Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Superlinearidade e Sublinearidade Local para Problemas Elípticos Semilineares Indefinidos

por

Bruno Nunes de Souza

2010

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Superlinearidade e Sublinearidade Local para Problemas Elípticos Semilineares Indefinidos

por

Bruno Nunes de Souza

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 2010.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Marcelo Fernandes Furtado - UnB (Orientador)

Prof. Dr. Carlos Alberto Pereira dos Santos - UnB

Prof. Dr. Francisco Odair Vieira de Paiva - Unicamp

Dedicatória

Aos meus pais, José e Evangelina.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me concedido saúde nos momentos mais importantes dessa etapa da minha vida.

À minha família. Ao meu pai José de Souza, que confia em mim cegamente e que me deu os melhores exemplos de vida. À minha mãe Evangelina, fonte inesgotável de amor, por ter compreendido a distância. Às minhas duas irmãs queridas, Polli e Bel, por terem me dado muito carinho e afeto nos poucos momentos que estivemos juntos.

Ao professor Marcelo, que além da orientação, ajudou de forma expressiva na minha formação matemática, além de ter aceito continuar me orientando.

Aos Professores Carlos Alberto Pereira dos Santos e Francisco Odair Vieira de Paiva por terem aceito fazer parte da banca examinadora, sobretudo pelos valiosos conselhos dados.

Aos amigos da minha turma de mestrado, Tarcísio, Bruno, Sunamita, Ana Paula, Wembeson, Weslley, Marcelo, pelos estudos e momentos de descontração. Agradeço especialmente à Thaynara, que com ternura, me ajudou a resgatar certos valores da vida.

A todos os colegas, Eduardo, Gardel, Hudson, Linniker, Laura, Simone, Andréia, Gilberto, Veríssimo, Marcelo, Henrique, Thiago, Rafaela, Mônica, Jairo, Ricardo, Rodrigo, Maksuel, Éder, João, Dani, Kaliana, Adriana, Kelém, e em especial à Mariana, uma das responsáveis pela minha vinda para Brasília.

Ao CNPq pelo suporte financeiro.

E acima de tudo, agradeço à minha namorada Wanda, que mesmo distante, sempre confiou mais em mim do que eu mesmo, que fez de tudo para o meu sucesso, que por várias vezes deixou de lado seus compromissos para estar do meu lado. Minha paixão.

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência de soluções fracas para a seguinte classe de problemas elípticos

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x,u), & x \in \ \Omega, \\ u &\gneq 0, & \Omega, \\ u &= 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Os principais resultados utilizados são o Teorema do Passo da Montanha e o método de sub-super solução.

Abstract

In this work we study the existence of weak solutions for the following class of elliptic problems

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & f(x,u), & x \in \ \Omega, \\ u & \gneq & 0, & \Omega, \\ u & = & 0, & \partial\Omega. \end{array}\right.$$

The main tools used are The Mountain Pass Theorem and upper-lower solutions method.

Índice

Introdução

Nessa dissertação faremos um estudo baseado no artigo de Figueiredo, Gossez e Ubila [4], sobre a existência de soluções fracas para o problema

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= f(x,u), & x \in \Omega, \\ u &\gneqq 0, & \Omega, \\ u &= 0, & \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave e limitado, $N \geq 3$ e $f : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory, ou seja,

(i) $s \mapsto f(x,s)$ é contínua para quase todo $x \in \Omega$;

(ii) $x \mapsto f(x,s)$ é mensurável para todo $s \in \mathbb{R}$.

Vamos tratar de maneira indireta, via corolários, o problema

$$(P_\lambda) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= \lambda a(x)u^q + b(x)u^p, & x \in \Omega, \\ u &\gneqq 0, & \Omega, \\ u &= 0, & \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\lambda > 0$ é um parâmetro, a e b são funções e $0 \leq q < 1 < p \leq 2^* - 1$. Esse tipo de problema tem atraído muito atenção, especialmente após o trabalho de Ambrosetti, Brézis e Cerami [1]. Eles provaram que se supormos $q > 0$ e $a \equiv b \equiv 1$ em Ω, então existe $0 < \Lambda < \infty$ tal que (P_λ) tem pelo menos duas soluções se $0 < \lambda < \Lambda$, pelo menos uma solução se $\lambda = \Lambda$ e nenhuma solução se $\lambda > \Lambda$.

A existência de soluções fracas para o problema (P) será tratada via métodos variacionais. Lembramos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca se

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f(x,u)v dx, \quad \text{para todo} \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Encontrar uma solução fraca do problema (P) consiste em determinar um ponto crítico do funcional $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,u)dx,$$

onde

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt.$$

Conforme veremos, $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, e a derivada de I é dada por

$$I'(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Omega f(x,u)v dx \quad \text{para todo} \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Dessa forma, $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução de (P) se

$$I'(u)v = 0 \quad \text{para todo} \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Nosso trabalho será dividido em dois capítulos e apêndices. No **Capítulo 1**, vamos enunciar e provar dois teoremas importantes. O primeiro deles é o Teorema do Passo da Montanha que, sob certas hipóteses, garante a existência de pontos críticos para funcionais definidos num espaço de Banach. O segundo deles, o Método de sub-super solução, assegura a existência de uma solução para (P), desde que para isso, possamos determinar uma sub e uma super solução.

No **Capítulo 2** vamos demonstrar três teoremas. O Teorema A garante a existência de duas soluções. Antes de enunciá-lo, dado $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$, denotamos por $\lambda_1 = \lambda_1(\widetilde{\Omega})$ o primeiro autovalor associado ao problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u, \quad x \in \widetilde{\Omega}, \\ u &= 0, \quad x \in \partial\widetilde{\Omega}. \end{cases}$$

Vamos supor sobre f:

(H_0) $f(x,0) \geq 0$ q.t.p. em Ω;

(H_1) existem $1 \leq \sigma < 2^*$, $d_1 \in L^{\sigma'}(\Omega)$, $d_2 > 0$ tal que

$$|f(x,s)| \leq d_1(x) + d_2|s|^{\sigma-1}$$

q.t.p. em Ω e para todo $s \geq 0$;

(H_2) existem $\Theta > 2$, $1 \leq r < 2$, $s_0 \geq 0$, $d \in L^{\left(\frac{2^*}{r}\right)'}(\Omega)$, com $d \geq 0$ q.t.p. em Ω, tais que

$$\Theta F(x,s) \leq sf(x,s) + d(x)s^r$$

q.t.p. em Ω e para todo $s \geq s_0$;

(H_3) existem $0 \leq q < 1 < p < 2^* - 1$, $a_0 \in L^{\sigma_q}(\Omega)$, onde $\sigma_q = \left(\frac{2^*}{q+1}\right)'$ e $a_0 \geq 0$ q.t.p. em Ω, $b_0 \in L^{\sigma_p}(\Omega)$, onde $\sigma_p = \left(\frac{2^*}{p+1}\right)'$ e $b_0 \geq 0$ q.t.p. em Ω, tais que

$$f(x,s) \leq a_0(x)s^q + b_0(x)s^p$$

q.t.p. em Ω e para todo $s \geq 0$;

(H_4) existem um subdomínio não vazio $\Omega_1 \subset \Omega$, $\Theta_1 > \lambda_1(\Omega_1)$, $s_1 > 0$, tais que

$$F(x,s) \geq \Theta_1 \frac{s^2}{2}$$

q.t.p. em Ω_1 e para todo $0 \leq s \leq s_1$;

(H_5) existem um subdomínio não vazio $\Omega_2 \subset \Omega$, $\Theta_2 > 0$, $s_2 \geq 0$, tais que

$$F(x,s) \geq \Theta_2 s^2$$

q.t.p. em Ω_2 e para todo $s \geq s_2$, onde além disso a função $d(x)$ de (H_2) é limitada em Ω_2.

Teorema A *Suponha* $(H_0) - (H_5)$. *Então existe uma constante* $\eta = \eta(p,q,N) > 0$ *tal que se*

$$\|a_0\|_{\sigma_q}^{p-1} \|b_0\|_{\sigma_p}^{1-q} < \eta,$$

então o problema (P) *tem pelo menos duas soluções. Uma delas, que chamaremos de* v, *satisfaz* $I(v) > 0$, *enquanto a outra, que chamaremos de* w, *satisfaz* $I(w) < 0$. *Além disso, se* f *varia de tal modo que os coeficientes em* (H_3) *são tais que* $a_0 \to 0$ *em* $L^{\sigma_q}(\Omega)$ *e* b_0 *fica limitado em* $L^{\sigma_p}(\Omega)$, *então a solução correspondente* $w = w_f$ *satisfaz* $w_f \to 0$ *em* $H_0^1(\Omega)$.

Para provar a existência de uma primeira solução do Teorema A, vamos utilizar o Teorema do Passo da Montanha, e assegurar ainda que essa solução tem energia positiva. A segunda solução, que terá energia negativa, será obtida via método de minimização. Provamos que o funcional I é fracamente semicontínuo inferiormente e que este assume ínfimo numa bola aberta de centro zero e raio R. O comportamento assintótico é obtido fazendo-se $R \to 0$.

Em 1998, Gonçalves e Miyagaki [9] já haviam usado uma idéia análoga pra provar a existência de duas soluções, v e w, satisfazendo $I(w) < 0 < I(w)$, para um problema do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)u \;=\; h(x)u^q + u^p, \; x \in \mathbb{R}^N, \\ u \gneq 0, \; x \in \mathbb{R}^N, \; \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} a(x)u^2 < \infty, \end{cases}$$

onde $a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é contínua, h é integrável e $0 < q < 1 < (N+2)/(N-2)$.

No presente trabalho, assumindo (H_0), podemos estender $f(x,s)$ para $s < 0$ colocando $f(x,s) = f(x,0)$ q.t.p. em Ω. A hipótese (H_1) é uma típica condição de crescimento subcrítico. (H_2) é uma forma de enfraquecer a clássica condição de Ambrosetti-Rabinowitz [2]. Essa condição garante a limitação das sequências de Palais-Samale

(PS) e a existência de geometria do Passo da Montanha. Observemos que supondo $d(x) \equiv 0$ e $F(x,s) > 0$ q.t.p. em Ω e para todo $s \geq 0$, vamos ter exatamente

$$0 < \Theta F(x,s) \leq sf(x,s).$$

Assumir (H_3) é uma forma de limitar superiormente a função f. Observe que combinado (H_0) e (H_3) temos que $f(x,0) \equiv 0$.

As hipóteses (H_4) e (H_5) tratam a não-linearidade do problema. Dizemos que (P) é sublinear no zero se existe $\alpha > \lambda_1(\Omega)$ e $s_0 > 0$ tais que

$$f(x,s) \geq \alpha s,$$

q.t.p. em Ω e para todo $0 \leq s \leq s_0$. Analogamente, (P) é dito superlinear no infinito se existe $\beta > \lambda_1(\Omega)$ e $s_1 \geq 0$ tais que

$$f(x,s) \geq \beta s,$$

q.t.p. em Ω e para todo $s \geq s_1$.

Um aspecto interessante do problema (P) é que, em (H_4), estamos supondo um tipo de sublinearidade no zero apenas num subdomínio Ω_1. Analogamente, a hipótese (H_5) requer superlinearidade no infinito num subdomínio Ω_2. Esses subdomínios podem ser arbitrariamente pequenos e possivelmente disjuntos.

Vários autores tem se dedicado nos últimos anos ao estudo de não-linearidades com sinal indefinido. Grande parte destes não são diretamente comparáveis às considerações feitas aqui. Neste trabalho, os resultados estão mais relacionado aos obtidos em [10], mas no entanto, vamos considerar não-linearidades mais gerais. O resultado obtido no Teorema 2 de [10], que se aplica ao problema (P_λ), requer $b(x) > 0$ em Ω, o que não é o caso do Corolário 2.1.

Em 2005, Figueiredo, Gossez e Ubila [5] estudaram a existência de soluções positivas para a família de problemas $-\Delta u = f_\lambda(x,u)$, para um parâmetro $\lambda > 0$, onde f_λ tem depêndencia monótona sobre λ, ou seja, $f_\lambda(x,s) \leq f_{\lambda'}(x,s)$ sempre que $\lambda < \lambda'$. Eles introduziram hipóteses análogas de superlinearidade e sublinearidade local. Contudo, diferente do presente trabalho, exigiram $a(x) \geq 0$ em Ω para o problema (P_λ), o que permite o uso do princípio do máximo forte. No entanto, não restringiram sinal para o coeficiente $b(x)$. Em 2009 os resultados de [5] foram extendidos para o operador Δ_p em [6].

Para provar o Teorema B, vamos utilizar o Método de sub-super solução. Nesse caso, vamos supor sobre f :

$(H_3)'$ existem $0 \leq q < 1 < p$ e constantes não negativas a_0 e b_0 tais que

$$f(x,s) \leq a_0 s^q + b_0 s^p$$

q.t.p. em Ω e para todo $s \geq 0$;

$(H_4)'$ existem um subdomínio $\Omega_1 \subset \Omega$ não-vazio de classe C^1, $s_1 > 0$ tais que

$$f(x,s) \geq \lambda_1(\Omega_1)s$$

q.t.p. em Ω e para todo $0 \leq s \leq s_1$.

Teorema B *Suponha (H_0), $(H_3)'$, $(H_4)'$ e que Ω é de classe C^1. Então existe um $\delta = \delta(p,q,\Omega,b_0)$ tal que se*

$$a_0 < \delta$$

então o problema (P) tem pelo menos uma solução fraca.

As hipóteses $(H_3)'$ e $(H_4)'$ são análogas a (H_3) e (H_4), respectivamente.

Apresentamos ainda um resultado de não existência de soluções sob as seguintes hipóteses:

(H_6) existem $d_1 \in L^{(2^*)'}(\Omega)$, $d_2 > 0$ tais que

$$|f(x,s)| \leq d_1(x) + d_2 s^{2^*-1}$$

q.t.p. em Ω e para todo $s \geq 0$;

(H_7) Ω pode ser particionado em $\Omega = A_+ \cup A_- \cup A_0$, onde

$$\begin{aligned} A_+ &:= \{x \in \Omega : f(x,\cdot) \geq 0 \quad \text{com} \quad f(x,\cdot) \not\equiv 0\}, \\ A_- &:= \{x \in \Omega : f(x,\cdot) \leq 0 \quad \text{com} \quad f(x,\cdot) \not\equiv 0\}, \\ A_0 &:= \{x \in \Omega : f(x,\cdot) \equiv 0\}, \end{aligned}$$

e além disso, existe um subdomínio não-vazio $\widetilde{\Omega}$ tal que $A_+ \subset \widetilde{\Omega} \subset A_+ \cup A_0$, e adicionalmente $\widetilde{\Omega}$ é de classe C^1 caso $\Omega \neq \widetilde{\Omega}$;

(H_8) existem $0 \leq q < 1 < p$ e funções não negativas $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$ em $\widetilde{\Omega}$ tais que

$$f(x,s) \geq \widetilde{a}(x)s^q + \widetilde{b}(x)s^p \quad \text{q.t.p. em } \widetilde{\Omega} \text{ e para todo } s \geq 0,$$

$$\widetilde{m} := \widetilde{a}^{\frac{p-1}{p-q}}\widetilde{b}^{\frac{1-q}{p-q}} \not\equiv 0 \quad \text{em} \quad \widetilde{\Omega},$$

$$\widetilde{m} \in L^r(\widetilde{\Omega}) \quad \text{para algum} \quad r > \frac{N}{2}.$$

Teorema C *Suponha* $(H_6) - (H_8)$ *e denote por* $\lambda_1(\widetilde{m}, \widetilde{\Omega})$ *o primeiro autovalor do problema com peso*

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda\, \widetilde{m}(x)\, u \qquad \text{em } \widetilde{\Omega}, \\ u &= 0 \qquad\qquad\quad \text{em } \partial\widetilde{\Omega}. \end{cases}$$

Então existe $c = c(p, q) > 0$ *tal que o problema* (P) *não tem solução se*

$$\lambda_1(\widetilde{m}, \widetilde{\Omega}) < c(p, q).$$

A hipótese (H_6) é análoga a (H_1), enquanto que (H_7) é uma restrição a possível troca de sinal de f. A hipótese (H_8) nos dá uma estimativa para f num subdomínio de Ω assim como em (H_3), no entanto em outra direção.

Um exemplo típico ao qual os nossos resultados se aplicam, é quando a função f é dada por

$$f(x, s) = \lambda a(x) s^q + b(x) s^p.$$

No Corolário 2.1, sob certas hipóteses, aplicamos o Teorema A para garantir a existência de pelo menos duas soluções para o problema (P_λ). O Corolário 2.2 faz uso do Teorema C, que sob novas hipóteses, garante não existência de solução para o problema (P_λ).

Nos **Apêndices**, encontram-se alguns resultados importantes que serão usados no decorrer do texto.

Capítulo 1

Resultados Abstratos

Neste capítulo vamos enunciar e provar o teorema do Passo da Montanha devido a Ambrosetti-Rabinowitz [2] e um teorema de sub-super solução [11], que são teoremas importantes para garantir a existência de solução para certas equações elípticas.

1.1 Teorema do Passo da Montanha

Esta seção será voltada à demonstração do Teorema do Passo da Montanha. Sob certas condições, esse teorema garante a existência de pontos críticos para um determinado funcional.

Seja X um espaço de Banach e X' o seu dual com normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_{X'}$, respectivamente. Dizemos que $d \in \mathbb{R}$ é um valor crítico de $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ se $I(u) = d$ e $I'(u) = 0$ para algum $u \in X$. O conjunto dos pontos que satisfazem essa condição será denotado por

$$K_d = \{u \in X : I'(u) = 0 \quad \text{e} \quad I(u) = d\},$$

e o conjunto de todos os pontos em níveis menores ou iguais a d será designado por

$$I^d = \{u \in X : I(u) \leq d\}.$$

Um funcional $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfaz a condição de Palais-Smale no nível $d \in \mathbb{R}$, denotada por $(PS)_d$, se toda sequência $(u_n) \subset X$ tal que

$$I(u_n) \to d \quad \text{e} \quad \|I'(u_n)\|_{X'} \to 0,$$

possui subsequência convergente. Essa condição de compacidade será úitil na demonstração de resultados de existência de pontos críticos para funcionais definidos em espaços de Banach.

Os dois primeiros resultados são fundamentais para a demonstração do Teorema do Passo da Montanha.

Lema 1.1 (Lema de Deformação Quantitativo) *Seja X um espaço de Banach, $I \in C^1(X,\mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$ tais que*

$$||I'(u)||_{X'} \geq 4\epsilon, \ \forall \ u \ \in \ I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon]).$$

Então existe uma função $\eta : [0,1] \times X \to X$ contínua que satisfaz

(i) $\eta(0,u) = u$ *para todo* $u \in X$;

(ii) $\eta(t,u) = u$, *para todo* $(t,u) \notin [0,1] \times I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$;

(iii) $\eta(1, I^{c+\epsilon}) \subset I^{c-\epsilon}$.

Demonstração: Vamos definir

$$A = I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon]),$$

$$B = I^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon]),$$

e $\psi : X \to \mathbb{R}$ por

$$\psi(u) = \frac{d(u, X\backslash A)}{d(u, X\backslash A) + d(u,B)},$$

onde d é a função distância. Para verificar que ψ está bem definida, vamos mostrar que $d(u, X\backslash A) + d(u,B) > 0$, para todo $u \in X$. De fato, pois caso contrário, existiria $u_0 \in X$ tal que $d(u_0, X\backslash A) + d(u_0, B) = 0$, e consequentemente $d(u_0, X\backslash A) = d(u_0, B) = 0$. De $d(u_0, B) = 0$ e sendo B um conjunto fechado, segue que $u_0 \in B$, ou seja,

$$I(u_0) \in [c-\epsilon, c+\epsilon]. \tag{1.1}$$

Por outro lado, sendo $d(u_0, X\backslash A) = 0$, $u_0 \in \overline{X\backslash A}$. Portanto, existe uma sequência $(u_n) \subset X\backslash A$ tal que $u_n \to u_0$. Passando a uma subsequência se necessário, temos que $I(u_n) \leq c - 2\epsilon$ ou $I(u_n) \geq c + 2\epsilon$. Aplicando o limite e usando o fato de I ser contínuo, obtemos $I(u_0) \notin (c-2\epsilon, c+2\epsilon)$, o que contraria (1.1).

