \ldots, g_{i-1}, g_ig_{i+1}, g_{i+2}, \ldots, g_{n+1})f^{(-1)^i}][(g_1, \ldots, g_n)f^{(-1)^{n+1}}]^{g_{n+1}}. \qquad (1.6.1)$$

determina um homomorfismo $d_{n+1} : C^n(G, A) \to C^{n+1}(G, A)$. Sejam $Z^n(G, A) = \mathrm{Nuc}(d_{n+1})$ e $B^n(G, A) = \mathrm{Im}(d_n)$, $n \geq 1$.

Os elementos de $Z^n(G, A)$ são chamados de *n-cociclos* e os elementos de $B^n(G, A)$ de *n-cobordos*. Conforme pode ser encontrado em Johnson [7], verifica-se que $d_nd_{n+1} = 1_n$, em que 1_n é a função $1_n : C^{n-1}(G, A) \to C^{n+1}(G, A)$ tal que $f \mapsto I_{n+1}$, onde I_{n+1} é a função identidade em $C^{n+1}(G, A)$. Então, para todo $f \in C^{n-1}(G, A)$ temos que $(f)d_nd_{n+1} = 1_n$, de modo que $\mathrm{Im}(d_n) \leq \mathrm{Nuc}(d_{n+1})$. Como $Z^n(G, A)$ é um grupo abeliano, temos que $B^n(G, A) \trianglelefteq Z^n(G, A)$, para todo $n \geq 1$. O n-ésimo grupo de cohomologia de G com coefiientes em A, é definido por

$$H^n(G, A) := Z^n(G, A)/B^n(G, A) \qquad (n \geq 1).$$

Como $C^n(G, A)$ é abeliano, temos que $H^n(G, A)$ é grupo abeliano, para todo $n \geq 1$.

Podemos verificar que para todo n-cociclo $f_1 \in Z^n(G, A)$, existe um n-cociclo normalizado tal que $f_1 \equiv f_2(\mathrm{mod}\, B^n(G, A))$, de modo que $H^n(G, A)$ não é afetado se nos restringirmos a n-cocadeias normalizadas.

Asumindo que $n = 1$, temos que $f \in Z^1(G, A)$ se, e somente se, $(xy)f = (x)f^y(y)f$ para todo $x, y \in G$. Além disso $B^1(G, A)$ consiste de todas funções $f : G \to A$ em que existe $a \in A$ tal que $(g)f = a(a^{-1})^g$ para todo $g \in G$. Logo, se a ação de G sobre A é trivial, então $H^1(G, A)$ coincide com o grupo $\mathrm{Hom}(G, A)$ de todos os homomorfismos de G em A.

Para o caso $n = 2$, temos que $f \in Z^2(G, A)$ se, e somente se,

$$(x, y)f^z(xy, z) = f(y, z)f(x, yz)f \qquad x, y, z \in G,$$

e $f \in B^2(G, A)$ se, e somente se, existe $t : G \to A$ tal que

$$(x, y)f = (y)t(xy)t^{-1}(x)t^y \qquad x, y \in G.$$

Definição 1.6.3. Sejam G um grupo finito, K um corpo algebricamente fechado de característica zero e K^* é o grupo multiplicativo dos elementos não nulos de K. Então o segundo grupo de cohomologia $H^2(G, K^*)$, onde G age trivialmente sobre K^*, é chamado multiplicador de Schur de G, indicado por $M(G)$.

Teorema 1.6.1 (Schur 1907)**.** *Sejam G um grupo finito, F um grupo livre de posto n com $F/R \cong G$ e $\tau = R/[R,F]$. Então*

i) $\mathcal{T} = R \cap F'/[R,F]$ é o subgrupo de torção de τ e o fator livre de torção é o grupo $R/(F' \cap R)$ abeliano livre de posto n. Em particular, τ é subgrupo abeliano finitamente gerado de $F/[R,F]$.

ii) Se K é um corpo algebricamente fechado de característica zero, então $H^2(G,K^*) \cong \mathcal{T}$.

A demontração deste teorema pode ser encontrado em Karpilovsky, [8] ou dissertação de Elisa [15].

1.6.1 Algumas Propriedades de Cohomologia de Grupos

Dado um cociclo $f : G \times G \to A$, sua restrição a $H \times H$, onde H é subgrupo de G, determina um cociclo $f' : H \times H \to A$. Pode-se verificar que a atribuição $f \mapsto f'$ induz um homomorfismo $H^2(G,A) \to H^2(H,A)$. Este homomorfismo é chamado *função restrição* e denotaremos por Res ou Res_H^G.

Sejam H um subgrupo de G, $g \in G$ e $H^g = g^{-1}Hg$. Dado $f \in Z^2(H,A)$, seja $f^g \in Z^2(H^g,A)$ definido por

$$(x,y)f^g = (gxg^{-1}, gyg^{-1})f \qquad \text{para todo}\, x,\, y \in H^g$$

Temos então que a função

$$\begin{cases} Z^2(H,A) & \to & Z^2(H^g,A) \\ f & \mapsto & f^g \end{cases}$$

é um homomorfismo que leva cobordos em cobordos, induzindo uma função

$$\mathrm{Con}_H^g : H^2(H,A) \to H^2(H^g,A)$$

chamada de *conjugação* por g.

Proposição 1.6.2. *Com a notação acima, seguem as propriedades:*

i) Se $g \in H$, então Con_H^g é a função identidade.

ii) Se $x,\, y \in G$, então $Con_H^x Con_{H^x}^y = Con_H^{xy}$.

iii) Se $H \subseteq K \subseteq G$, então para todo $g \in G$, $Con_{K^g}^{g^{-1}} Res_H^K = Res_{H^g}^{K^g} Con_{H^g}^{g^{-1}}$.

Agora sejam H um subgrupo de G de índice finito m e $\{e = s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ um transversal à direita de H em G. Dado $x \in G$, denotemos por $\bar{x}$ o s_i tal que $x \in Hs_i$, e dado $f \in Z^2(H, A)$, seja $Tf : G \times G \to A$ definido por

$$(x, y)(Tf) = \prod_{i=1}^{m} ((s_i x)(\overline{s_i x})^{-1}, \overline{s_i x} y \overline{s_i x y}^{-1}) f.$$

Pode-se verificar em Babakhanian [1] que $Tf \in Z^2(G, A)$ e que a função

$$\begin{cases} Z^2(H, A) & \to & Z^2(G, A) \\ f & \mapsto & Tf \end{cases}$$

é um homomorfismo que leva cobordo em cobordo, induzindo assim, uma função $H^2(H, A) \to H^2(G, A)$ chamada de *correstrição* ou *transfer* e denotada por Cor_G^H ou Cor. Essa função é *tansitiva*, i.e. para toda cadeia de subgrupos $S \subseteq H \subseteq G$ de G temos $\mathrm{Cor}_G^S = \mathrm{Cor}_H^S \mathrm{Cor}_G^H$.

Dados um subgrupo H de G e $g \in G$, denotamos $H(g)$ por $H \cap H^g$. Um elemento $f \in H^2(H, A)$ é dito *G-estável* se, para todo $g \in G$,

$$(f)\mathrm{Res}_{H(g)}^H = (f)\mathrm{Con}_H^g \mathrm{Res}_{H(g)}^{H^g}$$

Os elementos G-estáveis de $H^2(H, A)$ formam um grupo chamado o subgrupo *G-estável* de $H^2(H, A)$.

Proposição 1.6.3. *Seja H um subgrupo de G de índice finito m.*

i) Para todo $f \in H^2(G, A)$, $((f)Res_H^G)Cor_G^H = f^m$.

ii) Para todo elemento G-estável $f \in H^2(H, A)$, $((f)Cor_G^H)Res_H^G = f^m$.

iii) Se $f = (\alpha)Res_H^G$ para algum $\alpha \in H^2(G, A)$, então f é G-estável.

Agora se G denota o produto semi-direto de um subgrupo normal N por um subgrupo T , i.e. $G = NT$ e $N \cap T = \{e\}$, então vamos denotar por $M(N)^T$, o subgrupo T-estável de $M(N)$.

Proposição 1.6.4 (Tahara 1972)**.** *Se N é um subgrupo de Hall normal de G e T é um complemento de N em G. Então $M(G) \cong M(T) \times M(N)^T$.*

1.7 Relações entre Comutadores e o Multiplicador de Schur

Nesta seção reproduzimos o trabalho de C. Miller [10]. Dado um grupo G, seja $\hat{G}$, o grupo livre sobre todos os pares $\langle x, y\rangle$, com $x,\ y \in G$. Considere $\phi : \hat{G} \to [G, G]$ o epimorfismo natural que manda $\langle x, y\rangle$ em $[x, y]$, $\forall\, x,\ y \in G$.

Denote por $[w] \in [G, G]$ a imagem de $w \in \hat{G}$ e seja $Z(G) = \mathrm{Nuc}(\phi) = \{w \in \hat{G} \mid [w] = 1\}$.

Seja $B(G)$ o fecho normal em $\hat{G}$ gerado pelos relatores

$$\begin{array}{l} \langle x, x\rangle \\ \langle x, y\rangle\langle y, x\rangle \\ \langle xy, z\rangle\langle y, z\rangle^{-1}\langle x, z\rangle^{-y} \\ \langle y, z\rangle^{x}\langle [y, z], x\rangle^{-1}\langle y, z\rangle^{-1}. \end{array}$$

onde $\langle y, z\rangle^x = \langle y^x, z^x\rangle \quad \forall\, x,\ y,\ z \in G$

Definimos *o quadrado exterior de* G por $G \wedge G = \hat{G}/B(G)$ e denotamos cada classe $B(G)\langle x, y\rangle \in \hat{G}/B(G)$ por $x \wedge y$. Assim, $G \wedge G$ é o grupo gerado por todos os elementos $x \wedge y, \quad x,\ y \in G$, satisfazendo as relações

$$x \wedge x = 1 \tag{1.7.1}$$

$$x \wedge y = (y \wedge x)^{-1} \tag{1.7.2}$$

$$(xy \wedge z) = (x \wedge z)^y (y \wedge z) \tag{1.7.3}$$

$$(y \wedge z)^x = (y \wedge z)([y, z] \wedge x) \tag{1.7.4}$$

em que $x,\ y,$ e z pertencem a G e, por definição,

$$(y \wedge z)^x = y^x \wedge z^x = x^{-1}yx \wedge x^{-1}zx \tag{1.7.5}$$

É claro que $B(G) \trianglelefteq Z(G)$, pois as imagens dos relatores de $B(G)$ por ϕ, são relações de comutadores dadas na Proposição 1.1.1. Assim, definimos o *grupo associado* de G (cf. Miller) por

$$H(G) = Z(G)/B(G).$$

Se $h : G \to P$ é um homomorfismo de grupos, definimos

$$h_\sharp : \hat{G} \to \hat{P}$$

por $\langle x, y\rangle h_\sharp = \langle (x)h, (y)h\rangle$. Então $h_\sharp$ leva $Z(G)$ em $Z(P)$ e $B(G)$ em $B(P)$, induzindo um homomorfismo

$$h_* : H(G) \to H(P).$$

que satisfaz

$$(hg)_* = h_* g_*, \qquad 0_* = 0, \qquad \tilde{1}_* = \tilde{1}$$

onde 0 é o homomorfismo nulo, tal que $(x)0 = 1$, e $\tilde{1}$ é o homomorfismo identidade.

Invertendo ambos os lados de (1.7.2) e usando (1.7.3) obtemos que

$$x \wedge yz = (x \wedge z)(x \wedge y)^z \tag{1.7.6}$$

Algumas das consequências das relações definidoras de $B(G)$ são as seguintes:

$$(x \wedge y)^{a\wedge b} = (x \wedge y)^{[a,b]} \tag{1.7.7}$$

onde $(x \wedge y)^{a\wedge b}$ é por definição $(a \wedge b)^{-1}(x \wedge y)(a \wedge b)$

$$\begin{aligned}
[(x \wedge y), (a \wedge b)] &= [x, y] \wedge [a, b] && (1.7.8)\\
(b \wedge b')(a_0 \wedge b_0) &= ([b', b] \wedge a_0)(a_0 \wedge b_o[b', b])(b \wedge b') && (1.7.9)\\
(b \wedge b')(b_0 \wedge a_0) &= (b_0[b', b] \wedge a_0)(a_0 \wedge [b', b])(b \wedge b') && (1.7.10)\\
(b \wedge b')(a \wedge a') &= ([b, b'] \wedge [a, a'])(a \wedge a')(b \wedge b') && (1.7.11)\\
x^n \wedge x^s &= e \quad n = 0, \pm 1, \ldots;\ s = 0, \pm 1, \ldots && (1.7.12)
\end{aligned}$$

Mostramos (1.7.7) expandindo $xb \wedge ya$ usando (1.7.3) e (1.7.6).

$$\begin{aligned}
xb \wedge ya &= (xb \wedge a)(xb \wedge y)^a\\
&= (x \wedge a)^b (b \wedge a)(x \wedge y)^{ba}(b \wedge y)^a
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
xb \wedge ya &= (x \wedge ya)^b (b \wedge ya)\\
&= (x \wedge a)^b (x \wedge y)^{ab}(b \wedge a)(b \wedge y)^a
\end{aligned}$$

Comparando as duas equações

$$(b \wedge a)(x \wedge y)^{ab} = (x \wedge y)^{ba}(b \wedge a)$$

ou

$$(a \wedge b)^{-1}(x \wedge y)^{ab}(a \wedge b) = (x \wedge y)^{ba}$$

Trocando x e y por $x^{(ba)^{-1}}$ e $y^{(ba)^{-1}}$, respectivamente, obtemos

$$(a \wedge b)^{-1}(x \wedge y)(a \wedge b) = (x \wedge y)^{a^{-1}b^{-1}ba} = (x \wedge y)^{[a,b]}$$

Observe que (1.7.8) é uma consequência de (1.7.7), pois

$$\begin{aligned}
[x \wedge y, a \wedge b] &= (x \wedge y)^{-1}(x \wedge y)^{(a \wedge b)} \\
&= (x \wedge y)^{-1}(x \wedge y)^{[a,b]} \\
&= (x \wedge y)^{-1}(x \wedge y)([x,y] \wedge [a,b]) \quad \text{por (1.7.4)} \\
&= ([x,y] \wedge [a,b])
\end{aligned}$$

(1.7.9) é verificada expandindo $(a_0 \wedge b_0[b', b])$ usando (1.7.6)

$$\begin{aligned}
(a_0 \wedge b_0[b', b]) &= (a_0 \wedge [b', b])(a_0 \wedge b_0)^{[b',b]} \\
&= (a_0 \wedge [b', b])(a_0 \wedge b_0)^{b' \wedge b} \qquad \text{por (1.7.7).}
\end{aligned}$$

A prova de (1.7.10) é similar e (1.7.11) é uma reescrita de (1.7.9). A equação (1.7.12) é provada para inteiros não negativos n e s por indução sobre $n+s$. Por (1.7.3), temos

$$xe \wedge x = (x \wedge x)^1(x \wedge e) \text{ por (1.7.3).}$$

Logo $(x \wedge e) = e$ e o resultado vale para $n + s = 1$.

Suponha que $x^n \wedge x^s = e$ para $n + s \leq k$. Então

$$\begin{aligned}
x^{n+1} \wedge x^s &= (x^n \wedge x^s)^x(x \wedge x^s) \qquad \text{por (1.7.3)} \\
&= e \qquad \text{(por hipotese de indução)}
\end{aligned}$$

O caso geral segue trivialmente do caso para não negativos usando novamente (1.7.3).

Lema 1.7.1. *Se $G = A * B$ é o produto livre de A e B, então $H(G) \cong H(A) \times H(B)$.*

Demonstração. Sejam $i : A \to G$ e $j : B \to G$ injeções naturais, e $p : G \to A$ e $q : G \to B$ projeções naturais. Observando o diagrama

$$\begin{tikzcd}
H(A) \arrow[dr, "i_*"] & & H(B) \arrow[dl, "j_*"'] \\
& H(G) \arrow[dl, "p_*"] \arrow[dr, "q_*"'] & \\
H(A) & & H(B)
\end{tikzcd}$$

temos que i_* e j_* são isomorfismos sobre suas imagens, já que $H(A)i_*p_*i_* = H(A)$ e $H(B)j_*q_*j_* = H(B)$. Além disso $H(A)i_*$ e $H(B)j_*$ são disjuntos. Assim, se caso $H(G) = H(A)i_*H(B)j_*$ então temos que $H(G) = H(A)i_* \times H(B)j_*$. O problema, então, é mostrar que $H(G) = H(A)i_*H(B)j_*$.

Para isso considere os três subgrupos de $G \wedge G :\ A \wedge A,\ B \wedge B$ e $\mathcal{M}$, o subgrupo de $G \wedge G$ gerado por todos os elementos da forma $a \wedge b$, com $a \neq 1 \in A$, e $b \neq 1 \in B$. Seja $\langle x, y\rangle$ um gerador de $\hat{G}$, com $x = a_1b_1a_2b_2 \ldots a_sb_s,\ y = \bar{a_1}\bar{b_1}\bar{a_2} \ldots \bar{a_r}\bar{b_r}$, em que $a_i,\ \bar{a_j}\ \in A,\ b_i,\ \bar{b_j}\ \in B$. Aplicando as igualdades (1.7.3) e (1.7.6) repetitivamente vemos que $x \wedge y$ é um produto de elementos na forma $(a \wedge a')^z,\ (b \wedge b')^z,\ (a \wedge b)^z$ e $(b \wedge a)^z$ com $a,\ a',\in A \quad b,\ b'\ \in B$, e $z \in G$. Aplicando as relações

$$\begin{aligned}
(a \wedge a_0)^{a_0} &= a^{a_0} \wedge a'^{a_0} \\
(a \wedge a')^{b_0} &= (a \wedge a')([a, a'] \wedge b_o) \\
(a \wedge b)^{a_o} &= (aa_0 \wedge b)(b \wedge a_0) \\
(a \wedge b)^{b_0} &= (b_0 \wedge a)(a \wedge bb_0)
\end{aligned}$$

e mais quatro outras similares a essas, obtidas trocando a por b e a_0 por b_0, juntamente com $c \wedge d = (d \wedge c)^{-1}$, cada um dos elementos $(a \wedge a')^z,\ (b \wedge b')^z,\ (a \wedge b)^z$, e $(b \wedge a)^z$ pode ser reescrito como produto de elementos na forma $(a \wedge a'),\ (b \wedge b'),\ (a \wedge b)$, e $(b \wedge a)$. Logo $x \wedge y\ \in G \wedge G$ é igual ao produto π de elementos da forma $(a \wedge a'), (b \wedge b'), (a \wedge b)$, e $(b \wedge a)$.

Agora tome cada $b \wedge b'$ em π e "colete-o"à direita (começando com o que esta mais a direita em π) via relações (1.7.9), (1.7.10) e (1.7.11). Logo obtemos para um elemento arbitrário $t \in G \wedge G \quad t = \pi = \pi'\beta$, em que β é um produto de termos $b \wedge b'$ e π' um produto de termos $a \wedge a',\ b \wedge b'$ e $b \wedge a$. Agora tome cada termo na forma $a \wedge a'$ e "colete-o"à esquerda via relações semelhantes a (1.7.9) e (1.7.10), obtidas trocando a

por b e a' por b'; e obtemos então que

$$t = \pi'\beta = \alpha\pi''\beta$$

onde π'' é o produto de elementos da forma $a \wedge b$, $b \wedge a$ e α um produto de termos $a \wedge a'$. Reescrevendo cada $b \wedge a$ em π'' por $(a \wedge b)^{-1}$ temos que $\pi'' = \mu \in \mathcal{M}$ e, portanto,

$$t = \alpha\mu\beta$$

com $\alpha \in A \wedge A$, $\mu \in \mathcal{M}$ e $\beta \in B \wedge B$.

Seja $\tilde{\phi} : G \wedge G \to G$ o homomorfismo induzido por $\phi : \hat{G} \to G$, tal que $t = x \wedge y \mapsto [t] = [x, y]$

Assim, se $t \in H(G)$ então $[\alpha][\mu][\beta] = [t] = e$ e, projetando t em $A \wedge A$ vemos que $[\alpha] = e$; similarmente $[\beta] = e$, logo $[\mu] = e$. Mas se $[\mu] = e$, então $\mu = e$, pois $\mu = (a_1 \wedge b_1)^{\epsilon_1} \ldots (a_p \wedge b_p)^{\epsilon_p}$ com $\epsilon_i = \pm 1$ $a_i \neq e \neq b_i$. Então por indução sobre p podemos ver que $[\mu]$ pode ser escrito como uma palavra reduzida no produto livre $G = A * B$ em que os últimos dois termos são ${b_p}^{-1}{a_p}^{-1}$ se $\epsilon_p = -1$, ou ${a_p}^{-1}{b_p}^{-1}$ se $\epsilon_p = 1$. Em particular $[\mu] \neq e$ se μ não é a palavra vazia.

Portanto $\mu = e$ e $t = \alpha\mu\beta = \alpha\beta$, mostrando que $H(G) = H(A)i_* H(B)j_*$. □

Proposição 1.7.2. *O Grupo Associado de um grupo livre é trivial.*

Demonstração. O caso em que F é grupo livre com apenas um gerador decorre do fato que $x^n \wedge x^s = e$. Se F é grupo livre com um numero finito de geradores, a prova é por indução utilizando o lema anterior.

Agora, o caso em que F é um grupo livre de posto infinito segue do caso que F é grupo livre com um número finito de geradores, pois se F têm infinitos geradores e $u \in H(F)$, então $u \in H(L)i_*$, onde L é um subgrupo de F com um numero finito de geradores, e i é a inclusão. □

Teorema 1.7.3. *Existe um isomorfismo canônico entre $H(G)$ e $M(G)$ preservando o homomorfismo induzido, isto é, se $h : G \to P$ é um homomorfismo, então o diagrama a seguir comuta*

$$\begin{tikzcd}
H(P) \arrow[r, phantom, "\approx"] & M(P) \\
H(G) \arrow[u, "h_*"] \arrow[r, phantom, "\approx"] & M(G) \arrow[u, "h_*"]
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Suponha que G é um grupo tal que $G \cong E/N$, em que N é um subgrupo central de E. Considere $\eta : E \to G$ o homomorfismo sobrejetivo cujo núcleo é N. Defina então um homomorfismo $\hat{G} \to E$ tomando um gerador $\langle x, y\rangle$ de $\hat{G}$ e levando-o em $[\bar{x}, \bar{y}]$, onde $(\bar{x})\eta = x$ e $(\bar{y})\eta = y$. Este homomorfismo independe da escolha de $\bar{x}$ e $\bar{y}$ pois N esta no centro de E. Além disso ele leva $Z(\hat{G})$ sobre $N \cap [E, E]$, pois se $x = N\bar{x}$ e $y = N\bar{y}$ tal que $\langle x, y\rangle \in Z(G)$, temos que $[x, y] = N[\bar{x}, \bar{y}] = e_G$. E também leva $B(G)$ sobre e, pois a imagem de um elemento em $B(G)$ é uma relação de comutadores em E.

