Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Métodos Variacionais Aplicados a uma Classe de Equações de Schrödinger Quasilineares.

por

Gilberto Fernandes Vieira

Brasília

2010

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Métodos Variacionais Aplicados a uma Classe de Equações de Schrödinger Quasilineares.

por

Gilberto Fernandes Vieira *

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA

9 de março de 2010

Comissão Examinadora:

____
Prof. Dr. Elves Alves de Barros e Silva - Orientador (MAT/UnB)

____
Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo (UFPB)

____
Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto (UFCG)

____
Prof. Dr. Marcelo Fernandes Furtado (MAT/UnB)

____
Prof. Dr. Carlos Alberto Pereira dos Santos (MAT/UnB)

*O autor foi bolsista do CNPq durante parte da elaboração deste trabalho.

“Quem não entende, por todas estas coisas, que foi a mão do Senhor que fez isto?”

Jó 12.9

Dedicatória

A Deus

"Senhor, se hoje percorro este caminho é porque tu o trilhaste para mim;
Formaste-me desde o ventre de minha mãe e,
Designaste-me ser um instrumento em tuas mãos;
Deste-me sabedoria para aprender e discernir;
Coragem para lutar e, perseverança para vencer...

Obrigado Senhor, por ser o que sou e, por hoje chegar onde estou!"

À minha Esposa

Édna Maria de Melo Vieira

"Quantas vezes tu foste paciência, tu foste acalento!
Tudo é possível quando se pode contar com alguém,
alguém capaz de acalmar decepções; decompor objeções e empecilhos.
Em você, encontrei forças para abraçar o 'mundo';
auxílio para enfrentar as dificuldades;
razões para acreditar que vale a pena sonhar.
Compreendeste a minha ausência,
esta que foi suprida com a expectativa de ver-me vencer.
A você, especialmente, dedico a minha vitória,
por doar-se em meus instantes de solidão.
Muito obrigado!

Obrigado por tudo e que você continue sendo sempre você".

Aos meus Pais

Cristoval Vieira e **Maria Darcy Fernandes Vieira**

"De vocês recebi o dom mais precioso do universo: A vida.
Já por isso seria infinitamente grato,
mas vocês não se contentaram em presentear-me apenas com ela;
revestiram minha existência de amor, carinho e dedicação;
cultivaram na criação todos os bons valores.
Abriram as portas do meu futuro,
iluminando o meu caminho com a luz mais brilhante que puderam encontrar:
o estudo.
Trabalharam dobrado, sacrificando seus sonhos em favor dos meus
e não foram apenas pais, mas amigos e companheiros,
mesmo nas horas em que meus ideais pareciam distantes e inatingíveis.
Assim, cresci nos caminhos do amor, união, humildade e dignidade, respeitando controvérsias, inibindo obstáculos, absorvendo os sábios conselhos daqueles que, por amor, me deram a vida.
Divido, pois, com vocês, os méritos desta conquista,
porque ela lhes pertence; ela é tão de vocês quanto minha.
Obrigado, meus pais, por tudo que fizeram e fazem por mim sem que ao menos eu saiba.
Obrigado pelo sonho que realizo.
E, sobretudo,
obrigado pela lição de amor que me ensinaram durante toda a vida.

Tomara Deus que eu possa transmití-la no exercício de minha profissão".

Aos Professores

"Aqueles que me transmitiram seus conhecimentos
e experiências profissionais e de vida com dedicação e carinho,
aqueles que me guiaram para além das teorias, das filosofias e das técnicas,
expresso o meu maior agradecimento e meu profundo respeito,
que sempre serão poucos, diante do muito que me foi oferecido".

Agradecimentos

Sobretudo, agradeço a Deus, essência de minha vida, pela saúde, paz, conforto, equilíbrio e proteção em todos os momentos, e por permitir a escolha e o trilhar dos meus caminhos, acompanhando-me e amparando-me; por ter dado-me esta oportunidade e guiado-me nesta conquista tão especial. Sem Ele nada disso teria sentido.

"Como agradecer-te pelo bem que tens feito a mim?
Como demonstrar quanto amor tu tens, ó Deus, por mim?
Tudo o que sou e o que vier a ser aqui, eu ofereço a ti.
A Deus toda glória, que por mim tanto fez".