Observe que, como $0 \leq d(u, X\backslash A) \leq d(u, X\backslash A) + d(u,B)$, segue que

$$0 \leq \frac{d(u, X\backslash A)}{d(u, X\backslash A) + d(x,B)} \leq 1.$$

Logo, $0 \leq \psi(u) \leq 1$ para todo $u \in X$. Além disso,

$$\psi(u) = \begin{cases} 1, & \text{se } u \in B, \\ 0, & \text{se } u \in X\backslash A. \end{cases}$$

Afirmação 1: ψ é localmente lipschitziana (cf. Definição $D.3$).

De fato, fixado $u \in X$, e para todo $v \in X$, temos que

$$\begin{aligned}
|\psi(u) - \psi(v)| &= \left| \frac{d(u, X\backslash A)}{d(u, X\backslash A) + d(u, B)} - \frac{d(v, X\backslash A)}{d(v, X\backslash A) + d(v, B)} \right| \\
&= \left| \frac{d(u, X\backslash A)d(v, B) - d(v, X\backslash A)d(u, B)}{[d(u, X\backslash A) + d(u, B)][d(v, X\backslash A) + d(v, B)]} \right| \\
&= \left| \frac{d(v, B)[d(u, X\backslash A) - d(v, X\backslash A)] + d(v, X\backslash A)[d(v, B) - d(u, B)]}{[d(u, X\backslash A) + d(u, B)][d(v, X\backslash A) + d(v, B)]} \right| \\
&\leq \frac{d(v, B)|d(u, X\backslash A) - d(v, X\backslash A)| + d(v, X\backslash A)|d(v, B) - d(u, B)|}{[d(u, X\backslash A) + d(u, B)][d(v, X\backslash A) + d(v, B)]} \\
&\leq \frac{\|u - v\| \, [d(v, B) + d(v, X\backslash A)]}{[d(u, X\backslash A) + d(u, B)][d(v, X\backslash A) + d(v, B)]} \\
&= \frac{\|u - v\|}{d(u, X\backslash A) + d(u, B)},
\end{aligned}$$

sendo que nesta última desigualdade usamos o fato de que a função distância é uma contração fraca (cf. Proposição D.1).

Como $d(u, X\backslash A) + d(u, B) > 0$ para todo $u \in X$, existe uma constante $K_u > 0$ e uma vizinhança V_u de u tal que $d(w, X\backslash A) + d(w, B) \geq \frac{1}{K_u} > 0$ para todo $w \in V_u$. Portanto, se $u_1, u_2 \in V_u$, então

$$|\psi(u_1) - \psi(u_2)| \leq K \, \|u_1 - u_2\| \, ,$$

e assim ψ é localmente lipschitiziana.

Seja $\widetilde{X} = \{u \in X \; : \; I'(u) \neq 0 \, \}$. Como $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, pelo Lema $A.1$ existe um campo pseudogradiente para I, isto é, uma aplicação localmente lipschitiziana $g : \widetilde{X} \to X$ tal que, para todo $u \in \widetilde{X}$, valem

(PG1) $\|g(u)\| \leq 2 \, \|I'(u)\|_{X'}$;

(PG2) $I'(u)g(u) \geq \|I'(u)\|^2_{X'}$.

Considere a aplicação $V : X \to X$ dada por

$$V(u) = \begin{cases} -\psi(u)\dfrac{g(u)}{\|g(u)\|}, & \text{se } u \in A, \\ 0, & \text{se } u \in X\backslash A. \end{cases}$$

Afirmação 2: V é limitada e localmente lipschitziana.

Se $u \in X\backslash A$, então $V(u) = 0$. Por outro lado, se $u \in A$ temos

$$0 \leq \|V(u)\| = |\psi(u)| \left\| \frac{g(u)}{\|g(u)\|} \right\| = |\psi(u)| \leq 1.$$

Logo V é limitada. Além disso, por (PG2), para $u \in A$ temos

$$\|I'(u)\|_{X'}^2 \leq I'(u)g(u) \leq \|I'(u)\|_{X'} \|g(u)\| .$$

Se $u \in A$ então $I'(u) \neq 0$, e portanto,

$$\|I'(u)\|_{X'} \leq \|g(u)\| .$$

Logo,

$$\frac{1}{\|g(u)\|} \leq \frac{1}{\|I'(u)\|_{X'}} \leq \frac{1}{4\epsilon}. \tag{1.2}$$

Para cada $u \in X$, existe uma vizinhança $V_u \subset X$ tal que ψ e g são localmente lipschitzianas em V_u, com constantes de Lipschitz K_ψ, $K_g \in \mathbb{R}$, respectivamente. Assim, dados $u_1, u_2 \in V_u$, temos:

Caso 1: se $u_1, u_2 \in X \backslash A$, segue que

$$||V(u_1) - V(u_2)|| = 0 \leq ||u_1 - u_2||.$$

Caso 2: se $u_1 \in X \backslash A$ e $u_2 \in A$, então

$$\begin{aligned}
\|V(u_1) - V(u_2)\| &= \left\| -\psi(u_2) \frac{g(u_2)}{||g(u_2)||} \right\| \\
&= |-\psi(u_2)| = |\psi(u_1) - \psi(u_2)| \\
&\leq K_\psi \|u_1 - u_2\| .
\end{aligned}$$

onde usamos o fato de ψ ser localmente lipschitziana.

Caso 3: se $u_1, u_2 \in A$, note que

$$\begin{aligned}
\|V(u_1) - V(u_2)\| &= \left\| -\psi(u_1) \tfrac{g(u_1)}{\|g(u_1)\|} + \psi(u_2) \tfrac{g(u_2)}{\|g(u_2)\|} \right\| \\
&= \left\| -\psi(u_1) \tfrac{g(u_1)}{\|g(u_1)\|} \pm \psi(u_1) \tfrac{g(u_2)}{\|g(u_2)\|} + \psi(u_2) \tfrac{g(u_2)}{\|g(u_2)\|} \right\| \\
&\leq |\psi(u_1)| \left\| \tfrac{g(u_1)}{\|g(u_1)\|} - \tfrac{g(u_2)}{\|g(u_2)\|} \right\| + \left\| \tfrac{g(u_2)}{\|g(u_2)\|} \right\| |\psi(u_1) - \psi(u_2)| \\
&\leq \left\| \tfrac{g(u_1)}{\|g(u_1)\|} - \tfrac{g(u_2)}{\|g(u_2)\|} \right\| + |\psi(u_1) - \psi(u_2)| .
\end{aligned}$$

Como ψ é localmente lipschitiziana, segue que

$$|\psi(u_1) - \psi(u_2)| \leq K_\psi \|u_1 - u_2\| .$$

Por outro lado, usando o fato de g ser localmente lipschitiziana e (1.2), temos que

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{g(u_1)}{\|g(u_1)\|} - \frac{g(u_2)}{\|g(u_2)\|}\right\| &= \left\|\frac{g(u_1)}{\|g(u_1)\|} - \frac{g(u_1)}{\|g(u_2)\|} + \frac{g(u_1)}{\|g(u_2)\|} - \frac{g(u_2)}{\|g(u_2)\|}\right\| \\
&\leq \|g(u_1)\| \left|\frac{1}{\|g(u_1)\|} - \frac{1}{\|g(u_2)\|}\right| + \frac{1}{\|g(u_2)\|}\|g(u_1) - g(u_2)\| \\
&\leq \|g(u_1)\| \left|\frac{\|g(u_2)\| - \|g(u_1)\|}{\|g(u_1)\|\|g(u_2)\|}\right| + \frac{1}{2\epsilon}\|g(u_1) - g(u_2)\| \\
&\leq \frac{1}{\|g(u_2)\|}\Big|\,\|g(u_2)\| - \|g(u_1)\|\,\Big| + \frac{1}{4\epsilon}\|g(u_1) - g(u_2)\| \\
&\leq \frac{1}{4\epsilon}\|g(u_2) - g(u_1)\| + \frac{1}{4\epsilon}\|g(u_1) - g(u_2)\| \\
&= \frac{1}{2\epsilon}\|g(u_1) - g(u_2)\| \\
&\leq C_2\|u_1 - u_2\|.
\end{aligned}$$

Logo concluímos que V é localmente lipscitziana, ou seja, para quaisquer $u, v \in V_u$,

$$\|V(u) - V(u)\| \leq C\|u - u\|,$$

onde $C = \max\{K_\psi, C_2\}$.

Para cada $u \in X$ fixado, considere o problema de Cauchy

$$(PC)_u \qquad \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{d}{dt}\sigma(t,u) &=& V(\sigma(t,u)) \\ \sigma(0,u) &=& u. \end{array}\right.$$

Como V é limitada e localmente lipschitziana, então $(PC)_u$ tem uma única solução contínua definida para t em um intervalo maximal $(t^-(u), t^+(u))$.

Afirmação 3: $t^+(u) = +\infty$ e $t^-(u) = -\infty$.

De fato, suponha por contradição que $t^+(u) < +\infty$. Seja $(t_n) \subset (-\infty, t^+(u))$ uma sequência tal que $t_n \to t^+(u)$. Como V é limitada, temos que

$$\begin{aligned}
\|\sigma(t_m,u) - \sigma(t_n,u)\| &= \left\|\int_{t_n}^{t_m} \frac{d}{ds}(\sigma(s,u))ds\right\| \\
&= \left\|\int_{t_n}^{t_m} V(\sigma(s,u))ds\right\| \\
&\leq \int_{t_n}^{t_m} \|V(\sigma(s,u))\|\,ds \\
&\leq K\|t_m - t_n\| \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad m,n \to \infty,
\end{aligned}$$

visto que $(t_n) \subset \mathbb{R}$ é uma sequência de Cauchy. Então $(\sigma(t_n, u))$ também é uma sequência de Cauchy em X. Portanto, $(\sigma(t_n, u))$ converge para algum $\widetilde{u} \in X$ quando $t_n \to t^+(u)$. Considerando agora o problema de Cauchy

$$(PC)_{\widetilde{u}} \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\sigma(t,u) &= V(\sigma(t,u)), \\ \sigma(t^+(u),u) &= \widetilde{u}, \end{cases}$$

obteríamos uma extensão de $\sigma(t, u)$ no intervalo $(t^+(u) - \delta, t^-(u) + \delta)$, para algum $\delta > 0$. Mas isto é um absurdo pois, como já vimos, o intervalo $(t^+(u), t^-(u))$ é maximal. Analogamente provamos que $t^-(u) = -\infty$.

A dependência contínua de soluções do problema $(PC)_u$ com relação aos dados iniciais implica que σ é contínua em $\mathbb{R} \times X$. Sendo assim, podemos definir $\eta \in C([0, 1] \times X, X)$ por

$$\eta(t, u) = \sigma(t, u).$$

Como $\eta(0, u) = \sigma(0, u) = u$, segue que η satisfaz a condição (i).

Além disso, se $u \in X \backslash A$, $V(u) = 0$. Daí $\sigma(t, u) = u$ é solução única de $(PC)_u$, e portanto $\eta(t, u) = \sigma(t, u) = u$ para todo $t \in [0, 1]$, e (ii) se verifica.

Para mostrar (iii), devemos mostrar que

$$\sigma(1, I^{c+\epsilon}) \ \subset \ I^{c-\epsilon}.$$

Se $\sigma(t, u) \in A$, então usando (PG1) temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}I(\sigma(t,u)) &= \left\langle\ I'(\sigma(t,u)), \frac{d}{dt}(\sigma(t,u))\right\rangle \\ &= \langle\ I'(\sigma(t,u)), V(\sigma(t,u))\rangle \\ &= \frac{-\psi(\sigma(t,u))}{\|g(\sigma(t,u))\|}\langle\ I'(\sigma(t,u), g(\sigma(t,u))\rangle\ \leq 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, quando $\sigma(t, u) \in X \backslash A$, temos que $V(\sigma(t, u)) = 0$. Logo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}I(\sigma(t,u)) &= \left\langle\ I'(\sigma(t,u), \frac{d}{dt}(\sigma(t,u))\right\rangle \\ &= \langle\ I'(\sigma(t,u), V(\sigma(t,u))\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ou seja, $I(\sigma(\cdot, u))$ é não-crescente.

Consideremos agora $u \in I^{c+\epsilon}$. Se existe um $t \in [0,1]$ tal que $I(\sigma(t,u)) < c-\epsilon$, então $I(\sigma(1,u)) < c - \epsilon$, pois $I(\sigma(\cdot,u))$ é não-crescente. Além disso $\eta(1,u) = \sigma(1,u) \in I^{c-\epsilon}$. Podemos então supor que, para todo $t \in [0,1]$,

$$c - \epsilon \leq I(\sigma(t,u)) \leq I(\sigma(0,u)) = I(u) \leq c + \epsilon,$$

e assim $\sigma(t,u) \in B$ sempre que $t \in [0,1]$. Logo,

$$\begin{aligned}
I(\sigma(1,u)) &= I(u) + \int_0^1 \frac{d}{dt} I(\sigma(t,u))dt \\
&= I(u) + \int_0^1 \left\langle \; I'(\sigma(t,u)), \frac{d}{dt}(\sigma(t,u)) \right\rangle \; dt \\
&= I(u) - \int_0^1 \frac{\langle \; I'(\sigma(t,u), \frac{d}{dt}(\sigma(t,u)) \rangle}{\|g(\sigma(t,u))\|} dt \\
&\leq I(u) - \int_0^1 \frac{\|I'(\sigma(t,u))\|^2}{\|g(\sigma(t,u))\|} dt \\
&\leq I(u) - \frac{1}{2}\int_0^1 \|I'(\sigma(t,u))\| \, dt \\
&\leq c + \epsilon - \frac{1}{2}\int_0^1 4\epsilon \, dt \\
&= c - \epsilon,
\end{aligned}$$

onde usamos (PG1) e (PG2) e a hipótese de que $\psi(u) = 1$ para todo $u \in B$. Logo $\sigma(1,u) \in I^{c-\epsilon}$, o que conclui a prova de (iii) e do lema.

□

Teorema 1.1 *Seja X um espaço de Banach, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$. Suponha que $I(0) = 0$ e I satisfaz*

(I_1) *existem constantes $\rho > 0$, $\alpha > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha$;*

(I_2) *existe $e \in X$ tal que $\|e\| > \rho$ e $I(e) \leq I(0)$.*

Considere

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t))$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0 \quad e \quad \gamma(1) = e\}.$$

Então, para cada $\epsilon > 0$, existe $u \in X$ tal que

(a) $c - 2\epsilon \leq I(u) \leq c + 2\epsilon$;

(b) $\|I'(u)\|_{X'} < 4\epsilon$.

Demonstração: Observe primeiramente que, para cada $\gamma \in \Gamma$, $\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t))$ está bem definido, pois a função composta $I \circ \gamma$ é contínua, portanto atinge máximo no intervalo compacto $[0,1]$. Além disso

$$\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \geq \alpha.$$

De fato, se $e \in X$ é dado por (I_2), então $e \notin B_\rho(0)$. Como $\gamma \in \Gamma$, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $t_0 \in [0,1]$ tal que $\gamma(t_0) \in \partial B_\rho(0)$, isto é, $\gamma([0,1]) \cap \partial B_\rho(0) \neq \emptyset$. Por (I_1), temos que

$$\inf_{w\in\partial B_\rho(0)} I(w) \geq \alpha.$$

No entanto

$$\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \geq I(\gamma(t_0)) \geq \inf_{w\in\partial B_\rho(0)} I(w) \geq \alpha.$$

Logo,

$$\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \geq \alpha.$$

Tomando o ínfimo para $\gamma \in \Gamma$, temos que

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \geq \alpha > 0,$$

isto é, $c \geq \alpha > 0$.

Suponha, por absurdo, que a conclusão do teorema é falsa. Então existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $u \in I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$ tem-se $\|I'(u)\|_{X'} \geq 4\epsilon$. Observe que podemos supor, sem perda de generalidade, que $c - 2\epsilon > 0$. De fato, basta notar que se $\epsilon_0 \in (0,\epsilon)$, então como $I^{-1}([c-2\epsilon_0, c+2\epsilon_0]) \subset I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$, tem-se $\|I'(u)\|_{X'} \geq 2\epsilon > 2\epsilon_0$. Portanto, diminuindo ϵ se necessário, podemos assumir $I(e) \leq I(0) = 0 < c - 2\epsilon$.

Pelo Lema de Deformação, existe uma função $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que

(i) $\eta(t,u) = u$ para todo $u \notin I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$;

(ii) $\eta(1, I^{c+\epsilon}) \subset I^{c-\epsilon}$.

Dado $\gamma \in \Gamma$, considere $h : [0,1] \to X$ dada por $h(t) = \eta(1,\gamma(t))$. Como $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ e $\gamma \in C([0,1], X)$, então $h \in C([0,1], X)$. Além disso, como $0, e \notin I^{-1}[c-2\epsilon, c+2\epsilon]$, segue do item (i) que

$$h(0) = \eta(1,\gamma(0)) = \eta(1,0) = 0,$$

e

$$h(1) = \eta(1,\gamma(1)) = \eta(1,e) = e.$$

Logo $h \in \Gamma$, e portanto,

$$c \leq \max_{t\in[0,1]} I(h(t)).$$

Usando a definição de c, existe $\widetilde{\gamma} \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t\in[0,1]} I(\widetilde{\gamma}(t)) \leq c + \epsilon.$$

Então $\widetilde{\gamma}(t) \in I^{c+\epsilon}$ e segue de (ii) do Lema de Deformação que $\eta(1, \widetilde{\gamma}(t)) \in I^{c-\epsilon}$. Logo, $h(t) = \eta(1, \widetilde{\gamma}(t)) \in I^{c-\epsilon}$, daí

$$c < \max_{t\in[0,1]} I(h(t)) \leq c - \epsilon,$$

o que é uma contradição.

$\square$

Teorema 1.2 (Teorema do Passo da Montanha) *Seja X um espaço de Banach, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$. Suponha que $I(0) = 0$ e I satisfaz*

(I_1) *existem constantes ρ, α positivas tais que $I|_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha$;*

(I_2) *existe $e \in X$ tal que $\|e\| > \rho$ e $I(e) \leq 0$.*

Considere

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0 \quad e \quad \gamma(1) = e\}.$$

Se I satisfaz $(PS)_c$, então c é um valor crítico de I.

Demonstração: Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\epsilon_n = \frac{1}{n} > 0$. Pelo Teorema 1.1 existe $u_n \in X$ tal que

$$c - \epsilon_n \leq I(u_n) \leq c + \epsilon_n$$

e

$$\|I(u_n)\|_{X'} < 4\epsilon_n.$$

Como $\epsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$, $(u_n) \subset X$ é uma sequência de Palais-Smale no nível c. Logo, como I satisfaz a condição $(PS)_c$, existe uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ tal que $u_{n_j} \to u \in X$. Usando o fato de que $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, concluímos que $I(u) = c$ e $I'(u) = 0$, ou seja, c é um valor crítico de I.

$\square$

1.2 Método de sub-super solução

O lema a seguir assegura, sob certas hipóteses, a existência de pontos críticos para funcionais definidos em espaços de Banach reflexivos. Ele será usado na demonstração do Teorema de sub-super solução.

Lema 1.2 *Sejam X um espaço de Banach reflexivo com norma $\|\cdot\|_X$, $M \subset X$ um subconjunto fechado na topologia fraca e $I : X \to \mathbb{R}$ uma funcional limitado inferiormente satisfazendo:*

(I_3) *$I(u) \to \infty$ quando $\|u\|_X \to \infty$, $u \in M$, ou seja, I é coerciva;*

(I_4) *toda sequência $(u_n) \subset M$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em X satisfaz*

$$I(u) \leq \liminf_{n\to\infty} I(u_n).$$

Então I atinge ínfimo em M.

Demonstração: Seja $\alpha = \inf\{I(u) : u \in M\}$ e (u_n) uma sequência minimizante em M, ou seja, tal que $I(u_n) \to \alpha$. Uma vez que I é coercivo, temos que (u_n) é limitado, pois caso contrário existiria uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ tal que $\|u_{n_j}\| \to \infty$ e portanto $I(u_{n_j}) \to \infty$. Como X é reflexivo, a menos de subsequência, existe $u \in X$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente. Mas como M é fracamente fechado, então $u \in M$. Usando a hipótese de que I é fracamente semicontínuo inferiormente, temos que

$$I(u) \leq \liminf_{n\to\infty} I(u_n) = \alpha,$$

e portanto I atínge ínfimo em M.