Logo pela Proposição 1.4.5 este homomorfismo induz um homomorfismo $\phi : H(G) \to N \cap [E, E]$, e ainda $\mathrm{Nuc}(\phi) = \mathrm{Im}(\eta_*)$, pois se $(\bar{g_1} \wedge \bar{h_1})^{\epsilon_1} \dots (\bar{g_r} \wedge \bar{h_r})^{\epsilon_r} \in H(E)$, $\epsilon_i = \pm 1$, então $((\bar{g_1} \wedge \bar{h_1})^{\epsilon_1} \dots (\bar{g_r} \wedge \bar{h_r})^{\epsilon_r})\eta_*\phi = [\bar{g_1}, \bar{h_1}]^{\epsilon_1} \dots [\bar{g_r}\bar{h_r}]^{\epsilon_r} = e$ já que $\langle \bar{g_1}, \bar{h_1}\rangle^{\epsilon_1} \dots \langle \bar{g_r}, \bar{h_r}\rangle^{\epsilon_r} \in Z(E)$, assim temos que $\mathrm{Im}(\eta_*) \subseteq \mathrm{Nuc}(\phi)$.

Por outro lado se $(g_1 \wedge h_1)^{\epsilon_1} \dots (g_r \wedge h_r)^{\epsilon_r} \in \mathrm{Nuc}(\phi)$, $\epsilon = \pm 1$, então $((g_1 \wedge h_1)^{\epsilon_1} \dots (g_r \wedge h_r)^{\epsilon_r})\phi = [\bar{g_1}, \bar{h_1}]^{\epsilon_1} \dots [\bar{g_r}, \bar{h_r}]^{\epsilon_r} = e_N$, tal que $g_i = (\bar{g_i})\eta$ e $h_i = (\bar{h_i})\eta$, logo $\langle \bar{g_1}, \bar{h_1}\rangle^{\epsilon_1} \dots \langle \bar{g_r}, \bar{h_r}\rangle^{\epsilon_r} \in Z(E)$ e $(g_1 \wedge h_1)^{\epsilon_1} \dots (g_r \wedge h_r)^{\epsilon_r} \in \mathrm{Im}(\eta *)$

Portanto a sequência

$$H(E) \xrightarrow{\eta_*} H(G) \xrightarrow{\phi} N \cap [E, E]$$

é exata em $H(G)$.

Se G é um grupo arbitrário, podemos representar G como o fator de um grupo livre F por um subgrupo R, $G = F/R$. Considerando $F^0 = F/[F, R]$ e $R^0 = R/[F, R]$ teremos que

$$F \xrightarrow{\lambda} F^0 \xrightarrow{\eta} G$$

onde λ e η são projeções. Vejamos que R^0 está no centro de F^0, logo pelo argumento acima ϕ é um homomorfismo de $H(G)$ em $R^0 \cap [F^0, F^0]$, tal que a sequência $H(F^0) \xrightarrow{\eta_*} H(G) \xrightarrow{\phi} R^0 \cap [F^0, F^0]$ é exata em $H(G)$.

Vamos mostrar que $\eta_* = 0$. Seja $w = \langle x_1, y_1\rangle \dots \langle x_p, y_p\rangle \in Z(F^0)$. Então $[w] = [x_1, y_1] \dots [x_p, y_p] = e \in F^0$, e, escolhendo $\bar{x_i}, \bar{y_i} \in F$ tal que $(\bar{x_i})\lambda = x_i$ e $(\bar{y_i})\lambda = y_i$, temos que $\bar{w} = \langle \bar{x_1}, \bar{y_1}\rangle \dots \langle \bar{x_p}, \bar{y_p}\rangle$, com $\bar{w}\lambda_\sharp = w$, $[\bar{w}]\lambda = [w] = e$, logo $[\bar{w}] \in [F, R]$.

Portanto $[\bar{w}] = [f_1, r_1] \dots [f_q, r_q]$, para $f_i \in F$ e $r_i \in R$. Agora como F é livre, $H(F) = e$, e $B(F) = Z(F)$. Então $\bar{w} \equiv \langle f_1, r_1\rangle \dots \langle f_q, r_q\rangle \bmod B(G)$. Assim

$$\begin{aligned} w\eta_\sharp &= \bar{w}\lambda_\sharp\eta_\sharp \equiv \langle f_1, r_1\rangle \dots \langle f_q, r_q\rangle\lambda_\sharp\eta_\sharp \\ &\equiv \langle f_1\lambda\eta, 1\rangle \dots \langle f_q\lambda\eta, 1\rangle \equiv e \bmod B(G) \end{aligned}$$

e $\eta_* = 0$.

Portanto $H(G) \cong R^0 \cap [F^0, F^0]$. E como $R^0 \cap [F^0, F^0] = R \cap [F, F]/[F, G]$ é a construção por Hopf de $M(G)$, como no Teorema 1.6.1, temos o isomorfismo que queríamos. □

1.8 Produtos Tensoriais de Módulos

Definição 1.8.1. Seja R um anel com identidade e não necessáriamente comutativo. Um grupo abeliano M (aditivo) é um R-módulo à esquerda se existe uma função $R \times M \to M, \quad (r, m) \mapsto r \cdot m$ satisfazendo

i) $r \cdot (m + m') = r \cdot m + r \cdot m'$

ii) $(r + r') \cdot m = r \cdot m + r' \cdot m$

iii) $(rr') \cdot m = r(r' \cdot m)$

iv) $e \cdot m = m$

para todo m, $m' \in M$ e r, $r' \in R$

Definição 1.8.2. Uma função $f : M \to N$ entre R-módulos à esquerda M e N é um R-homomorfismo se

$$(m + m')f = (m)f + (m')f \quad \text{e} \quad (r \cdot m)f = r \cdot (m)f$$

para todo m, $m' \in M$ e $r \in R$.

Exemplo: Se $R = \mathbb{Z}$ então os conceitos de R-módulo e de grupo abeliano são equivalentes, e $\mathbb{Z}$-homomorfismo é equivalente a homomorfismo de grupos.

Analogamente, definimos um R-módulo à direita e um R-homomorfismo entre R-módulos à direita. Se R é comutativo, todo R-módulo à esquerda também pode se considerado um R-módulo à direita definindo $r \cdot m = m \cdot r$ para todo $m \in M$ e $r \in R$.

Neste caso, dizemos simplesmente que M é um R-módulo.

Definição 1.8.3. Se M é um R-módulo à direita, N um R-módulo à esquerda e G um grupo abeliano aditivo, então uma função R-biaditiva é uma aplicação $f : M \times N \to G$ satisfazendo

i) $(m + m', n)f = (m, n)f + (m', n)f$

ii) $(m, n + n')f = (m, n)f + (m, n')f$

iii) $(m \cdot r, n)f = (m, r \cdot n)f$

para todo m, $m' \in M$ n, $n' \in N$.

Definição 1.8.4. Sejam M um R-módulo à direita e N um R-módulo à esquerda. Então um *produto tensorial* de M e N é um grupo abeliano T junto com uma função R-biaditiva φ tais que, para todo grupo abeliano G e toda função R-biaditiva f : $M \times N \to G$, existe um único homomorfismo $\tilde{f} : T \to G$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & T \arrow[dl, "\tilde{f}"] \\ G & \end{tikzcd}$$

comuta.

Teorema 1.8.1. *Se (T_1, φ_1) e (T_2, φ_2) representam o produto tensorial de M e N então T_1 e T_2 são isomorfos.*

Demonstração. Sejam $\tilde{\varphi}_1 : T_2 \to T_1$, $\tilde{\varphi}_2 : T_1 \to T_2$ os homomorfismos tais que os diagramas

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & T \arrow[dl, "\tilde{\varphi}_1"] \\ T_1 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & T \arrow[dl, "\tilde{\varphi}_2"] \\ T_2 & \end{tikzcd}$$

comutam. Mas notemos que $\varphi_1\tilde{\varphi}_2\tilde{\varphi}_1 = \varphi_2\tilde{\varphi}_1 = \varphi_1$, i.é, $\tilde{\varphi}_2\tilde{\varphi}_1$ é um homomorfismo que faz o diagrama

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & T \arrow[dl, "\tilde{\varphi}_2\tilde{\varphi}_1"] \\ G & \end{tikzcd}$$

comutar. Mas a aplicação identidade $Id_{T_1} : T_1 \to T_1$ também têm essa propriedade. Pela unicidade devemos ter $\tilde{\varphi}_2\tilde{\varphi}_1 = Id_{T_1}$. De modo análogo provamos que $\tilde{\varphi}_1\tilde{\varphi}_2 = Id_{T_2}$ e portanto φ_1 é um isomorfismo. □

Teorema 1.8.2. *O produto tensorial de um R-módulo à direita M e um R-módulo à esquerda N existe.*

Demonstração. Seja F o grupo abeliano livre sobre $M \times N$ e seja S o subgrupo normal de F gerado pelas relações

$$\begin{aligned}(m+m',n)-(m,n)-(m',n)\\(m,n+n')-(m,n)-(m,n')\\(m\cdot r,n)-(m,r\cdot n)\end{aligned}$$

Definimos $M \otimes_R N = F/S$ e denotamos cada elemento $(m,n)+S \ \in F/S$ por $m\otimes n$. Seja $\varphi : M \times N \to M \otimes_R N$ uma aplicação dada por $(m,n)\varphi = m \otimes n$. É facil verificar que φ é uma função R-biaditiva.

Agora sejam G um grupo abeliano e $f : M \times N \to G$ uma função R-biaditiva.

Como F é livre existe um único homomorfismo $f' : F \to G$ estendendo f. Sendo f R-biaditiva temos $S \subset \mathrm{Nuc}(f')$. Seque então da Proposição 1.4.5 que existe um homomorfismo $\tilde{f} : F/S \to G$ tal que $\pi\tilde{f} = f'$ onde $\pi : F \to F/S$ é a projeção natural.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Nuc}(f') \arrow[dr] & & F/S \arrow[dd, "\tilde{f}"] \\
& F \arrow[ur, "\pi"] \arrow[dr, "f'"'] & \\
S \arrow[uu] \arrow[ur] & & G
\end{tikzcd}$$

Notemos que $(m\otimes n)\tilde{f} = (m,n)f$ para todo $m \in M$ $n \in N$. Assim $\varphi\tilde{f} = f$. Além disso, $\tilde{f}$ está unicamente determinada por f já que o conjunto de todos os elementos da forma $m \otimes n$ gera $M \otimes_R N$. $\square$

Desse teorma concluimos que $M \otimes_R N$ é o grupo abeliano gerado por todos os símbolos $m \otimes n$ com $m \in M$ e $n \in N$ satisfazendo

$$\begin{aligned}(m+m',n) &= (m,n)+(m',n)\\(m,n+n') &= (m,n)+(m,n')\\(m\cdot r,n) &= (m,r\cdot n)\end{aligned}$$

para todo $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ e $r \in R$. Daí concluimos que se 0_M, 0_N são identidades de M e N respectivamente então $0_M \otimes n = m \otimes 0_N$. é a identidade de $M \otimes_R N$.

Proposição 1.8.3. *Se R é comutativo e M e N são R-módulos, então $M \otimes_R N$ é um R-módulo com $(m \otimes n) \cdot r = m \otimes n \cdot r$.*

Demonstração. Fixemos $\in R$. A aplicação $f_r : M \times N \to M \otimes_R N$ em que $(m, n) \mapsto m \otimes n \cdot r$ é claramente R-biaditiva. Segue da definição do produto tensorial que existe um único homomorfismo $\tilde{f}_r : M \otimes_R N \to M \otimes_R N$ tal que $\varphi \tilde{f}_r = f_r$ onde φ é a função definida no Teorema 1.8.2 . Observemos que $(m \otimes n)\tilde{f}_r = m \otimes n \cdot r$ para todo $m \in M$, $n \in N$. É facil ver que a aplicação

$$\begin{aligned} M \otimes_R N &\to M \otimes_R N \\ (m \otimes n) &\mapsto (m \otimes n) \cdot r = (m \otimes n)\tilde{f}_r \end{aligned}$$

satisfaz os axiomas de módulo à direita. Além disso, em $M \otimes_R N$ vale

$$(m \otimes n) \cdot r = m \otimes n \cdot r = m \otimes r \cdot n = m \cdot r \otimes n$$

para todo $m \in M$, $n \in N$ e $r \in R$ □

Segue deste resultado que se M e N são grupos abelianos finitamente gerados com M ou N finito, então $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ é finito.

Proposição 1.8.4. *Se p e q são primos entre si então $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_q$ é trivial.*

Demonstração. De fato

$$\begin{aligned} p(a \otimes b) = pa \otimes b = 0 \otimes b \text{ e} \\ q(a \otimes b) = a \otimes qb = a \otimes 0 \end{aligned}$$

para todo $a \in \mathbb{Z}_p$ e $b \in \mathbb{Z}_q$.

□

1.9 O Funtor Quadrático de Whitehead

Definição 1.9.1. Dado um grupo abeliano (aditivo) A, seja ΓA o grupo gerado por todos os elementos γa, com $a \in A$, satisfazendo

$$\gamma(-a) = \gamma a; \quad (1.9.1)$$

$$\gamma(a + b + c) + \gamma a + \gamma b + \gamma c = \gamma(a + b) + \gamma(b + c) + \gamma(c + a). \quad (1.9.2)$$

para todos os elementos $a,\, b,\, c\, \in A$

Segue de (1.9.2) com $a = b = c = 0$ que $\gamma 0$ é o elemento neutro de ΓA. Assim fazendo $c = 0$ em (1.9.2) obtemos

$$\gamma a + \gamma b = \gamma b + \gamma a$$

e portanto ΓA é um grupo abeliano.

Proposição 1.9.1. *Se A é um grupo abeliano livre de posto n e $\{a_1, \ldots, a_n\}$ é um conjunto de geradores livres para A então ΓA é abeliano livre sobre o conjunto*

$$\{\gamma a_i,\, W(a_j, a_k) \mid 1 \leq i \leq n, \;\; 1 \leq j < k \leq n\}$$

em que $W(a, b) = \gamma(a + b) - \gamma a - \gamma b$, para todos $a,\, b \in A$.

A demosntração desta proposição pode ser encontrada na dissertação de Nakaoka [12].

CAPÍTULO 2

O QUADRADO TENSORIAL NÃO-ABELIANO DE P-GRUPOS E O GRUPO $\nu(G)$

2.1 O Produto Tensorial não-abeliano de Grupos

Sejam G e H grupos munidos com uma ação de G sobre H e de H sobre G. Suponhamos que cada um desses grupos atue sobre si mesmo por conjugação, i.e., para $g, x, \in G, \ h, y \in H, \ g^x = x^{-1}gx$ e $h^y = y^{-1}hy$. Dessa forma temos uma ação do produto livre $G * H$ sobre G e H. Vamos dizer que as ações de G sobre H e de H sobre G são *compatíveis* se, para todo $g, g_1, \in G \ h, h_1 \in H$,

$$g^{(h^{g_1})} = g^{{g_1}^{-1}hg_1} := ((g^{{g_1}^{-1}})^h)^{g_1} \tag{2.1.1}$$

$$h^{(g^{h_1})} = h^{{h_1}^{-1}gh_1} := ((h^{{h_1}^{-1}})^g)^{h_1} \tag{2.1.2}$$

Se G e H agem um sobre o outro compativelmente, o produto tensorial (não abeliano) de G e H é definido como o grupo gerado por todos os símbolos $g \otimes h$, $g \in G$, $h \in H$ satisfazendo as relações

$$gg_1 \otimes h = (g^{g_1} \otimes h^{g_1})(g_1 \otimes h) \tag{2.1.3}$$

$$g \otimes hh_1 = (g \otimes h_1)(g^{h_1} \otimes h^{h_1}) \tag{2.1.4}$$

para todo $g, \ g_1 \in G$ e $h, \ h_1 \in H$. Tal grupos é denotado por $G \otimes H$.

Notemos que as relações (2.1.3) e (2.1.4) têm as forma das identidades de comutadores quando $g \otimes h$ é substituído por $[g, h]$ e as ações por conjugação.

Como a ação por conjugação de um grupo G sobre si mesmo satisfaz (2.1.1) e (2.1.2), o *quadrado tensorial* não abeliano $G \otimes G$ de um grupo G está definido.

Obs: Fazendo $g_1 = e$ em (2.1.3) e $h_1 = e$ em (2.1.4) temos que $g \otimes e = e \otimes h$ é o elemento neutro de $G \otimes H$ para todo $g \in G,\ h \in H$.

Definição 2.1.1. Sejam L, G, H grupos. Uma função $\phi : G \times H \to L$ é chamada *biderivação* se, para todo g, $g_1 \in G$ e h, $h_1 \in H$,

$$(gg_1, h)\phi = (g^{g_1}, h^{g_1})\phi.(g_1, h)\phi$$
$$(g, hh_1)\phi = (g, h_1)\phi.(g^{h_1}, h^{h_1})\phi$$

Pela Proposição 1.4.5 uma biderivação $\phi : G \times H \to L$ determina um único homomorfismo $\phi^* : G \otimes H \to L$ tal que $(g \otimes h)\phi^* = (g, h)\phi$.

Proposição 2.1.1. *Os grupos G e H atuam sobre $G \otimes H$ de modo que*

$$(g_1 \otimes h)^g = {g_1}^g \otimes h^g,\ (g \otimes h_1)^h = g^h \otimes {h_1}^h$$

para todo g, $g_1 \in G$ e h, $h_1 \in H$. Consequentemente, temos uma ação de $G * H$ sobre $G \otimes H$ dada por

$$(g \otimes h)^p = g^p \otimes h^p,$$

onde $g, \in G$ $h, \in H$ e $p \in G * H$

Demonstração. Para cada $g \in G$ consideremos a função $\phi_g : G \times H \to G \otimes H$ tal que $(g_1, h)\phi_g = g_1^g \otimes h^g$ com g, $g_1 \in G$, $h \in H$. Notemos que

$$\begin{aligned}
(g_1, hh_1)\phi_g &= {g_1}^g \otimes (hh_1)^g \\
&= {g_1}^g \otimes h^g {h_1}^g \\
&= ({g_1}^g \otimes {h_1}^g)[({g_1}^g)^{{h_1}^g} \otimes (h^g)^{{h_1}^g}] && \text{por (2.1.4)} \\
&= ({g_1}^g \otimes {h_1}^g)[({g_1}^g)^{g^{-1}h_1 g} \otimes {h_1}^{-g} h^g {h_1}^g] && \text{por (2.1.1)} \\
&= ({g_1}^g \otimes {h_1}^g)({g_1}^{h_1 g} \otimes h^{h_1 g}) \\
&= (g_1, h_1)\phi_g \cdot ({g_1}^{h_1}, h^{h_1})\phi_g
\end{aligned}$$

e similarmente

$$(g_1 g_2, h)\phi_g = ({g_1}^{g_2}, h^{g_2})\phi_g.(g_2, h)\phi_g$$

Logo ϕ_g é uma biderivação e temos um único homomorfismo de grupos $\alpha_g : G \otimes H \to G \otimes H$ tal que $(g_1 \otimes h)\alpha_g = ({g_1}^g \otimes h^g)$ para todo $g_1 \in G,\ h \in H$. Alem disso α_g

é um automorfismo de $G \otimes H$ uma vez que $\alpha_g \alpha_{g^{-1}} = \alpha_{g^{-1}} \alpha_g = Id_{G \otimes H}$. E como $\alpha : G \rightarrow Aut\,(G \otimes H)$ em que $g \mapsto \alpha_g$ é um homomorfismo de grupos, temos uma ação de G sobre $G \otimes H$ tal que

$$(g_1 \otimes h)^g = {g_1}^g \otimes h^g$$

O outro caso é provado de forma análoga. □

Proposição 2.1.2. *Suponhamos que $\alpha : G \rightarrow A$, $\beta : H \rightarrow B$ sejam homomorfismos de grupos, A, B agem compativelmente um sobre o outro e que α e β preservam as ações, no seguinte sentido:*

$$(h^g)\beta = (h\beta)^{g\alpha}, \qquad (g^h)\alpha = (g\alpha)^{h\beta}$$

para todo $g \in G$, $h \in H$. Então existe um único homomorfismo

$$\alpha \otimes \beta : G \otimes H \rightarrow A \otimes B$$

tal que $(g \otimes h)(\alpha \otimes \beta) = g\alpha \otimes h\beta$ para todo $g \in G$, $h \in H$. Além disso, se α e β são sobrejetoras então $\alpha \otimes \beta$ também é.

Demonstração. Consideremos a função $\phi : G \times H \rightarrow A \otimes B$ dada por $(g, h)\phi = g\alpha \otimes h\beta$. Para todo $g_1,\ g_2 \in G$ e $h \in H$ temos

$$\begin{array}{rcll} (g_1 g_2, h)\phi & = & (g_1 g_2)\alpha \otimes h\beta & \\ & = & (g_1)\alpha(g_2)\alpha \otimes h\beta & \\ & = & (g_1\alpha^{g_2\alpha} \otimes h\beta^{g_2\alpha})(g_2\alpha \otimes h\beta) & \text{por } (2.1.3) \\ & = & [({g_1}^{g_2})\alpha \otimes (h^{g_2})\beta](g_2\alpha \otimes h\beta) & \\ & = & ({g_1}^{g_2}, h^{g_2})\phi(g_2, h)\phi & \end{array}$$

e, similarmente, $(g, h_1 h_2)\phi = (g, h_2)\phi(g^{h_2}, {h_1}^{h_2})\phi$ para todo $g \in G$, h_1, $h_2 \in H$. Logo ϕ é uma biderivação e assim determina um único homomorfismo $\alpha \otimes \beta : G \otimes H \rightarrow A \otimes B$ tal que $(g \otimes h)(\alpha \otimes \beta) = g\alpha \otimes h\beta$, $\forall\, g \in G$, $h \in H$. Além disso, se α e β são sobrejetoras então dadas $a \in A$ e $b \in B$ existem $g \in G$ e $h \in H$ tais que $g\alpha = a$ e $h\beta = b$. Logo $(g \otimes h)(\alpha \otimes \beta) = a \otimes b$ mostrando que $\alpha \otimes \beta$ também é sobrejetota. □

Proposição 2.1.3. *Existe um único isomorfismo*

$$\nu : G \otimes H \rightarrow H \otimes G$$

tal que $(g \otimes h)\nu = (h \otimes g)^{-1}$ para todos $g \in G$, $h \in H$.