Agradeço profundamente ao Meu Orientador Elves Alves de Barros e Silva, por aceitar-me como seu orientando e conduzir-me, com muita segurança, atenção e confiança, através de uma orientação clara, dedicada e eficiente. Na verdade, bem mais que um excelente orientador compreensivo e disponível, se mostrou ser um profissional muito sério e competente, além de amigo e conselheiro, que graças ao seu imenso conhecimento matemático, a sua determinação e a sua paciência, proporcionou-me esta tão grande conquista. Sou eternamente grato a esta pessoa que, apesar de ter sido um verdadeiro Professor, admirável e exigente, enquanto orientava com muita sabedoria, não escondeu sua simplicidade e humildade, ao oferecer-me todo o apoio necessário à realização deste trabalho. Com muito orgulho, sinto-me honrado por ter tido o privilégio de aprender, sob valiosos ensinamentos, aos pés de um tão grande Matemático. Sei que sem a inestimável ajuda, inclusive no que diz respeito ao texto da tese, recebida nesta etapa de minha formação acadêmica, não seria possível a concretização deste sonho. Muito obrigado, também, pelo incentivo. Que Deus continue lhe abençoando!

Em especial agradeço à minha querida esposa e companheira Édna Maria de Melo Vieira, pela cumplicidade, carinho e grande amor; por ter sido ela, durante todo o transcorrer da minha pós-graduação, a principal responsável pelos momentos de alegria. Pois, embora estivesse fisicamente ausente, estava, em espírito e fé, sempre ao meu lado durante todos esses anos. Agradeço a esta pessoa mui especial por liberta-me dos momentos de solidão e angústia; das dificuldades encontradas ao longo dessa batalha. Obrigado pelo incentivo nas ocasiões mais difíceis, pela compreensão nos momentos de ausência e pelo apoio irrestrito e incondicional, expondo com orgulho a felicidade ao conquistar essa vitória. Sou muito grato a ti, também, por todas as outras formas de ajuda e força a mim transmitidas, principalmente, as imprescindíveis orações a Deus por esta realização em “nossas” vidas.

Ao meu pai, Cristoval Vieira, que sempre me apoiou nos estudos, tendo um papel fundamental na formação da minha pessoa como homem e profissional. À Maria Darcy, minha mãe, heroína, minha professora da vida, pelo seu amor, carinho; pelo seu exemplo de vida. Enfim, aos meus pais que, de forma ímpar, proporcionaram um ambiente de carinho, amor e apoio necessários para o meu alicerçamento como ser humano.

Sou muito grato, também, aos meus irmãos que nunca me negaram apoio e conselhos em minhas decisões, carinho, incentivo, encorajamento e confiança em todos os momentos desta jornada. Agradeço a eles pelo troféu conquistado, pois na ausência, souberam honrar o elo que nos une, apoiando-me incondicionalmente, e assim, revelando a cada instante a beleza da verdadeira amizade.

A todos que também fazem parte de minha família, como tios, primos, sobrinhos sogro, sogra e cunhadas que, intercedendo a Deus, acompanharam todo este processo de formação, sempre acreditando em mim. A todos estes, minha eterna gratidão pela grande força.

Meus sinceros agradecimentos a Marco Aurélio Soares Souto, Uberlandio Batista Severo, Marcelo Fernandes Furtado, Carlos Alberto Pereira dos Santos e João Carlos Nascimento de Pádua, membros e suplente da comissão examinadora, pelas oportunas correções e sugestões. Obrigado por doarem, com interesse, do vosso tempo para lerem o trabalho e por vos mostrarem prestativos e disponíveis para fazerem a devida avaliação, bem como pelos ricos comentários, observações pertinentes e apropriados conselhos, que melhoraram o trabalho. Sou grato, também, a vocês pelo encorajamento e pelas sugestões para trabalhos futuros.

Agradeço de forma especial, ao Pastor Luiz de Gonzaga e Silva, pelas orações e pelos conselhos seguros, dando-me muita esperança e certeza da vitória que hoje galgo. Agradeço aos irmãos em Cristo da Assembléia de Deus de Uiraúna, principalmente, aos que fazem parte do grupo de oração da mocidade, e aos irmãos da congregação Asa Norte da ADET, pelas orações constantes e por me ajudarem a conciliar fé e razão.