□

Consideremos o problema

$$(P1) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f(x,u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave e limitado, $N \geq 3$ e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory.

Uma solução fraca do problema $(P1)$ é uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisfaz

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f(x,u) v dx, \quad \forall \ v \in H_0^1(\Omega).$$

As soluções fracas de $(P1)$ são pontos críticos do funcional $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,u) dx,$$

onde
$$F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt.$$

Definição 1.1 *Dizemos que $\underline{u} \in H^1(\Omega)$ é uma sub-solução para o problema $(P1)$ se $\underline{u} \leq 0$ em $\partial\Omega$ e*
$$\int_\Omega \nabla \underline{u} \nabla v \, dx \leq \int_\Omega f(x, \underline{u}) v \, dx$$
para todo $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $v \geq 0$. Analogamente, $\overline{u} \in H^1(\Omega)$ é uma super-solução para o problema $(P1)$ se $\overline{u} \geq 0$ em $\partial\Omega$ e
$$\int_\Omega \nabla \overline{u} \nabla v \, dx \geq \int_\Omega f(x, \overline{u}) v \, dx$$
para todo $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $v \geq 0$.

Teorema 1.3 (Teorema de sub-super solução) *Suponha que $\underline{u} \in H^1(\Omega)$ é uma sub-solução e que $\overline{u} \in H^1(\Omega)$ é uma super-solução para o problema (P). Suponha ainda que existam constantes $\underline{c}$, $\overline{c} \in \mathbb{R}$ tais que $\underline{c} \leq \underline{u} \leq \overline{u} \leq \overline{c}$ q.t.p. em Ω. Então o problema $(P1)$ admite uma solução fraca $u \in H_0^1(\Omega)$ satisfazendo $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ q.t.p. em Ω.*

Demonstração: Vamos considerar o funcional
$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,u)\, dx,$$
onde $F(x,s) = \displaystyle\int_0^s f(x,t)dt$, restrito ao conjunto
$$M = \{u \in H_0^1(\Omega)\,;\, \underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x) \;\; \text{q.t.p. em } \Omega\}.$$

Como por definição $\overline{u}$, $\underline{u} \in L^\infty(\Omega)$, então $M \subset L^\infty(\Omega)$. Observemos que, dado $u \in M$, temos que $|u(x)| \leq C_1$ q.t.p. em Ω, onde $C_1 = \max\{|\overline{c}|, |\underline{c}|\}$. Portanto, como $f(x,\cdot\,)$ é contínua, vale
$$\begin{aligned}
|F(x,u(x))| &= \left|\int_0^{u(x)} f(x,t)dt\right| \\
&\leq \int_0^{u(x)} |f(x,t)|dt \\
&\leq \int_0^{C_1} |f(x,t)|dt \\
&= C_2,
\end{aligned}$$

q.t.p. em Ω.

Nosso intuito é garantir a existência de um mínimo local para o funcional I. Para isso, vamos verificar as hipóteses do Lema 1.2. Sabemos que $H_0^1(\Omega)$ é reflexivo. Além disso, seja $(v_n) \subset M$ tal que $v_n \to v$ em $H_0^1(\Omega)$. A menos de subsequência,

$$\begin{cases} (v_n) \text{ é limitada em } H_0^1(\Omega), \\ v_n \to v \text{ em } L^2(\Omega), \\ v_n(x) \to v(x) \text{ q.t.p. em } \Omega, \end{cases}$$

e portanto $\underline{u}(x) \leq v(x) \leq \overline{u}(x)$ q.t.p. em Ω. Logo $v \in M$ e com isso M é fechado.

Dados agora $u, v \in M$ e $t \in [0,1]$, temos que $(1-t)v + tu \in H_0^1(\Omega)$. Além disso, q.t.p. em Ω vale

$$t\underline{u} \leq tu \leq t\overline{u},$$

$$(1-t)\underline{u} \leq (1-t)v \leq (1-t)\overline{u}.$$

Somando as desigualdades segue que

$$\underline{u} \leq (1-t)v + tu \leq \overline{u}, \quad \text{q.t.p. em } \Omega,$$

donde concluímos que M é convexo. Sendo M fechado e convexo, concluímos que M é fracamente fechado.

Observemos que

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,u)\,dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega C_2\,dx \\ &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - C_2|\Omega|, \end{aligned}$$

portanto I é limitado inferiormente em M e $I(u) \to \infty$ quando $\|u\| \to \infty$ em M.

Resta mostrar que I é fracamente semi-contínuo inferiormente, ou seja, que I satisfaz a condição (I_4). Seja $(u_n) \subset M$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$. Como a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ é compacta e (u_n) é limitada,

$$\begin{cases} u_{n_j} \to u \text{ em } L^2(\Omega), \\ u_{n_j}(x) \to u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega, \end{cases} \tag{1.3}$$

para alguma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$.

Como $|F(x,u_n(x))| \leq C_2$ uniformemente, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\lim_{n_j\to\infty}\int_\Omega F(x,u_{n_j})\,dx = \int_\Omega \lim_{n_j\to\infty} F(x,u_{n_j})\,dx = \int_\Omega F(x,u)\,dx.$$

Segue então que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega F(x,u_n)\,dx = \int_\Omega F(x,u)\,dx \tag{1.4}$$

pois, caso contrário, existiria uma constante $d > 0$ e uma subsequência $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ tal que

$$\left|\int_\Omega F(x,u_{n_k})\,dx - \int_\Omega F(x,u)dx\right| \geq d.$$

Mas (u_{n_k}) também é limitada, e o mesmo argumento em (1.3) nos daria uma contradição. Usando agora o fato de que $\|\cdot\|^2$ é fracamente semi-contínua inferiormente e (1.4), segue que

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} I(u_n) &= \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_\Omega F(x,u_n)\,dx\right)\\
&\geq \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{2}\|u_n\|^2 + \liminf_{n\to\infty}\left(-\int_\Omega F(x,u_n)\,dx\right)\\
&= \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \limsup_{n\to\infty}\int_\Omega F(x,u_n)\,dx\\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega F(x,u)\,dx\\
&= I(u).
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Lema 1.2, I atinge mínimo em M, que chamaremos de u.

Dados $\varphi \in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ e $\epsilon > 0$, seja

$$v_\epsilon = \min\{\overline{u}, \max\{\underline{u}, u+\epsilon\varphi\}\} = u + \epsilon\varphi - \varphi^\epsilon + \varphi_\epsilon,$$

onde

$$\begin{aligned}
\varphi^\epsilon = &\quad \max\{0, u+\epsilon\varphi-\overline{u}\} \geq 0,\\
\varphi_\epsilon = &- \min\{0, u+\epsilon\varphi-\underline{u}\} \geq 0.
\end{aligned}$$

Observemos que $v_\epsilon \leq \overline{u}$ e, nos pontos onde $\overline{u} \geq \max\{\underline{u}, u+\epsilon\varphi\}$, $v_\epsilon \geq \underline{u}$. Portanto $v_\epsilon \in M$. Além disso, se $u+\epsilon\varphi-\overline{u} > 0$, o operador traço (cf. Teorema D.5) satisfaz

$$0 \leq T(\varphi^\epsilon) = T(u+\epsilon\varphi-\overline{u}) = T(u-\overline{u}) \leq 0.$$

Por outro lado, se $u+\epsilon\varphi-\underline{u} < 0$, então

$$0 \leq T(\varphi_\epsilon) = T(-u-\epsilon\varphi+\underline{u}) = T(\underline{u}-u) \leq 0.$$

Logo, φ^ϵ, $\varphi_\epsilon \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Usando a hipótese de que $|F(x,u)| \leq C_2$, um argumento análogo ao que foi feito na Proposição B.3 mostra que I é diferenciável na direção de $v_\epsilon - u$. Como u é mínimo em M, para $t \in (0,1)$,

$$\frac{I(u + t(v_\epsilon - u)) - I(u)}{t} = \frac{I((1-t)u + tv_\epsilon) - I(u)}{t} \geq 0,$$

onde $(1-t)u + tv_\epsilon \in M$, visto que M é convexo. Logo

$$0 \leq \lim_{t \to 0^+} \frac{I(u + t(v_\epsilon - u)) - I(u)}{t} = I'(u)(v_\epsilon - u) = \epsilon I'(u)\varphi - I'(u)\varphi^\epsilon + I'(u)\varphi_\epsilon,$$

donde se conclui que

$$I'(u)\varphi \geq \frac{1}{\epsilon}\left[I'(u)\varphi^\epsilon - I'(u)\varphi_\epsilon\right]. \tag{1.5}$$

Como $\overline{u}$ é super-solução, então

$$I'(\overline{u})\varphi^\epsilon = \int_\Omega \nabla\overline{u}\nabla\varphi^\epsilon - \int_\Omega f(x,\overline{u})\varphi^\epsilon \geq 0.$$

Assim

$$\begin{aligned} I'(u)\varphi^\epsilon &= I'(\overline{u})\varphi^\epsilon + (I'(u) - I'(\overline{u}))\varphi^\epsilon \\ &\geq (I'(u) - I'(\overline{u}))\varphi^\epsilon \\ &= \int_\Omega \{\nabla(u - \overline{u})\nabla\varphi^\epsilon - (f(x,u) - f(x,\overline{u}))\,\varphi^\epsilon\} \\ &= \int_{\widetilde{\Omega}_\epsilon} \{\nabla(u - \overline{u})\nabla(u + \epsilon\varphi - \overline{u}) - (f(x,u) - f(x,\overline{u}))(u + \epsilon\varphi - \overline{u})\}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

onde $\widetilde{\Omega}_\epsilon = \{x \in \Omega\,;\, u(x) + \epsilon\varphi(x) \geq \overline{u}(x)\}$. Observe que nesse caso só calculamos a integral em $\widetilde{\Omega}_\epsilon$, pois se $x \notin \widetilde{\Omega}_\epsilon$, $\varphi^\epsilon(x) = 0$. Mas se $x \in \widetilde{\Omega}_\epsilon$ é tal que $u(x) = \overline{u}(x)$, então $\nabla(u(x) - \overline{u}(x)) = 0$ e $f(x,u(x)) - f(x,\overline{u}(x)) = 0$. Logo (1.6) implica que

$$I'(u)\varphi^\epsilon \geq \int_{\Omega_\epsilon} \{\nabla(u - \overline{u})\nabla(u + \epsilon\varphi - \overline{u}) - (f(x,u) - f(x,\overline{u}))(u + \epsilon\varphi - \overline{u})\}, \tag{1.7}$$

onde $\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega\,;\, u(x) + \epsilon\varphi(x) \geq \overline{u}(x) > u(x)\}$. Sejam agora

$$\Omega_\epsilon^+ = \{x \in \Omega_\epsilon; f(x,u(x)) - f(x,\overline{u}(x)) \geq 0\},$$

$$\Omega_\epsilon^- = \{x \in \Omega_\epsilon; f(x,u(x)) - f(x,\overline{u}(x)) \leq 0\}.$$

Em Ω_ϵ^+ valem as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} (f(x,u) - f(x,\overline{u}))(u + \epsilon\varphi - \overline{u}) &= (f(x,u) - f(x,\overline{u}))(u - \overline{u}) + (f(x,u) - f(x,\overline{u}))\epsilon\varphi \\ &\leq (f(x,u) - f(x,\overline{u}))\epsilon\varphi \\ &\leq \epsilon|f(x,u) - f(x,\overline{u})||\varphi|, \end{aligned} \tag{1.8}$$

enquanto em Ω_ϵ^-, como $|u-\overline{u}| = \overline{u} - u \leq \epsilon\varphi$,

$$\begin{aligned}(f(x,u)-f(x,\overline{u}))(u+\epsilon\varphi-\overline{u}) &\leq (f(x,u)-f(x,\overline{u}))(u-\overline{u}) \\ &\leq |f(x,u)-f(x,\overline{u})|(\overline{u}-u) \\ &\leq \epsilon|f(x,u)-f(x,\overline{u})||\varphi|.\end{aligned} \tag{1.9}$$

Logo, por (1.8) e (1.9)

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\epsilon}(f(x,u)-f(x,\overline{u}))(u+\epsilon\varphi-\overline{u}) &= \int_{\Omega_\epsilon^+}(f(x,u)-f(x,\overline{u}))(u+\epsilon\varphi-\overline{u})+ \\ &\quad \int_{\Omega_\epsilon^-}(f(x,u)-f(x,\overline{u}))(u+\epsilon\varphi-\overline{u}) \\ &\leq \int_{\Omega_\epsilon^+}\epsilon|f(x,u)-f(x,\overline{u})||\varphi|+ \\ &\quad \int_{\Omega_\epsilon^-}\epsilon|f(x,u)-f(x,\overline{u})||\varphi| \\ &= \epsilon\int_{\Omega_\epsilon}|f(x,u)-f(x,\overline{u})||\varphi|.\end{aligned} \tag{1.10}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\epsilon}\nabla(u-\overline{u})\nabla(u+\epsilon\varphi-\overline{u}) &= \int_{\Omega_\epsilon}\nabla(u-\overline{u})\nabla(u-\overline{u})+\epsilon\int_{\Omega_\epsilon}\nabla(u-\overline{u})\varphi \\ &\geq \epsilon\int_{\Omega_\epsilon}\nabla(u-\overline{u})\varphi.\end{aligned} \tag{1.11}$$

Por (1.7), (1.10) e (1.11), temos

$$\frac{I'(u)\varphi^\epsilon}{\epsilon} \geq \int_{\Omega_\epsilon}\nabla(u-\overline{u})\varphi - \int_{\Omega_\epsilon}|f(x,u)-f(x,\overline{u})||\varphi|. \tag{1.12}$$

Como $|\Omega_\epsilon| \to 0$ quando $\epsilon \to 0$ e os integrandos acima não dependem de ϵ,

$$\liminf_{\epsilon\to 0^+}\frac{I'(u)\varphi^\epsilon}{\epsilon} \geq 0. \tag{1.13}$$

De maneira análoga, prova-se que

$$\limsup_{\epsilon\to 0^+}\frac{I'(u)\varphi_\epsilon}{\epsilon} \leq 0. \tag{1.14}$$

Logo, por (1.5),

$$
\begin{aligned}
I'(u)\varphi &\geq \liminf_{\epsilon \to 0} \left(\frac{I'(u)\varphi^{\epsilon}}{\epsilon} - \frac{I'(u)\varphi_{\epsilon}}{\epsilon} \right) \\
&\geq \liminf_{\epsilon \to 0} \frac{I'(u)\varphi^{\epsilon}}{\epsilon} + \liminf_{\epsilon \to 0} \frac{-I'(u)\varphi_{\epsilon}}{\epsilon} \\
&= \liminf_{\epsilon \to 0} \frac{I'(u)\varphi^{\epsilon}}{\epsilon} - \limsup_{\epsilon \to 0} \frac{I'(u)\varphi_{\epsilon}}{\epsilon} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $I'(u)\varphi \geq 0$ para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$. Invertendo o sinal de φ, temos que $I'(u)\varphi \leq 0$. Logo

$$I'(u)\varphi = 0$$

para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$.

Dada agora $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ consideremos $(\varphi_n) \subset C_0^{\infty}(\Omega)$ tal que $\varphi_n \to \varphi$ em $H_0^1(\Omega)$. Temos que

$$0 = \lim_{n \to \infty} I'(u)\varphi_n = I'(u)\varphi,$$

e portanto $I'(u) = 0$.

$\square$

Capítulo 2

Estudo da Existência de Soluções

Neste capítulo vamos estudar a existência de soluções fracas para o problema

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= f(x,u), & x \in \Omega, \\ u &\gneq 0, & \Omega, \\ u &= 0, & \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave e limitado, $N \geq 3$ e $f : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory que satisfaz condições que serão introduzidas do decorrer do texto.

Um modelo que temos em mente (cf. Corolários 2.1 e 2.2) é a função

$$f(x,s) = \lambda a(x)s^q + b(x)s^p,$$

onde $\lambda > 0$ é um parâmetro, a e b são funções e $0 \leq q < 1 < p \leq 2^* - 1$.

Conforme visto na introdução, uma solução fraca do problema (P) é uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisfaz

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f(x,u)v dx, \quad \forall \;\; v \in H_0^1(\Omega).$$

Além disso, as soluções fracas para o problema (P) são pontos críticos do funcional $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,u)dx,$$

onde

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt.$$

Considerando os funcionais $J_0, J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, dados respectivamente por

$$J_0(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx$$

e

$$J(u) = \int_\Omega F(x,u)dx,$$

temos pelas Proposições $B.2$ e $B.3$ que eles são de classe C^1 em $H_0^1(\Omega)$. Logo

$$I(u) = J_0(u) - J(u)$$

é de classe C^1 em $H_0^1(\Omega)$. Além disso,

$$I'(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Omega f(x,u)v dx \quad \text{para todo} \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Vamos sempre considerar o espaço de Banach reflexivo

$$H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,2}}$$

munido com a norma

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Indicaremos por $\|u\|_r$ a L^r-norma de uma função $u \in L^r(\Omega)$.

2.1 Existência de duas soluções

Nessa seção vamos enunciar e provar alguns resultados necessários para a prova do Teorema A. Outros resultados se encontram no apêndice.

Dado $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$, vamos denotar por $\lambda_1 = \lambda_1(\widetilde{\Omega})$ o primeiro autovalor associado ao problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & x \in \widetilde{\Omega}, \\ u = 0, & x \in \partial\widetilde{\Omega}. \end{cases}$$

Num primeiro momento vamos supor que a função f relativa ao problema (P) satisfaz as seguintes hipóteses:

(H_0) $f(x,0) \geq 0$ q.t.p. em Ω;

(H_1) existem $1 \leq \sigma < 2^*$, $d_1 \in L^{\sigma'}(\Omega)$, $d_2 > 0$ tal que

$$|f(x,s)| \leq d_1(x) + d_2|s|^{\sigma-1}$$

q.t.p. em Ω e para todo $s \geq 0$;

(H_2) existem $\Theta > 2$, $1 \leq r < 2$, $s_0 \geq 0$, $d \in L^{\left(\frac{2^*}{r}\right)'}(\Omega)$, com $d \geq 0$ q.t.p. em Ω, tais que

$$\Theta F(x,s) \leq s f(x,s) + d(x)s^r$$

q.t.p. em Ω e para todo $s \geq s_0$;

(H_3) existem $0 \leq q < 1 < p < 2^* - 1$, $a_0 \in L^{\sigma_q}(\Omega)$, onde $\sigma_q = \left(\frac{2^*}{q+1}\right)'$ e $a_0 \geq 0$ q.t.p. em Ω, $b_0 \in L^{\sigma_p}(\Omega)$, onde $\sigma_p = \left(\frac{2^*}{p+1}\right)'$ e $b_0 \geq 0$ q.t.p. em Ω, tais que

$$f(x,s) \leq a_0(x)s^q + b_0(x)s^p$$

q.t.p. em Ω e para todo $s \geq 0$;

(H_4) existem um subdomínio não vazio $\Omega_1 \subset \Omega$, $\Theta_1 > \lambda_1(\Omega_1)$, $s_1 > 0$, tais que

$$F(x,s) \geq \Theta_1 \frac{s^2}{2}$$

q.t.p. em Ω_1 e para todo $0 \leq s \leq s_1$;

(H_5) existe um subdomínio não vazio $\Omega_2 \subset \Omega$, $\Theta_2 > 0$, $s_2 \geq 0$, tais que

$$F(x,s) \geq \Theta_2 s^2$$

q.t.p. em Ω_2 e para todo $s \geq s_2$, onde além disso a função $d(x)$ de (H_2) é limitada em Ω_2.

Teorema A *Suponha* $(H_0) - (H_5)$. *Então existe uma constante* $\eta = \eta(p,q,N) > 0$ *tal que se*

$$\|a_0\|_{\sigma_q}^{p-1} \|b_0\|_{\sigma_p}^{1-q} < \eta,$$

então o problema (P) *tem pelo menos duas soluções. Uma delas, que chamaremos de* v, *satisfaz* $I(v) > 0$, *enquanto a outra, que chamaremos de* w, *satisfaz* $I(w) < 0$. *Além disso, se* f *varia de tal modo que os coeficientes em* (H_3) *são tais que* $a_0 \to 0$ *em* $L^{\sigma_q}(\Omega)$ *e* b_0 *fica limitado em* $L^{\sigma_p}(\Omega)$, *então a solução correspondente* $w = w_f$ *satisfaz* $w_f \to 0$ *em* $H_0^1(\Omega)$.