Demonstração. Seja a função $\phi : G \times H \to H \otimes G$ dada por $(g,h)\phi = (h \otimes g)^{-1}$. Notemos que

$$\begin{aligned}(g_1g_2, h)\phi &= (h \otimes g_1g_2)^{-1} \\ &= [(h \otimes g_2)(h^{g_2} \otimes {g_1}^{g_2})]^{-1} \qquad \text{por (2.1.4)} \\ &= (h^{g_2} \otimes {g_1}^{g_2})^{-1}(h \otimes g_2)^{-1} \\ &= ({g_1}^{g_2}, h^{g_2})\phi(g_2, h)\phi\end{aligned}$$

similarmente $(g, hh_1)\phi = (g, h_1)\phi(g^{h_1}, h^{h_1})\phi$. Logo ϕ é uma biderivação e assim existe um únco homomorfismo $\nu : G \otimes H \to H \otimes G$ tal que $(g \otimes h)\nu = (h \otimes g)^{-1}$ para todo $g \in G,\ h \in H$. Da mesma forma existe um homomorfismo $\mu : H \otimes G \to G \otimes H$ tal que $(h \otimes g)\mu = (g \otimes h)^{-1}$ para todo $h \in H,\ g \in G$. Obviamente $\mu\nu = Id_{G\otimes H}$ e $\nu\mu = Id_{G\otimes H}$ e portanto ν é um isomorfismo.

□

Proposição 2.1.4. *Para todo $g,\ g_1 \in G$ e $h,\ h_1 \in H$ temos*

i) $(g^{-1} \otimes h)^g = (g \otimes h)^{-1} = (g \otimes h^{-1})^h$;

ii) $(g \otimes h)^{-1}(g_1 \otimes h_1)(g \otimes h) = (g_1 \otimes h_1)^{[g,h]} = (g_1 \otimes h_1)^{g^{-1}g^h} = (g_1 \otimes h_1)^{h^{-g}h}$;

iii) $(g^{-1}g^h) \otimes h_1 = (g \otimes h)^{-1}(g \otimes h)^{h_1}$;

iv) $g_1 \otimes h^{-g}h = (g \otimes h)^{-g_1}(g \otimes h)$;

v) $[g \otimes h, g_1 \otimes h_1] = g^{-1}g^h \otimes {h_1}^{-g_1}h_1$.

Demonstração. $i)$ segue do fato que

$$e \otimes h = g^{-1}g \otimes h = (g^{-1} \otimes h)^g(g \otimes h)$$

e

$$g \otimes e = g \otimes h^{-1}h = (g \otimes h)(g \otimes h^{-1})^h$$

para todo $g \in G$ e $h \in H$.

$ii)$ Sejam $u,\ v \in G,\ x,\ y \in H$. Expandindo $uv \otimes xy$ primeiro por (2.1.3) e depois por (2.1.4) temos

$$\begin{aligned}uv \otimes xy &= (u \otimes xy)^v(v \otimes xy) \\ &= (u \otimes y)^v(u \otimes x)^{yv}(v \otimes y)(v \otimes x)^y\end{aligned}$$

Agora, expandindo $uv \otimes xy$ primeiro por (2.1.4) e depois por (2.1.3) obtemos

$$\begin{aligned} uv \otimes xy &= (uv \otimes y)(uv \otimes x)^y \\ &= (u \otimes y)^v (v \otimes y)(u \otimes x)^{vy}(v \otimes x)^y \end{aligned}$$

Comparando as últimas igualdades, segue que

$$(u \otimes x)^{yv}(v \otimes y) \quad = \quad (v \otimes y)(u \otimes x)^{vy} \tag{2.1.5}$$

Fazendo então $u = {g_1}^{g^{-1}h^{-1}}$, $v = g$, $x = h_1^{g^{-1}h^{-1}}$ e $y = h$ em (2.1.5) obtemos

$$(g_1 \otimes h_1)(g \otimes h) = (g \otimes h)({g_1}^{g^{-1}h^{-1}} \otimes {h_1}^{g^{-1}h^{-1}})^{gh}$$

i.e.,

$$(g \otimes h)^{-1}(g_1 \otimes h_1)(g \otimes h) = (g_1 \otimes h_1)^{g^{-1}h^{-1}gh}$$

Agora segue da Proposição 2.1.1 e do fato que as ações são compatíveis que

$$(g_1 \otimes h_1)^{g^{-1}h^{-1}gh} = ({g_1}^{g^{-1}h^{-1}gh} \otimes {h_1}^{g^{-1}h^{-1}gh}) = ({g_1}^{g^{-1}g^h} \otimes {h_1}^{g^{-1}g^h})$$

e similarmente

$$(g_1 \otimes h_1)^{g^{-1}h^{-1}gh} = ({g_1}^{h^{-g}h} \otimes {h_1}^{h^{-g}h})$$

Logo

$$(g \otimes h)^{-1}(g_1 \otimes h_1)(g \otimes h) = (g_1 \otimes h_1)^{g^{-1}h^{-1}gh} = ({g_1}^{g^{-1}g^h} \otimes {h_1}^{g^{-1}g^h}) = ({g_1}^{h^{-g}h} \otimes {h_1}^{h^{-g}h})$$

iii) Temos que

$$\begin{aligned} (g^{-1}g^h) \otimes h_1 &= [(g^{-h^{-1}}g) \otimes {h_1}^{h^{-1}}]^h && \\ &= (g^{-h^{-1}} \otimes {h_1}^{h^{-1}})^{gh}(g \otimes {h_1}^{h^{-1}})^h && \text{por (2.1.3)} \\ &= (g^{-1} \otimes h_1)^{h^{-1}gh}(g \otimes h^{-1})^h(g \otimes hh_1)^{h^{-1}h} && \text{por (2.1.4)} \\ &= (g^{-1} \otimes h_1)^{h^{-1}gh}(g \otimes h^{-1})^h(g \otimes h_1)(g \otimes h)^{h_1} && \text{novamente por (2.1.4)} \\ &= (g \otimes h_1)^{-[g,h]}(g \otimes h)^{-1}(g \otimes h_1)(g \otimes h)^{h_1} && \text{por } i) \\ &= (g \otimes h)^{-1}(g \otimes h)^{h_1} && \text{por } ii) \end{aligned}$$

iv) é provado de maneira análoga a *iii*)

v) Temos

$$\begin{aligned} [g \otimes h, g_1 \otimes h_1] &= (g \otimes h)^{-1}(g_1 \otimes h_1)^{-1}(g \otimes h)(g_1 \otimes h_1) && \\ &= (g \otimes h)^{-1}(g \otimes h)^{{h_1}^{-g_1}h_1} && \text{por } (ii) \\ &= (g^{-1}g^h) \otimes {h_1}^{-g_1}h_1 && \text{por } (iii) \end{aligned}$$

□

Definição 2.1.2. Um N-módulo cruzado é um grupo M junto com um homomorfismo de grupos $\lambda : M \to N$ e uma ação de N sobre M tal que

$$(m^n)\lambda = n^{-1}(m)\lambda n \qquad n \in N, \quad m \in M \tag{2.1.6}$$

$$(m')^{(m)\lambda} = m^{-1}m'm \qquad m,\ m' \in M \tag{2.1.7}$$

Proposição 2.1.5. *Sejam G e H grupos com ações compatíveis.*

i) Existem homomorfismos de grupos $\lambda : G \otimes H \to G, \quad \lambda' : G \otimes H \to H$ tais que $(g \otimes h)\lambda = g^{-1}h^g,\ (g \otimes h)\lambda' = h^{-g}h$;

ii) Os homomorfismos λ e λ' com as ações dadas em 2.1.1 são G-módulo cruzado e H-módulo cruzado respectivamente.

iii) Se $t \in G \otimes H,\ g \in G,\ h \in H$ então

$$\begin{aligned} t\lambda \otimes h &= t^{-1}t^h \\ g \otimes t\lambda' &= t^{-g}t \end{aligned}$$

iv) $t\lambda \otimes t_1\lambda' = [t, t_1]$

v) G e H agem trivialmente sobre $\mathrm{Nuc}(\lambda')$ *e* $\mathrm{Nuc}(\lambda)$ *respectivamente.*

Demonstração. *i)* Considere a função $\alpha : G \times H \to G$ dada por $(g, h) \mapsto g^{-1}g^h$. Notemos que para todo $g,\ g_1 \in G,\ h \in H$

$$\begin{aligned} (gg_1, h)\alpha &= {g_1}^{-1}g^{-1}g^h{g_1}^h \\ &= ({g_1}^{-1}g^{-1}g_1)({g_1}^{-1}g^hg_1)({g_1}^{-1}{g_1}^h) \\ &= (g^{g_1})^{-1}(g^h)^{g_1}{g_1}^{-1}{g_1}^h \\ &= (g^{g_1}, h^{g_1})\alpha\ (g_1, h)\alpha \end{aligned}$$

Analogamente

$$(g, hh_1)\alpha = (g, h_1)\alpha\ (g^{h_1}, h^{h_1})\alpha \quad \forall\, g \in G,\ h,\ h_1\ \in H$$

Logo α é uma biderivação e temos um homomorfismo $\lambda : G \otimes H \to G$ tal que $(g \otimes h)\lambda = g^{-1}g^h,\ g \in G,\ h \in H$. O outro caso é provado de forma análoga *ii)* Sejam $t = g_1 \otimes h \in G \otimes H$ e $g \in G$. Daí temos que

$$\begin{aligned}
(t^g)\lambda &= ({g_1}^g \otimes h^g)\lambda && \text{pela Proposição 2.1.1} \\
&= ({g_1}^g)^{-1}({g_1}^g)^{h^g} \\
&= {g_1}^{-g}{g_1}^{hg} && \text{por (2.1.1)} \\
&= ({g_1}^{-1}{g_1}^h)^g \\
&= g^{-1}(t)\lambda g
\end{aligned}$$

Logo λ satisfaz (2.1.6). Agora se $t_1 = g_1 \otimes h_1,\ t = g \otimes h \in G \otimes H$, então pela Proposição (2.1.4) *ii)* temos

$$(t_1)^{(t)\lambda} = (g_1 \otimes h_1)^{(g^{-1}g^h)} = (g \otimes h)^{-1}(g_1 \otimes h_1)(g \otimes h) = t^{-1}t_1 t$$

satisfazendo (2.1.7). Logo λ é um G-módulo cruzado. Analogamente λ' é um H-módulo cruzado.

iii) Sejam $g \in G,\ h \in H$ e $t = g_1 \otimes h_1$, então por 2.1.4 *iii)*

$$t\lambda \otimes h = {g_1}^{-1}{g_1}^{h_1} \otimes h = (g_1 \otimes h_1)^{-1}(g_1 \otimes h_1)^h = t^{-1}t^h$$

De modo análogo, usando *iv)* da Proposição 2.1.4 $g \otimes t\lambda' = t^{-g}t,\quad$ para todo $g \in G$, $t \in G \otimes H$.

iv) Sejam $t = g \otimes h,\ \ t_1 = g_1 \otimes h_1\ \in G$, então pela Proposição 2.1.4 *v)* temos que

$$t\lambda \otimes t_1\lambda' = g^{-1}g^h \otimes g_1^{-1}{g_1}^{h_1} = [(g \otimes h), (g_1 \otimes h_1)].$$

v) Se $t \in \text{Nuc}(\lambda')$ e $g \in G$ então por *iii)* segue que $e_{G \otimes H} = g \otimes t\lambda' = t^{-g}t$, isto é, $t^g = t$. Logo $\text{Nuc}(\lambda')$ é G-trivial. Analogamente $\text{Nuc}(\lambda)$ é H-trivial. □

Proposição 2.1.6. *Se G e H agem trivialmente um sobre o outro então*

$$G \otimes H \cong G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} H^{ab}$$

Demonstração. Observe que $G \otimes H$ é abeliano, pois pela Proposição 2.1.4 (*v*)

$$[g \otimes h, g_1 \otimes h_1]g^{-1}g^h \otimes {h_1}^{-g_1}h_1 = e \otimes e$$

Além disso como H é G-trivial

$$(g \otimes h)\lambda' = h^{-g}h = e \qquad g \otimes h \in G \otimes H$$

e sendo λ' homomorfismo, então $\mathrm{Nuc}(\lambda') = G \otimes H$.

Pela Proposição 2.1.5 (v) G age trivialmente sobre $G \otimes H$. Analogamente H também age trivialmente sobre $G \otimes H$.

Agora defina

$$\begin{aligned} \theta : G^{ab} \times H^{ab} &\rightarrow G \otimes H \\ (\bar{g}, \bar{h}) &\mapsto g \otimes h \end{aligned}$$

de modo que $\bar{g} = G'g$ e $\bar{h} = H'h$

Veja que θ está bem definida, pois se $\bar{x} = \bar{g}$ e $\bar{y} = \bar{h}$ então existem $c \in G'$ e $d \in H'$ tais que $g = cx$ e $h = dy$.

Assim

$$g \otimes h = cx \otimes dy = (c \otimes d)(x \otimes d)(c \otimes y)(x \otimes y).$$

Mas note que

$$[g_1, g_2] \otimes h_1 \quad = \quad ({g_1}^{-1} \otimes h_1)({g_2}^{-1} \otimes h_1)(g_1 \otimes h_1)(g_2 \otimes h_1) \quad = \quad e$$

já que G e H agem trivialmente sobre $G \otimes H$ e $G \otimes H$ é abeliano. Analogamente $g_1 \otimes [h_1, h_2] = e$ para todo $g,\ g_1 \in G$ e $h,\ h_1 \in H$. Logo $(c \otimes d) = (x \otimes d)(c \otimes y) = e$. Assim $g \otimes h = x \otimes y$ e θ está bem definida, e como as ações de G e H sobre $G \otimes H$ são triviais então θ é uma função $\mathbb{Z}$-bilinear. Agora se A é um $\mathbb{Z}$-módulo e $f : G^{ab} \times H^{ab} \rightarrow A$ é uma função $\mathbb{Z}$-bilinear é fácil ver que a função $\tilde{f} : G \otimes H \rightarrow A$ definida por $(g \otimes h)\tilde{f} = (\bar{g}, \bar{h})f$ é um $\mathbb{Z}$-homomorfismo estendendo f.

$$\begin{tikzcd} G^{ab} \times H^{ab} \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "f"'] & G \otimes H \arrow[dl, "\tilde{f}"] \\ A & \end{tikzcd}$$

Portanto pela unicidade do produto tensorial de módulos temos que $G \otimes H \cong G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} H^{ab}$ $\square$

Agora sejam G um grupo e $\mathbb{Z}G$ o anel de grupo de G sobre $\mathbb{Z}$. Um elemento de $\mathbb{Z}G$ tem a forma $\sum_{g \in G} x_g g$ onde $x_g \in \mathbb{Z}$ e apenas um número finito deles é diferente de zero.

Consideremos o seguinte homomorfismo de anéis, chamado de *aplicação de aumento*:

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon : \mathbb{Z}G & \to & \mathbb{Z} \\ \sum_{g\in G} x_g g & \mapsto & \sum_{g\in G} x_g \end{array}$$

O núcleo desse homomorfismo é dito *ideal de aumento* de G, e é denotado por $I(G)$.

Notemos que $I(G)$ é gerado como $\mathbb{Z}$-módulo pelo conjunto $\{g - e \mid g \in G \setminus \{e\}\}$ já que

$$\sum_{g\in G} x_g g = \sum_{g\in G} x_g g - x_g + x_g = \sum_{g\in G} x_g(g-e) + \sum_{g\in G} x_g = \sum_{g\in G} x_g(g-e)$$

para todo $\sum_{g\in G} x_g g \in I(G)$. Também $I(G)$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo.

Se A é um grupo abeliano com uma ação de G, façamos $r = \sum_{g\in G} x_g g \in \mathbb{Z}G$ operar sobre um elemento de $a \in A$ da seguinte forma

$$a.\sum_{g\in G} x_g g = \sum_{g\in G} x_g a^g$$

Facilmente verifica-se que

$$\begin{array}{rcl} (a+b)\cdot r & = & a\cdot r + b\cdot r \\ a\cdot(r+s) & = & a\cdot r + a\cdot r \\ a\cdot(rs) & = & (a\cdot r)\cdot s \\ a\cdot e & = & a \end{array}$$

de modo que A é um $\mathbb{Z}G$-módulo à direita.

Proposição 2.1.7. *Sejam A e G dois grupos com A abeliano e G A-trivial. Então*

$$A \otimes G \cong A \otimes_{\mathbb{Z}G} I(G).$$

A demontração dessa proposição pode vista em Guin [6].

2.2 O Quadrado Tensorial não-abeliano

O quadrado tensorial $G \otimes G$ de um grupo G é um caso especial do produto tensorial $G \otimes H$ de dois grupos G e H. Como vimos na seção 2.3, a ação por conjugação de um grupo G sobre si mesmo satisfazem (2.1.1) e (2.1.2).

É claro que a função comutador $G \times G \to G'$ é uma biderivação, e portanto induz um homomorfismo $k : G \otimes G \to G'$ dado por $(g \otimes h)k = [g, h]$ para todo $g,\ h \in G$. Sejam $J_2(G)$ o núcleo desse homomorfismo e $\Delta(G)$ o subgrupo normal de $G \otimes G$ gerado por todos os elementos $g \otimes g$ tal que $g \in G$. Obviamente o grupo $G \otimes G/\Delta(G)$ é o *quadrado exterior não abeliano* de G, definido na seção 1.7, ja que possui os mesmos conjuntos de geradores e relações definidoras.

Proposição 2.2.1. *i) $J_2(G)$ é um subgrupo central de $G \otimes G$*

ii) G age trivialmente sobre $J_2(G)$

Demonstração. i) Pela Proposição 2.1.5 (iv) para todo $t \in J_2(G),\ t_1 \in G \otimes G$ temos $[t, t_1] = (t)k \otimes (t_1)k = e_{G\otimes G}$
ii) Segue direto de (v) da Proposição 2.1.5

□

Lema 2.2.2. *Para todo $g \in G,\ c \in G'$*

$$cg \otimes cg = g \otimes g, \qquad gc \otimes gc = g \otimes g$$

Demonstração. Se $g \in G$ e $c \in G'$ é um comutador simples da forma $c = [x, y]$, então

$$\begin{aligned}
cg \otimes cg &= [x, y]g \otimes [x, y]g \\
&= ([x, y] \otimes g)^g([x, y] \otimes [x, y])^{g^2}(g \otimes g)(g \otimes [x, y])^g && \text{por (2.1.4) e (2.1.5)} \\
&= ([x, y] \otimes g)^g([x \otimes y, x \otimes y])^{g^2}(g \otimes g)(g \otimes [x, y])^g && \text{Prop. 2.1.4 } (v) \\
&= (g \otimes g)[([x, y] \otimes g)(g \otimes [x, y])]^g && \text{Já que } J_2(G) \text{ é central} \\
&= (g \otimes g)[(x \otimes y)^{-1}(x \otimes y)^g(x \otimes y)^{-g}(x \otimes y)]^g && \text{Prop. 2.1.4 } (iii) \text{ e } (iv) \\
&= g \otimes g
\end{aligned}$$

Se $c \in G'$ é um produto de comutadores da forma $[x_1, y_1] \dots [x_n, y_n]$ a prova segue por indução. □

Segue do lema, que para todo $a,\ b \in G$

$$(a \otimes a)^{b^2} = (a[a, b^2] \otimes a[a, b^2]) = a \otimes a \tag{2.2.1}$$

Proposição 2.2.3. *Com a mesma notação de 1.9, existe um homomorfismo*

$$\psi : \Gamma(G^{ab}) \to G \otimes G$$

dado por $\gamma(\bar{g}) \mapsto g \otimes g$ onde $\bar{g} = G'g$ para algum $g \in G$.

Demonstração. Seja $X = \{\gamma(\bar{g}) \mid g \in G\}$ e consirede a função $\theta : X \to G \otimes G$ dada por $(\gamma(\bar{g}))\theta = g \otimes g$.

Notemos que se $g_1\ g_2 \in G$ tais que $\bar{g_1} = \bar{g_2}$ então $g_1 = cg_2$ para algum $c \in G'$. Pelo lema anterior

$$(\gamma\bar{g_1})\theta = g_1 \otimes g_1 = cg_2 \otimes cg_2 = g_2 \otimes g_2 = (\gamma\bar{g_2})\theta.$$

Logo θ está bem definida.