Como consequência desse teorema, temos o seguinte corolário:

Corolário 2.1 *Sejam* $\lambda > 0$, $0 \leq q < 1 < p < 2^* - 1$, $a \in L^{\tau_q}(\Omega)$ *com* $\tau_q > \sigma_q$, $b \in L^{\tau_p}(\Omega)$ *com* $\tau_p > \sigma_p$, *onde além disso* $a(x) \geq 0$ *q.t.p. em* Ω *caso* $q = 0$. *Suponha ainda que*

(i) *existe subconjunto aberto não vazio* $\Omega_1 \subset \Omega$ *tal que em* Ω_1, $a(x) \geq \epsilon_1$ *para algum* $\epsilon_1 > 0$ *e* $b(x)$ *é limitado inferiormente em* Ω_1;

(ii) *existe subconjunto aberto não vazio* $\Omega_2 \subset \Omega$ *tal que em* Ω_2, $b(x) \geq \epsilon_2$ *para algum* $\epsilon_2 > 0$ *e* $a(x)$ *é limitado inferiormente e superiormente em* Ω_2.

Então existe $\overline{\eta} = \overline{\eta}(p, q, N) > 0$ tal que se

$$\lambda < \frac{\overline{\eta}}{\|a^+\|_{\sigma_q}\|b^+\|_{\sigma_p}^{(1-q)/(p-1)}},$$

então o problema

$$(P_\lambda) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= \lambda a(x)u^q + b(x)u^p, \quad x \in \Omega, \\ u &\gneq 0, \quad \Omega, \\ u &= 0, \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

possui pelo menos duas soluções v e w satisfazendo $I(v) > 0$ e $I(w) < 0$. Além disso, se $\lambda \to 0$, então a solução $w = w_\lambda$ é tal que $w_\lambda \to 0$ em $H_0^1(\Omega)$.

Para provar o Teorema A, vamos inicialmente enunciar e demonstrar alguns resultados que provam que o funcional I satisfazem as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha. Começamos com a condição de Palais-Samale.

Proposição 2.1 *Suponha $(H_0) - (H_2)$. Então o funcional I satisfaz $(PS)_d$ para todo $d \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Seja $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência $(PS)_d$, ou seja, $I(u_n) \to d \in \mathbb{R}$ e $I'(u_n) \longrightarrow 0$. Para Θ dado em (H_2), existe uma constante C_1 e uma sequência $\epsilon_n \to 0$ tais que

$$\Theta I(u_n) - I'(u_n)u_n \leq C_1 + \epsilon_n\|u_n\|.$$

Além disso temos que

$$\begin{aligned} \Theta I(u_n) - I'(u_n)u_n &= \frac{\Theta}{2}\|u_n\|^2 - \Theta\int_\Omega F(x, u_n)dx - \|u_n\|^2 + \int_\Omega f(x, u_n)u_n dx \\ &= \left(\frac{\Theta}{2} - 1\right)\|u_n\|^2 - \int_\Omega (\Theta F(x, u_n) - u_n f(x, u_n))dx, \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde podemos escrever esta última integral como

$$\int_\Omega (\Theta F(x, u_n) - u_n f(x, u_n))dx = \int_{\Omega_{1_n}\cup\Omega_{2_n}\cup\Omega_{3_n}} (\Theta F(x, u_n) - u_n f(x, u_n))dx,$$

onde estamos denotando $\Omega_{1_n} = \{x \in \Omega : u_n(x) < 0\}$, $\Omega_{2_n} = \{x \in \Omega : 0 \leq u_n(x) \leq s_0\}$, $\Omega_{3_n} = \{x \in \Omega : u_n(x) > s_0\}$. Observemos agora que

$$\int_{\Omega_{1_n}} (\Theta F(x, u_n) - u_n f(x, u_n))dx = 0,$$

pois $f(x,s) = F(x,s) = 0$ quando $s < 0$.

Por (H_1) existem $1 \leq \sigma < 2^*$, $d_1 \in L^\sigma(\Omega)$ e $d_2 > 0$ tais que

$$|f(x,s)| \leq d_1(x) + d_2|s|^{\sigma-1},$$

q.t.p. em Ω e para todo $s \geq 0$. Integrando de 0 a s temos que

$$|F(x,s)| \leq d_1(x)s + d_3|s|^\sigma.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_{2n}} (\Theta F(x,u_n) - u_n f(x,u_n))dx &\leq \Theta \int_{\Omega_{2n}} |F(x,u_n)|dx + \int_{\Omega_{2n}} |u_n f(x,u_n)|dx \\
&\leq \Theta \int_{\Omega_{2n}} (u_n d_1(x) + d_3|u_n|^\sigma)dx \\
&+ \int_{\Omega_{2n}} (|u_n|d_1(x) + d_2|u_n|^\sigma)dx \\
&\leq \Theta s_0 \int_\Omega d_1(x)dx + \Theta s_0^\sigma d_3 \int_\Omega dx \\
&+ s_0 \int_\Omega d_1(x)dx + d_3 s_0^\sigma \int_\Omega dx \\
&\leq C_2,
\end{aligned}$$

onde C_2 é uma constante. Usando agora (H_2) e a desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_{3n}} (\Theta F(x,u_n) - u_n f(x,u_n))dx &\leq \int_{\Omega_{3n}} d(x)u_n^r\, dx \\
&\leq \int_\Omega d(x)(u_n^+)^r\, dx \\
&\leq \left(\int_\Omega d(x)^{\left(\frac{2^*}{r}\right)'} dx\right)^{\frac{1}{(2^*/r)'}} \left(\int_\Omega (u_n^+)^{2^*}\right)^{\frac{r}{2^*}} \qquad (2.2) \\
&= C_3 \|u_n^+\|_{2^*}^r \\
&\leq C_4 \|u_n^+\|^r,
\end{aligned}$$

sendo que nessa última desigualdade, usamos a imersão de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$. Logo por (2.1) e (2.2), temos que

$$\left(\frac{\Theta}{2} - 1\right) \|u_n\|^2 \leq C_2 + C_4\|u_n^+\|^r + \epsilon_n \|u_n\|.$$

Como $r < 2$, concluímos que (u_n) é limitada.

Observemos agora que

$$I'(u) = u - J'(u),$$

em $H_0^1(\Omega)'$, onde

$$\begin{aligned} J : H_0^1(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto J(u) = \int_\Omega F(x,u)dx \end{aligned}$$

e

$$J'(u)v = \int_\Omega f(x,u)v,$$

para $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Mas pela Proposição B.3, $J' : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)'$ é compacto. Logo, como (u_n) é limitada, existe uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ tal que

$$J'(u_{n_j}) \rightarrow v \ \text{ em } \ H_0^1(\Omega).$$

Com isso,

$$u_{n_j} = I'(u_{n_j}) + J'(u_{n_j}) \rightarrow v,$$

isto é, (u_n) possui uma subsequência convergente. Isto conclui a prova da proposição.

$\square$

O próximo lema garante que o funcional I satisfaz a condição (I_1) do Teorema do Passo da Montanha.

Lema 2.1 *Suponha (H_0), (H_1), $(H_3) - (H_5)$. Então existe $\eta = \eta(p,q,N) > 0$ tal que se*

$$\|a_0\|_{\sigma_q}^{p-1} \|b_0\|_{\sigma_p}^{1-q} < \eta,$$

então existem $\rho > 0$ e $\alpha > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha$.

Demonstração: Claramente $I(0) = 0$. Usando (H_3) temos que

$$\begin{aligned} F(x,s) &= \int_0^s f(x,t)dt \\ &\leq \int_0^s (a_0(x)t^q + b_0(x)t^p)dt \\ &= \frac{a_0(x)s^{q+1}}{q+1} + \frac{b_0(x)s^{p+1}}{p+1}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

e como $f(x,s)=0$ para todo $s \leq 0$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega F(x,u)dx &= \int_{\{u<0\}} F(x,u)dx + \int_{\{u\geq 0\}} F(x,u)dx \\ &= \int_{\{u\geq 0\}} F(x,u)dx \\ &= \int_\Omega F(x,u^+)dx,\end{aligned} \tag{2.4}$$

sempre que $u \in H_0^1(\Omega)$. Logo, por (2.3), (2.4) e a desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}\int_\Omega F(x,u)dx &= \int_\Omega F(x,u^+)dx \\ &\leq \int_\Omega \frac{a_0(x)(u^+)^{q+1}}{q+1}dx + \int_\Omega \frac{b_0(u^+)^{p+1}}{p+1}dx \\ &\leq \frac{1}{q+1}\left(\int_\Omega (a_0(x))^{\sigma_q}dx\right)^{\frac{1}{\sigma_q}}\left(\int_\Omega (u^+)^{2^*}dx\right)^{\frac{q+1}{2^*}} \\ &+ \frac{1}{p+1}\left(\int_\Omega (b_0(x))^{\sigma_p}dx\right)^{\frac{1}{\sigma_p}}\left(\int_\Omega (u^+)^{2^*}dx\right)^{\frac{p+1}{2^*}} \\ &\leq \frac{1}{q+1}\|a_0\|_{\sigma_q}\|u\|_{2^*}^{q+1} + \frac{1}{p+1}\|b_0\|_{\sigma_p}\|u\|_{2^*}^{p+1}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Seja agora

$$S = \inf\left\{\int_\Omega |\nabla u|^2 \ : \ u \in H_0^1(\Omega) \ \text{ e } \ \|u\|_{2^*}=1\right\}.$$

Sabemos que S não depende de Ω. Além disso,

$$S \leq \frac{\|u\|^2}{\|u\|_{2^*}^2},$$

para $u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}$. Portanto, por (2.5),

$$\begin{aligned}\int_\Omega F(x,u)dx &\leq \frac{1}{q+1}\|a_0\|_{\sigma_q}\|u\|_{2^*}^{q+1} + \frac{1}{p+1}\|b_0\|_{\sigma_p}\|u\|_{2^*}^{p+1} \\ &\leq C_1\|a_0\|_{\sigma_q}\|u\|^{q+1} + C_2\|b_0\|_{\sigma_p}\|u\|^{p+1},\end{aligned}$$

onde $C_1 = S^{-\frac{q+1}{2}}(q+1)^{-1}$ e $C_2 = S^{-\frac{p+1}{2}}(p+1)^{-1}$. Logo

$$
\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(x,u) \\
&\geq \tfrac{1}{2}\|u\|^2 - C_1\|a_0\|_{\sigma_q}\|u\|^{q+1} - C_2\|b_0\|_{\sigma_p}\|u\|^{p+1}.
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Seja $A = 2C_1\|a_0\|_{\sigma_q}$ e $B = 2C_2\|b_0\|_{\sigma_p}$. Afirmamos que $A, B \neq 0$. Sendo isso verdade, pelo Lema C.2, para $\|u\| = t_B$, temos que

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\Psi_{A,B}(t_B) > 0, \tag{2.7}$$

onde além disso

$$\|a_0\|_{\sigma_q}^{p-1}\|b_0\|_{\sigma_p}^{1-q} < \frac{\eta_1(p,q)}{(2C_1)^{p-1}(2C_2)^{1-q}} = \eta(p,q,N).$$

Tomando $\rho = t_B$ e $\alpha = \frac{1}{2}\Psi_{A,B}(t_B)$, temos que $I|_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha > 0$.

Resta somente mostrar que de fato $A, B \neq 0$.

Caso 1: Suponha $a_0 \equiv b_0 \equiv 0$. Por (H_3), (H_4) e a equação (2.3), existem $\Omega_1 \subset \Omega$ e $\Theta_1 > \lambda_1(\Omega_1)$ e $s_1 > 0$ tais que

$$0 < \Theta_1\frac{s^2}{2} \leq F(x,s) \leq \frac{a_0(x)s^{q+1}}{q+1} + \frac{b_0(x)s^p + 1}{p+1} = 0,$$

q.t.p. em Ω_1 e para todo $0 < s < s_1$, o que é uma contradição.

Caso 2: Se $a_0 \equiv 0$ e $b_0 \not\equiv 0$, novamente por (H_4) e a equação (2.3)

$$0 < \Theta_1\frac{s^2}{2} \leq F(x,s) \leq \frac{b_0(x)s^{p+1}}{p+1} \leq b_0(x)s^{p+1},$$

q.t.p. em Ω_1 e para todo $0 < s \leq s_1$. Portanto

$$s^2 \leq \frac{2b_0(x)s^{p+1}}{\Theta_1}.$$

Mas como $p+1 > 2$, temos que

$$s^2 > \frac{2b_0(x)s^{p+1}}{\Theta_1},$$

sempre que $0 < s < \min\{s_1, s'\}$, onde $s' = \left(\dfrac{2b_0(x)s^{p+1}}{\Theta_1}\right)^{-\frac{1}{p-1}}$, gerando uma contradição.

Caso 3: Se $a_0 \not\equiv 0$ e $b_0 \equiv 0$ q.t.p. em Ω, por (H_5) e (2.3), existem $\Omega_2 \subset \Omega$, $\Theta_2 > 0$ e $s_2 \geq 0$ tais que

$$\Theta_2 s^2 \leq F(x,s) \leq \frac{a_0(x)s^{q+1}}{q+1} \leq a_0(x)s^{q+1},$$

q.t.p. em Ω_2 e para todo $s \geq s_2$. Mas como $1 \leq q+1 < 2$, então $s^2 > a_0(x)s^{q+1}$ sempre que $s > \max\{s_2, s''\}$, onde $s'' = \left(\dfrac{a_0(x)}{\Theta_2}\right)^{\frac{1}{1-q}}$, e novamente temos uma contradição. Portanto o lema está provado.

□

O lema que será demonstrado abaixo assegura a hipótese (I_2) do Teorema do Passo da Montanha.

Lema 2.2 *Suponha* (H_2) *e* (H_5)*. Então existe* $u_2 \in H_0^1(\Omega)$ *tal que* $I(tu_2) \to -\infty$ *quando* $t \to +\infty$*.*

Demonstração: Seja $s_3 = \max\{s_0, s_2\}$, onde s_0 e s_2 são dados em (H_2) e em (H_5), respectivamente. Com isso, para $x \in \Omega_2$ de (H_5), temos que

$$\Theta F(x,s) \leq sf(x,s) + d(x)s^r, \tag{2.8}$$

q.t.p. em Ω_2 e para todo $s \geq s_3$. Dividindo a equação (2.8) por $sF(x,s) \neq 0$, temos que

$$\frac{\Theta F(x,s)}{sF(x,s)} \leq \frac{sf(x,s)}{sF(x,s)} + \frac{d(x)s^r}{sF(x,s)},$$

o que implica

$$\frac{\Theta}{s} \leq \frac{f(x,s)}{F(x,s)} + \frac{d(x)s^{r-1}}{F(x,s)}. \tag{2.9}$$

Integrando (2.9) de s_3 a s, usando (H_5) e lembrando que $r < 2$,

$$\begin{aligned}
\int_{s_3}^{s} \frac{\Theta}{t} dt &\leq \int_{s_3}^{s} \frac{f(x,t)}{F(x,t)} dt + d(x) \int_{s_3}^{s} \frac{t^r}{F(x,t)} dt \\
&\leq \ln\left(\frac{F(x,s)}{F(x,s_3)}\right) + d(x) \int_{s_3}^{s} \frac{t^{r-1}}{\Theta_2 t^2} dt \\
&\leq \ln\left(\frac{F(x,s)}{F(x,s_3)}\right) + \frac{d(x)}{\Theta_2} \int_{s_3}^{\infty} t^{r-3} dt \\
&\leq \ln\left(\frac{F(x,s)}{F(x,s_3)}\right) - \frac{d(x)s_3^{r-2}}{\Theta_2(r-2)}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
-\frac{d(x)s_3^{r-2}}{\Theta_2(r-2)} &\geq \ln\left[\left(\frac{s}{s_3}\right)^{\Theta}\right] - \ln\left(\frac{F(x,s)}{F(x,s_3)}\right) \\
&= \ln\left(\frac{s^{\Theta} F(x,s_3)}{s_3^{\Theta} F(x,s)}\right).
\end{aligned}$$

Aplicando a função exponencial obtemos

$$\begin{aligned} F(x,s) &\geq F(x,s_3)\left(\frac{s}{s_3}\right)^{\Theta}\exp\left(\frac{-d(x)s_3^{r-2}}{\Theta_2(r-2)}\right) \\ &= C_1 s^{\Theta}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

q.t.p. em Ω_2, para todo $s \geq s_3$ e onde C_1 é uma constante.

Seja agora $u_2 \in C_0^{\infty}(\Omega_2)$, tal que $u_2 \geq 0$ e $u \not\equiv 0$ em Ω_2. Como $supp\, u_2 \subset \Omega_2$ e $F(x,0) = 0$ q.t.p. em Ω, então

$$\begin{aligned} I(tu_2) &= \frac{t^2}{2}\|u_2\|^2 - \int_{\Omega} F(x,tu_2)dx \\ &= \frac{t^2}{2}\|u_2\|^2 - \int_{\Omega_2} F(x,tu_2)dx \\ &= \frac{t^2}{2}\|u_2\|^2 - \int_{B_t} F(x,tu_2)dx - \int_{A_t} F(x,tu_2)dx, \end{aligned} \tag{2.11}$$

onde $A_t = \{x \in \Omega_2 \ : \ tu_2(x) \geq s_3\}$ e $B_t = \{x \in \Omega_2 \ : \ 0 < tu_2(x) < s_3\}$. Como $u_2 \in C_0^{\infty}(\Omega_2)$ e $u \not\equiv 0$, então $u_2 \in L^{\infty}(\Omega)$ com $\|u_2\|_{\infty} > 0$. Tomando $t_2 > s_3\|u_2\|_{\infty}^{-1}$, temos que $|A_t| > 0$ sempre que $t \geq t_2$. Por (H_1), existem $1 \leq \sigma < 2^*$, $d_1 \in L^{\sigma'}(\Omega)$ e $d_3 > 0$ tais que

$$F(x,s) \leq d_1(x)s + d_3 s^{\sigma},$$

q.t.p. em Ω e para todo $s \geq 0$. Portanto

$$\begin{aligned} \int_{B_t} F(x,tu_2)dx &\leq \int_{B_t} |d_1(x)||tu_2|dx + d_3\int_{B_t}|tu_2|dx \\ &\leq s_3\int_{B_t}|d_1(x)|dx + d_3 s_3\int_{B_t} dx \\ &\leq C_2\|d_1\|_{\sigma'} + d_3 s_3|\Omega| \\ &= C_3, \end{aligned} \tag{2.12}$$

onde C_3 é uma constante. Por (2.10), (2.11) e (2.12), segue que

$$
\begin{aligned}
I(tu_2) &= \frac{t^2}{2}\|u_2\|^2 - \int_{B_t} F(x,tu_2)dx - \int_{A_t} F(x,tu_2)dx,\\
&\le \frac{t^2}{2}\|u_2\|^2 + C_3 - \int_{A_t} F(x,tu_2)dx\\
&\le \frac{t^2}{2}\|u_2\|^2 + C_3 - \int_{A_t} C_1(tu_2)^{\Theta}\,dx\\
&= \frac{t^2}{2}\|u_2\|^2 + C_3 - C_1 t^{\Theta}\int_{A_t} (u_2)^{\Theta}\,dx\\
&= \frac{t^2}{2}\|u_2\|^2 + C_3 - C_4 t^{\Theta},
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

onde C_4 é uma constante. Como $\Theta > 2$, (2.13) implica que $I(tu_2) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$, o que prova o lema.

□

Estamos prontos para demonstrar o Teorema A.

Demonstração do Teorema A: Para garantir a existência da primeira solução v, vamos usar o Teorema do Passo da Montanha. Pelo Lema 2.1, existem constantes $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ tais que

$$I|_{\partial B_\rho(0)} \ge \alpha > 0.$$

Pelo Lema 2.2, existe $u_2 \in H_0^1(\Omega)$ tal que $I(tu_2) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$. Tomando $t \in \mathbb{R}$ tal que $t > \rho\|u_2\|$ e $I(tu_2) \le I(0)$, então para $e = tu_2$, temos que $\|e\| > \rho$ e $I(e) \le I(0)$. Combinando esses dois fatos e a Proposição 2.1, podemos aplicar o Teorema do Passo da Montanha que garante a existência de uma solução v para o problema (P). Além disso, por (2.7),

$$I(v) > 0.$$

A segunda solução do problema (P), que chamaremos de w, será obtida por um processo de minimização. Para isto, seja $\varphi_1 > 0$ a autofunção associada a $\lambda_1(\Omega_1)$, o primeiro auto valor correspondente ao problema

$$
(PA) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & x \in \Omega_1,\\ u = 0, & x \in \partial\Omega_1, \end{cases}
$$

onde Ω_1 é o subdomínio de Ω dado por (H_4). Como a formulação fraca do problema (PA) é dada por

$$\int_{\Omega_1} \nabla u \nabla v = \lambda \int_{\Omega_1} uv,$$

$u, v \in H_0^1(\Omega)$ e φ_1 é solução associada a λ_1, então

$$\int_{\Omega_1} |\nabla \varphi_1|^2 = \lambda_1 \int_{\Omega_1} \varphi_1^2.$$

Mas como, por (H_4), $\Theta_1 > \lambda_1(\Omega_1)$, temos que

$$\int_{\Omega_1} |\nabla \varphi_1|^2 < \Theta_1 \int_{\Omega_1} \varphi_1^2. \tag{2.14}$$

Por outro lado, sabemos que $\varphi_1 \in C(\overline{\Omega_1})$. Tomando $0 < t \leq s_1/\|\varphi_1\|_\infty$, a hipótese (H_4) e a equação (2.14) implicam que

$$\begin{aligned} I(t\varphi_1) &= \frac{1}{2}\|t\varphi_1\|^2 - \int_{\Omega_1} F(x, t\varphi_1) \\ &\leq \frac{t^2}{2}\|\varphi_1\|^2 - \int_{\Omega_1} \frac{\Theta_1 (t\varphi_1)^2}{2} \\ &\leq \frac{t^2}{2}\left(\|\varphi_1\|^2 - \Theta_1 \int_{\Omega_1} \varphi_1^2\right), \end{aligned}$$

onde a expressão entre parênteses é negativa por (2.14). Portanto

$$I(t\varphi_1) < 0 \tag{2.15}$$

sempre que $0 < t \leq s_1/\|\varphi_1\|_\infty$.

Suponhamos agora que existe $R > 0$ tal que a bola fechada de centro zero e raio R, $\overline{B_R(0)}$, seja tal que

$$I(u) \geq 0 \ \text{ para todo } u \text{ tal que } \ \|u\| = R. \tag{2.16}$$

Considere $\alpha_0 = \inf\{I(u) : u \in \overline{B_R(0)}\}$ e (u_n) uma sequência minimizante em $\overline{B_R(0)}$, ou seja, tal que $I(u_n) \to \alpha_0$. Como a sequência (u_n) é limitada e $H_0^1(\Omega)$ é reflexivo, a menos de subesequência, existe $w \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup w$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$. Mas $\overline{B_R(0)}$ é fracamente fechado, visto que $H_0^1(\Omega)$ é reflexivo. Portanto $w \in \overline{B_R(0)}$.

Pela Proposição B.4, I é fracamente semicontínuo inferiormente, logo

$$I(w) \leq \liminf_{n \to \infty} I(u_n) = \alpha_0,$$

e portanto I atinge ínfimo em $\overline{B_R(0)}$. Usando (2.15) concluímos que $\alpha_0 < 0$. Logo a expressão (2.16) implica que $w \in B_R(0)$. Assim, lembrando que $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, concluímos que $I'(w) = 0$.

A existência de uma bola que satisfaz (2.16) é assegurada, pois como vimos em (2.7)

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\Psi_{A,B}(t_B) > 0$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisfaz $\|u\| = t_B$. Isto completa a prova de que existem pelo menos duas soluções v e w para o problema (P) e que estas satisfazem $I(v) > 0$ e $I(w) < 0$.

Vamos mostrar que o número $R > 0$ em (2.16) pode ser escolhido de modo que $R \to 0$ quando $a_0 \to 0$ em $L^{\sigma_1}(\Omega)$ e b_0 permanece limitado em $L^{\sigma_p}(\Omega)$. De fato, fixado $\alpha \in (0, 1/(1-q))$, se tomarmos $R = \|a_0\|_{\sigma_q}^{\alpha}$, então para todo u tal que $\|u\| = R$, teremos, por (2.6)

$$\begin{aligned}
I(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - c_1\|a_0\|_{\sigma_q}\|u\|^{q+1} - c_2\|b_0\|_{\sigma_p}\|u\|^{p+1} \\
&= \frac{1}{2}\|a_0\|_{\sigma_q}^{2\alpha} - c_1\|a_0\|_{\sigma_q}^{\alpha q+\alpha+1} - c_2\|b_0\|_{\sigma_p}\|a_0\|_{\sigma_q}^{\alpha p+\alpha} \\
&= \|a_0\|_{\sigma_q}^{2\alpha}\left(\frac{1}{2} - c_1\|a_0\|_{\sigma_q}^{\alpha q-\alpha+1} - c_2\|b_0\|_{\sigma_p}\|a_0\|_{\sigma_q}^{\alpha p-\alpha}\right) \\
&= \|a_0\|_{\sigma_q}^{2\alpha}\left(\frac{1}{2} - c_1\|a_0\|_{\sigma_q}^{1-\alpha(1-q)} - c_2\|b_0\|_{\sigma_p}\|a_0\|_{\sigma_q}^{\alpha(p-1)}\right).
\end{aligned}$$

Como $1 - \alpha(1-q) > 0$, tomando α como foi escolhido e $\|a_0\|_{\sigma_q} > 0$ suficientemente pequeno, a expressão entre parênteses fica positiva. Portanto, quando $a_0 \to 0$ em $L^{\sigma_q}(\Omega)$, $w \to 0$ em $H_0^1(\Omega)$. Isto completa a demonstração do teorema.

□

Podemos então aplicar o Teorema A para provar o Corolário 2.1 sobre existência de soluções para o problema $(P_{\lambda.})$

Demonstração do Corolário 2.1 Vamos provar que a função

$$f(x,s) = \lambda a(x)s^q + b(x)s^p$$

satisfaz as hipóteses $(H_0) - (H_5)$ do Teorema A. A verificação de (H_0) é direta, visto que

$$f(x,0) = \lambda a(x)\,0^q + b(x)\,0^p = 0$$

q.t.p. em Ω. Pela desigualdade triangular, temos que

$$\begin{aligned} |f(x,s)| &= |\lambda a(x)s^q + b(x)s^p| \\ &\le \lambda|a(x)s^q| + |b(x)s^p|. \end{aligned}$$

Como $0 \le q < 1 < p < 2^* - 1$, sejam $\delta_1 > 0$ e $\sigma_1 = \sigma_1(\delta_1)$ tais que $p + 1 < 2^* - \delta_1 < \sigma_1 < 2^*$. Usando a desigualdade de Young para os conjugados $\frac{\sigma_1 - 1}{\sigma_1 - 1 - q}$ e $\frac{\sigma_1 - 1}{q}$, temos que

$$\begin{aligned} |a(x)s^q| &\le \frac{|a(x)|^{\frac{\sigma_1-1}{\sigma_1-1-q}}}{\frac{\sigma_1-1}{\sigma_1-1-q}} + \frac{|s^q|^{\frac{\sigma_1-1}{q}}}{\frac{\sigma_1-1}{q}} \\ &= C_1|a(x)|^{\frac{\sigma_1-1}{\sigma_1-1-q}} + C_2|s|^{\sigma_1-1}, \end{aligned}$$

com $C_1 = C_1(\sigma_1, q) > 0$ e $C_2 = C_2(\sigma_1, q) > 0$. Como por hipótese, $a \in L^{\tau_q}(\Omega)$, onde $\tau_q > \sigma_q = \left(\frac{2^*}{q+1}\right)' = \frac{2^*}{2^*-1-q}$, para δ_1 suficientemente pequeno, temos que $\tau_q > \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - q - 1}$. Logo $a \in L^{\frac{\sigma_1}{\sigma_1-q-1}}(\Omega)$, e portanto,

$$\int_\Omega \left(|a(x)|^{\frac{\sigma_1-1}{\sigma_1-q-1}}\right)^{\frac{\sigma_1}{\sigma_1-1}} dx = \int_\Omega |a(x)|^{\frac{\sigma_1}{\sigma_1-q-1}} dx < \infty,$$

ou seja, $|a(x)|^{\frac{\sigma_1-1}{\sigma_1-1-q}} \in L^{\sigma_1'}(\Omega)$, com $\sigma_1' = \frac{\sigma_1}{\sigma_1-1}$.

Analogamente, seja $\delta_2 > 0$ tal que $p + 1 < 2^* - \delta_2 < \sigma_2 < 2^*$. Para os conjugados $\frac{\sigma_2-1}{\sigma_2-p-1}$ e $\frac{\sigma_2-1}{p}$, a desigualdade de Young nos dá

$$\begin{aligned} |b(x)s^p| &\le \frac{|b(x)|^{\frac{\sigma_2-1}{\sigma_2-p-1}}}{\frac{\sigma_2-1}{\sigma_2-p-1}} + \frac{|s^p|^{\frac{\sigma_2-1}{p}}}{\frac{\sigma_2-1}{p}} \\ &= C_3|b(x)|^{\frac{\sigma_2-1}{\sigma_2-p-1}} + C_4|s|^{\sigma_2-1}, \end{aligned}$$

para constantes positivas $C_3 = C_3(\sigma_2, p)$ e $C_4 = C_4(\sigma_2, p)$. Como $b \in L^{\tau_p}(\Omega)$ e $\tau_p > \sigma_p = \left(\frac{2^*}{p+1}\right)' = \frac{2^*}{2^*-p-1}$, tomando δ_2 suficientemente pequeno, $\tau_p > \frac{\sigma_2}{\sigma_2-p-1}$. Portanto $a \in L^{\frac{\sigma_2}{\sigma_2-p-1}}(\Omega)$, e dessa forma

$$\int_\Omega \left(|b(x)|^{\frac{\sigma_2-1}{\sigma_2-p-1}}\right)^{\frac{\sigma_2}{\sigma_2-1}} dx = \int_\Omega |b(x)|^{\frac{\sigma_2}{\sigma_2-p-1}} dx < \infty,$$

ou seja, $|b(x)|^{\frac{\sigma_2-1}{\sigma_2-p-1}} \in L^{\sigma_2'}(\Omega)$, onde $\sigma_2' = \frac{\sigma_2}{\sigma_2-1}$.

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e consequentemente $\sigma = \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$, $d_1(x) = \lambda C_1 a(x) + C_3 b(x)$ e $d_2 = \max\{C_2, C_4\}$, segue que

$$|f(x,s)| \le d_1(x) + d_2|s|^{\sigma-1},$$

o que verifica (H_1).

Seja agora $\Theta = p+1$, $r = q+1$, $d(x) = \lambda\left(\frac{\Theta}{q+1} - 1\right)a^+(x)$ e $s_0 = 0$. Obeserve que

$$\begin{aligned}
\Theta F(x,s) &= \Theta \int_0^s (\lambda a(x)t^q + b(x)t^p)dt \\
&= \left(\frac{\lambda a(x)s^{q+1}}{q+1} + \frac{b(x)s^{p+1}}{p+1}\right)p+1 \\
&= \lambda a(x)s^{q+1}\left(\frac{p+1}{q+1}\right) + b(x)s^{p+1}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando o fato de que $\left(\dfrac{p+1}{q+1}\right) \geq 1$, temos que

$$\begin{aligned}
sf(x,s) + d(x)s^r &= s(\lambda a(x)s^q + b(x)s^p) + \lambda\left(\frac{\Theta}{q+1} - 1\right)a^+(x)s^{q+1} \\
&= \lambda a(x)s^{q+1} + b(x)s^{p+1} + \lambda\left(\frac{p+1}{q+1}\right)a^+(x)s^{q+1} - \lambda a^+(x)s^{q+1} \\
&= b(x)s^{p+1} + \lambda a^+(x)s^{q+1}\left(\frac{p+1}{q+1}\right) + \lambda s^{q+1}(a(x) - a^+(x)) \\
&= b(x)s^{p+1} + \lambda a^+(x)s^{q+1}\left(\frac{p+1}{q+1}\right) - \lambda a^-(x)s^{q+1} \\
&\geq b(x)s^{p+1} + \lambda a^+(x)s^{q+1}\left(\frac{p+1}{q+1}\right) - \lambda a^-(x)s^{q+1}\left(\frac{p+1}{q+1}\right) \\
&= b(x)s^{p+1} + \lambda(a^+(x) - a^-(x))s^{q+1}\left(\frac{p+1}{q+1}\right) \\
&= b(x)s^{p+1} + \lambda a(x)s^{q+1}\left(\frac{p+1}{q+1}\right).
\end{aligned}$$

Portanto $\Theta F(x,s) \leq sf(x,s) + d(x)s^r$ q.t.p. em Ω e para todo $s \geq 0$, e isto verifica (H_2).

Como por hipótese $\tau_q > \sigma_q$ e $\tau_q > \sigma_q$, segue que $a \in L^{\sigma_q}(\Omega)$ e $b \in L^{\sigma_p}(\Omega)$, consequentemente $\lambda a^+ \in L^{\sigma_q}(\Omega)$ e $b^+ \in L^{\sigma_p}(\Omega)$. Tomando $a_0(x) = \lambda a^+(x)$ e $b_0(x) = b^+(x)$, seque que

$$f(x,s) \leq a_0 s^q + b_0 s^p,$$

q.t.p. em Ω e para todo $s \geq 0$, o que nos garante (H_3).

Seja $\Omega_1 \subset \Omega$ dado em (i) e $\Theta_1 > \lambda_1(\Omega_1)$. Como $a(x) \geq \epsilon_1$ e $b(x)$ permanece limitado inferiormente em Ω_1, f satisfaz a condição de sublinearidade local no zero. De fato

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0^+}\frac{f(x,s)}{s} &= \lim_{s\to 0^+}\frac{\lambda a(x)s^q + b(x)s^p}{s}\\ &= \lim_{s\to 0^+}\lambda a(x)s^{q-1} + b(x)s^{p-1}\\ &= +\infty.\end{aligned}$$

Logo, existe $s_1 > 0$ tal que

$$\left|\frac{f(x,s)}{s}\right| \geq \Theta$$

sempre que $0 \leq s \leq s_1$. Integrando os dois lado da igualdade, concluímos que

$$F(x,s) \geq \Theta\frac{s^2}{2}$$

q.t.p. em Ω_1 e para todo $0 \leq s \leq s_1$, o que garante (H_4).

Finalmente, f também satisfaz a condição de superlinearidade no infinito. De fato, para $\Omega_2 \subset \Omega$ dado em (ii) e sendo $b(x) \geq \epsilon_2$ e $a(x)$ limitada, seque que

$$\begin{aligned}\lim_{s\to +\infty}\frac{f(x,s)}{s} &= \lim_{s\to +\infty}\frac{\lambda a(x)s^q + b(x)s^p}{s}\\ &= \lim_{s\to 0^+}\lambda a(x)s^{q-1} + b(x)s^{p-1}\\ &= +\infty.\end{aligned}$$

Ou seja, para Θ_2 dado, existe $s_2 \geq 0$ tal que $\left|\frac{f(x,s)}{s}\right| \geq \Theta_2$, sempre que $s \geq s_2$. Integrando, temos que

$$F(x,s) \geq \frac{\Theta_2}{2}s^2$$

para todo $s \geq s_2$. Além disso, $d(x) = \lambda\left(\frac{\Theta}{q+1} - 1\right)a^+(x)$ é limitada em Ω_2, verificando a hipótese (H_5).

Com isso, f satisfaz todas as hipóteses do Teorema 2.1. Portanto existe $\overline{\eta} = \overline{\eta}(p,q,N) > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\lambda < \frac{\overline{\eta}}{\|a^+\|_{\sigma_q}\|b^+\|_{\sigma_p}^{(1-q)/(p-1)}} &\Leftrightarrow \lambda\|a^+\|_{\sigma_q}\|b^+\|_{\sigma_p}^{(1-q)/(p-1)} < \overline{\eta}\\ &\Leftrightarrow \|a_0^+\|_{\sigma_q}^{p-1}\|b^+\|_{\sigma_p}^{1-q} < \overline{\eta}^{\,p-1}\\ &\Leftrightarrow \|a_0^+\|_{\sigma_q}^{p-1}\|b^+\|_{\sigma_p}^{1-q} < \eta.\end{aligned}$$

Além disso, quando $\lambda \to 0$, então $a_0 \to 0$. Logo, pelo Teorema 2.1, o problema (P_λ) tem pelo menos duas soluções v e w que satisfazem, respectivamente, $I(v) > 0$ e $I(w) < 0$, e a solução $w = w_\lambda$ é tal que $w_\lambda \to 0$ em $H_0^1(\Omega)$ quando $\lambda \to 0$. Isto finaliza a prova do corolário.

$\square$

2.2 Existência de uma solução via método de sub-super solução

Nesta seção vamos provar, sob novas hipóteses, a existência de uma solução para o problema (P) utilizando o Teorema 1.3. Vamos supor que f satisfaz as seguintes hipóteses:

$(H_3)'$ existem $0 \leq q < 1 < p$ e constantes não negativas a_0 e b_0 tais que

$$f(x,s) \leq a_0 s^q + b_0 s^p,$$

q.t.p. em Ω e para todo $s \geq 0$.

$(H_4)'$ existem $s_1 > 0$ e um subdomínio $\Omega_1 \subset \Omega$ não-vazio de classe C^1 tais que

$$f(x,s) \geq \lambda_1(\Omega_1)s$$

q.t.p. em Ω e para todo $0 \leq s \leq s_1$.

Teorema B *Suponha (H_0), $(H_3)'$, $(H_4)'$ e que Ω é de classe C^1. Então existe um $\delta = \delta(p,q,\Omega,b_0)$ tal que se*

$$a_0 < \delta$$

então o problema (P) tem pelo menos uma solução fraca.

Demonstração: Utilizaremos o Teorema 1.3. Inicialmente vamos determinar uma super-solução para o problema (P). Seja $e \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta e &= 1, \quad x \in \Omega, \\ e &= 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Como $0 \leq q < 1 < p$, podemos tomar $M = M(p,\Omega,b_0) > 0$ de tal forma que

$$0 < M \leq \left(\frac{b_0^{-1}\|e\|_\infty^{-p}}{2}\right)^{\frac{1}{1-p}},$$

onde estamos supondo $b_0 > 0$. Logo

$$0 < M^{p-1} \leq \frac{b_0^{-1}\|e\|_\infty^{-p}}{2},$$

o que implica

$$0 < M^p b_0 \|e\|_\infty^p \leq \frac{M}{2}. \tag{2.17}$$

Vamos considerar agora $\delta = \delta(p, q, \Omega, b_0) > 0$ dado por

$$\delta = \frac{M^{-q+1}\|e\|_\infty^{-q}}{2},$$

o que implica

$$\delta M^q \|e\|_\infty^q = \frac{M}{2}.$$

Assim, para cada $a_0 \in [0, \delta]$ temos

$$a_0 M^q \|e\|_\infty^q \leq \frac{M}{2}. \tag{2.18}$$

Portanto, segue de (2.17) e (2.18) que

$$a_0 M^q \|e\|_\infty^q + b_0 M^p \|e\|_\infty^p \leq M, \tag{2.19}$$

sempre que $a_0 \in [0, \delta]$. Se $b_0 = 0$ a existência de $M > 0$ satisfazendo a desigualdade acima segue do mesmo modo.

Por $(H_3)'$, (2.19) e considerando que $-\Delta e = 1$ em Ω, temos que

$$\begin{aligned} -\Delta(Me) = M &\geq a_0 M^q \|e\|_\infty^q + b_0 M^p \|e\|_\infty^p \\ &\geq a_0 (Me)^q + b_0 (Me)^p \\ &\geq f(x, Me). \end{aligned}$$

Logo, para toda função $w \in H_0^1(\Omega)$, com $w \geq 0$ em Ω, temos que

$$-\Delta(Me)w \geq f(x, Me)w,$$

e portanto

$$\int_\Omega \nabla(Me)\nabla w \, dx \geq \int_\Omega f(x, Me) w \, dx.$$

Dessa forma concluímos que Me é uma super-solução fraca para o problema (P).