Agora vejamos que pelas proposições 2.1.4 (i) e 2.2.1 (ii)

$$(\gamma(\overline{g^{-1}}))\theta = g^{-1} \otimes g^{-1} = (g^{-1} \otimes g^{-1})^g = (g \otimes g^{-1})^{-1} = (g \otimes g)^{g^{-1}} = g \otimes g = (\gamma\bar{g})\theta$$

logo θ é consistente com a relação (1.9.1). Além disso, para todo a, b, $c \in G$.

$$\begin{aligned}
(\gamma(\overline{abc}))\theta(\gamma\bar{a})\theta(\gamma\bar{b})\theta(\gamma\bar{c})\theta &= (abc \otimes abc)(a \otimes a)(b \otimes b)(c \otimes c) \\
&= (ab \otimes c)^c(ab \otimes ab)^{c^2}(c \otimes bc)(c \otimes a)^{bc} \\
&\quad (a \otimes a)(b \otimes b)(c \otimes c) \qquad \text{por (2.1.3) e (2.1.4)} \\
&= (a \otimes c)^{bc}(b \otimes c)^c(ab \otimes ab)(c \otimes c)(c \otimes b)^c(c \otimes a)^{bc} \\
&\quad (a \otimes a)(b \otimes b)(c \otimes c) \qquad \text{por (2.1.3), (2.1.4) e (2.2.1)} \\
&= (ab \otimes ab)(a \otimes c)^{bc}(b \otimes c)^c(b \otimes b)^{c^2}(c \otimes c) \\
&\quad (c \otimes b)^c(c \otimes a)^{bc}(a \otimes a)(c \otimes c) \qquad \text{pela Proposição 2.2.1} \\
&= (ab \otimes ab)(a \otimes c)^{bc}(bc \otimes bc)(c \otimes a)^{bc}(a \otimes a) \\
&\quad (c \otimes c) \qquad \text{por (2.1.3) e (2.1.4)} \\
&= (ab \otimes ab)(bc \otimes bc)[(a \otimes c)^c(a \otimes a)^{c^2}(c \otimes c)(c \otimes a)^c]^{b^c} \\
&= (ab \otimes ab)(bc \otimes bc)(ac \otimes ac) \\
&= (\gamma\overline{ab})\theta(\gamma\overline{bc})\theta(\gamma\overline{ac})\theta
\end{aligned}$$

Logo θ é consistente também com a relação (1.9.2) e portanto existe um homomorfismo $\psi : \Gamma(G^{ab}) \to G \otimes G$ estendendo θ. $\square$

Utilizando o Lema 2.2.2 é facil ver que $\mathrm{Im}(\psi) = \Delta(G)$. Além disso $\mathrm{Im}(\psi) \leq J_2(G)$ então pela proposiçao 1.4.5, k induz um homomorfismo $k' : G \otimes G/\mathrm{Im}(\psi)\ (\cong G \wedge G) \to G'$ tal que $\rho k' = k$ onde $\rho : G \otimes G \to G \otimes G/\mathrm{Im}(\psi)\ (\cong G \wedge G)$ é a projeção natural. Pelos resulados obtidos em 1.7 temos que $M(G) \cong H(G)$. Portanto podemos ver que $M(G) \cong \mathrm{Nuc}(k')$.

Sejam $i : J_2(G) \to G \otimes G$ a inculsão e $\beta = i\rho\alpha^{-1}$ onde α é o isomorfismo de $M(G)$ sobre o $\mathrm{Nuc}(k')$. Então temos o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas e extensões centrais como colunas.

$$\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
\Gamma(G^{ab}) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\cong"] & J_2(G) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "i"] & M(G) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 1 \\
\Delta(G) \arrow[r, "\psi"] & G \otimes G \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "k"] & G \wedge G \arrow[r] \arrow[d, "k'"] & 1 \\
& G' \arrow[r, "\cong"'] \arrow[d] & G' \arrow[d] & \\
& 1 & 1 &
\end{tikzcd}$$

Segue deste diagrama o seguinte resultado:

Proposição 2.2.4. *Se G é um grupo finito (p-grupo finito, p primo) então $G \otimes G$ também é finito (p-grupo finito).*

Demonstração. Se G é um grupo finito então $M(G)$ e $\Gamma(G^{ab})$ também são. Segue da primeira linha do diagrama acima que $J_2(G)$ é finito e como G' também é finito, concluímos da penultima coluna que $G \otimes G$ também é um grupo finito. Similarmente, se G é um p-grupo finito então $G \otimes G$ também é. $\square$

2.3 O Quadrado Tensorial não-abelianos de p-Grupos

Nesta seção investigamos a ordem do quadrado tensorial de um p-grupo. Rocco [17] encontrou uma limitação para $|G \otimes G|$, em que G é um p-grupo finito. Posteriormente, G. Ellis e A. McDermott melhoraram a cota de Rocco e estenderam para o produto tensorial não abeliano de um p-grupo finito e um q-grupo finito, onde p e q são primos (não necessariamente iguais). Exibimos essa cota em uma abordagem dada por R. D. Blyth, F. Fumagalli e M. Morigi [2], para o quadrado tensorial não abeliano de um p-grupo.

Sejam G um grupo e G^{φ} um grupo isomorfo a G via isomorfismo $\varphi : G \to G^{\varphi}$ tal que $g \mapsto g^{\varphi}$. Consideremos grupo

$$\nu(G) = \langle G, G^{\varphi} \mid [g_1, {g_2}^{\varphi}]^{g_3} = [g_1^{g_3}, ({g_2}^{g_3})^{\varphi}] = [g_1, {g_2}^{\varphi}]^{{g_3}^{\varphi}}, \ \forall\, g_1,\ g_2,\ g_3 \in G \rangle.$$

Lema 2.3.1. *São satisfeitas as seguinte relações em* $\nu(G)$

i) $[g_1, g_2{}^{\varphi}]^{[g_3, g_4{}^{\varphi}]} = [g_1, g_2{}^{\varphi}]^{[g_3, g_4]}, \quad g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4 \in G$

ii) $[g_1, g_2{}^{\varphi}, g_3] = [g_1, g_2, g_3{}^{\varphi}] = [g_1, g_2{}^{\varphi}, g_3{}^{\varphi}] =$
$= [g_1{}^{\varphi}, g_2, g_3] = [g_1{}^{\varphi}, g_2, g_3{}^{\varphi}] = [g_1{}^{\varphi}, g_2{}^{\varphi}, g_3], \quad g_1,\ g_2,\ g_3, \in G$

iii) $[g, g^{\varphi}]$ *é central em* $\nu(G)$ $\forall g \in G$.

iv) $[g_1, g_2{}^{\varphi}][g_2, g_1{}^{\varphi}]$ *é central em* $\nu(G) \quad g_1,\ g_2, \in G$

v) Se $g \in G'$ *então* $[g, h^{\varphi}][h, g^{\varphi}] = e$, *para todo* $h \in G$;

vi) $[g, g^{\varphi}] = e,\ \forall g \in G'$

vii) $[g_1, [g_2, g_3]^{\varphi}] = [g_2, g_3, g_1{}^{\varphi}]^{-1} \quad g_1,\ g_2,\ g_3, \in G$

Demonstração. (i) pelas relações definidoras de $\nu(G)$ temos:

$$\begin{aligned}
[g_1, g_2{}^{\varphi}]^{[g_3, g_4{}^{\varphi}]} &= [g_1, g_2{}^{\varphi}]^{g_3{}^{-1} g_4{}^{-\varphi} g_3 g_4{}^{\varphi}} \\
&= [g_1{}^{g_3{}^{-1}}, (g_2{}^{g_3{}^{-1}})^{\varphi}]^{g_4{}^{-\varphi} g_3 g_4{}^{\varphi}} \\
&= \ldots\ldots\ldots \\
&= [g_1{}^{g_3{}^{-1} g_4{}^{-1} g_3 g_4}, (g_2{}^{g_3{}^{-1} g_4{}^{-1} g_3 g_4})^{\varphi}] \\
&= [g_1, g_2{}^{\varphi}]^{[g_3, g_4]};
\end{aligned}$$

(ii) De $[x, y] = x^{-1}x^{y}$ e das relações de comutadores dadas em 1.1.1 temos

$$\begin{aligned}
[g_1, g_2, g_3{}^{\varphi}] &= [g_1{}^{-1} g_1{}^{g_2}, g_3{}^{\varphi}] \\
&= [g_1{}^{-1}, g_3{}^{\varphi}]^{g_1{}^{g_2}} . [g_1{}^{g_2}, g_3{}^{\varphi}] \\
&= [g_1{}^{-1}, g_3{}^{\varphi}]^{g_2{}^{-1} g_1 g_2} [g_1, (g_3{}^{g_2{}^{-1}})^{\varphi}]^{g_2} \\
& \quad \text{pelas relações definidoras de } \nu(G) \\
&= [g_1, g_3{}^{\varphi}]^{-g_1{}^{-1} g_2{}^{-1} g_1 g_2} [g_1, (g_2 g_3 g_2{}^{-1})^{\varphi}]^{g_2} \\
&= [g_1, g_3{}^{\varphi}]^{-[g_1, g_2]} [g_1, (g_2{}^{-1})^{\varphi}]^{g_2} [g_1, (g_2 g_3)^{\varphi}] \\
&= [g_1, g_3{}^{\varphi}]^{-[g_1, g_2]} [g_1, g_2{}^{\varphi}]^{-1} [g_1, g_3{}^{\varphi}] [g_1, g_2{}^{\varphi}]^{g_3} \\
&= [g_1, g_3{}^{\varphi}]^{-[g_1, g_2{}^{\varphi}]} [g_1, g_2{}^{\varphi}]^{-1} [g_1, g_3{}^{\varphi}] [g_1, g_2{}^{\varphi}]^{g_3} \text{ por } (i) \\
&= [g_1, g_2{}^{\varphi}]^{-1} [g_1, g_3{}^{\varphi}]^{-1} [g_1, g_3{}^{\varphi}] [g_1, g_2{}^{\varphi}]^{g_3} \\
&= [g_1, g_2{}^{\varphi}]^{-1} [g_1, g_2{}^{\varphi}]^{g_3} \\
&= [g_1, g_2{}^{\varphi}, g_3];
\end{aligned}$$

Podemos observar que

$$\begin{aligned}
[g_1, {g_2}^{\varphi}, g_3^{\varphi}] &= [g_1, {g_2}^{\varphi}]^{-1}[g_1, {g_2}^{\varphi}]^{{g_3}^{\varphi}} \\
&= [g_1, {g_2}^{\varphi}]^{-1}[g_1, {g_2}^{\varphi}]^{g_3} \text{ pelas relações definidoras de } \nu(G) \\
&= [g_1, {g_2}^{\varphi}, g_3];
\end{aligned}$$

A igualdade $[{g_1}^{\varphi}, g_2, g_3] = [{g_1}^{\varphi}, g_2, {g_3}^{\varphi}] = [{g_1}^{\varphi}, {g_2}^{\varphi}, g_3]$ segue por um argumento simétrico ao anterior.

Agora

$$\begin{aligned}
[{g_1}^{\varphi}, g_2, g_3] &= [[g_2, {g_1}^{\varphi}]^{-1}, g_3] \\
&= [g_2, {g_1}^{\varphi}, g_3]^{-[g_2, {g_1}^{\varphi}]^{-1}} \quad \text{pela Proposição 1.1.1 } (i) \\
&= [g_2, {g_1}^{\varphi}, g_3]^{-[g_2, g_1]^{-1}} \quad \text{por } (i) \\
&= [g_2, g_1, {g_3}^{\varphi}]^{-[g_1, g_2]} \\
&= [g_1, g_2, {g_3}^{\varphi}]^{[g_1, g_2]^{-1}[g_1, g_2]} \quad \text{por 1.1.1 } (i) \text{ novamente} \\
&= [g_1, g_2, {g_3}^{\varphi}].
\end{aligned}$$

E portanto $[g_1, {g_2}^{\varphi}, g_3] = [g_1, g_2, {g_3}^{\varphi}] = [g_1, {g_2}^{\varphi}, {g_3}^{\varphi}] = [{g_1}^{\varphi}, g_2, g_3] = [{g_1}^{\varphi}, g_2, {g_3}^{\varphi}] = [{g_1}^{\varphi}, {g_2}^{\varphi}, g_3]$

(iii) Segue de (ii), pois para todo $g,\ h \in G$

$$[g, g^{\varphi}, h] = [g, g^{\varphi}, h^{\varphi}] = [g, g, h^{\varphi}] = e$$

(iv) Para todo $g_1,\ g_2 \in G$ temos

$$\begin{aligned}
[g_1 g_2, (g_1 g_2)^{\varphi}] &= [g_1, (g_1 g_2)^{\varphi}]^{g_2}[g_2, (g_1 g_2)^{\varphi}] \\
&= [g_1, {g_2}^{\varphi}]^{g_2}[g_1, {g_1}^{\varphi}]^{{g_2}^{\varphi} g_2}[g_2, {g_2}^{\varphi}][g_2, {g_1}^{\varphi}]^{{g_2}^{\varphi}} \\
&= [g_1, {g_2}^{\varphi}]^{g_2}[g_1, {g_1}^{\varphi}][g_2, {g_2}^{\varphi}][g_2, {g_1}^{\varphi}]^{{g_2}^{\varphi}} \text{ por } (iii)
\end{aligned}$$

Usando (iii) novamente

$$[g_1 g_2, (g_1 g_2)^{\varphi}][g_1, {g_1}^{\varphi}]^{-1}[g_2, {g_2}^{\varphi}]^{-1} = [g_1, {g_2}^{\varphi}]^{g_2}[g_2, {g_1}^{\varphi}]^{{g_2}^{\varphi}}$$

Como o primeiro membro da igualdade é central em $\nu(G)$, conjugando ambos os lados por ${g_2}^{-\varphi}$ e usando as relações definidoras de $\nu(G)$ obtemos

$$[g_1, {g_2}^{\varphi}][g_2, {g_1}^{\varphi}] = [g_1 g_2, (g_1 g_2)^{\varphi}][g_1, {g_1}^{\varphi}]^{-1}[g_2, {g_2}^{\varphi}]^{-1}$$

o que implica que $[g_1, g_2{}^{\varphi}][g_2, g_1{}^{\varphi}]$ está no centro de $\nu(G)$.

(v) Se $g \in G'$ é um comutador simples, i.é., $g = [x, y]$ então por (i) e (ii) temos

$$\begin{aligned} [[x,y],h^{\varphi}] &= [x,y,h^{\varphi}] \\ &= [x,y^{\varphi},h^{\varphi}] \\ &= [[x,y^{\varphi}],h^{\varphi}] \end{aligned}$$

Agora se $g \in G'$ é um comutador da forma $[x_1, y_1] \dots [x_r, y_r]$ então por indução sobre r e por (i) e (ii),

$$\begin{aligned} [g,h^{\varphi}] &= [[x_1,y_1]\dots[x_r,y_r],h^{\varphi}] \\ &= [[x_1,y_1]\dots[x_{r-1},y_{r-1}],h^{\varphi}]^{[x_r,y_r]}[[x_r,y_r],h^{\varphi}] \\ &= [[x_1,y_1{}^{\varphi}]\dots[x_{r-1},y_{r-1}{}^{\varphi}],h^{\varphi}]^{[x_r,y_r]}[[x_r,y_r],h^{\varphi}] \quad \text{por indução} \\ &= [[x_1,y_1{}^{\varphi}]\dots[x_{r-1},y_{r-1}{}^{\varphi}],h^{\varphi}]^{[x_r,y_r{}^{\varphi}]}[[x_r,y_r{}^{\varphi}],h^{\varphi}] \quad \text{por (i) e (ii)} \\ &= [[x_1,y_1{}^{\varphi}]\dots[x_r,y_r{}^{\varphi}],h^{\varphi}] \end{aligned}$$

Analogamente se $g \in G'$ é um comutador da forma $[x_1, y_1] \dots [x_r, y_r]$, então $[h, g^{\varphi}] = [h^{\varphi}, [x_1, y_1{}^{\varphi}] \dots [x_{r-1}, y_{r-1}{}^{\varphi}]]$, seguindo imediatamente que $[g, h^{\varphi}][h, g^{\varphi}] = e$.

(vi) é consequência de (v), pois se $g \in G'$ é um comutador na forma $[x_1, y_1] \dots [x_r, y_r]$, então

$$\begin{aligned} [g,g^{\varphi}] &= [[x_1,y_1]\dots[x_r,y_r],[x_1,y_1]\dots[x_r,y_r]^{\varphi}] \\ &= [[x_1,y_1{}^{\varphi}]\dots[x_r,y_r{}^{\varphi}],[x_1,y_1]\dots[x_r,y_r]^{\varphi}] \\ &= [[x_1,y_1{}^{\varphi}]\dots[x_r,y_r{}^{\varphi}],[x_1,y_1{}^{\varphi}]\dots[x_r,y_r{}^{\varphi}]] \\ &= 1 \end{aligned}$$

(vii) é uma consequencia de (ii), já que

$$[g_1, [g_2, g_3]^{\varphi}] = [g_2{}^{\varphi}, g_3{}^{\varphi}, g_1]^{-1} = [g_2, g_3, g_1{}^{\varphi}]^{-1}$$

□

Lema 2.3.2. *Sejam $a,\ b,\ x \in G$ tal que $[x, a] = e = [x, b]$. Então*

$$[a, b, x^{\varphi}] = e = [[a, b]^{\varphi}, x].$$

Demonstração. Pelo Lema 2.3.1 (ii), temos

$$\begin{aligned}
[a,b,x^{\varphi}] &= [a,b^{\varphi},x] \\
&= [a,b^{\varphi}]^{-1}.[a,b^{\varphi}]^{x} \\
&= [a,b^{\varphi}]^{-1}.[a^{x},(b^{x})^{\varphi}] \\
&= [a,b^{\varphi}]^{-1}.[a,b^{\varphi}] \\
&= 1
\end{aligned}$$

A outra identidade segue pela parte simetrica de (ii) do Lema 2.3.1 □

Lema 2.3.3. *Seja $G = G' \cdot H$ um produto semi-direto de seus subgrupos G' e H. Então em $\nu(G)$*

i) $[H, G'^{\varphi}] = [G', H^{\varphi}]$;

ii) $\langle [g, g^{\varphi}] \mid g \in G\rangle = \langle [h, h^{\varphi}] \mid h \in H\rangle$.

Demonstração. (i) é uma consequência de (v) do Lema 2.3.1. Quanto a parte (ii), seja $g \in G$. Então $g = ch$ para algum $c \in G'$ e $h \in H$. Logo temos que:

$$\begin{aligned}
[g,g^{\varphi}] &= [ch,(ch)^{\varphi}] \\
&= [c,h^{\varphi}]^{h}[c,c^{\varphi}]^{h^2}[h,h^{\varphi}][h,c^{\varphi}]^{h^{\varphi}} \qquad \text{pelas identidades de comutadores} \\
&= [c,h^{\varphi}]^{h}[h,h^{\varphi}][h,c^{\varphi}]^{h^{\varphi}} \qquad \text{pelo Lema 2.3.1 (vi)} \\
&= ([c,h^{\varphi}][h,c^{\varphi}])^{h^{\varphi}}[h,h^{\varphi}] \qquad \text{pelo Lema 2.3.1 (iii)} \\
&= [h,h^{\varphi}] \qquad \text{pelo Lema 2.3.1 (vii)}
\end{aligned}$$

Portanto $\langle [g, g^{\varphi}] \mid g \in G\rangle = \langle [h, h^{\varphi}] \mid h \in H\rangle$. □

Sejam N um subgrupo normal de G, e $\overline{G}$ o grupo quociente G/N. Note que o epimorfismo canônico $\pi : G \to \overline{G}$ estende-se a um epimorfismo $\tilde{\pi} : \nu(G) \to \nu(\overline{G})$ tal que $g \mapsto \overline{g}$ e $g^{\varphi} \mapsto \overline{g^{\varphi}}$ onde $\overline{G^{\varphi}} = G^{\varphi}/N^{\varphi}$ é identificado com $\overline{G}^{\varphi}$.

Proposição 2.3.4. *Com a mesma notação acima, temos*

i) $[N, G^{\varphi}] \trianglelefteq \nu(G)$, $\qquad [G, N^{\varphi}] \trianglelefteq \nu(G)$;

ii) $\mathrm{Nuc}(\tilde{\pi}) = < N, N^{\varphi} > [N, G^{\varphi}].[G, N^{\varphi}]$.

Demonstração. (i) Para todo $x \in N$ e $g,\ h \in G$

$$\begin{aligned} [x, g^{\varphi}]^{h} &= [x, g^{\varphi}][x, g^{\varphi}, h] \\ &= [x, g^{\varphi}][x, g, h^{\varphi}] \quad \text{pelo Lema 2.3.1 } (ii) \end{aligned}$$

Isso mostra que G normaliza $[N, G^{\varphi}]$, e simlarmente G^{φ} normaliza $[N, G^{\varphi}]$, de forma que $[N, G^{\varphi}] \trianglelefteq \nu(G)$. Analogamente $[G, N^{\varphi}] \trianglelefteq \nu(G)$.

Para provar (ii) seja $M =< N, N^{\varphi} > [N, G^{\varphi}].[G, N^{\varphi}]$. É claro que $M \leq \mathrm{Nuc}(\tilde{\pi})$, pois $N,\ N^{\varphi} \subseteq \mathrm{Nuc}(\tilde{\pi})$. Assim M é um subgrupo normal de $\nu(G)$ e portanto podemos definir a função $\theta : \overline{G} \cup \overline{G}^{\varphi} \rightarrow \nu(G)/M$ fazendo $(\overline{g})\theta = Mg$ e $(\overline{g}^{\varphi})\theta = Mg^{\varphi}$. θ está bem definida já que $N,\ N^{\varphi} \subseteq M$. A restrição de θ a $\overline{G}$ e $\overline{G}^{\varphi}$, são ambos homomorfismos, logo existe um único homomorfismo θ^{*} que estende θ ao produto livre $\overline{G} * \overline{G}^{\varphi}$.

Podemos ver que as relações

$$\begin{aligned} [\bar{g}_1\bar{g}_2, \bar{g}_3{}^{\varphi}] &= [\overline{(g_1{}^{g_2})}, \overline{(g_3{}^{g_2})}^{\varphi}][\bar{g}_2, \bar{g}_3{}^{\varphi}] \\ [\bar{g}_1, (\bar{g}_2\bar{g}_3)^{\varphi}] &= [\bar{g}_1, \bar{g}_3{}^{\varphi}][\overline{(g_1{}^{g_3})}, \overline{(g_2{}^{g_3})}^{\varphi}] \end{aligned}$$

são preservadas por $\theta*$. Consequentemente, θ induz um homomorfismo $\tilde{\theta} : \nu(\overline{G}) \rightarrow \nu(G)/M$.

Por outro lado, como $M \leq \mathrm{Nuc}(\tilde{\pi})$ então temos um homomorfismo $\bar{\pi} : \nu(G)/M \rightarrow \nu(\bar{G})$ tal que $(Mg)\bar{\pi} = \bar{g}$ e $(Mg^{\varphi})\bar{\pi} = \bar{g}^{\varphi}\ \forall\, g \in G$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Nuc}(\tilde{\pi}) \arrow[dr] & & \nu(G)/M \arrow[dd, "\bar{\pi}"] \\
& \nu(G) \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "\tilde{\pi}"'] & \\
M \arrow[uu] \arrow[ur] & & \nu(\bar{G})
\end{tikzcd}$$

A composição de $\tilde{\theta}$ e $\bar{\pi}$ nos dá que $(\bar{g})\tilde{\theta}\bar{g}$ e $(\bar{g}^{\varphi})\tilde{\theta}\bar{\pi} = \bar{g}^{\varphi}$, $\forall g \in G$. Logo $\tilde{\theta}\bar{\pi} = 1_{\nu(\bar{G})}$, e isso mostra que $\tilde{\theta}$ é isomorfismo. □

Agora vamos considerar o subgrupo normal de $\nu(G)$

$$\Upsilon(G) = [G, G^{\varphi}]$$

Se $G \otimes G$ é o quadrado tensorial não-abeliano, então a função $\tau : G \otimes G \to \Upsilon(G)$ definida nos geradores de $G \otimes G$ por $(g_1 \otimes g_2)\tau = [g_1, {g_2}^{\varphi}]$ estende-se a um epimorfismo de $G \otimes G$ para $\Upsilon(G)$, já que τ preserva as relações definidoras de $G \otimes G$.