Seja agora $\varphi_1 > 0$ a autofunção associada ao primeiro autovalor $\lambda_1(\Omega_1)$ do problema

$$(PA) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & x \in \Omega_1, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega_1, \end{cases}$$

onde Ω_1 é o subdomínio dado por $(H_4)'$. A regularidade de φ_1 nos permite estendê-la para todo Ω fazendo

$$u(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & , \quad x \in \Omega_1, \\ 0 & , \quad x \in \Omega \backslash \Omega_1, \end{cases}$$

de modo que $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Vamos denotar $u_\epsilon = \epsilon u$ para $\epsilon > 0$. Pelo Lema C.3, como Ω é de classe C^1, dado $v \in C_0^\infty(\Omega)$, com $v \geq 0$, vale

$$\int_\Omega \nabla u_\epsilon \nabla v = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \eta} v - \int_\Omega (\Delta u_\epsilon) v.$$

Como o suporte de v está contido em Ω e $u_\epsilon = 0$ em $\Omega \backslash \Omega_1$, concluímos que

$$\int_\Omega \nabla u_\epsilon \nabla v = -\int_{\Omega_1} (\Delta u_\epsilon) v. \tag{2.20}$$

Por $(H_4)'$, sabemos que existe $s_1 > 0$ tal que

$$f(x,s) \geq \lambda_1(\Omega_1) s,$$

sempre que $0 \leq s \leq s_1$. Logo, tomando $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon \|u\|_\infty \leq s_1$, temos que

$$f(x, u_\epsilon) \geq \lambda_1(\Omega_1) u_\epsilon, \tag{2.21}$$

pois $0 \leq \epsilon u \leq s_1$. Além disso, como φ_1 é uma λ_1-autofunção e $v \geq 0$, segue que $-(\Delta u_\epsilon) v = \lambda_1(\Omega_1) u_\epsilon v$. Logo, por (2.20) e (2.21),

$$\int_\Omega \nabla u_\epsilon \nabla v = -\int_{\Omega_1} (\Delta u_\epsilon) v = \int_{\Omega_1} \lambda_1(\Omega_1) u_\epsilon \leq \int_{\Omega_1} f(x, u_\epsilon) v. \tag{2.22}$$

Como $u_\epsilon = 0$ em $\Omega \backslash \Omega_1$ e (H_0) nos garante que $f(x,0) \geq 0$, então

$$\int_{\Omega \backslash \Omega_1} f(x, u_\epsilon) v \geq 0,$$

e portanto

$$\int_{\Omega_1} f(x,u_\epsilon) v \leq \int_{\Omega_1} f(x,u_\epsilon) v + \int_{\Omega \backslash \Omega_1} f(x,u_\epsilon) v = \int_\Omega f(x,u_\epsilon) v.$$

Logo, por (2.22), concluímos que

$$\int_\Omega \nabla u_\epsilon \nabla v \leq \int_\Omega f(x,u_\epsilon) v,$$

e assim u_ϵ é uma sub-solução fraca para o problema (P).

Como o suporte de φ_1 está contido em $\overline{\Omega_1}$ e além disso $\Omega_1 \subset\subset \Omega$, a super-solução Me atinge mínimo positivo em $\overline{\Omega_1}$. Portanto, se necessário, podemos tomar $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno de tal forma que $\epsilon \|u\| \leq \min\{Me(x); x \in \overline{\Omega}_1\}$. Tomando $\underline{c} = -\epsilon \|u\|_\infty$ e $\overline{c} = M\|e\|_\infty$, temos que $\underline{c} \leq \epsilon u_1 \leq Me \leq \overline{c}$ em Ω. Logo, pelo Teorema 1.3, o problema (P) admite uma solução fraca $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ que satisfaz $\epsilon u \leq u \leq Me$, o que demonstra o teorema.

□

2.3 Um resultado de não existência

Nessa seção apresentaremos um resultado de não existência de solução para o problema (P). Vamos supor que f satisfaz:

(H_6) existem $d_1 \in L^{(2^*)'}(\Omega)$, $d_2 > 0$ tais que

$$|f(x,s)| \leq d_1(x) + d_2 s^{2^*-1}$$

q.t.p. em Ω e para todo $s \geq 0$.

(H_7) Ω pode ser particionado como $\Omega = A_+ \cup A_- \cup A_0$, onde

$$\begin{aligned} A_+ &:= \{x \in \Omega : f(x,\cdot) \geq 0 \quad \text{com} \quad f(x,\cdot) \not\equiv 0\}, \\ A_- &:= \{x \in \Omega : f(x,\cdot) \leq 0 \quad \text{com} \quad f(x,\cdot) \not\equiv 0\}, \\ A_0 &:= \{x \in \Omega : f(x,\cdot) \equiv 0\}, \end{aligned}$$

e além disso, existe um subdomínio não-vazio $\widetilde{\Omega}$ tal que $A_+ \subset \widetilde{\Omega} \subset A_+ \cup A_0$, e adicionalmente $\widetilde{\Omega}$ é de classe C^1 caso $\Omega \neq \widetilde{\Omega}$.

(H_8) existem $0 \leq q < 1 < p$ e funções não negativas $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$ em $\widetilde{\Omega}$ tais que

$$f(x,s) \geq \widetilde{a}(x)s^q + \widetilde{b}(x)s^p \quad \text{q.t.p. em } \widetilde{\Omega} \text{ e para todo } s \geq 0,$$

$$\widetilde{m} := \widetilde{a}^{\frac{p-1}{p-q}} \widetilde{b}^{\frac{1-q}{p-q}} \not\equiv 0 \quad \text{em} \quad \widetilde{\Omega},$$

$$\widetilde{m} \in L^r(\widetilde{\Omega}) \quad \text{para algum} \quad r > \frac{N}{2}.$$

Teorema C *Suponha $(H_6) - (H_8)$ e denote por $\lambda_1(\widetilde{m}, \widetilde{\Omega})$ o primeiro autovalor do problema com peso*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda\, \widetilde{m}(x)\, u & \text{em } \widetilde{\Omega}, \\ u = 0 & \text{em } \partial\widetilde{\Omega}. \end{cases}$$

Então existe $c = c(p,q) > 0$ tal que o problema (P) não tem solução se

$$\lambda_1(\widetilde{m}, \widetilde{\Omega}) < c(p,q).$$

Como consequência do Teorema C, temos um corolário que garante, sob certas condições, não existência de soluções para o problema (P_λ).

Corolário 2.2 *Suponha que* $0 \leq q < 1 < p < 2^* - 1$, $a \in L^{\sigma_q}(\Omega)$ *e* $b \in L^{\sigma_p}(\Omega)$, *onde* σ_q *e* σ_p *foram definidos em* (H_3). *Suponha ainda que exista um subdomínio* $\widetilde{\Omega}$, *de classe* C^1 *caso* $\widetilde{\Omega} \neq \Omega$, *tais que*

$$\{a > 0\} \cup \{b > 0\} \subset \widetilde{\Omega} \subset \{a \geq 0\} \cap \{b \geq 0\},$$

$$\left| \left(\widetilde{\Omega} \cap \{a > 0\} \cap \{b > 0\} \right) \right| > 0,$$

$$\widetilde{m}(x) := a(x)^{\frac{p-1}{p-q}} b(x)^{\frac{1-q}{p-q}} \in L^r(\widetilde{\Omega}) \quad \textit{para algum} \quad r > \frac{N}{2}.$$

Então existe $\overline{c} = \overline{c}(p, q, \widetilde{\Omega}, a, b)$ *tal que o problema* (P_λ) *não tem solução se*

$$\lambda > \overline{c}.$$

Demonstração do Teorema C: Suponhamos, por contradição, que o problema (P) tem uma solução $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$. Vamos provar que

$$u > 0 \quad \text{em} \quad \widetilde{\Omega}.$$

Inicialmente, observemos que $u \not\equiv 0$ em A_+. De fato, pois se tivéssemos $u \equiv 0$ em A_+ então, pela formulação fraca do problema, teríamos

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 = \int_\Omega f(x,u)u = \int_{\Omega \setminus A_+} f(x,u)u + \int_{A_+} f(x,u)u.$$

Como por hipótese $u \geq 0$ em Ω e $f(x, \cdot) \leq 0$ em $\Omega \setminus A_+$, então

$$\int_{\Omega \setminus A_+} f(x,u)u \leq 0 \quad \text{e} \quad \int_{A_+} f(x,u)u = 0,$$

e portanto

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq 0,$$

o que implicaria $u \equiv 0$ em Ω, contrariando a hipótese de que $u \not\equiv 0$ em Ω. Logo $u \not\equiv 0$ em A_+. Desse modo, o fato de $A_+ \subset \widetilde{\Omega}$ nos dá $u \not\equiv 0$ em $\widetilde{\Omega}$. Além disso, tendo em vista que $\widetilde{\Omega} \subset A_+ \cup A_0$,

$$-\Delta u = f(x,u) \geq 0 \quad \text{em} \quad \widetilde{\Omega}.$$

Pelo Princípio do Máximo Forte (cf. [8]), temos que $u > 0$ em $\widetilde{\Omega}$.

Seja agora $v \in H_0^1(\widetilde{\Omega})$ tal que $v \geq 0$ em $\widetilde{\Omega}$. Usando o Lema C.3 e o fato de que $v \equiv 0$ em $\Omega \setminus \widetilde{\Omega}$, segue que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u \nabla v &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v - \int_\Omega v \Delta u \\ &= \int_{\widetilde{\Omega}} f(x,u)v + \int_{\Omega \setminus \widetilde{\Omega}} f(x,u)v \qquad (2.23) \\ &= \int_{\widetilde{\Omega}} f(x,u)v. \end{aligned}$$

Por (H_8), existem $0 \leq q < 1 < p$ e funções não-negativas $\widetilde{a}$ e $\widetilde{b}$ definidas em $\widetilde{\Omega}$ tais que

$$\int_{\widetilde{\Omega}} f(x,u)v \geq \int_{\widetilde{\Omega}} (\widetilde{a}(x)u^q + \widetilde{b}(x)u^p)v. \tag{2.24}$$

Mas pelo Lema C.1, existe uma constante $c = c(p,q) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{\widetilde{\Omega}} (\widetilde{a}(x)u^q + \widetilde{b}(x)u^p)v &\geq \int_{\widetilde{\Omega}} c\,\widetilde{a}(x)^{\frac{p-1}{p-q}}\,\widetilde{b}(x)^{\frac{1-q}{p-q}}\,u\,v \\ &= c\int_{\widetilde{\Omega}} \widetilde{m}(x)uv, \end{aligned} \tag{2.25}$$

onde $\widetilde{m} \in L^r(\widetilde{\Omega})$, para algum $r > \frac{N}{2}$. Logo por (2.23), (2.24) e (2.25)

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \geq c(p,q) \int_{\widetilde{\Omega}} \widetilde{m}(x)uv. \tag{2.26}$$

Tomemos agora $v = \varphi_1$, onde $\varphi_1 > 0$ é a autofunção associada ao autovalor $\lambda_1 = \lambda_1(\widetilde{m}, \widetilde{\Omega})$ de $-\Delta$ em $\widetilde{\Omega}$ com peso $\widetilde{m}$, ou seja, φ_1 é tal que

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_1 = \lambda_1\,\widetilde{m}\,\varphi_1 & \text{em } \widetilde{\Omega}, \\ \varphi_1 = 0 & \text{em } \partial\widetilde{\Omega}, \end{cases}$$

Suponhamos inicialmente que $\widetilde{\Omega} \neq \Omega$. Como $\widetilde{\Omega}$ é de classe C^2, segue que $\varphi_1 \in C^1(\widetilde{\Omega} \cup \partial\widetilde{\Omega}) \cap H^2(\widetilde{\Omega})$. Além disso, se $x \in \partial\widetilde{\Omega}$, então

$$\frac{\varphi_1(x + t\eta) - \varphi_1(x)}{t} \leq 0$$

para $t < 0$ suficientemente pequeno. Logo

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta}(x) = \lim_{t\to 0^-} \frac{\varphi_1(x+t\eta) - \varphi_1(x)}{t} \leq 0. \tag{2.27}$$

Logo, pelo Lema C.3 e por (2.27)

$$\begin{aligned} \int_{\widetilde{\Omega}} \nabla u \nabla \varphi_1 &= \int_{\partial\widetilde{\Omega}} u\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta} - \int_{\widetilde{\Omega}} u\Delta\varphi_1 \\ &\leq -\int_{\widetilde{\Omega}} u\Delta\varphi_1 \\ &= \lambda_1(\widetilde{m}, \widetilde{\Omega}) \int_{\widetilde{\Omega}} \widetilde{m}(x)u\varphi_1 > 0, \end{aligned} \tag{2.28}$$

tendo em vista que $\varphi_1 > 0$, $u > 0$ em $\widetilde{\Omega}$, $\widetilde{m} \geq 0$ em $\widetilde{\Omega}$ e $\widetilde{m} \not\equiv 0$. Combinando (2.26) com (2.28), temos que

$$\int_{\widetilde{\Omega}} \widetilde{m}(x)u\varphi \leq \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi = \int_{\widetilde{\Omega}} \nabla u \nabla \varphi \leq \lambda_1 \int_{\widetilde{\Omega}} \widetilde{m}(x)u\varphi.$$

Como $\int_{\widetilde{\Omega}} \widetilde{m}(x)u\varphi > 0$, segue que

$$c(p,q) \leq \lambda_1(\widetilde{m}, \widetilde{\Omega}).$$

Suponhamos agora que $\widetilde{\Omega} = \Omega$. Pelo Lema C.3, segue que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \int_\Omega u \Delta\varphi \\
&= -\int_\Omega u\Delta\varphi \\
&= \lambda_1(\widetilde{m}, \widetilde{\Omega}) \int_\Omega \widetilde{m}(x)u\varphi.
\end{aligned}$$

Mais uma vez, por (2.26), temos que

$$c(p,q) \leq \lambda_1(\widetilde{m}, \widetilde{\Omega}).$$

Ou seja, se (P) admite solução não trivial, então devemos ter $c \leq \lambda_1$.

$\square$

Usando o Teorema C, podemos provar o Corolário 2.2.

Demonstração do Corolário 2.2: A prova deste corolário é análoga à prova do Teorema C. Vamos denotar

$$B_+ := \{a > 0\} \cup \{b > 0\}$$

e

$$D_+ := \{a \geq 0\} \cap \{b \geq 0\}.$$

Suponhamos então que o problema (P_λ) tem uma solução $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$. Afirmamos que

$$u > 0 \;\text{ em }\; \widetilde{\Omega}.$$

De fato, note inicialmente que $u \not\equiv 0$ em B_+, pois caso $u \equiv 0$ em B_+, pela formulação fraca do problema

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 = \int_\Omega f(x,u)u = \int_{\Omega\setminus B_+} f(x,u)u + \int_{B_+} f(x,u)u.$$

Como estamos supondo $u \geq 0$ em Ω e além disso $f(x,u) = \lambda a(x)u^q + b(x)u^p \leq 0$ em $\Omega \setminus B_+ := \{a \leq 0\} \cup \{b \leq 0\}$,

$$\int_{\Omega\setminus B_+} f(x,u)u \leq 0 \;\text{ e }\; \int_{B_+} f(x,u)u = 0.$$

e portanto

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \leq 0,$$

o que implicaria $u \equiv 0$ em Ω, que é um absurdo. Logo $u \not\equiv 0$ em B_+. Como $B_+ \subset \widetilde{\Omega}$, então $u \not\equiv 0$ em $\widetilde{\Omega}$. Além disso, tendo em vista que $\widetilde{\Omega} \subset D_+$,

$$-\Delta u = f(x, u) = \lambda a(x) u^q + b(x) u^p \geq 0 \;\text{ em }\; \widetilde{\Omega}.$$

Como

$$\left| \left(\widetilde{\Omega} \cap \{a > 0\} \cap \{b > 0\} \right) \right| > 0,$$

pelo Princípio do Máximo Forte (cf. [8]), temos que $u > 0$ em $\widetilde{\Omega}$.

Seja agora $v \in H_0^1(\widetilde{\Omega})$ tal que $v \geq 0$ em $\widetilde{\Omega}$. Analogamente ao que foi feito em (2.23) temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \nabla v &= \int_{\widetilde{\Omega}} f(x, u) v \\ &= \int_{\Omega} (\lambda a(x) u^q + b(x) u^p) v. \end{aligned}$$

Pelo Lema C.1, existe uma constante $c = c(p, q) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{\widetilde{\Omega}} (\lambda a(x) u^q + b(x) u^p) v &\geq \int_{\widetilde{\Omega}} c \, (\lambda a(x))^{\frac{p-1}{p-q}} \, b(x)^{\frac{1-q}{p-q}} \, u \, v \\ &= c \lambda^{\frac{p-1}{p-q}} \int_{\widetilde{\Omega}} \widetilde{m}(x) u v. \end{aligned}$$

Logo

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \geq c(p, q) \lambda^{\frac{p-1}{p-q}} \int_{\widetilde{\Omega}} \widetilde{m}(x) u v.$$

Note que a expressão acima é análoga à (2.26). É suficiente repetir o argumento final da prova do Teorema C para concluir que

$$c(p, q) \lambda^{\frac{p-1}{p-q}} \leq \lambda_1(\widetilde{m}, \widetilde{\Omega}),$$

e portanto o problema (P) não admite solução não nula se

$$\lambda > \bar{c} = \left(\frac{\lambda_1(\widetilde{m}, \widetilde{\Omega})}{c(p, q)} \right)^{\frac{p-q}{p-1}}.$$

Portanto o corolário está demonstrado.

$\square$

Exemplo 1: Se $a \geq 0$ e $b \geq 0$ q.t.p. em Ω com $|\{a > 0\} \cap \{b > 0\}| > 0$, então o Corolário 2.2 se aplica, basta para isso tomarmos $\widetilde{\Omega} = \Omega$.

Exemplo 2: Se $\{a > 0\} = \{b > 0\}$ e este conjunto é um subdomínio não vazio de classe C^1, basta tomarmos $\widetilde{\Omega} = \{a > 0\}$, e de fato teremos

$$\{a > 0\} \cup \{b > 0\} \subset \widetilde{\Omega} \subset \{a \geq 0\} \cap \{b \geq 0\},$$

$$\left|\left(\widetilde{\Omega} \cap \{a > 0\} \cap \{b > 0\}\right)\right| > 0.$$

Portanto o Corolário 2.2 se aplica.

Exemplo 3: Caso $|\{a > 0\} \cap \{b > 0\}| > 0$ e $\{a > 0\} \cup \{b > 0\}$ tem fecho contido num subomínio $\Omega_1 \subset \Omega$ e tal que $\Omega_1 \subset \{a \geq 0\} \cap \{b \geq 0\}$, então basta tomarmos $\widetilde{\Omega} = \Omega_1$ e o Corolário 2.2 se aplica.

Apêndice A

Campo Pseudogradiente

Vamos denotar por X um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_{X'}$ a norma do dual de X.

Definição A.1 *Dizemos que $v \in X$ é um vetor pseudogradiente para I em $u \in X$, se*

(PG1) $\|v\| \leq 2\|I'(u)\|_{X'}$;

(PG2) $I'(u)v \geq \|I'(u)\|_{X'}^2$.

Observações:
(1) Se X é um espaço de Hilbert com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, então $\nabla I(u)$ é um vetor pseudogradiente para $I \in X$. De fato, pelo Teorema da Representação de Riez, para cada $u \in X$, temos que $\nabla I(u) \in X$ é o único vetor que satisfaz

$$I'(u)v = \langle \nabla I(u), v \rangle$$

e

$$\|I'(u)\|_{X'} = \|\nabla I(u)\|.$$

Dessa forma, para todo $u \in X$, temos

(i) $\|\nabla I(u)\| = \|I'(u)\|_{X'} \leq 2\|I'(u)\|_{X'}$

(ii) $I'(u)\nabla I(u) = \langle \nabla I(u), \nabla I(u) \rangle_X = \|\nabla I(u)\|^2 = \|I'(u)\|_{X'}^2$,

ou seja, $\nabla I(u)$ é um vetor pseudogradiente para I em u.