Proposição 2.3.5. *τ é isomorfismo.*

Demonstração. Primeiro vamos olhar para $[G, G^{\varphi}]$ no produto livre $G * G^{\varphi}$. Pela Proposição 1.4.10 $[G, G^{\varphi}]$ é livremente gerado pelos comutadores $[g_1, {g_2}^{\varphi}]$ onde $1 \neq g_1 \in G$ e $1 \neq g_2 \in G$. Como um subgrupo normal de $G * G^{\varphi}$ admite as ações de G e G^{φ} por conjugação segue as identidades

$$(I)\begin{cases} [g_1, {g_2}^{\varphi}]^{g} & = & [g_1 g, {g_2}^{\varphi}][g, {g_2}^{\varphi}]^{-1} \\ \\ [g_1, {g_2}^{\varphi}]^{g^{\varphi}} & = & [g_1, g^{\varphi}]^{-1}[g_1, g_2 g^{\varphi}], \end{cases}$$

para todo g_1, g_2, $g \in G$.

Agora a função $\mu : [G, G^{\varphi}] \to G \otimes G$ definida nos geradores $[g_1, {g_2}^{\varphi}]$ por $([g_1, {g_2}^{\varphi}])\mu = g_1 \otimes g_2$ estende-se a um epimorfismo do grupo (livre) $[G, G^{\varphi}]$ ($\trianglelefteq G * G^{\varphi}$) sobre $G \otimes G$. Consequentemente, ao adicionarmos em $G * G^{\varphi}$ as relações definidoras de $\nu(G)$ temos o grupo $\Upsilon(G)$ como o quociente de $[G, G^{\varphi}]$ pelas relações

$$(II)\begin{cases} [g_1 g_2, {g_3}^{\varphi}] & = & [{g_1}^{g_2}, {g_3}^{g_2 \varphi}][g_2, {g_3}^{\varphi}] \\ \\ [g_1, (g_2 g_3)^{\varphi}] & = & [g_1, {g_3}^{\varphi}][{g_1}^{g_3}, ({g_2}^{g_3})^{\varphi}], \end{cases}$$

para todo g_1, g_2, $g_3 \in G$. Mas as relações (II) são mandadas por μ nas relações definidoras de $G \otimes G$, de forma que μ induz um epimorfismo de $\Upsilon(G)$ sobre $G \otimes G$. Daí temos que $\mu\tau = 1_{\Upsilon(G)}$ e $\tau\mu = 1_{G \otimes G}$, provando nossa proposição. □

Obs 1): Com um argumento similar ao usado na Proposição 2.3.4 (ii) podemos mostrar que se N é subgrupo normal de G e $\tilde{\pi} : \nu(G) \to \nu(G/N)$ é o epimorfismo induzido pela projeção $\pi : G \to G/N$, então $\mathrm{Nuc}(\tilde{\pi}) \cap \Upsilon(G) = [N, G^{\varphi}].[G, N^{\varphi}]$.

Proposição 2.3.6. *Seja $G = N \cdot H$ um produto semi-direto de seus subgrupos $N \trianglelefteq G$ e $H \leq G$. Então*

i) $\nu(G) = \langle N, N^{\varphi} \rangle [N, H^{\varphi}][H, N^{\varphi}] \cdot \langle H, H^{\varphi} \rangle$;

ii) $\langle H, H^{\varphi} \rangle \cong \nu(H)$.

Demonstração. (i), (ii). Pela Proposição 2.3.4 temos que $[N, H^\varphi]$ e $[H, N^\varphi]$ são ambos subgrupos normais de $\nu(G)$ e também $\langle N, N^\varphi\rangle[N, H^\varphi][H, N^\varphi]$ é o núcleo de $\tilde{\pi} : \nu(G) \to \nu(G/N)(\cong \nu(H))$. Se reescremos $\nu(G) = \nu(NH) = [NH, N^\varphi H^\varphi] \cdot NH \cdot N^\varphi H^\varphi$, e como,

$$[NH, N^\varphi H^\varphi] \leq [N, N^\varphi][N, H^\varphi][H, N^\varphi][H, H^\varphi]$$

então, $\nu(G)$ tem a expressão desejada. Quanto a (ii), $\langle H, H^\varphi\rangle^{\tilde{\pi}} = \nu(G/N)(\cong \nu(H))$, enquanto por outro lado $\nu(H)$ é levado sobrejetivamente em $\langle H, H^\varphi\rangle$. Logo $\mathrm{Nuc}(\tilde{\pi}) \cap \langle H, H^\varphi\rangle = \{1\}$ e $\langle H, H^\varphi\rangle \cong \nu(H)$. □

Vamos agora restringirmo-nos ao quadrado tensorial não-abeliano de p-grupos finitos e investigar a sua ordem. Relembremos que $\lambda_k(G)$ é um termo da série p-central inferior de G.

Lema 2.3.7. *Seja G um p-grupo finito. Então para todo $k \geq 1$, $[\lambda_k(G), G^\varphi] = [G, (\lambda_k(G))^\varphi]$.*

Demonstração. Vamos provar este resultado por indução sobre k.

Para $k = 1$ o resultado é trivial.

Assuma então que $[\lambda_k(G), G^\varphi] = [G, (\lambda_k(G))^\varphi]$. Agora como $[\lambda_k(G), G, G^\varphi]$ e $[\lambda_k(G)^p, G^\varphi]$ são ambos normais em $\nu(G)$, temos que

$$[\lambda_{k+1}(G), G^\varphi] = [[\lambda_k(G), G]\lambda_k(G)^p, G^\varphi] = [\lambda_k(G), G, G^\varphi][\lambda_k(G)^p, G^\varphi]$$

Pelo Lema 2.3.1 (ii) temos que

$$[\lambda_k(G), G, G^\varphi] = [\lambda_k(G)^\varphi, G^\varphi, G] = [[\lambda_k(G), G]^\varphi, G] \leq [\lambda_{k+1}(G)^\varphi, G].$$

Logo nossa demontração estará completa se demonstramos que

$$[\lambda_k(G)^p, G^\varphi] \leq [G, \lambda_{k+1}(G)^\varphi].$$

Para isso considere $R = [\lambda_k(G), G, G^\varphi](= [[\lambda_k(G), G]^\varphi, G])$.

Podemos observar que R contém o subgrupo derivado de $[\lambda_k(G), G^\varphi]$. Para ver isso note que $[\lambda_k(G), G^\varphi]'$ é gerado pelos elementos da forma

$$[[x, a^\varphi], [y, b^\varphi]], \quad \text{onde}\, x,\ y \in \lambda_k(G)\, \text{e}\, a^\varphi,\ b^\varphi \in G^\varphi,$$

e conforme visto na demontração de 2.3.1 (v) $[[x, a^\varphi], [y, b^\varphi]] = [[x, a], [y, b]^\varphi] \in R$.

Vamos mostrar as seguintes afirmações:

$$[x^m, a^\varphi] \in [x, a^\varphi]^m R \quad \text{para todo}\, x \in \lambda_k(G),\ a^\varphi \in G^\varphi,\ m \in \mathbb{N} \tag{2.3.1}$$

$$[y, (b^m)^\varphi] \in [y, b^\varphi]^m R \quad \text{para todo}\, y \in G,\ b^\varphi \in (\lambda_k(G))^\varphi,\ m \in \mathbb{N} \tag{2.3.2}$$

A demontração de (2.3.1) é por indução sobre m, e (2.3.2) é similar.

Se $m = 1$ então (2.3.1) é trivialmente verdadeira. Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para $m - 1 \in \mathbb{N}$. Então

$$\begin{aligned} [x^m, a^\varphi] &= [x^{m-1}.x, a^\varphi] \\ &= [x^{m-1}, a^\varphi]^x [x, a^\varphi] \\ &= [x^{m-1}, (a^x)^\varphi][x, a^\varphi], \end{aligned}$$

Por hipótese de indução, $[x^{m-1}, (a^x)^\varphi]$ está na classe

$$\begin{aligned} [x, (a^x)^\varphi]^{m-1} R &= [x, a^\varphi [a, x]^\varphi]^{m-1} R \\ &= ([x, [a, x]^\varphi][x, a^\varphi]^{[a,x]^\varphi})^{m-1} R \\ &= ([a, x, x^\varphi]^{-1}[x, a^\varphi]^{[a^\varphi, x]})^{m-1} R \quad \text{por}\, 2.3.1\, (vi)\, \text{e}\, (i), \\ &= ([a, x, x^\varphi]^{-1}[x, a^\varphi])^{m-1} R \\ &= ([x, a^\varphi])^{m-1} R, \end{aligned}$$

já que $[a, x, x^\varphi]^{-1} \in R$. Portanto $[x^m, a^\varphi]R = [x, a^\varphi]^m R$, provando nossa afirmação.

Completando a demontração do lema, temos que $[\lambda_k(G)^p, G^\varphi]$ é gerado pelos elementos da forma $[x^p, a^\varphi]$ com $x \in \lambda_k(G)$ e $a^\varphi \in G^\varphi$. Por (2.3.1) $[x^p, a^\varphi] \in ([x, a^\varphi])^p R$. Mas por hipotese de indução $[x, a^\varphi] \in [\lambda_k(G), G^\varphi] = [G, (\lambda_k(G))^\varphi]$. Então podemos escrever

$$[x, a^\varphi] = w_1 \dots w_l,$$

onde $w_i = [y_i, {b_i}^\varphi]$, $y_i \in G$, ${b_i}^\varphi \in \lambda_k(G)^\varphi$ para $i = 1, \dots, l$. Agora como R contém o subgrupo derivado de $[\lambda_k(G), G^\varphi]$, então $[\lambda_k(G), G^\varphi]/R$ é abeliano, seguindo que $[x, a^\varphi]^p R = {w_1}^p \dots {w_l}^p R$. Finalmente por (2.3.2) ${w_i}^p R = [y_i, ({b_i}^p)\varphi]R$ para todo $i = 1, \dots, l$ forçando $[x^p, a^\varphi] \in R[G, (\lambda_k(G)^p)^\varphi] = [G, (\lambda_{k+1}(G))^\varphi]$. □

O teorema ([2] (3.2)) a seguir melhora a cota superior da ordem do produto tensorial não-abeliano de um p-grupo finito dada por Rocco em [17] (3.12).

Teorema 2.3.8. *Sejam G um p-grupo finito de ordem p^n e $d = d(G)$ o número minimo de geradores de G. Então $p^{d^2} \leq |[G, G^\varphi]| \leq p^{nd}$.*

Demonstração. Observe que se $N = \Phi(G)$ e

$$\tilde{\pi} : \nu(G) \to \nu(G/\Phi(G))$$

como na Proposição 2.3.4, então pela observação (1) temos que

$$\mathrm{Nuc}(\tilde{\pi}) \cap \Upsilon(G) = [\Phi(G), G^{\varphi}][G, \Phi(G)^{\varphi}],$$

logo a restrição de $\tilde{\pi}$ a $\Upsilon(G)$ nos dá

$$|\Upsilon(G)| \geq |\Upsilon(G/\Phi(G))| = |[G/\Phi(G), (G/\Phi(G))^{\varphi}]|.$$

Mas $G/\Phi(G)$ é abeliano elementar de ordem p^d e então

$$[G/\Phi(G), (G/\Phi(G))^{\varphi}]$$

é precisamente o produto tensorial usual

$$G/\Phi(G) \otimes_{\mathbb{Z}} G/\Phi(G),$$

de ordem p^{d^2}.

Por por outro lado se $N = \lambda_k(G)$ é o último termo não trival da série $\{\lambda_i(G)\}$, e $\tilde{\pi} : \nu(G) \to \nu(\overline{G}) = \nu(G/\lambda_k(G))$, então pelo mesmo argumento anterior e usando o Lema 2.3.7

$$\mathrm{Nuc}(\tilde{\pi}) \cap \Upsilon(G) = [\lambda_k(G), G^{\varphi}][G, \lambda_k(G)^{\varphi}] = [\lambda_k(G), G^{\varphi}].$$

Pela Proposição 1.3.1 (ii) $\lambda_k(G)(\cong \lambda_k(G)/\lambda_{k+1}(G))$ é um subgrupo central e abeliano elementar de G, logo $\mathrm{Nuc}(\tilde{\pi}) \cap \Upsilon(G)$ é um p-subgrupo abeliano elementar de $\nu(G)$, pois veja que pelo Lema 2.3.1 (ii)

$$[x, a^{\varphi}, b] = [x, a^{\varphi}, b^{\varphi}] = [x, a, b^{\varphi}] = e \quad \forall x \in \lambda_k(G),\ a,\ b \in G \tag{2.3.3}$$

Portanto a função

$$\begin{aligned} \theta : \lambda_k(G) \times G &\to [\lambda_k(G), G^{\varphi}] \\ (a, g) &\mapsto [a, g^{\varphi}] \end{aligned}$$

é bilinear. Agora se $\lambda_k(G)$ é gerado pelo conjunto $\{a_i \,|\, i = 1, \ldots, d_k\}$ e G é gerado por $\{g_i \,|\, i = 1, \ldots, d\}$, então $\mathrm{Nuc}(\tilde{\pi}) \cap \Upsilon(G)$ é gerado pelos elementos do conjunto

$$\{[a_i, {g_j}^{\varphi}] \,|\, i = 1, \ldots, d_k\,,\ j = 1, \ldots, d\},$$

consequentemente $|\,\mathrm{Nuc}(\tilde{\pi}) \cap \Upsilon(G)| \leq p^{d.d_k}$, e $|[G, G^{\varphi}]| \leq p^{d.d_k}|[\overline{G}, \overline{G}^{\varphi}]|$. Por indução sobre k obtemos que

$$|[G, G^{\varphi}]| \leq p^{d.d_k} \cdot \ldots \cdot p^{d^2} = p^{d\sum_{i=1}^{k} d_i} = p^{nd}.$$

□

Exemplo 2.3.9. Seja $G = Q_8 = \langle a, b, \ |a^4, \ a^2 = b^2, \ [a, b] = a^2\rangle$. Temos $d(G) = 2$ e $n = 3$. Logo, pelo Teorema 2.3.8,

$$|Q_8 \otimes Q_8| \leq 2^{2.3} = 2^6 = 64.$$

Conforme vemos pelos cálculos a seguir, $Q_8 \otimes Q_8 \cong (\mathbb{Z}_2)^2 \times (\mathbb{Z}_4)^2$, de modo que o limite é atingido. Por Rocco [18], $[Q_8, {Q_8}^{\varphi}](\cong Q_8 \otimes Q_8)$ é gerado por

$$\{[a, a^{\varphi}], \ [a, b^{\varphi}], \ [b, a^{\varphi}], \ [b, b^{\varphi}]\}.$$

Pelo Lema 2.3.1 (iii) e (iv), $[a, a^{\varphi}]$, $[b, b^{\varphi}]$ e $[a, b^{\varphi}][b, a^{\varphi}]$ são centrais em $[Q_8, {Q_8}^{\varphi}]$. Assim,

$$[a, b^{\varphi}][b, a^{\varphi}][a, b^{\varphi}] = [a, b^{\varphi}][a, b^{\varphi}][b, a^{\varphi}] \Rightarrow [b, a^{\varphi}][a, b^{\varphi}] = [a, b^{\varphi}][a, b^{\varphi}].$$

E, portanto, $[Q_8, {Q_8}^{\varphi}]$ é abeliano.

Agora, pelas relações definidoras de $\nu(Q_8)$, vemos que

$$\begin{array}{rcl} [a^2, a^{\varphi}] &=& [a, a^{\varphi}]^2 \\ [a^3, a^{\varphi}] &=& [a, a^{\varphi}]^3 \\ & & \\ e \;=\; [a^4, a^{\varphi}] &=& [a, a^{\varphi}]^4. \end{array}$$

Logo $[a, a^{\varphi}]^4 = e$. Analogamente $[b, b^{\varphi}]^4 = e$.

Além disso, novamente pelas relações definidoras de $\nu(Q_8)$

$$\begin{aligned} [b, b^{\varphi}]^2 &= [b^2, b^{\varphi}] \\ &= [a^2, b^{\varphi}] \\ &= [a, b^{\varphi}]^a [a, b^{\varphi}] \\ &= [a, (b^a)^{\varphi}][a, b^{\varphi}] \\ &= [a, (b^3)^{\varphi}][a, b^{\varphi}] \\ &= [a, (b^2)^{\varphi}][a, b^{\varphi}]^{(a^2)}[a, b^{\varphi}] \\ &= [a, (a^2)^{\varphi}][a^{(a^2)}, (b^{(a^2)})^{\varphi}][a, b^{\varphi}] \\ &= [a, a^{\varphi}]^2[a, b^{\varphi}]^2, \qquad \text{já que } a^2 \text{ é central em } Q_8. \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Analogamente, obtemos

$$[a, a^{\varphi}]^2 = [b, b^{\varphi}]^2[b, a^{\varphi}] \tag{2.3.5}$$

De (2.3.5) e (2.3.4) e do fato que $[a, a^{\varphi}]^2 = [a, a^{\varphi}]^{-2}$ temos que $[a, b^{\varphi}]^2 = [b, a^{\varphi}]^2$. Agora como

$$\begin{aligned} [a^3, b^{\varphi}] &= [a, b^{\varphi}]^{a^2}[a^2, b^{\varphi}] \\ &= [a, b^{\varphi}][a, a^{\varphi}]^2[a, b^{\varphi}]^2 \\ &= [a, a^{\varphi}]^2[a, b^{\varphi}]^3, \end{aligned}$$

e, da mesma forma,

$$e = [a^4, b^{\varphi}] = [a, a^{\varphi}]^4[a, b^{\varphi}]^4$$

obtemos que $[a, b^{\varphi}]^4 = e$. Analogamente $[b, a^{\varphi}]^4 = e$.

Portanto, fazendo $x = [a, a^{\varphi}],\ y = [b, b^{\varphi}][b, a^{\varphi}],\ z = [a, b^{\varphi}],\ w = [b, a^{\varphi}]$, temos que

$$\begin{aligned} [Q_8, Q_8{}^{\varphi}] &= \langle x,\ y,\ z,\ w \quad | \quad x^2 = y^2,\ z^2 = w^2,\ x^4 = z^4 = e, \\ &\quad [x, y] = [x, z] = [x, w] = [y, z] = [y, w] = [z, w] = e\rangle. \end{aligned}$$

Com a mudança de variáveis $y' = yx^{-1}$ e $z' = zw^{-1}$, temos que $y'^2 = y^2x^{-2} = x^2x^{-2} = e$ e também $w'^2 = z^2w^{-2} = z^2z^{-2} = e$. Logo $[Q_8, Q_8{}^{\varphi}]$ é uma imagem homomórfica do grupo

$$\begin{aligned} (\mathbb{Z}_2)^2 \times (\mathbb{Z}_4)^2 &\cong \langle x,\ y',\ z',\ w \quad | \quad y'^2 = z'^2 = x^4 = w^4 = e, \\ &\quad [x, y'] = [x, z'] = [x, w] = [y', z'] = [y', w] = [z', w] = e\rangle. \end{aligned}$$

Para verifcar que $[Q_8, Q_8{}^{\varphi}]$ é de fato isomorfo a $(\mathbb{Z}_2)^2 \times (\mathbb{Z}_4)^2$, vamos construir um grupo de ordem 2^{12} satisfazendo as relações definidoras de $\nu(Q_8)$. Com isso provaremos que que o grupo $[Q_8, Q_8{}^{\varphi}]$ têm ordem maior que 64.