(2) Se $I'(u) \neq 0$, então existe um vetor pseudogradiente para I em u. De fato, lembrando que

$$\|I'(u)\|_{X'} = \sup_{\|w\|=1} I'(u)w,$$

então obtemos $w \in X$ tal que $\|w\| = 1$ e

$$I'(u)w > \frac{2}{3}\|I'(u)\|_{X'}.$$

Assim

$$y = \frac{3}{2}\|I'(u)\|_{X'} w$$

é um vetor pseudogradiente para I em u, pois

$$\|y\| = \frac{3}{2}\|I'(u)\|_{X'}\|w\| = \frac{3}{2}\|I'(u)\|_{X'} \leq 2\|I'(u)\|_{X'}$$

e

$$I'(u)y = I'(u)\frac{3}{2}\|I'(u)\|_{X'} w > \|I'(u)\|_{X'}^2.$$

Definição A.2 *Seja $\widetilde{X} = \{u \in X \ : \ I'(u) \neq 0\}$. Um campo pseudogradiente para I em $\widetilde{X}$ é uma aplicação $g : \widetilde{X} \to X$ tal que*

(i) *para cada $u \in \widetilde{X}$, $g(u)$ é um vetor pseudogradiente para I em u;*

(ii) *g é localmente lipschitziana.*

Lema A.1 *Se $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ então existe um campo pseudogradiente para I em $\widetilde{X}$.*

Demonstração: Dado $u \in \widetilde{X}$, temos que $y = \frac{3}{2}\|I'(u)\|_{X'} w$ é um vetor pseudogradiente para I em $u \in X$. Como I' é contínua, existe uma vizinhança aberta N_u de u tal que para todo $v \in N_u$ tem-se

$$\|y\| \leq 2\|I'(v)\|_{X'} \quad \text{e} \quad I'(v)y \geq \|I'(v)\|_{X'}^2. \tag{A.1}$$

Note que a família $\mathcal{N} = \{N_u : u \in X\}$ é uma cobertura aberta de $\widetilde{X}$. Como $\widetilde{X}$ é um espaço métrico, então $\widetilde{X}$ é paracompacto. Logo, existe uma cobertura aberta e localmente finita $\mathcal{M} = \{M_i : i \in \Lambda\}$ de $\widetilde{X}$ que refina $\mathcal{N}$. Assim, para cada $i \in \Lambda$, existe $v \in \widetilde{X}$ tal que $M_i \subset N_v$. Consequentemente, existe $y = y_i$ satisfazendo $(A.1)$ para todo $u \in M_i$.

Defina

$$d_i(u) = d(u, X \backslash M_i)$$

e

$$g(u) = \sum_{i \in \Lambda} \frac{d_i(u)}{\displaystyle\sum_{j \in \Lambda} d_j(u)} y_i.$$

Como o refinamento é localmente finito, cada $u \in \widetilde{X}$ pertence apenas a um número finito de M_i. Assim, as somas definidas em g são finitas, pois d_i se anula em $X \backslash M_i$. Logo, g está bem definida. E ainda, temos

$$0 \leq \frac{d_i(u)}{\sum_{j \in \Lambda} d_j(u)} \leq 1$$

e

$$\sum_{i\in\Lambda}\frac{d_i(u)}{\displaystyle\sum_{j\in\Lambda}d_j(u)}=\frac{1}{\displaystyle\sum_{j\in\Lambda}d_j(u)}\sum_{i\in\lambda}d_i(u)=1.$$

Vamos verificar que g é um campo pseudogradiente para I em $\widetilde{X}$.

Como y_i satisfaz $(A.1)$ para todo $u\in M_i$, temos

$$\|g(u)\|=\left\|\sum_{i\in\Lambda}\frac{d_i(u)}{\displaystyle\sum_{j\in\Lambda}d_j(u)}y_i\right\|=\|y_i\|\leq 2\,\|I'(u)\|_{X'}$$

e

$$I'(u)g(u)=I'(u)\sum_{i\in\Lambda}\frac{d_i(u)}{\displaystyle\sum_{j\in\Lambda}d_j(u)}y_i=I'(u)y_i\geq\|I'(u)\|^2_{X'}\,.$$

Além disso, g é localmente lipschitziana. De fato, por um procedimento análogo ao que fizemos para mostrar que a função ψ definida no Lema 1.1 é localmente lipschitiziana, mostramos que cada parcela

$$\frac{d_i(u)}{\sum_{j\in\Lambda}d_j(u)}y_i$$

é localmente lipschitiziana. Dessa forma, para cada $u\in\widetilde{X}$ existe uma vizinhança $V_u\subseteq\widetilde{X}$ tal que g restrito a V_u é uma soma finita de funções localmente lipschitizianas. Isso mostra que g é localmente lipschitiziana e conclui a prova do lema.

□

Apêndice B

Funcionais Diferenciáveis

Definição B.1 *Sejam X um espaço de Banach e U um subconjunto aberto de X. Dizemos que o funcional $I : U \to \mathbb{R}$. tem derivada de Gateux $L \in X'$ em $u \in U$ se, para $v \in X$,*

$$\lim_{t \to 0} \frac{I(u + tv) - I(u)}{t} = Lv.$$

A derivada de Gateux de I em u é denotada por $I'(u)$. O funcional I tem derivada de Fréchet $L \in X'$ em $u \in U$, se

$$\lim_{v \to 0} \frac{I(u + v) - I(u) - Lv}{\|v\|} = 0.$$

Dizemos que o funcional $I : U \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 em U, $I \in C^1(U, \mathbb{R})$, se a derivada de Fréchet de I existe e é contínua sobre U.

Observações:
(1) A derivada de Gateux é dada por

$$I'(u)v = \lim_{t \to 0} \frac{I(u + tv) - I(u)}{t}.$$

(2) Todo funcional Fréchet diferenciável é também Gateux diferenciável.

Proposição B.1 *Se I tem derivada de Gateux contínua em U, então $I \in C^1(U, \mathbb{R})$.*

Demonstração: Sejam $u + v$ e $u \in U$. Como I possui derivada de Gateaux sobre U, então pelo Teorema do Valor Médio existe $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$I(u + v) - I(u) = I'(u + \theta v)v.$$

Note que

$$I(u + v) - I(u) - I'(u)v = I'(u + \theta v)v - I'(u)v,$$

donde

$$\begin{aligned}\frac{1}{\|v\|}[I(u+v)-I(u)-I'(u)v] &= \frac{1}{\|v\|}[I'(u+\theta v)v-I'(u)v] \\ &= [I'(u+\theta v)-I'(u)]\frac{v}{\|v\|}.\end{aligned}$$

Deste modo,

$$\left|\frac{1}{\|v\|}[I(u+v)-I(u)-I'(u)v]\right| \leq \| \ [I'(u+\theta v)-I'(u)] \ \|.$$

Como, por hipótese, a derivada de Gateux é contínua, segue que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $||v|| < \delta$, então

$$\| \ [I'(u+\theta v)-I'(u)] \ \| < \epsilon.$$

Logo,

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{\|v\|}[I(u+v)-I(u)-I'(u)v] = 0.$$

Deste modo, temos que a derivada de Fréchet existe e é igual a derivada de Gateux que, por hipótese, é contínua. Logo, $I \in C^1(U, \mathbb{R})$.

□

Vamos agora considerar os funcionais J, J_0 no espaço $H_0^1(\Omega)$ definidos por

$$J_0(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx = \frac{1}{2}\|u\|^2$$

e

$$J(u) = \int_\Omega F(x,u)dx, \tag{B.1}$$

onde $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz as propriedades que serão introduzidas no decorrer do texto e $F(x,s) = \displaystyle\int_0^s f(x,t)dt$.

Proposição B.2 $J_0 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Demonstração: Vamos verificar a existência da derivada de Gateux de J_0. Dado $u \in H_0^1(\Omega)$, para cada $v \in H_0^1(\Omega)$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\|u+tv\|^2-\|u\|^2}{t} &= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}[2\langle u,v\rangle + t\|v\|^2] \\ &= \langle u,v\rangle\end{aligned}$$

Logo, a derivada de Gateux existe e é dada por

$$J_0'(u)v = \langle u,v\rangle.$$

Vamos mostrar que ela é contínua. Para tal, tome $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ com $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$. Dado $\epsilon > 0$ e $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\|v\| \leq 1$, temos que, para n suficentemente grande,

$$\begin{aligned} |(J_0'(u_n) - J_0'(u))v| &= |J_0'(u_n - u)v| \\ &= |\langle u_n - u, v\rangle| \\ &\leq \|u_n - u\| \ \|v\| \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

implicando que

$$\|J_0'(u_n) - J_0'(u)\|_{H_0^1(\Omega)'} = \sup_{\substack{\|v\|\leq 1 \\ v\in H_0^1(\Omega)}} |(J_0'(u_n) - J_0'(u))v| \leq \epsilon.$$

Portanto,

$$\|J_0'(u_n) - J_0'(u)\|_{H_0^1(\Omega)'} \to 0 \ \text{ quando } \ n \to \infty.$$

Logo, J_0' é contínuo. Pela Proposição $B.1$, $J_0 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

$\square$

Lema B.1 *Sejam Ω um domínio limitado e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory. Suponha que existam $1 \leq \sigma < 2^*$, $d_1 \in L^{\sigma'}(\Omega)$ e $d_2 > 0$ tais que*

$$|f(x,s)| \leq d_1(x) + d_2|s|^{\sigma-1}$$

q.t.p. em Ω e para todo $s \in \mathbb{R}$. Então o operador $G : L^{\sigma}(\Omega) \to L^{\sigma'}(\Omega)$ dado por

$$G(u) = f(x, u(x))$$

está bem definido e é contínuo.

Demonstração: Vamos mostrar inicialmente que G está bem difinido. Para isto, seja $u \in L^{\sigma}(\Omega)$ e observe que

$$\begin{aligned} \|G(u)\|_{\sigma'}^{\sigma'} &= \int_\Omega |f(x,u(x))|^{\sigma'} dx \\ &\leq \int_\Omega \left(d_1(x) + d_2 |u(x)|^{\sigma-1}\right)^{\sigma'} dx \\ &\leq 2^{\sigma'-1} \int_\Omega \left(d_1(x)^{\sigma'} + d_2^{\sigma'} |u(x)|^{\sigma}\right) dx \\ &= 2^{\sigma'-1}\|d_1\|_{\sigma'}^{\sigma'} + 2^{\sigma'-1} d_2^{\sigma'} \|u\|_{\sigma}^{\sigma} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

e portanto G está bem difinido.

Seja agora $(u_n) \subset L^\sigma(\Omega)$ tal que $u_n \to u \in L^\sigma(\Omega)$. Então, a menos de subsequência,

$$u_n(x) \to u(x) \ \text{ q.t.p em } \ \Omega \ \text{ e } \ |u_n(x)| \leq \psi_\sigma(x) \in L^\sigma(\Omega).$$

Além disso, por hipótese

$$\begin{aligned}
|f(x,u_n) - f(x,u)|^{\sigma'} &\leq (|f(x,u_n)| + |f(x,u)|)^{\sigma'} \\
&\leq 2^{\sigma'-1}(|f(x,u_n)|^{\sigma'} + |f(x,u)|^{\sigma'}) \\
&\leq 2^{\sigma'-1}\left[\left(d_1(x) + d_2|u_n|^{\sigma-1}\right)^{\sigma'} + \left(d_1(x) + d_2|u|^{\sigma-1}\right)^{\sigma'}\right] \\
&\leq 2^{\sigma'-1}[2^{\sigma'-1}(d_1(x)^{\sigma'} + d_2^{\sigma'}|u_n|^\sigma) + 2^{\sigma'-1}(d_1(x)^{\sigma'} + d_2^{\sigma'}|u|^\sigma)] \\
&\leq C_1 d_1(x)^{\sigma'} + C_2(|u_n|^\sigma + |u|^\sigma), \\
&\leq C_1 d_1(x)^{\sigma'} + 2C_2\psi_\sigma^\sigma(x) \in L^1(\Omega),
\end{aligned}$$

pois $C_1 d_1(x)^{\sigma'} \in L^1(\Omega)$ e $\psi_\sigma^\sigma(x) \in L^1(\Omega)$. Pelo Teorema da Convergência Dominada, segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|G(u_n) - G(u)\|_{\sigma'}^{\sigma'} &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |G(u_n) - G(u)|^{\sigma'} dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f(x,u_n(x)) - f(x,u)|^{\sigma'} dx \\
&= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} |f(x,u_n(x)) - f(x,u)|^{\sigma'} dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, a menos de subsequência $G(u_n) \to G(u)$ em $L^{\sigma'}(\Omega)$. Mas o argumento é válido para a sequência, pois caso contrário, existiria uma constante $c > 0$ e uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ tal que $|G(u_{n_j}) - G(u)| > c$ para todo n_j. Mas repetindo todo argumento para a subsequência, teríamos uma contradição. Logo G é um operador contínuo.

□

Proposição B.3 *Sejam Ω um domínio limitado e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory. Suponha que existam $1 \leq \sigma < 2^*$, $d_1 \in L^{\sigma'}(\Omega)$ e $d_2 > 0$ tais que*

$$|f(x,s)| \leq d_1(x) + d_2|s|^{\sigma-1}$$

q.t.p. em Ω *e para todo* $s \in \mathbb{R}$*. Então o funcional* J *definido em* $(B.1)$ *é de classe* C^1 *de* $H_0^1(\Omega)$ *em* $\mathbb{R}$*, com*

$$J'(u)v = \int_\Omega f(x,u)v\,dx$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$*. Além disso*

$$J' : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)'$$

é compacto.

Demonstração: Vamos mostrar que J possui derivada de Gateux e ela é contínua. Para isso fixemos $u, v \in H_0^1(\Omega)$ e $t \in [0,1]$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\frac{F(x,u+tv) - F(x,u)}{t} = f(x, u+\theta tv)v,$$

pois $\dfrac{dF}{ds}(x,s) = f(x,s)$. Quando $t \to 0$, temos que

$$f(x,u+\theta tv) \longrightarrow f(x,u).$$

Vamos provar que $f(x,u+\theta tv)v$ é limitada por uma função integrável. Para tal, observemos que

$$|f(x,u+\theta tv)v| \leq |d_1(x)v| + d_2|u+\theta tv|^{\sigma-1}\,|v|.$$

Usando o fato de que $d_1 \in L^{\sigma'}(\Omega)$, $v \in L^\sigma(\Omega)$ e a desigualdade de Hölder, temos que

$$\int_\Omega |d_1(x)v|dx \leq \|d_1\|_{\sigma'}\,\|v\|_\sigma < \infty.$$

Logo, $|d_1(x)v| \in L^1(\Omega)$. Por outro lado, usando a desigualdade de Young com σ e σ',

$$\begin{aligned}
|u+\theta tv|^{\sigma-1}\,|v| &\leq \frac{|u+\theta tv|^{\sigma'(\sigma-1)}}{\sigma'} + \frac{|v|^\sigma}{\sigma} \\
&\leq \frac{2^{\sigma-1}(|u|^\sigma + |\theta t|^\sigma\,|v|^\sigma)}{\sigma'} + \frac{|v|^\sigma}{\sigma} \\
&\leq C_1|u|^\sigma + C_2|v|^\sigma \in L^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Portanto $|f(x,u+\theta tv)v| \leq g(x) \in L^1(\Omega)$. Pelo Teorema da Convergência Dominada, podemos obter

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{J(u+tv)-J(u)}{t} &= \lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{F(x,u+tv)-F(x,u)}{t}\,dx \\
&= \lim_{t\to 0}\int_\Omega f(x,u+\theta tv)v\,dx \\
&= \int_\Omega \lim_{t\to 0} f(x,u+\theta tv)v\,dx \\
&= \int_\Omega f(x,u)v\,dx.
\end{aligned}$$

Consideremos agora o funcional

$$\begin{array}{rcccc}
J'(u) & : & H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & & v & \longmapsto & \displaystyle\int_\Omega f(x,u)v\,dx
\end{array}$$

que é um funcional linear e contínuo. De fato, para v_1, $v_2 \in H_0^1(\Omega)$ e $c \in \mathbb{R}$, vale

$$\begin{aligned}
J'(u)(v_1+Cv_2) &= \int_\Omega f(x,u)(v_1+Cv_2)\,dx \\
&= \int_\Omega f(x,u)v_1 + f(x,u)Cv_2\,dx \\
&= \int_\Omega f(x,u)v_1\,dx + \int_\Omega f(x,u)Cv_2\,dx \\
&= \int_\Omega f(x,u)v_1\,dx + C\int_\Omega f(x,u)v_2\,dx \\
&= J'(u)(v_1) + CJ'(u)(v_2).
\end{aligned}$$

Além disso, utilizando a hipótese, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, temos que

$$\begin{aligned}
|J'(u)v| &= \left|\int_\Omega f(x,u)v\,dx\right| \\
&\leq \int_\Omega |f(x,u)v|\,dx \\
&\leq \int_\Omega (d_1(x) + d_2|u|^{\sigma-1})|v|\,dx \\
&= \int_\Omega |d_1(x)|\,|v|\,dx + \int_\Omega d_2|u|^{\sigma-1}|v|\,dx.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder com expoentes σ e σ', temos

$$\int_\Omega |d_1(x)|\,|v|\;dx \le \left(\int_\Omega |d_1(x)|^{\sigma'}\,dx\right)^{\frac{1}{\sigma'}} \left(\int_\Omega |v|^{\sigma}\;dx\right)^{\frac{1}{\sigma}} = \|d_1\|_{\sigma'}\|v\|_\sigma \tag{B.2}$$

e

$$\int_\Omega |u|^{\sigma-1}\,|v|\;dx \le \left(\int_\Omega |u|^{\sigma'(\sigma-1)}\,dx\right)^{\frac{1}{\sigma'}} \left(\int_\Omega |v|^{\sigma}\;dx\right)^{\frac{1}{\sigma}} = \|u\|_{\sigma'}^{\sigma-1}\|v\|_\sigma \tag{B.3}$$

Tomando como constantes positivas $C_4 = \|d_1\|_{\sigma'}$, $C_5 = \|u\|_{\sigma'}^{\sigma-1}$ e $C_6 = \max\{C_4, C_5\}$, segue de (B.2) e (B.3) que

$$\begin{aligned} |J'(u)v| &\le C_6\|v\|_\sigma \\ &\le C_7\|v\|, \end{aligned}$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, onde usamos o fato de que a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^\sigma(\Omega)$ é contínua. Logo, $J'(u) \in L^\sigma(\Omega)'$.

Vamos mostrar agora que J' é contínua em u. Para tal, seja $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$. Pela desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned} \Big|(J'(u_n) - J'(u))v\Big| &= \left|\int_\Omega (f(x,u_n) - f(x,u))v dx\right| \\ &= \left|\int_\Omega (G(u_n) - G(u))v dx\right| \\ &\le \int_\Omega |G(u_n) - G(u)||v|\,dx \\ &\le \|G(u_n) - G(u)\|_{\sigma'}\|v\|_\sigma \\ &\le C_8\|G(u_n) - G(u)\|_{\sigma'}\|v\|. \end{aligned}$$

Pelo Lema $B.1$, o operador $G : L^\sigma(\Omega) \to L^{\sigma'}(\Omega)$ dado por

$$G(u) = f(x, u(x))$$

é contínuo, ou seja, $G(u_n) \to G(u)$ em $L^{\sigma'}(\Omega)$. Dessa forma, temos

$$|(J'(u_n) - J(u))v| \le \epsilon\|v\| \;\text{ sempre que }\; n \ge n_0.$$

Então segue que,

$$\lim_{n\to\infty} \|J'(u_n) - J'(u)\|_{H_0^1(\Omega)'} = \lim_{n\to\infty} \sup_{\|v\|\neq 0} \frac{|(J'(u_n) - J'(u))v|}{\|v\|} = 0.$$

Logo, J' é contínua em u. Portanto, $J \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Vamos mostrar que J' é compacto. Para tal, usaremos o fato de que a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^\sigma(\Omega)$ é compacta pois $1 \le \sigma < 2^*$. Assim, se $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ é uma sequência limitada, a menos de subsequência, $u_n \to u$ em $L^\sigma(\Omega)$. Então

$$G(u_n) \to G(u) \;\text{ em }\; L^{\sigma'}(\Omega). \tag{B.4}$$

Mas $J'(u)$ é linear e limitado, então usando (B.4) podemos concluir analogamente ao que foi feito anteriormente que $J'(u_n) \longrightarrow J'(u)$. Portanto J' é compacto.

$\square$

Proposição B.4 *Suponha* (H_1)*. Então o funcional* I *é fracamente semicontínuo inferiormente.*

Demonstração: Seja $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$. A função $\|\cdot\|^2$ é fracamente semicontínua inferiormente, ou seja

$$\|u\|^2 \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|u_n\|^2. \tag{B.5}$$

Por outro lado, como $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$, então (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Como $\sigma < 2^*$, a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^\sigma(\Omega)$ é compacta. Sendo assim

$$\begin{cases} u_{n_j} \to u \ \text{ em } \ L^\sigma(\Omega), \\ u_{n_j}(x) \to u(x) \ \text{ q.t.p. em } \ \Omega, \\ |u_{n_j}| \leq h(x) \ \text{ q.t.p. em } \ \Omega, \quad h \in L^\sigma(\Omega), \\ F(x, u_{n_j}(x)) \to F(x, u(x)) \ \text{ q.t.p. em } \ \Omega, \end{cases} \tag{B.6}$$

para alguma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$. Além disso, por (H_1), existem $1 \leq \sigma < 2^*$, $d_1 \in L^{\sigma'}(\Omega)$ e $d_2 > 0$ tais que

$$|f(x,s)| \leq d_1(x) + d_2|s|^{\sigma-1},$$

q.t.p. em Ω e para todo $s \geq 0$. Integrando de 0 a s,

$$|F(x,s)| \leq d_1(x)|s| + d_3|s|^\sigma,$$

para alguma constante $d_3 > 0$. Logo por (B.6)

$$\begin{aligned} |F(x, u_{n_j})| &\leq d_1(x)|u_{n_j}| + d_3|u_{n_j}|^\sigma \\ &\leq d_1(x)h(x) + d_3|u_{n_j}|^\sigma \\ &= g(x) \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Esse último fato e (B.6) nos permite usar o Teorema da Convergência Dominada para garantir que

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega F(x, u_{n_j})dx = \int_\Omega F(x, u_{n_j})dx = \int_\Omega F(x,u)dx. \tag{B.7}$$

Vale observarmos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega F(x, u_n)\, dx = \int_\Omega F(x,u)\, dx, \tag{B.8}$$

pois caso contrário, existiria uma constante $d > 0$ e uma subsequência $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ tal que

$$\left| \int_\Omega F(x, u_{n_k})\, dx - \int_\Omega F(x,u)dx \right| \geq d.$$

Mas (u_{n_k}) também é limitada, e o mesmo argumento em (B.6) nos daria uma contradição. Logo, por (B.5) e (B.7),

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} I(u_n) &= \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_\Omega F(x,u_n)dx \right) \\
&\geq \frac{1}{2} \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|^2 + \liminf_{n\to\infty} \left(- \int_\Omega F(x,u_n)dx \right) \\
&= \frac{1}{2} \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|^2 - \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega F(x,u_n)dx \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega F(x,u)dx \\
&= I(u),
\end{aligned}$$

ou seja, I é fracamente semicontínuo inferiormente.

$\square$

Apêndice C

Lemas Técnicos

Lema C.1 *Sejam* $A, B \geq 0$ *e* $0 \leq q < 1 < p$. *Então existe uma constante* $c = c(p,q) > 0$ *tal que*

$$As^q + Bs^p \geq cA^{\frac{p-q}{p-q}}B^{\frac{1-q}{p-q}}s$$

para todo $s \geq 0$.

Demonstração: Se $s = 0$ a desigualdade é imediata. Suponhamos $s > 0$. Observemos que

$$s^{q\left(\frac{p-1}{p-q}\right)}s^{p\left(\frac{1-q}{p-q}\right)} = s^{\frac{qp-q+p-pq}{p-q}} = s^{\frac{p-q}{p-q}} = s. \tag{C.1}$$

Além disso,

$$\frac{1}{\frac{p-q}{p-1}} + \frac{1}{\frac{p-q}{1-q}} = \frac{p-q}{p-q} + \frac{1-q}{p-q} = 1$$

e como $0 \leq q < 1 < p$, temos que

$$\frac{p-1}{p-q} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{1-q}{p-q} > 0$$

e portanto esses dois números são conjugados. Pela desigualdade de Young e usando (C.1), segue que

$$\begin{aligned}
A^{\frac{p-1}{p-q}}B^{\frac{1-q}{p-q}}s &= \left(A^{\frac{p-1}{p-q}}s^{q\left(\frac{p-1}{p-q}\right)}\right)\left(B^{\frac{1-q}{p-q}}s^{p\left(\frac{1-q}{p-q}\right)}\right) \\
&\leq \frac{\left(A^{\frac{p-1}{p-q}}s^{q\left(\frac{p-1}{p-q}\right)}\right)^{\frac{p-q}{p-1}}}{\frac{p-q}{p-1}} + \frac{\left(B^{\frac{1-q}{p-q}}s^{p\left(\frac{1-q}{p-q}\right)}\right)^{\frac{p-q}{1-q}}}{\frac{p-q}{1-q}} \\
&= As^q\left(\frac{p-1}{p-q}\right) + Bs^p\left(\frac{1-q}{p-q}\right) \\
&\leq \tilde{c}(As^q + Bs^p)
\end{aligned}$$

onde $\tilde{c} = \max\{\frac{p-1}{p-q}, \frac{1-q}{p-q}\}$. Tomando $c^{-1} = \tilde{c}$ segue que

$$As^q + Bs^p \geq cA^{\frac{p-q}{p-q}}B^{\frac{1-q}{p-q}}s$$

o que conclui a prova do lema.

□

Lema C.2 *Sejam $0 \leq q < 1 < p$, $A > 0$, $B > 0$, e considere a função*

$$\Phi_{A,B}(t) := t^2 - At^{q+1} - Bt^{p+1}$$

para $t \geq 0$. Então $\max\{\Phi_{A,B}(t) : t \geq 0\}$ é positivo se, e somente se,

$$A^{p-1}B^{1-q} < \frac{(p-1)^{p-1}(1-q)^{1-q}}{(p-q)^{p-q}} := \eta_1(p,q).$$

Além disso, para $t = t_B := \left[\frac{1-q}{B(p-q)}\right]^{\frac{1}{p-1}}$, tem-se que

$$\Phi_{A,B}(t_B) = t_B^2 \left[\frac{p-1}{p-q} - AB^{\frac{1-q}{p-1}} \left(\frac{p-q}{1-q}\right)^{\frac{1-q}{p-1}}\right].$$

Demonstração: Como podemos escrever $\Phi_{A,B}(t) = t^{q+1}(t_{1-q} - A - bt^{p-q})$, então $\Phi_{A,B}(t) > 0$ se, e somente se $t^{1-q} - A - Br^{p-q} > 0$. Vamos determinar o ponto crítico de $\Phi_{A,B}$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(t^{1-q} - A - Br^{p-q}) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (1-q)t^{-q} - B(p-q)t^{p-q-1} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad B(p-q)t^{p-q-1} = (1-q)t^{-q} \\
&\Leftrightarrow \quad (t^{p-q-1})^{-\frac{1}{q}=\left[\frac{(1-q)}{B(p-q)}t^{-q}\right]^{-\frac{1}{q}}} \\
&\Leftrightarrow \quad t^{\frac{-p+q+1}{q}}t^{-1} = \left[\frac{(1-q)}{B(p-q)}\right]^{-\frac{1}{q}} \\
&\Leftrightarrow \quad t^{\frac{-p+1}{q}} = \left[\frac{(1-q)}{B(p-q)}\right]^{-\frac{1}{q}} \\
&\Leftrightarrow \quad t = t_B := \left[\frac{(1-q)}{B(p-q)}\right]^{-\frac{1}{p-1}}.
\end{aligned}$$

Observemos agora que, como $\Phi_{A,B}(t) = t^2(1 - At^{q-1} - Bt^{p-1})$, temos

$$\begin{aligned}
\Phi_{A,B}(t_B) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - At_B^{q-1} - Bt_B^{p-1} > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 1 - A\frac{(1-q)^{\frac{q-1}{p-1}}}{B^{\frac{q-1}{p-1}}(p-q)^{\frac{q-1}{p-1}}} - B\frac{(1-q)^{\frac{p-1}{p-1}}}{B^{\frac{p-1}{p-1}}(p-q)^{\frac{p-1}{p-1}}} > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{p-q}{p-q} - AB^{\frac{1-q}{p-1}}\left(\frac{p-q}{1-q}\right)^{\frac{1-q}{p-1}} > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{p-1}{p-q}\right) > A^{p-1}B^{1-q}\left(\frac{p-q}{1-q}\right)^{1-q} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{(p-1)^{p-1}(1-q)^{1-q}}{(p-q)^{p-q}} > A^{p-1}B^{1-q}.
\end{aligned}$$

Logo, segue que

$$\Phi_{A,B}(t_B) = t_B^2\left[\frac{p-1}{p-q} - AB^{\frac{1-q}{p-1}}\left(\frac{p-q}{1-q}\right)^{\frac{1-q}{p-1}}\right],$$

o que conclui a prova do lema.

$\square$

Lema C.3 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domíno limitado de classe C^1, $u \in H^2(\Omega)$ e $v \in H^1(\Omega)$. Então*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v - \int_\Omega (\Delta u) v,$$

onde $\eta = \eta(x)$ denota o vetor normal exterior a $x \in \partial\Omega$.

Demonstração: Como $C^\infty(\Omega)$ é denso tanto em $H^1(\Omega)$ quanto em $H^2(\Omega)$, existem sequências (u_n), $(v_n) \subset C^\infty(\Omega)$ tais que $u_n \to u$ em $H^2(\Omega)$ e $v_n \to v$ em $H^1(\Omega)$. Logo, a menos de subsequência, para cada $i = 1, \ldots, n$

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i} \to \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \;,\; \dfrac{\partial v_n}{\partial x_i} \to \dfrac{\partial v}{\partial x_i} \;,\; \dfrac{\partial^2 u_n}{\partial {x_i}^2} \to \dfrac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} \text{ em } L^2(\Omega), \\
\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \to \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x) \;,\; \dfrac{\partial v_n}{\partial x_i}(x) \to \dfrac{\partial v}{\partial x_i}(x) \;,\; \dfrac{\partial^2 u_n}{\partial {x_i}^2}(x) \to \dfrac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2}(x) \text{ q.t.p. em } \Omega, \\
\left|\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right| \leq \varphi_i(x) \;,\; \left|\dfrac{\partial v_n}{\partial x_i}(x)\right| \leq \psi_i(x) \;,\; \left|\dfrac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2}(x)\right| \leq \phi_i(x) \text{ q.t.p. em } \Omega
\end{cases}$$

para funções φ_i, ψ_i, $\phi_i \in L^2(\Omega)$. Logo

$$\nabla u_n(x) \nabla v_n(x) \to \nabla u(x) \nabla v(x) \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

$$|\nabla u_n(x)\nabla v_n(x)| \leq \varphi_1(x)\psi_1(x) + \ldots + \varphi_N(x)\psi_N(x) = h_1(x)$$

onde $h_1(x) \in L^1(\Omega)$. Vale também

$$\frac{\partial u_n}{\partial \eta}(x)v_n(x) \to \frac{\partial u}{\partial \eta}(x)v(x) \ \text{ q.t.p. em } \ \Omega,$$

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial u_n}{\partial \eta}(x)v_n(x)\right| &= |\langle \nabla u_n(x), \eta\rangle||v_n(x)| \\ &\leq c\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_j}(x)\right||v_n(x)| \\ &\leq |\varphi_j(x)| \cdot |v_n(x)| \\ &= g(x) \end{aligned}$$

para alguma função $h_2 \in L^1(\Omega)$ e onde c é uma constante. E também

$$(\Delta u_n(x))v_n(x) \to \ (\Delta u(x))(v(x)) \ \text{ q.t.p. em } \ \ \Omega,$$

$$\begin{aligned} |(\Delta u_n(x))v_n(x)| &\leq \left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_1^2}(x)v_n(x)\right| + \ldots + \left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_N^2}(x)v_n(x)\right| \\ &\leq |\phi_1(x)| \cdot |v_n(x)| + \ldots + |\phi_N(x)| \cdot |v_n(x)| \\ &\leq h_3(x)|v_n(x)| \\ &\leq h_4(x) \end{aligned}$$

para alguma função $h_3 \in L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$.

Como para cada $m \in \mathbb{N}$, u_n, $v_n \in C^\infty(\Omega)$, pelo teorema da divergência vale

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla v_n = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_n}{\partial \eta} v_n - \int_\Omega (\Delta u_n) v_n$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada segue que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u_n \nabla v_n &\to \int_\Omega \nabla u \nabla v, \\ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_n}{\partial \eta} v_n &\to \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v, \\ \int_\Omega (\Delta u_n) v_n &\to \int_\Omega (\Delta u) v, \end{aligned}$$

e portanto, para cada $u \in H^2(\Omega)$ e $v \in H^1(\Omega)$ temos que

$$\int_\Omega \Delta u \Delta v = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v - \int_\Omega (\nabla u) v.$$

□

Apêndice D

Resultados Gerais

Nesta seção enunciaremos algumas definições e os principais teoremas utilizados nesta dissertação.

Definição D.1 *Dados $x \in X$ e um conjunto não vazio $T \subset X$, definimos a distância de x até o conjunto T por*

$$d(x,T) = \inf\{||x-y||_X : y \in T\}.$$

Proposição D.1 *Para $T \subset X$ não vazio, a aplicação $d_T : X \to \mathbb{R}$ dada por $d_T(x) = d(x,T)$ é uma contração fraca, isto é, para $x, y \in X$ tem-se*

$$|d(x,T) - d(y,T)| \leq ||x-y||_X.$$

Demonstração: Usando a desigualdade triangular e fixando $t \in T$ qualquer, temos

$$d(x,T) \leq d(x,t) \leq d(x,y) + d(y,t),$$

ou seja, $d(x,T) - d(x,y) \leq d(y,t)$. Esta desigualdade valendo para todo t, concluímos que $d(x,T) - d(x,y) \leq d(y,T)$, ou seja,

$$d(x,T) - d(y,T) \leq d(x,y).$$

Trocando x por y, mostramos analogamente que

$$-d(x,y) \leq d(x,T) - d(y,T)$$

Portanto,

$$|d(x,T) - d(y,T)| \leq d(x,y) \leq ||x-y||_X.$$

$\square$

Sejam M, N espaços métricos.

Definição D.2 *Dada $f : M \to N$, suponhamos que exista uma constante $c > 0$ (chamada constante de Lipschitz) tal que*

$$\|f(x) - f(y)\|_N \leq c\,\|x - y\|_M$$

quaisquer que sejam $x, y \in M$. Dizemos então que f é uma aplicação lipschitiziana.

Definição D.3 *Uma aplicação $f : M \to N$ chama-se localmente lipschitiziana quando cada ponto $a \in M$ é centro de uma bola $B_a(r)$ tal que a restrição $f|_B$ é lipschitiziana.*

Proposição D.2 *A aplicação $d_T : X \to \mathbb{R}$ dada por $d_T(x) = d(x, T)$ é localmente lipschitizana.*

Demonstração: Tomando $c = 1$, temos pela Proposição $D.1$ que

$$|d(x, T) - d(y, T)| \leq ||x - y||,$$

isto é, d_T é lipschitiziana, donde é localmente lipschitiziana.

$\square$

Teorema D.1 (cf. [3]) *Seja X um espaço de Banach reflexivo. Se (u_n) é uma sequência limitada em X, então existem uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e $u \in X$ tais que*

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \text{ fracamente em } X.$$

Proposição D.3 *Sejam (u_n) e (v_n) sequências em $L^2(\Omega)$ tais que*

(i) *$u_n \rightharpoonup u$ em $L^2(\Omega)$;*

(ii) *$v_n \to v$ em $L^2(\Omega)$.*

Então

$$\langle u_n, v_n \rangle_{L^2} \to \langle u, v \rangle_{L^2}.$$

Demonstração: Note que

$$\begin{aligned} |\langle u_n, v_n \rangle_{L^2} - \langle u, v \rangle_{L^2}| &= |\langle u_n, v_n \rangle_{L^2} - \langle u, v \rangle_{L^2} \pm \langle u_n, v \rangle_{L^2}| \\ &\leq |\langle u_n, v_n \rangle_{L^2} - \langle v_n, v \rangle_{L^2}| - |\langle u, v \rangle_{L^2} - \langle u_n, v \rangle_{L^2}| \\ &\leq \|u_n\|_{L^2} \|v_n - v\|_{L^2} + |\langle u_n - u, v \rangle_{L^2}|. \end{aligned}$$

Por (i) segue que $\langle u_n - u, v \rangle_{L^2} \to 0$. Por (ii) e como $\|u_n\|_{L^2}$ é limitada, temos que $\|u_n\| \|v_n - v\|_{L^2} \to 0$. Logo $\langle u_n, v_n \rangle_{L^2} \to \langle u, v \rangle_{L^2}$.

Os resultados abaixo estão provados em [7].

Teorema D.2 *Seja* (f_n) *uma sequência em* $L^p(\Omega)$ *e* $f \in L^{p'}(\Omega)$, *tais que*

$$\|f_n - f\|_{L^p} \to 0.$$

Então existe uma subsequência $(f_{n_j}) \subset (f_n)$ *tal que*

(i) $f_{n_j} \to f(x)$ *q.t.p. em* Ω;

(ii) $\left|f_{n_j}\right| \leq h(x)\ \forall j$ *e q.t.p em* Ω, *com* $h \in L^p(\Omega)$

Teorema D.3 (Desigualdade de Hölder) *Sejam* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^{p'}(\Omega)$, *onde* p' *é tal que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

com $1 \leq p \leq \infty$. *Então* $f.g \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Teorema D.4 (Teorema da Convegência Dominada de Lebesgue) *Seja* $(f_n) \subset L^1(\Omega)$ *uma sequência de funções. Suponhamos que*

(i) $f_n(x) \to f(x)$ *q.t.p em* Ω;

(ii) *existe uma função* $g \in L^1(\Omega)$ *tal que, para cada* $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ *q.t.p em* Ω.

Então $f \in L^1(\Omega)$ *e* $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$.

Teorema D.5 (Teorema do Traço) *Suponha que* Ω *é um aberto limitado de classe* C^1. *Então existe um operador linear limitado*

$$T : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$$

tal que

(i) $Tu = u_{|\partial\Omega}$ *se* $u \in H^1(\Omega)$

(ii) *existe* $C = C(p, \Omega) > 0$ *tal que, para todo* $u \in H^1(\Omega)$ *vale*

$$\|Tu\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Referências Bibliográficas

[1] AMBROSETTI, A. BRÉZIS, H. and CERAMI, G., *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems,* J. Funct. Anal. 122(1994), $519-543$.

[2] AMBROSETTI, A. and RABINOWITZ, P., *Dual variational methods in critical points theory an applications,* J. Funct. Anal. 14 (1973), 343-381.

[3] BRÉZIS, H., *Analyse fonctionelle.* MASSON, 1987.

[4] FIGUEIREDO, D.G. GOSSEZ, J.P. and UBILLA, P., *Local superlinearity for indefinite semilinear elliptic problems,* J. Funct. Anal. 199(2003), $452-467$.

[5] FIGUEIREDO, D.G. GOSSEZ, J.P. and UBILLA, P., *Multiplicity results for a family of semilinear elliptic problems under local superlinearity and sublinearity,* J. Eur. Math Soc. $8, 269-286$.

[6] FIGUEIREDO, D.G. GOSSEZ, J.P. and UBILLA, P., *Local "superlinearity" and "sublinearity" for the p-Laplacian* J. Funct. Anal. $257(2009), 721-752$

[7] FOLLAND, G., B., *Real analysis modern techniques and their applications.* New York- 1984

[8] GILBARG, D. e TRUNDINGER, N. S., *Elliptic partial differential equations of second order.* Springer-Verlag, 1984.

[9] GONÇALVES, J.V. MIYAGAKI, O.H., *Multiple positive solutions for semilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^n$ involving subcritical exponents,* Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Vol. 32, No. 1, pp. 41-51, 1998.

[10] TEHRANI, H., *On elliptic equations with nonlinearities that are sum of a sublinear and superlinear term*, volume dedicated to Dr. S. Shahshahani, Iran (2002) 123-131.

[11] STRUWE, M., *Variaional Methods.* Springer, 1990.