Segue então que

$$x^a = [a, a^{\varphi}]^a = [a, a^{\varphi}] = x$$

$$\begin{aligned} y'^a &= [b, b^\varphi]^a [b, a^\varphi]^a [a, a^\varphi]^{-a} \\ &= [b^a, (b^a)^\varphi][b^a, (a^a)^\varphi][a^a, (a^a)^\varphi]^{-1} \\ &= [ba^2, (ba^2)^\varphi][ba^2, a^\varphi][a, a^\varphi]^{-1} \\ &= [b, b^\varphi][b, a^\varphi][a, a^\varphi]^2[a, a^\varphi]^{-1} \quad \text{por (2.1.3) e (2.1.4)} \\ &= [b, b^\varphi][b, a^\varphi][a, a^\varphi]^{-1}[a, a^\varphi]^2 \\ &= y'x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'^a &= [a, b^\varphi]^a [b, a^\varphi]^{-a} \\ &= [a, (ba^2)^\varphi][ba^2, a^\varphi]^{-1} \\ &= [a, a^\varphi]^2 [a, b^\varphi][b, a^\varphi]^{-1}[a, a^\varphi]^{-2} \\ &= [a, b^\varphi][b, a^\varphi]^{-1} \quad \text{já que } [Q_8, Q_8{}^\varphi] \text{ é abeliano} \\ &= z' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w^a &= [b, a^\varphi]^a \\ &= [ba^2, a^\varphi] \\ &= [b, a^\varphi][a, a^\varphi]^2 \\ &= wx^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^b &= [a, a^\varphi]^b \\ &= [a^b, (a^b)^\varphi] \\ &= [b^2 a, (b^2 a)^\varphi] \\ &= [a, a^\varphi] \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'^b &= [b, b^\varphi]^b [b, a^\varphi]^b [a, a^\varphi]^{-b} \\ &= [b, b^\varphi][b, (a^b)^\varphi][a^b, (a^b)^\varphi]^{-1} \\ &= [b, b^\varphi][b, (b^2 a)^\varphi][b^2 a, (b^2 a)^\varphi]^{-1} \\ &= [b, b^\varphi][b, a^\varphi][b, b^\varphi]^2[a, a^\varphi]^{-1} \\ &= y'[b, b^\varphi] \\ &= y'[a, a^\varphi]^2[b, a^\varphi] \\ &= y'x^2 w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'^b &= [a, b^\varphi]^b [b, a^\varphi]^{-b} \\ &= [ab^2, b^\varphi][b, (ab^2)^\varphi]^{-}1 \\ &= [a, b^\varphi][b, b^\varphi]^2[b, b^\varphi]^{-2}[b, a^\varphi]^{-1} \\ &= [a, b^\varphi][b, a^\varphi]^{-1} \\ &= z' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w^b &= [b, a^\varphi]^b \\ &= [b, (a^b)^\varphi] \\ &= [b, a^\varphi][b, b^\varphi]^2 \\ &= w^2 x^2. \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

É claro, que pelas relações definidoras de $\nu(Q_8)$

$$x^a = x^{a^\varphi},\ x^b = x^{b^\varphi},\ y'^a = y'^{a^\varphi},\ y'^b = y'^{b^\varphi,}\ z'^a = z'^{a^\varphi},\ z'^b = z'^{b^\varphi},\ w^a = w^{a^\varphi},\ w^b = w^{b^\varphi}.$$

Assim, seja

$$\begin{aligned} V = (\mathbb{Z}_2)^2 \times (\mathbb{Z}_4)^2 \quad &= \quad \langle g,\ h,\ u,\ v, \quad \mid \quad g^2 = h^2 = u^4 = v^4 = e, \\ & \qquad [g,h] = [g,u] = [g,v] = [h,u] = [h,v] = [u,v] = e \ \rangle \end{aligned}$$

e consideremos o produto semi-direto

$$\begin{aligned} V \cdot Q_8 \quad = \quad & \langle g,\ h,\ u,\ v,\ a,\ b \quad \mid \quad g^2 = h^2 = u^4 = v^4 = e, \\ & [g,h] = [g,u] = [g,v] = [h,u] = [h,v] = [u,v] = [h,a] = [h,b] = e, \\ & [u,b] = [u,a] = e,\ [g,a] = [v,a] = u^2,\ [g,b] = u^2v,\ [v,b] = v^2u^2\rangle. \end{aligned}$$

Novamente, consideremos

$$\begin{aligned} & (V \cdot Q_8) \cdot {Q_8}^\varphi = \langle g,\ h,\ u,\ v,\ a,\ b,\ a^\varphi,\ b^\varphi \quad \mid \quad g^2 = h^2 = u^4 = v^4 = e, \\ & [g,h] = [g,u] = [g,v] = [h,u] = [h,v] = [u,v] = \\ & = [h,a] = [h,b] = [u,b] = [u,a] = [h,a^\varphi] = [h,b^\varphi] = [u,b^\varphi] = [u,a^\varphi] = e, \\ & [g,a] = [v,a] = [g,a^\varphi] = [v,a^\varphi] = u^2,\ [g,b] = [g,b^\varphi] = u^2v,\ [v,b] = [v,b^\varphi] = v^2u^2, \\ & [a,a^\varphi] = u,\ [b,a^\varphi] = v,\ [b,b^\varphi] = hgv^{-1}, [a,b^\varphi] = hv\rangle. \end{aligned}$$

Conforme construimos $(V \cdot Q_8) \cdot {Q_8}^\varphi$, podemos verificar que a aplicação

$$\begin{aligned} \theta : \nu(Q_8) \quad &\rightarrow \quad (V \cdot Q_8) \cdot {Q_8}^\varphi \\ a \quad &\mapsto \quad a \\ b \quad &\mapsto \quad b \\ a^\varphi \quad &\mapsto \quad a^\varphi \\ b^\varphi \quad &\mapsto \quad b^\varphi \end{aligned}$$

preserva as relações definidoras de $\nu(Q_8)$, estendendo-se a um homomorfismo θ^* sobrejetor. Logo $|\nu(Q_8)| \geq |(V \cdot Q_8) \cdot {Q_8}^\varphi| = 4096$.

Além disso, o epimorfismo θ^* é tal que $x = [a, a^\varphi] \mapsto u$, $y' = [b, b^\varphi][b, a^\varphi][a, a^\varphi]^{-1} \mapsto g$, $z' = [a, b^\varphi][a, a^\varphi]^{-1} \mapsto h$ e $w = [b, a^\varphi] \mapsto v$, de modo que o subgrupo $[Q_8, {Q_8}^\varphi]$ projeta-se sobre V. Consequentemente $|[Q_8, {Q_8}^\varphi]| \geq 64$. Por outro lado vimos que $|[Q_8, {Q_8}^\varphi]| \leq 64$, e então $|\nu(Q_8)| = |([Q_8, {Q_8}^\varphi] \cdot Q_8) \cdot {Q_8}^\varphi| \leq 4096$. Portanto, $\nu(Q_8) \cong (V \cdot Q_8) \cdot {Q_8}^\varphi$, provando que $V = (\mathbb{Z}_2)^2 \times (\mathbb{Z}_4)^2 \cong [Q_8, {Q_8}^\varphi]$.

CAPÍTULO 3

O PRODUTO TENSORIAL NÃO-ABELIANO DE GRUPOS SOLÚVEIS E O GRUPO $\eta(G,H)$

3.1 O Produto Tensorial não-abeliano de Grupos Solúveis

Nesta seção abordamos os resultados de Nakaoka [11] sobre uma descrição da série central inferior de um produto tensorial não abeliano de grupos, $G \otimes H$ e para um grupo G solúvel, a obtenção de um limite superior para a ordem de $G \otimes G$.

Generalizamos aqui a construção de $\nu(G)$ feita na última seção do capítulo anterior conforme [14].

Sejam G e H, grupos agindo compativelmente um sobre o outro à direita e $\varphi : H \rightarrow H^{\varphi}$ um isomorfismo de H e uma cópia H^{φ} de H. Defina

$$\eta(G,H) := \langle G,\ H^{\varphi} \quad | \quad [g,h^{\varphi}]^{g_1} = [g^{g_1},(h^{g_1})^{\varphi}],\ [g,h^{\varphi}]^{h_1{}^{\varphi}} = [g^{h_1},(h^{h_1})^{\varphi}], \\ \text{para todo}\, g,\ g_1, \in G\ h,\ h_1, \in H\rangle \qquad .$$

Vamos denotar o subgrupo $[G,H^{\varphi}]$ de $\eta(G,H)$ por $\tau(G,H)$.

Quando $G = H$ e as ações são conjugações, $\eta(G,G)$ é o grupo $\nu(G)$, definido no capítulo anterior.

Vamos dizer que um subgrupo M de G é um *H-subgrupo* se $m^h \in M$, para todo $m \in M$ e $h \in H$ e vamos indicar por $[G,H]$, o subgrupo $\langle g^{-1}g^h \mid g \in G,\ h \in H\rangle$ de G, com G e H agindo um sobre o outro à direita compativelmente. Este grupo é chamado *derivado* de G relativo á H.

Proposição 3.1.1. *Sjam M, N subgrupos normais de G e H respectivamente. Se M é um H-subgrupo de G e N é um G-subgrupo de H, então*

i) $[M, N^{\varphi}] \trianglelefteq \eta(G, H)$;

ii) $[\gamma_i(M), (\gamma_j(N))^{\varphi}] \trianglelefteq \eta(G, H)$ *para todo* i, $j \geq 1$;

iii) $[M_i, (N_j)^{\varphi}] \trianglelefteq \eta(G, H)$ *para todo* i, $j \geq 1$;

Demonstração. Pelas relações definidoras de $\eta(G, H)$ temos que $[m, n^{\varphi}]^g = [m^g, (n^g)^{\varphi}]$ para todo $m \in M$, $n \in N$, $g \in G$. Como $M \trianglelefteq G$ e N é G-subgrupo de H segue que G normaliza $[M, N^{\varphi}]$. De forma similar H^{φ} normaliza $[M, N^{\varphi}]$, consequentemente $[M, N^{\varphi}] \trianglelefteq \eta(G, H)$ provando (i).

(ii) e (iii), são consequencias de (i), pois por indução sobre i e j, vemos que $\gamma_i(M)$ e $(\gamma_j(N))^{\varphi}$ são subgrupos normais de G e H^{φ} respectivamente. E $\gamma_i(M)$ e $(\gamma_j(N))^{\varphi}$ são H-grupo de G e G-subgrupo de H respectivamente. Portanto por (i) $[\gamma_i(M), (\gamma_i(N))^{\varphi}] \trianglelefteq \eta(G, H)$. Provando (ii).

(iii) é analogo. □

Proposição 3.1.2. *Existe um isomorfismo do subgrupo $[G, H^{\varphi}]$ de $\eta(G, H)$ para $G \otimes H$ tal que $[g, h^{\varphi}] \mapsto g \otimes h$, $g \in G$ e $h \in H$.*

Demonstração. Consideremos o produto livre $G * H^{\varphi}$. Pela Proposição 1.4.10 o subgrupo $[G, H^{\varphi}]$ de $G * H^{\varphi}$ é livre, livremente gerado pelos comutadores $[g, h^{\varphi}]$, em que $e \neq g$, $e \neq h^{\varphi} \in H^{\varphi}$.

Sejam

$$R = \{[g, h^{\varphi}]^{-x} \cdot [g^x, (h^x)^{\varphi}], \quad [g, h^{\varphi}]^{y^{\varphi}} \cdot [g^y, (h^y)^{\varphi}]\},$$
$$S = \{[gg_1, h^{\varphi}]^{-1}.[g^{g_1}, (h^{g_1})^{\varphi}].[g_1, h^{\varphi}], \quad [g, (hh_1)^{\varphi}]^{-1}.[g, h_1{}^{\varphi}].[g^{h_1}, (h^{h_1})^{\varphi}]\}.$$

para todo $g, g_1, x \in G \setminus \{e\}$ e $h, h_1, y \in H \setminus \{e\}$. Agora como $[G, H^{\varphi}]$ é subgrupo normal de $G * H^{\varphi}$, R, S são subconjuntos de $[G, H^{\varphi}]$. Por definição

$$\eta(G, H) = \frac{G * H^{\varphi}}{\langle R \rangle^{G * H^{\varphi}}}.$$

Mostraremos que

$$\langle S\rangle^{[G,H^{\varphi}]} \trianglelefteq G * H^{\varphi} \tag{3.1.1}$$

e

$$\langle R\rangle^{G*H^{\varphi}} = \langle S\rangle^{[G,H^{\varphi}]} \tag{3.1.2}$$

Para (3.1.1), seja $s = [gg_1, h^{\varphi}]^{-1}.[g^{g_1}, (h^{g_1})^{\varphi}].[g_1, h^{\varphi}]$ um elemento de S e $x \in G$. Pelas identidades de comutadores

$$\begin{aligned}
s^x &= [gg_1, h^{\varphi}]^{-x}.[g^{g_1}, (h^{g_1})^{\varphi}]^x.[g_1, h^{\varphi}]^x\\
&= ([(gg_1)x, h^{\varphi}][x, h^{\varphi}]^{-1})^{-1}([g^{g_1}x, (h^{g_1})^{\varphi}][x, (h^{g_1})^{\varphi}])([g_1x, h^{\varphi}][x, h^{\varphi}]^{-1})\\
&= ([(gg_1)x, h^{\varphi}][x, h^{\varphi}]^{-1})^{-1}([g^{g_1}x, (h^{g_1})^{\varphi}][x, (h^{g_1})^{\varphi}])[g^{g_1x}, (h^{g_1x})^{\varphi}]^{-1}\\
&\quad [g^{g_1}x, (h^{g_1})^{\varphi}][g^{g_1}x, (h^{g_1})^{\varphi}]^{-1}[gg_1x, h^{\varphi}][gg_1x, h^{\varphi}]^{-1}[g^{g_1x}, (h^{g_1x})^{\varphi}]([g_1x, h^{\varphi}][x, h^{\varphi}]^{-1})\\
&= ((s_1)^{-[g^{g_1}x, (h^{g_1})^{\varphi}]^{-1}[gg_1x, h^{\varphi}]}s_2)^{[x, h^{\varphi}]},
\end{aligned}$$

onde

$$s_1 = [g^{g_1}x, (h^{g_1})^{\varphi}]^{-1}.[g^{g_1x}, (h^{g_1x})^{\varphi}].[x, (h^{g_1})^{\varphi}]$$
$$s_2 = [gg_1x, h^{\varphi}]^{-1}[g^{g_1x}, (h^{g_1x})^{\varphi}][g_1x, h^{\varphi}]$$

Isto implica que $s^x \in \langle S\rangle^{[G,H^{\varphi}]}$. Agora, para $y \in H$, observamos que

$$(g^y)^{(g_1)^y} = g^{g_1y}, \qquad (h^y)^{(g_1)^y} = h^{g_1y} \tag{3.1.3}$$

Novamente pelas identidades de comutadores, obtemos

$$\begin{aligned}
s^{y^{\varphi}} &= [gg_1, h^{\varphi}]^{-y^{\varphi}}[g^{g_1}, (h^{g_1})^{\varphi}]^{y^{\varphi}}[g_1, h^{\varphi}]^{y^{\varphi}}\\
&= ([gg_1, (hy)^{\varphi}]^{-1}[gg_1, y^{\varphi}])([g^{g_1}, y^{\varphi}]^{-1}[g^{g_1}, (h^{g_1}y)^{\varphi}])([g_1, y^{\varphi}]^{-1}[g_1, (hy)^{\varphi}])\\
&= ([gg_1, (hy)^{\varphi}]^{-1}[gg_1, y^{\varphi}])[g^y{g_1}^y, (h^y)^{\varphi}][g^y{g_1}^y, (h^y)^{\varphi}]^{-1}[(g^y)^{(g_1)^y}, ((h^y)^{(g_1)^y})^{\varphi}]\\
&\quad [{g_1}^y, (h^y)^{\varphi}][{g_1}^y, (h^y)^{\varphi}]^{-1}[gg_1y, (h^{g_1y})^{\varphi}]^{-1}([g^{g_1}, y^{\varphi}]^{-1}[g^{g_1}, (h^{g_1}y)^{\varphi}])\\
&\quad [{g_1}^y, (h^y)^{\varphi}][{g_1}^y, (h^y)^{\varphi}]^{-1}([g_1, y^{\varphi}]^{-1}[g_1, (hy)^{\varphi}] \qquad \text{por}(3.1.3)\\
&= s_3s_4[{g_1}^y, (h^y)^{\varphi}]^{-1}{s_5}^{-1}[{g_1}^y, (h^y)^{\varphi}]{s_6}^{-1}
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
s_3 &= [gg_1, (hy)^{\varphi}]^{-1}[gg_1, y^{\varphi}][g^y{g_1}^y, (h^y)^{\varphi}];\\
s_4 &= [g^y, {g_1}^y, (h^y)^{\varphi}]^{-1}[(g^y)^{(g_1)^y}, ((h^y)^{(g_1)^y})^{\varphi}][{g_1}^y, (h^y)^{\varphi}];\\
s_5 &= [g^{g_1}, (h^{g_1}y)^{\varphi}]^{-1}[g^{g_1}, y^{\varphi}][g^{g_1y}, (h^{g_1y})^{\varphi}];\\
s_6 &= [g_1, (hy)^{\varphi}]^{-1}[g_1, y^{\varphi}][{g_1}^y, (h^y)^{\varphi}].
\end{aligned}$$

Assim $s^{y^\varphi} \in \langle S \rangle^{[G,H^\varphi]}$. De modo análogo podemos verificar que o conjugado de um elemento em S do tipo $[g,(hh_1)^\varphi]^{-1}[g,h_1{}^\varphi][g^{h_1},(h^{h_1})^\varphi]$ por um elemento em $G * H^\varphi$ está em $\langle S \rangle^{[G,H^\varphi]}$. Portanto, $\langle S \rangle^{[G,H^\varphi]} \trianglelefteq G * H^\varphi$. Agora sejam

$$r = [g,h^\varphi]^{-x}[g^x,(h^x)^\varphi] \quad \text{e} \quad r' = [g,h^\varphi]^{-y^\varphi}[g^y,(h^y)^\varphi]$$

elementos de R. Logo

$$\begin{aligned} r &= [g,h^\varphi]^{-x}[g^x,(h^x)^\varphi] \\ &= [x,h^\varphi][gx,h^\varphi]^{-1}[g^x,(h^x)^\varphi] \\ &= [x,h^\varphi]s[x,h^\varphi]^{-1} \end{aligned}$$

em que $s = [gx,h^\varphi]^{-1}[g^x,(h^x)^\varphi][x,h^\varphi] \quad (\in S)$. Analogamente

$$r' = [g,(hy)^\varphi]^{-1}[g,y^\varphi][g^y,(h^y)^\varphi] \quad (\in S).$$

Logo $R \subseteq \langle S \rangle^{[G,H^\varphi]}$ e $\langle S \rangle^{[G,H^\varphi]} \subseteq \langle R \rangle^{[G*H^\varphi]}$. Como $\langle S \rangle^{[G,H^\varphi]} \trianglelefteq G * H^\varphi$ temos que $\langle R \rangle^{[G*H^\varphi]} \subseteq \langle S \rangle^{[G,H^\varphi]}$ e portanto $\langle R \rangle^{[G*H^\varphi]} = \langle S \rangle^{[G,H^\varphi]}$ e (3.1.2) está provado.

De (3.1.1) e (3.1.2) segue que $\eta(G,H) = \frac{G*H^\varphi}{\langle S \rangle^{[G,H^\varphi]}}$ e, consequentemente,

$$\tau(G,H) = \frac{[G,H^\varphi]}{\langle S \rangle^{[G,H^\varphi]}}$$

Portanto, o homomorfismo γ do grupo livre $[G,H^\varphi]$ sobre $G \otimes H$ tal que $([g,h^\varphi])\gamma = g \otimes h$ induz um homomorfismo $\alpha : \tau(G,H) \to G \otimes H$. Por outro lado, a função $\beta : G \otimes H \to \tau(G,H)$ definida sobre os geradores por $(g \otimes h)\beta = [g,h^\varphi]$ estende-se a um epimorfismo de $G \otimes H$ sobre $\tau(G,H)$ (as relações definidoras de $G \otimes H$ são preservadas, já que são relações de comutadores). Assim $\alpha\beta = 1_{\tau(G,H)}$ e $\beta\alpha = 1_{G\otimes H}$. $\square$

Segue direto da proposição acima e da Proposição 2.1.5 que

Proposição 3.1.3. *i) Existe um homomorfismo*

$$\lambda : \tau(G,H) \to G, \qquad \mu : \tau(G,H) \to H$$

tal que $([g,h^\varphi])\lambda = g^{-1}g^h$ *e* $([g,h^\varphi])\mu = h^{-g}h$.

ii) Para todo t, $t_1 \in \tau(G,H)$ *temos que* $[(t)\lambda,((t_1)\mu)^\varphi] = [t,t_1]$.

Agora sejam A e B grupos com uma ação compatível de um sobre o outro. Considere $\psi : B \to B^\psi$ um isomorfismo de B para uma cópia B^ψ, e o grupo $\eta(A,B)$.

Proposição 3.1.4. *Suponha que $\alpha : G \to A$, $\beta : H \to B$ são homomorfismos que preservam as ações. Então seguem as afirmações:*

i) Existe um homomorfismo $\gamma : \eta(G,H) \to \eta(A,B)$, tal que $g \mapsto g\alpha$, $h^{\varphi} \mapsto (h\beta)^{\psi}$;

ii) Se α e β são sobrejetoras, então γ também é, e

(a) $\mathrm{Nuc}(\gamma) = \langle \mathrm{Nuc}(\alpha),\ (\mathrm{Nuc}(\beta)^{\varphi}\rangle[\mathrm{Nuc}(\alpha), H^{\varphi}][G, (\mathrm{Nuc}(\beta))^{\varphi}]$;

(b) $\mathrm{Nuc}(\gamma) \cap \tau(G,H) = [\mathrm{Nuc}(\alpha), H^{\varphi}][G, (\mathrm{Nuc}(\beta))^{\varphi}]$;

Demonstração. (i) Podemos ver que os homomorfismos α e β extendem-se a um homomorfismo $\gamma' : G * H^{\varphi} :\to \eta(A,B)$ tal que $g \mapsto g\alpha$ e $h^{\varphi} \mapsto (h\beta)^{\psi}$. Agora como α e β preservam as ações, temos que

$$([g,h^{\varphi}]^{g_1})\gamma' = [g\alpha, (h\beta)^{\psi}]^{g_1\alpha} = [(g^{g_1})\alpha, (h\beta^{g_1\alpha})^{\psi}] = [(g^{g_1})\alpha, (h^{g_1}\beta)^{\psi}] = ([g^{g_1}, (h^{g_1})^{\varphi}])\gamma'$$

$$([g,h^{\varphi}]^{h_1{}^{\varphi}})\gamma' = [g\alpha, (h\beta)^{\psi}]^{h_1\beta^{\psi}} = [(g\alpha^{h_1\beta}), (h^{h_1}\beta)^{\psi}] = [(g^{h_1})\alpha, (h^{h_1}\beta)^{\psi}] = ([g^{h_1}, (h^{h_1})^{\varphi}])\gamma'$$

logo as relações definidoras de $\eta(G,H)$ são preservadas. Consequentemente γ' induz um homomorfismo $\gamma : \eta(G,H) \to \eta(A,B)$ tal que $g \mapsto g\alpha$ e $h^{\varphi} \mapsto (h\beta)^{\psi}$.

(ii) Suponhamos que os homomorfismos α e β são sobrejetores. É claro que γ também é.

(a) Vamos escrever $M = \mathrm{Nuc}(\alpha)$ e $N = \mathrm{Nuc}(\beta)$. È facil ver que $K = \langle M, N^{\varphi}\rangle[M, H^{\varphi}][G, N^{\varphi}]$ está no núcleo de γ. Além disso $K \trianglelefteq \eta(G,H)$, pois M é um H-subgrupo normal de G e N é um G-subgrupo normal de H. Logo γ induz um epimomorfismo

$$\tilde{\gamma} : \frac{\eta(G,H)}{K} \to \eta(A,B).$$

tal que $Kg \mapsto g\alpha$ e $Kh^{\varphi} \mapsto (h\beta)^{\psi}$. Vamos mostrar que $\tilde{\gamma}$ admite homomorfismo inverso.

Sendo α e β sobrejetoras, para cada $a \in A$ e $b \in B$, existem $g_a \in G$ e $h_b \in B$ tais que

$$(g_a)\alpha = a \qquad e \qquad (h_b)\beta = b$$

Assim definimos

$$\begin{aligned} \theta : A \cup B^{\psi} &\rightarrow \eta(G,H)/K \\ a &\mapsto Kg_a \\ b^{\psi} &\mapsto Kh_b^{\varphi} \end{aligned}$$

θ está bem definida, uma vez que M e N estão contidos em K. Além disso as restrições de θ a A e B^{ψ} são ambos homomorfismos, de modo que existe um único homomorfismo $\theta*$ do produto livre $A * B^{\psi}$ a $\eta(G,H)/K$ estendendo θ. Como

$$((g_a)^{g_{a_1}})\alpha = a^{a_1} \qquad \text{e} \qquad ((h_b)^{g_{a_1}})\beta = (h_b\beta)^{(g_{a_1})\alpha} = b^{a_1}$$

(α e β preservam as ações) temos,

$$([a, b^{\psi}]^{a_1}[a^{a_1}, (b^{a_1})^{\psi}])\theta* = [Kg_a, Kh_b{}^{\varphi}]^{Kg_{a_1}}[K(g_a)^{g_{a_1}}, K(h_b^{g_{a_1}})^{\varphi}]^{-1} = e$$

Analogamente

$$([a, b^{\psi}]^{b_1{}^{\psi}}[a^{b_1}, (b^{b_1})^{\psi}])\theta* = e$$

Assim $\theta*$ preserva as relações definidoras de $\eta(A,B)$e portanto induz um homomorfismo

$$\tilde{\theta} : \eta(A,B) \rightarrow \frac{\eta(G,H}{K}$$

tal que $a \mapsto Kg_a,\ b^{\psi} \mapsto Kh_b^{\varphi}$. È claro que $\tilde{\theta}\tilde{\gamma} = 1_{\eta(G,H)}$ e $\tilde{\gamma}\tilde{\theta} = 1_{\eta(G,H)/K}$

(b) Seja γ' a restrição de γ a $\tau(G,H)$. Sendo α e β sobrejetivas, γ' é um epimorfismo de $\tau(G,H)$ em $\tau(A,B)$, tal que $[g, h^{\varphi}] \mapsto [g\alpha, (h\beta)^{\psi}],\ \forall\ g \in G,\ h \in H$. Uma vez que $L = [M, H^{\varphi}][G, N^{\varphi}] \subseteq \mathrm{Nuc}(\gamma')$ e é normal em $[G, H^{\varphi}]$, γ' induz um homomorfismo $\tilde{\gamma}'$ de $[G, H^{\varphi}]/L$ sobre $\tau(A,B)$. Como em (a), mostramos que existe um homomorfismo

$$v : \tau(A,B) \rightarrow \tau(A,B)/L$$

tal que $[a, b^{\psi}] \mapsto L[g_a, h_b^{\varphi}]$ onde $g_a \in G$ e $h_b \in H$ são tais que $(g_a)\alpha =,\ (h_b)\beta = b$, assim temos que $\tilde{\gamma}'v = 1_{\tau(G,H)/L}$ e $v\tilde{\gamma}' = 1_{\tau(A,B)}$. Portanto $\tilde{\gamma}'$ é um isomorfismo e, consequentemente

$$\mathrm{Nuc}(\gamma) \cap \tau(G,H) = \mathrm{Nuc}(\gamma') = [M, H^{\varphi}][G, N^{\varphi}] = [\mathrm{Nuc}(\alpha), H^{\varphi}][G, \mathrm{Nuc}(\beta)^{\varphi}]$$

$\square$

Notemos que se G e H são grupos agindo compativelmente um sobre o outro então $[G, H] = \mathrm{Im}(\lambda)$ enquanto que $[H, G] = \mathrm{Im}(\mu)$, onde λ e μ são os homomorfismos da Proposição 3.1.3.

Proposição 3.1.5. *i)* $[G, H]$ *é um* H*-subgrupo normal de* G *e* $[H, G]$ *é um* G*-subgrupo normal de* H*;*

ii) Para todo $i \geq 1$ *e* $j \geq 0$*,* $\gamma_i([G, H])$ *e* $[G, H]_j$*, são* H*-subgrupos normais de* G *e* $\gamma_i([H, G])$ *e* $[H, G]_j$ *são* G*-subgrupos normais de* H*.*

iii) $[G, H]_i = (\tau(G, H)_i)\lambda$ *e* $[H, G]_i = (\tau(H, G)_i)\mu$*;*

iv) $g^{(t)\lambda} = g^{(t)\mu}$ *e* $h^{(t)\lambda} = h^{(t)\mu}$ *para todo* $g \in G,\ h \in H$ *e* $t \in \tau(G, H)$*.*

Demonstração. (i) Para todo g, $x \in G$ e $h \in H$, temos

$$(g^{-1}g^h)^x = (g^{-1})^x g^{hx} = (g^x)^{-1} g^{xx^{-1}(hx)} = (g^x)^{-1}(g^x)^{x^{-1}hx} = (g^x)^{-1}(g^x)^{h^x}$$

pela compatibilade das ações. Logo, $[G, H]$ é normal em G. Além disso, para todo $g \in G$, h, $y \in H$

$$(g^{-1}g^h)^y = (g^y)^{-1} g^{yy^{-1}(hy)} = (g^y)^{-1}(g^y)^{y^{-1}hy} = (g^y)^{-1}(g^y)^{h^y}$$

e, portanto, $[G, H]$ é um H-subgrupo de G. De modo análogo $[H, G]$ é um G-subgrupo normal de H.

(ii) Como $\gamma_i([G, H])$ é subgrupo característico de $[G, H]$ e por (i) $[G, H]$ é H-subgrupo normal de G entaõ pelo Lema 1.1.4, $\gamma_i([G, H])$ é H-subgrupo normal de G. Os outros casos são analogos.

(iii) Vejamos que pela Proposição 3.1.2, $[G, H] = (\tau(G, H))\lambda$ para $i = 1$, logo por indução sobre i

$$\begin{aligned}[G, H]_{i+1} = [[G, H]_i, [G, H]_i] = [(\tau(G, H))_i\lambda, (\tau(G, H))_i\lambda] = \\ = [(\tau(G, H))_i, (\tau(G, H))_i]\lambda = (\tau(G, H))_{i+1}\lambda\end{aligned}$$

similarmente $[H, G]_i = (\tau(G, H)_i)\mu$ para todo inteiro positivo i.

(iv) Observe que pela compatibilidade das ações temos:

$$g^{x^{-1}y^{-1}xy} = (g^{x^{-1}y^{-1}x})^y = g^{y^{-x}y},$$

além disso

$$\begin{aligned} g^{x^{-1}x^y} &= (xgx^{-1})^{y^{-1}xy} \\ &= (x^{y^{-1}}g^{y^{-1}}x^{-y^{-1}})^{xy} \\ &= (x^{-1}x^{y^{-1}}g^{y^{-1}}x^{-y^{-1}}x)^y \\ &= x^{-y}xgx^{-1}x^y \\ &= g^{x^{-1}x^y} \end{aligned}$$

para todo g, $x \in G$ e h, $y \in H$,. Logo, $g^{([x,y^\varphi])\lambda} = g^{([x,y^\varphi])\mu}$. Como $\tau(G,H)$ é gerado por todos os comutadores $[x,y^\varphi]$ com $x \in G$, $y \in H$ e λ, μ são homomorfismo temos

$$g^{(t)\lambda} = g^{(t)\mu}, \quad \forall \in G, \ t \in \tau(G,H).$$

O outro caso é analogo. □

Teorema 3.1.6. *i) Para todo $i \geq 2$ o subgrupo $\gamma_i(G \otimes H)$ é isomorfo ao subgrupo $[\gamma_{i-1}([G,H]),[H,G]^\varphi]$ de $\eta(G,H)$.*

ii) Para todo $i \geq 1$ o subgrupo $(G \otimes H)_i$ é isomorfo ao subgrupo $[[G,H]_{i-1},[H,G]^\varphi_{i-1}]$ de $\eta(G,H)$.

Demonstração. (i) Primeiro observemos que pela Proposição 3.1.3 (ii), se $[G,H] = \{1\}$ então $\tau(G,H)$ é abeliano. Vamos assumir então que $[G,H] \neq \{e\}$

Pela parte (ii) da Proposição 3.1.3 temos que $[u,v] = [u\lambda,(v\mu)^\varphi]$ para todo $u,v \in \tau(G,H)$. Isto mostra que

$$\gamma_2(\tau(G,H)) = [\gamma_1([G,H]),[H,G]^\varphi].$$

Por indução sobre $i \geq 2$ suponha que

$$\gamma_i(\tau(G,H)) = [\gamma_{i-1}([G,H]),[H,G]^\varphi]$$

Então

$$\gamma_{i+1}(\tau(G,H)) = [\gamma_{i-1}([G,H]),[H,G]^\varphi,\tau(G,H)]$$

e este grupo é gerado pelos elementos $[x,(v\mu)^\varphi,t]^z$, com $x \in \gamma_{i-1}([G,H])$, $(v)\mu \in [H,G]$, $t \in \tau(G,H)$, $z \in [\gamma_{i-1}([G,H]),[H,G]^\varphi]$. Mas pelas proposições 3.1.3 (ii) e 3.1.5 (ii)

$$[x,(v\mu)^\varphi,t] = [([x,(v\mu)^\varphi])\lambda,(t\mu)^\varphi] = [x^{-1}x^{v\mu},(t\mu)^\varphi] = [x^{-1}x^{v\lambda},(t\mu)^\varphi].$$

Como $[\gamma_i([G,H]),[H,G]^{\varphi}]$ é subgrupo normal de $\eta(G,H)$ (pela Proposição 3.1.1), temos

$$[x,(v\mu)^{\varphi},t]^{z} \in [\gamma_i([G,H]),[H,G]^{\varphi}]$$

para todo $x \in \gamma_{i-1}([G,H]),\ v,\ t \in \tau(G,H),\ z \in [\gamma_{i-1}([G,H]),[H,G]^{\varphi}]$. Portanto,

$$\gamma_{i+1}(\tau(G,H)) \subseteq [\gamma_i([G,H]),[H,G]^{\varphi}]$$

Por outro lado, $\gamma_i(\tau(G,H))$ é gerado pelos elementos $[x^{-1}x^{v\lambda},(t\mu)^{\varphi}]^{g}$ com $x \in \gamma_{i-1}([G,H]),\ v,\ t \in \tau(G,H)$ e $g \in \gamma_i([G,H])$.

Uma vez que $\gamma_{i+1}(\tau(G,H)) \trianglelefteq \eta(G,H)$, então

$$[x^{-1}x^{v\lambda},(t\mu)^{\varphi}]^{g} = [x,(v\mu)^{\varphi},t]^{g}$$

pertence a $\gamma_{i+1}(\tau(G,H)), \quad \forall x \in \gamma_{i-1}([G,H]),\ v,\ t \in \tau(G,H),\ g \in \gamma_i([G,H])$

Portanto

$$\gamma_{i+1}(\tau(G,H)) = [\gamma_i([G,H]),[H,G]^{\varphi}]$$

(ii) para $i=1$ temos

$$\tau(G,H)_1 = \gamma_2(\tau(G,H)) = [[G,H],[H,G]^{\varphi}]$$

Por indução sobre $i \geq 1$, suponhamos que

$$\tau(G,H)_i = [[G,H]_{i-1},[H,G]^{\varphi}_{i-1}]$$

Então

$$\tau(G,H)_{i+1} = [\tau(G,H)_i,\tau(G,H)_i] = [[[G,H]_{i-1},[H,G]^{\varphi}_{i-1}],[[G,H]_{i-1},[H,G]^{\varphi}_{i-1}]]$$

Pela Proposição 1.1.3 (v)

$$\tau(G,H)_{i+1} = [X,X]^{\tau(G,H)_i\tau(G,H)_i}$$

em que $X = \{[g,h^{\varphi}] \mid g \in [G,H]_{i-1}, \quad h \in [H,G]_{i-1}\}$. Pela Proposição 3.1.5 (iii) segue que

$$[[G,H]_i,[H,G]^{\varphi}_i] = [(\tau(G,H)_i)\lambda,((\tau(G,H)_i)\mu)^{\varphi}]$$

Logo,

$$[[G,H]_i,[H,G]^{\varphi}_i] = [Y,Y_1]^{(\tau(G,H)_i)\lambda,((\tau(G,H)_i)\mu)^{\varphi}}$$

onde

$$Y = \{[t,u]\lambda \mid t,\ u \in \tau(G,H)_{i-1}\}$$
$$Y_1 = \{([t,u]\mu)/\ \varphi \mid t,,\ u \in \tau(G,H)_{i-1}\}$$

Agora sejam $g,\ g_1 \in [G,H]_{i-1}$ e $h,\ h_1 \in [H,G]_{i-1}$. Pela Proposição 3.1.5 (*iii*) existem $y,\ t_1,\ u,\ u_1 \in \tau(G,H)_{i-1}$ tais que

$$g = (t)\lambda, \quad g_1 = (t_1)\lambda, \quad h = (u)\mu, \quad h_1 = (u_1)\mu.$$

Mas temos que

$$\begin{array}{rcll} [[g,h^{\varphi}],[g_1,{h_1}^{\varphi}]] & = & [g^{-1}g^{h},(h_1{-}g_1h_1)^{\varphi}] & \text{pela Proposição 3.1.3 } (ii) \\ & = & [((t)\lambda)^{-1}((t)\lambda)^{(u)\mu},(((u_1)\mu)^{-(t_1)\mu}(u_1)\mu)^{\varphi}] & \\ & = & [((t)\lambda)^{-1}((t)\lambda)^{(u)\lambda},(((u_1)\mu)^{-(t_1)\lambda}(u_1)\mu)^{\varphi}] & \text{Prop. 3.1.5 } (iv) \\ & = & [([t,u])\mu,(([t_1,u_1])\mu)^{\varphi}] & \end{array}$$

E portanto

$$[X,X] = [Y,Y_1]$$

Agora como $[[G,H]_i,[H,G]_i^{\varphi}] \trianglelefteq \eta(G,H)$ (pelas proposições 3.1.5 e 3.1.1).

$$\tau(G,H) = [X,X]^{\tau(G,H)_i\tau(G,H)_i} = [Y,Y_1]^{\tau(G,H)_i\tau(G,H)_i} \subseteq [[G,H]_i,[H,G]_i^{\varphi}]$$

Da mesma forma

$$[[G,H]_i,[H,G]_i^{\varphi}] \subseteq \tau(G,H)$$

Portanto,

$$[[G,H]_i,[H,G]_i^{\varphi}] = \tau(G,H)$$

□

Colorário 3.1.7. *i) Se $[G,H]$ é nilpotente de classe c então $G \otimes H$ é nilpotente de classe c ou $c+1$;*

ii) Se $[G,H]$ é solúvel de série derivada com comprimento l, então $G \otimes H$ é solúvel de série derivada com comprimento l ou $l+1$.

Demonstração. Suponhamos que $[G,H]$ é nilpotente de classe c. Pelo Teorema (3.1.6) anterior

$$\gamma_{c+2}(\tau(G,H) = [\gamma_{c+1}([G,H]),[H,G]^{\varphi}] = \{e\}$$

Portanto, $\tau(G,H)$ é niltotente de classe no máximo $c+1$. Vamos mostrar que sua classe não pode ser inferior a c. Seja $M = [\gamma_{c-1}([G,H]),[H,G]^{\varphi}]$. A restrição de λ á M possui imagem $[\gamma_{c_1}([G,H]),[H,G]]$. Mas

$$\begin{aligned}
[\gamma_{c_1}([G,H]),[H,G]] &= \langle g^{-1}g^{h} \mid g \in \gamma_{c-1}([G,H]),\ h \in [H,G]\rangle \\
&= \langle g^{-1}g^{(t)\mu} \mid g \in \gamma_{c-1}([G,H]),\ t \in \tau(G,H)\rangle \\
&= \langle g^{-1}g^{(t)\lambda} \mid g \in \gamma_{c-1}([G,H]),\ t \in \tau(G,H)\rangle \\
&\quad \text{(pela Proposição 3.1.5)} \\
&= \gamma_{c}([G,H])
\end{aligned}$$

Logo como a classe de nilpotência de $[G,H]$ é c temos que $\gamma_c([G,H]) \neq \{e\}$, e portanto, devemos ter $M \neq \{e\}$. Pelo Teorema (3.1.6) anterior

$$\gamma_c(\tau(G,H) = [\gamma_{c-1}(\tau(G,H),[H,G]^{\varphi}] = M \neq \{e\}$$

.

Assim $cl(\tau(G,H)) \geq c$. Agora como $\tau(G,H) \cong G \otimes H$, o resultado está provado.

(ii) é provado de modo análogo. □

3.2 O Quadrado Tensorial não-abelianos de Grupos Solúveis Finitos

Vamos novamente nos restringir ao quadrado tensorial. Observamos que se G é um grupo, então a conjugação em G induz ações compatíveis entre os termos da série derivada de G, i.é., de G_i sobre G_j e de G_j sobre G_i para todo $i,\ j \geq 0$. Assim o produto tensorial não abeliano $G_i \otimes G_j$ está definido para todo $i,\ j \geq 0$.

Lema 3.2.1. *Sejam G um grupo finito e $i,\ j \geq 0$, com $i > j$.Então*

i) existe uma sequência exata

$$1 \longrightarrow [G_i, {G_i}^{\varphi}][G_{i+1}, {G_j}^{\varphi}] \longrightarrow \tau(G_i,G_j) \longrightarrow \tau({G_i}^{ab}, G_j/G_i) \longrightarrow 1$$

onde $[G_i, {G_i}^{\varphi}]$ e $[G_{i+1}, {G_j}^{\varphi}]$ são subgrupos de $\tau(G_i,G_j)$;

ii) $|G_i \otimes G_j| \leq |G_i \otimes G_i||{G_i}^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}G_j/G_i} I(G_j/G_i)||G_{i+1} \otimes G_j|$.

Demonstração. A conjugação em G induz à uma ação de G_j/G_i sobre G_i/G_{i+1}. Sejam $i,\ j \geq 0$ com $i > j$ e definamos

$$\begin{array}{rcl} \theta : G_j/G_i & \rightarrow & Aut(G_i/G_{i+1}) \\ G_ih & \mapsto & \theta_h \end{array}$$

onde θ_h é o automorfismo de G_i/G_{i+1} tal que

$$(G_{i+1}g)\theta_h = G_{i+1}g^h.$$

Se $h,\ h_1 \in G_j$ são tais que $G_ih = G_ih_1$ então $h_1 = ch$ para algum $c \in G_i$. Daí, para todo $g \in G_i$,

$$\begin{array}{rcl} (G_{i+1}g)\theta_{h_1} & = & G_{i+1}g^{h_1} \\ & = & G_{i+1}g^{hc} \\ & = & G_{i+1}g^h g^{-h} g^{ch} \\ & = & G_{i+1}g^h[g,c]^h \\ & = & G_{i+1}g^h \\ & = & (G_{i+1}g)\theta_h \end{array}$$

Logo θ está bem definida. É claro que θ é homomorfismo de grupos. Assim, temos uma ação de G_j/G_i sobre G_i/G_{i+1} dada por

$$(G_{i+1}g)^{G_ih} = G_{i+1}(g^h)$$

para todo $g \in G_i$ e $h \in G_j$

A conjugação em G também induz à uma ação trivial de G_i/G_{i+1} sobre G_j/G_i uma vez que

$$G_ih^g = G_ihh^{-1}h^g = G_ih[h,g] = G_ih$$

para todo $g \in G_i$ e $h \in G_j$

Como G_i/G_{i+1} é um grupo abeliano agindo trivialmente sobre G_j/G_i, essas ações são compativeis. Consideremos os epimorfismos canônicos $\alpha : G_i \rightarrow G_i/G_{i+1}$, $\beta : G_j \rightarrow G_j/G_i$.

Notemos que para todo $g \in G_i$ e $h \in G_j$ temos

$$(g^h)\alpha = G_{i+1}g^h = (G_{i+1}g)^{G_ih} = (g\alpha)^{h\beta}$$

e

$$(h^g)\beta = G_i h^g = G_i h = (G_i h)^{G_{i+1}g} = (h\beta)^{g\alpha}$$

Logo α e β preservam as ações. Assim, pela Proposição 3.1.4 (i) existe um epimorfismo

$$\gamma : \eta(G_i, G_j) \to \eta(G_i/G_{i+1}, G_j/G_i)$$

tal que $g\gamma = g\alpha$ e $(h^\varphi)\gamma = (h\beta)^\psi$, $g \in G_i$, $h \in G_j$. Além disso, se γ' é a restrição de γ a $\tau(G_i, G_j)$ então $\mathrm{Nuc}(\gamma') = [G_i, G_i{}^\varphi][G_{i+1}, G_j{}^\varphi]$ e $\mathrm{Im}(\gamma') = \tau(G_i^{ab}, G_j/G_i)$. Logo a sequência seguinte é exata

$$1 \longrightarrow [G_i, G_i{}^\varphi][G_{i+1}, G_j{}^\varphi] \stackrel{i}{\longrightarrow} \tau(G_i, G_j) \stackrel{\gamma'}{\longrightarrow} \tau(G_i^{ab}, G_j/G_i) \longrightarrow 1$$

(ii) É facil ver que $[G_i, G_i{}^\varphi]$ e $[G_{i+1}, G_j{}^\varphi]$ são imagens epimórficas de $G_i \otimes G_i$ e $G_{i+1} \otimes G_j$, respectivamente. Assim, de (i) e da Proposição 3.1.2 segue que

$$|G_i \otimes G_j| \leq |G_i \otimes G_i||G_i{}^{ab} \otimes G_j/G_i||G_{i+1} \otimes G_j|$$

Agora, como G_i^{ab} é abeliano e age trivialmente sobre G_j/G_i, pela proposiçao 2.1.6 temos que $G_i{}^{ab} \otimes G_j/G_i \cong G_i{}^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}G_j/G_i} I(G_j/G_i)$, provando (ii)

□

Lema 3.2.2. *Sejam G um grupo e $i \geq 0$. Então*

i) Existe uma sequência exata

$$1 \longrightarrow [G_{i+1}, G_i{}^\varphi] \longrightarrow \tau(G_i, G_i) \longrightarrow \tau(G_i{}^{ab}, G_i{}^{ab}) \longrightarrow 1$$

onde $[G_{i+1}, G_i^\varphi] \leq \tau(G_i, G_i)$;

ii) $|G_i \otimes G_i| \leq |G_i^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G_i^{ab}||G_{i+1} \otimes G_i|$

Demonstração. Consideremos o epimorfismo canônico $\pi : G_i \to G_i^{ab}$. Pela Proposição 3.1.4 π induz um epimorfismo

$$\gamma : \eta(G_i, G_i) \to \eta(G_i^{ab}, G_i^{ab})$$

tal que

$$\mathrm{Nuc}(\gamma) \cap \tau(G_i, G_i) = [G_{i+1}, G_i{}^\varphi][G_i, G_{i+1}^\varphi] \quad \text{e} \quad (\tau(G_i, G_i))\gamma = \tau(G_i^{ab}, G_i^{ab}).$$

Logo a sequência seguinte é exata

$$1 \longrightarrow [G_{i+1}, {G_i}^{\varphi}][G_i, G_{i+1}^{\varphi}] \longrightarrow \tau(G_i, G_i) \longrightarrow \tau({G_i}^{ab}, {G_i}^{ab}) \longrightarrow 1$$

.

Vamos mostrar que

$$[G_i, G_{i+1}^{\varphi}] \leq [G_{i+1}, G_i^{\varphi}] \quad \text{e então} \quad [G_{i+1}, {G_i}^{\varphi}][G_i, G_{i+1}^{\varphi}] = [G_{i+1}, {G_i}^{\varphi}]$$

Como G_i age sobre si mesmo por conjugação, as seguintes relações acontecem em $\eta(G_i, G_i)$ pelo Lema 2.3.1

$$\begin{aligned} &[x, y^{\varphi}, z] = [x, y, z^{\varphi}] = [x, y^{\varphi}, z^{\varphi}] = \\ &= [x^{\varphi}, y, z] = [x^{\varphi}, y, z^{\varphi}] = [x^{\varphi}, y^{\varphi}, z] \quad , \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Pela Proposição 1.1.3 $[G_i, G_{i+1}^{\varphi}] = \langle [x, [y, z]^{\varphi}]^c \mid x,\ y,\ z \in G_i,\ c \in G_{i+1} \rangle$. Mas

$$\begin{aligned} [x, [y, z]^{\varphi}]^c &= [y^{\varphi}, z^{\varphi}, x]^{-c} \\ &= [y, z, x^{\varphi}]^{-c} \qquad \text{por (3.2.2)} \end{aligned}$$

o qual é um elemento de $[G_{i+1}, G_i^{\varphi}]$. Assim $[G_i, G_{i+1}^{\varphi}] = [G_{i+1}, G_i^{\varphi}]$.

(ii) Como $[G_{i+1}, G_i^{\varphi}]$ é uma imagem epimórfica de $G_{i+1} \otimes G_i$ e $G_i^{ab} \otimes G_i^{ab} \cong G_i^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G_i^{ab}$, pela Proposição 2.1.6, obtemos

$$|G_i \otimes G_i| \leq |G_i^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G_i^{ab}||G_{i+1} \otimes G_i|$$

□

Teorema 3.2.3. *Se G é um grupo finito solúvel de série derivada com comprimento l, então*

$$|G \otimes G| \leq |G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}| \textstyle\prod_{i=1}^{l-1} (|G_i^{ab} \otimes G_i^{ab}|^{2^{i-1}} ||G_i^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}G/G_i} I(G/G_i))$$

$$\textstyle\prod_{i=1}^{l-2} \prod_{k=i-1}^{l-1} |G_k^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}G_i/G_k} I(G_i/G_k)|^{2^{i-1}}$$

Demonstração. Por uma repetitiva aplicação do Lema 3.2.1 (ii), nós vemos que se $i > j$ então

$$|G_i \otimes G_j| \leq \prod_{k=1}^{l-1} |G_k \otimes G_k||G_k^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}G_j/G_k} I(G_j/G_k)| \tag{3.2.2}$$

Seja i um inteiro positivo tal que $0 \leq i \leq l-1$. Pelo Lema 3.2.2 (ii)

$$|G_i \otimes G_i| \leq |G_i^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G_i^{ab}||G_{i+1} \otimes G_i|$$

e por (3.2.2)

$$|G_i \otimes G_i| \leq |G_i^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G_i^{ab}||G_{i+1} \otimes G_{i+1}| \ldots |G_{l-1} \otimes G_{l-1}| \prod_{k=i+1}^{l-1} |G_k^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}G_i/G_k} I(G_i/G_k)| \tag{3.2.3}$$

Agora, para $i = 0$

$$|G \otimes G| \leq |G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}||G_1 \otimes G_1| \ldots |G_{l-1} \otimes G_{l-1}| \prod_{k=1}^{l-1} |G_k^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}G/G_k} I(G/G_k)| \tag{3.2.4}$$

Novamente usando (3.2.3) para $i = 1$, e substituindo em (3.2.4), nos temos que

$$|G \otimes G| \leq |G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}||G_1^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G_1^{ab}| \ldots |G_2 \otimes G_2|^2 |G_{l-1} \otimes G_{l-1}|^2 \prod_{k=1}^{l-1} |G_k^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}G/G_k} I(G/G_k)| \prod_{k=2}^{l-1} |G_k^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}G_1/G_k} I(G_1/G_k)|$$

Aplicando (3.2.3) repetidas vezes obtemos o limite desejado. □

O limite dado no teorema acima pode ser melhorado para o caso em que G é metabeliano finito.

Teorema 3.2.4. *Seja G um grupo metabeliano finito. Então*

$$|G \otimes G| \text{ divide } |G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}||G' \wedge G'||G' \otimes_{\mathbb{Z}G^{ab}} I(G^{ab})|,$$

onde $G' \wedge G'$ é o quadrado exterior de $\mathbb{Z}$-módulo G'. Quando $[G', G] = \{1\}$, nós temos que

$$|G \otimes G| \leq |G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}||G' \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}|.$$

Demonstração. Usando o Lema 3.2.2 com $i = 0$, nós obtemos uma sequencia exata

$$1 \longrightarrow [G', G^{\varphi}] \longrightarrow \tau(G, G) \longrightarrow \tau(G^{ab}, G^{ab}) \longrightarrow 1$$

onde $[G', G^{\varphi}] \leq \tau(G, G)$. Logo

$$|\tau(G,G)| = |\tau(G^{ab}, G^{ab})||[G', G^{\varphi}]| \tag{3.2.5}$$

È claro que a correspondência $[x, g^{\varphi}] \mapsto [x, g^{\varphi}]$ induz um epimorfismo α de $\tau(G', G)$ para $[G', G^{\varphi}](\leq \tau(G, G))$. Notemos que o subgrupo $S = \langle [x, x^{\varphi}] \mid x \in G' \rangle$ de $\tau(G', G)$ está contido em $\mathrm{Nuc}(\alpha)$ já que em $\tau(G, G)$, $[x, x^{\varphi}] = e$ para todo $x \in G'$ (pela Proposição 3.1.3). Além disso $S \trianglelefteq \tau(G', G)$. Assim, α induz um homomorfismo

$$\beta : \frac{\tau(G', G)}{S} \to [G', G^{\varphi}]$$

.

e consequentemente

$$|[G', G^{\varphi}]| \text{ divide} |\tau(G', G)/S|. \tag{3.2.6}$$

Agora pelo Lema 3.2.1, (com $i = 1$ e $j = 0$), existe um sequência exata

$$1 \longrightarrow [G', G'^{\varphi}] \xrightarrow{i} \tau(G', G) \xrightarrow{\gamma'} \tau(G', G^{ab}) \longrightarrow 1$$

onde $[G', G'^{\varphi}] \leq \tau(G', G)$ e γ' é um homomorfismo tal que $([x, g^{\varphi}])\gamma' = [x, (G'g)^{\psi}]$ para todo $x \in G'$, $g \in G$. Podemos observar que

$$S \leq \mathrm{Nuc}(\gamma') \quad \text{e} \quad S \leq [G', G'^{\varphi}]$$

Logo, a sequência seguinte é exata:

$$\tfrac{[G', G'\varphi]}{S} \longrightarrow \tfrac{\tau(G', G)}{S} \longrightarrow \tau(G', G^{ab}) \longrightarrow 1$$

e, portanto

$$\left| \frac{\tau(G', G)}{S} \right| \text{ divide } \left| \tau(G', G^{ab}) \right| \left| \frac{[G', G'^{\varphi}]}{S} \right|. \tag{3.2.7}$$

onde $\frac{[G', G'^{\varphi}]}{S} \leq \frac{\tau(G', G)}{S}$. Seja $X = \{x \otimes y \mid x,\, y \in G'\}$. È facil vermos que a aplicação

$$\begin{aligned} \theta_1 : X &\to \tfrac{\tau(G', G)}{S} \\ x \otimes y &\mapsto S[x, y^{\varphi}] \end{aligned}$$

é consistente com as relações definidoras de $G' \otimes G'$. Além disso, $x \otimes x \in \mathrm{Nuc}(\theta_1)$, $\forall\, x \in G'$. Assim, θ_1 induz um homomorfismo

$$\theta : G' \wedge G' \to \frac{\tau(G', G)}{S}$$

tal que $\mathrm{Im}(\theta) = \frac{[G',G'^{\varphi}]}{S}$. Logo

$$\left|\frac{[G',G'^{\varphi}]}{S}\right| \text{ divide } |G' \wedge G'| \tag{3.2.8}$$

Como $G'' = \{1\}$ segue que G' é abeliano e então pela Proposição 2.1.6

$$G' \otimes G' \cong G' \otimes_{\mathbb{Z}} G'$$

Logo, o grupo $G' \wedge G'$ é o quadrado exterior (usual) do $\mathbb{Z}$-módulo G'. Agora de, (3.2.5), (3.2.6), (3.2.7) e (3.2.8)

$$|\tau(G,G)| \leq |\tau(G^{ab}, G^{ab})||G' \wedge G'||\tau(G', G^{ab}|$$

Portanto pelas proposições 2.1.7 e 3.1.2

$$|G \otimes G| \text{ divide } |G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}||G' \wedge G'||G' \otimes_{\mathbb{Z}G^{ab}} I(G^{ab})|.$$

Agora se $[G', G] = \{e\}$ então pela Proposição 2.1.6 nós temos que $G' \otimes G \cong G' \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}$. Logo pelo Lema 3.2.2 (ii).

$$|G \otimes G| \leq |G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}||G' \otimes G| \leq |G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}||G' \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}|.$$

□

3.3 Alguns Produtos Semi-diretos relacionados com o Produto Tensorial não-abeliano de Grupos

Nessa seção estabelecemos a ordem de um quadrado tensorial não abeliano de um grupo G metabeliano em que G' e G^{ab} possuem ordem coprima. Os resultados são de Nakaoka e Rocco [13]

Vamos escrever $\eta^*(A, H)$ o grupo $\eta(A, H)$ no caso em que A é um H-grupo abeliano agindo trivialmente sobre H.

Se B é um H-subgrupo de A, então $B \cdot H$ é o produto semi direto de B por H.

Com a notação acima temos que

Proposição 3.3.1. *Se* $(|A|, |H|) = 1$ *então* $[A, H] \cdot H$ *está imerso em* $\eta^*(A, H)$. *Se, além disso,* $A = [A, H]$ *e* $A \neq 1$, *então* $\eta^*(A, H)$ *é não nilpotente.*

Demonstração. Como A é abeliano e age trivialmente sobre H pela Proposição 2.1.7 $[A, H^{\varphi}] \cong A \otimes_{\mathbb{Z}H} I(H)$, onde $I(H)$ denota o ideal de aumento de $\mathbb{Z}H$, tal que $[a, h^{\varphi}] \mapsto a \otimes (h-1)$. Por outro lado conforme 3.1.3 (i) existe um H-epimorfismo $\lambda : [A, H^{\varphi}] \to [A, H]$ tal que $[a, h^{\varphi}] \mapsto [a, h] = a^{-1}a^{h}$. Segue de [16] (11.4.2) que $\mathrm{Nuc}(\lambda)$ é isomorfo ao primeiro grupo de homologia $H_1(H, A)$. Como $(|A|, |H|) = 1$ temos que $H_1(H, A) = 0$, logo λ é isomorfismo. Portanto $[A, H^{\varphi}] \cong [A, H]$ e consequentemente o subgrupo $[A, H^{\varphi}] \cdot H^{\varphi}$ de $\eta^*(A, H)$ é isomorfo ao produto semi direto $[A, H] \cdot H$. Se além disso $[A, H] = A$, então certamente todos os termos $\gamma_i(\eta^*(A, H))$ da série central inferior de $\eta^*(A, H)$ conterá o subgrupo $[A, H^{\varphi}] \cong A$. $\square$

Teorema 3.3.2. *Seja G um grupo metabeliano finito tal que $|G'|$ e $|G^{ab}|$ são coprimos. Então*

i) $|G \otimes G| = n|G'| \cdot |G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}|$;

ii) $|J(G)| = n|G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}|$.

onde n é a ordem do subgrupo G^{ab}-estável de $M(G')$ e $J(G)(\cong J_2(G)) \leq \nu(G)$.

.

Demonstração. Primeiramente, como $(|G'|, |G^{ab}|) = 1$, pelo Teorema de Schur-Zassenhaus [19], existe um subgrupo H de G, com $H \cong G^{ab}$, tal que $G = G' \cdot H$ é o produto semi-direto de G' e H. Pela Proposição 2.1.6 $G^{ab} \otimes G^{ab} \cong G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}$. Usando o Lema 3.2.2 temos a seguinte sequencia exata

$$1 \longrightarrow [G', G^{\varphi}] \longrightarrow [G, G^{\varphi}] \longrightarrow G^{ab} \otimes G^{ab} \longrightarrow 1$$

onde $[G', G^{\varphi}] \leq \nu(G)$.

Dessa sequência segue que

$$|G^{ab} \otimes G^{ab}| \quad \text{divide} \quad |[G, G^{\varphi}]| \tag{3.3.1}$$

Da sequência exata

$$1 \longrightarrow J(G) \longrightarrow [G, G^{\varphi}] \xrightarrow{k} G' \longrightarrow 1 \tag{3.3.2}$$

segue que

$$|G'| \quad \text{divide} \quad |[G, G^{\varphi}]| \tag{3.3.3}$$

Logo, como $(|G'|, |G^{ab}|) = 1$, segue de (3.3.1) e (3.3.3) que

$$|G'||G^{ab} \otimes G^{ab}| \quad \text{divide} \quad |[G, G^{\varphi}]| \tag{3.3.4}$$

Assim de (3.3.4), temos que

$$|G \otimes G| = |[G, G^{\varphi}]| = n|G'| \cdot |G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}|. \tag{3.3.5}$$

Da sequência (3.3.2) obtemos que $|J(G)| = \frac{|[G,G^{\varphi}]|}{|G'|}$. Logo por (3.3.5)

$$|J(G)| = n|G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}|$$

.

Resta-nos mostrar que $n = |M(G')^H|$, onde $M(G')^H$ é o subgupo H-estável de $M(G')$. Observamos na seção 2.2 que $M(G) \cong J_2(G)/\Delta(G)$. Agora pelo Lema 2.3.3 (ii), $\Delta(G) \cong \langle [h, h^{\varphi}] \mid h \in H \rangle \subseteq [H, H^{\varphi}]$. Considerando que $[H, H^{\varphi}] \cong H \otimes H \cong G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}$ e H é abeliano, temos que

$$|M(G)| = n \left| \frac{[H, H^{\varphi}]}{\langle [h, h^{\varphi}] \mid h \in H \rangle} \right| = n|H \wedge H| = nM(H). \tag{3.3.6}$$

Por outro lado, como as ordens de G' e H são coprimas, segue da Proposição 1.6.4, que

$$M(G) \cong M(H) \times M(G')^H. \tag{3.3.7}$$

Logo de (3.3.6) e (3.3.7) temos que $|M(G')^H| = n$. $\square$

Exemplo 3.3.3. Seja $G = \langle x, \, y \mid x^5 = e, \; y^4 = e, \; x^y = x^2 \rangle$.

Vejamos que $x^{y^2} = x^4, \; x^{y^3} = x^3, \; x^{y^4} = x, \; [x, y] = x$ e portano $G' = \langle x \rangle$.

Assim $G = N \cdot T$ tal que $N = \langle x \rangle$ e $T = \langle y \rangle$. Agora, como G' é cíclico, $M(G') = \{e\}$. Logo $|M(G')^T| = 1$.

Pelo Teorema 3.3.2

$$\begin{aligned} |G \otimes G| &= n.|G'||G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}| \\ &= 1 \cdot 5 \cdot 4 \\ &= 20 \end{aligned}$$

Conforme Rocco [18], um conjunto de geradores de $[G, G^{\varphi}] (\cong G \otimes G)$ é

$$\{[x, x^{\varphi}], \; [y, y^{\varphi}], \; [x, y^{\varphi}], \; [y, x^{\varphi}]\}$$

mas pelo Lema 2.3.1, (v) e (vi) $[x, x^\varphi] = e$ e $[x, y^\varphi][y, x^\varphi] = e$, então

$$G = \langle [y, y^\varphi],\ [x, y^\varphi] \rangle$$

.

Notemos que $[y^4, y^\varphi] = ([y, y^\varphi])^4 = e$. Além disso usando as relações definidoras de $\nu(G)$ temos

$$\begin{aligned}
[x^2, y^\varphi] &= [x, y^\varphi]^x [x, y^\varphi] = [x, y^\varphi]^{[x,y]} = [x, y^\varphi]^{[x,y^\varphi]}[x, y^\varphi] = [x, y^\varphi]^2 \\
[x^3, y^\varphi] &= [x^2, y^\varphi]^x [x, y^\varphi] = ([x, y^\varphi]^2)^x [x, y^\varphi] = [x, y^\varphi]^3 \\
[x^4, y^\varphi] &= [x^3, y^\varphi]^x [x, y^\varphi] = ([x, y^\varphi]^3)^x [x, y^\varphi] = [x, y^\varphi]^4 \\
[x^5, y^\varphi] &= [x^4, y^\varphi]^x [x, y^\varphi] = ([x, y^\varphi]^4)^x [x, y^\varphi] = [x, y^\varphi]^5 = e
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
[x, (y^2)^\varphi] &= [x, y^\varphi][x^y, y^\varphi] = [x, y^\varphi][x^2, y^\varphi]^2 = [x, y^\varphi]^3 \\
[x, (y^3)^\varphi] &= [x, y^\varphi]^x [x, (y^2)^\varphi]^y = [x, y^\varphi][x^y, y^\varphi]^3 = [x, y^\varphi][x^2, y^\varphi]^3 = [x, y^\varphi]^2 \\
[x, (y^4)^\varphi] &= [x, y^\varphi]^5 = e.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.3.1, (iii) $[y, y^\varphi]$ é central em $\nu(G)$. Portanto pelas relações acima vemos que $[G, G^\varphi]$ é gerado pelos comutadores $[x, y^\varphi]$ e $[y, y^\varphi]$, os quais satisfazem as relações: $[x, y^\varphi]^5 = e$, $[y, y^\varphi]^4 = e$, $[[x, y^\varphi], [y, y^\varphi]] = e$, ou seja $G \otimes G \cong [G, G^\varphi]$ é a imagem homomórfa de do grupo cíclico de ordem 20.

Além disso,

$$[x, y^\varphi]^{x^\varphi} = [x, y^\varphi]^x = [x, y^\varphi]^{[x,y]} = [x, y^\varphi]^{[x,y^\varphi]} = [x, y^\varphi],$$

e

$$[x, y^\varphi]^{y^\varphi} = [x, y^\varphi]^y = [x^y, y^\varphi] = [x^2, y^\varphi] = [x, y^\varphi]^x [x, y^\varphi] = [x, y^\varphi]^2,$$

enquanto $[y, y^\varphi]$ é centralizado por G e G^φ.

Assim, tomando $(\mathbb{Z}_{20} \cong) V = \langle a,\ b \quad | \quad a^5,\ b^4,\ [a, b] \rangle$ podemos considerar uma ação de G sobre V análogas às obtidas acima e, com um procedimento semelhante ao do exemplo 2.3.9, podemos construir o grupo $(V \cdot G) \cdot G^\varphi$, que consequentemente nos dá $[G, G^\varphi] \cong \mathbb{Z}_{20}$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] A. Babakhanian. *Cohomological methods in group theory.*M Dekker, New York, 1972.

[2] R.D Blyth, F. Fumagalli, M. Morigi, *Some structural results on the non-abelian tensor square of groups*, to appear.

[3] R. Brown, D. L. Johnson, E. F. Robertson, *Some Computations of Non-Abelian Tensor Products of Groups*, J. Algebra, **111**, No 1 (1987) 177-202.

[4] R. Brown, J.L. Loday, *Van Kampen theorems for diagrams of spaces*, Topology **26** (1987) 311-335.

[5] G. Ellis, F. Leonard, *Computing Schur multipliers and tensor products of finite groups*, Proc. Royal Irish Acad. **95A** (1995) 137-147.

[6] D. Guin, *Cohomologie et homologie non-abeliene des groups*, C.R. Acad. Se. Paris **301** (1985) 337-340.

[7] D.L Johnson, *Topics in the Theory of Groups Presentations*, London Methematical Society Student Texts 15, New York , Cambridge University Press 1980.

[8] G. Karpilovsky, *The Schur Multiplier* (London Mathematical Society monographs; new ser. 2) Oxford University Press, 1987.

[9] A. McDermott, *The nonabelian tensor protuct of groups: computations and structural results*, Ph.D thesis, National University of Ireland, Galway (1998).

[10] C. Miller, *The second homology goup of a group; relations among commutators*, Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952) 588-595.

[11] I.N. Nakaoka, *Non-abelian tensor products of solvable groups*, J. Group Theory 3, No **2** (2000) 157-167.

[12] I.N. Nakaoka, *Sobre o Produto Tensorial não Abeliano de Grupos*, Dissertação de Mestrado, IMECC-UNICAMP (1994).

[13] I.N. Nakaoka, N.R. Rocco, *A note on semidirect products and nonabelian tensor products of groups*, Algebra and Discrete Mathematics, No **3** (2009) 77 - 84.

[14] I.N. Nakaoka, N.R. Rocco, *Nilpotent Actions on non-abelian Tensor Products of groups*, Matemática Contemporânea, **21** (2001) 223-238.

[15] E.R. Pereira, *O Multiplicador de Schur e Grupos de Recobrimento Total*, Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília (1999).

[16] D.J.S. Robinson, *A course in the Theory of Groups*, Springer-Verlag, New York, 1996, Second Edition.

[17] N.R. Rocco, *On a construction related to the non-abelian tensor square of a group*, Bol. Soc. Bras. Mat. **22** (1991) 63-79.

[18] N.R. Rocco, *A Presentation for a Crossed Embedding of Finite Solvable Groups*, Comm. in Algebra **22** (1994) 1975-1998.

[19] J. J. Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups*, Spinger-Verlag, New York and Berlim, 1995, Fourth Edition .