Deixo aqui minha gratidão a alguns professores amigos que sempre estiveram ao meu alcance nos momentos de necessidade. A Amarildo Formiga Dantas pela longa amizade, pelo encorajamento e confiança em meus estudos, desde o ensino fundamental. A Everaldo Souto de Medeiros, Francisco José de Andrade, Tonires Sales de Melo e Flávia Jerônimo Barbosa por sempre acreditarem em mim, com palavras estimulantes e de confiança. De forma mais especial, quero registrar meus agradecimentos a João Marcos Bezerra do Ó (meu orientador de mestrado), que teve a coragem de acreditar em mim, incentivando-me a continuar nos estudos em Matemática, e também, pelos conselhos de um amigo sábio e por ter sido o principal responsável pela minha entrada no doutorado. Estou agradecido a ele também porque, juntamente com Uberlandio Batista Severo e Olímpio Hiroshi Miyagaki, a quem também sou muito grato, compartilharam seus resultados, mesmo antes de serem oficiais.

Agradeço aos colegas do Departamento de Matemática da UFCG, campus de Cajazeiras, pelo incentivo e por terem assumido as minhas atividades do Departamento, durante o tempo que permaneci ausente cursando o doutorado.

Ao Departamento de Matemática da UnB, pela estrutura física que me foi disponibilizada, sem a qual este trabalho se tornaria mais árduo. Em especial, à Tânia e Eveline, pela presteza e carinho com que administra os assuntos burocráticos da pós-graduação. Agradeço também a Manuel e a Pereira (Gary), pela maneira simpática e eficiente com que são atendidos quando solicitados.

Aos professores da Pós-Graduação do Departamento de Matemática da UnB, pelas disciplinas que lecionaram, contribuindo para a formação do meu conhecimento e, de certa forma, para o sucesso deste trabalho. Agradeço pelos ensinamentos proporcionados e pelo ambiente científico favorável.

Num trabalho como este, estou convicto de que o mais complicado não são as barreiras teóricas, pois isto a gente supera com dedicação e orientação adequada. O mais complicado é construir um cotidiano saudável que nos faça acreditar que tudo isso vale a pena. Nesse sentido, agradeço a todos os meus amigos da UnB, especialmente a Anielly, Claudiney, Gracy, Janete, Laura, Manuela, Maxwell, Ricardo, Sérgio e Zhou, pelas horas de estudo, sempre bem humoradas, pelo apoio nos momentos de fraqueza, pelos momentos de descontração, pelas alegrias divididas e experiências compartilhadas, enfim, pelo companheirismo e pelo harmonioso convívio, indispensáveis ao sucesso desta conquista. Aos amigos Bruno, Eduardo, Marcelo e Veríssimo, pela amizade e acolhida na república e por compartilharem comigo esses anos de estudos, sabendo cultivar a amizade e a compreensão. Aos demais amigos que não mencionei aqui, mas que estão guardados em meu coração. À coragem, à inteligência e aos anseios de todos vocês, que confiaram em mim e depositaram esperanças em meu trabalho. Sucesso a todos!

Por fim, agradeço a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho. De forma mais precisa, agradeço ao povo Brasileiro que através do CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) financiou meus Estudos.

Resumo

Neste trabalho, estabelecemos a existência de uma solução positiva, em $\mathbb{R}^N$, para uma classe de equações de Schrödinger quasilineares com não linearidade subcrítica ou crítica. A fim de utilizarmos Métodos Variacionais, aplicamos uma mudança de variável para reduzirmos as equações quasilineares a equações semilineares, cujos funcionais associados estão bem definidos em espaços de Sobolev clássicos e satisfazem as propriedades geométricas do Teorema do Passo da Montanha. Estimativas apropriadas sobre o nível minimax do Passo da Montanha e o Princípio de Concentration de Compacidade são usados para contornarmos a perda de compacidade advinda da presença do expoente crítico de Sobolev e da não limitação do domínio.

Palavras-Chaves: Teorema do Passo da Montanha, Métodos variacionais, Equações de Schrödinger quasilineares, Expoente crítico de Sobolev.

Abstract

It is established the existence of one positive solution for a class of quasilinear Schrödinger equations in $\mathbb{R}^N$ with subcritical and critical growth. In order to use Variational Methods, we apply a change of variable, obtaining semilinear equations, whose associated functionals are well defined in appropriate Sobolev spaces and satisfy the geometric hypotheses of the Mountain Pass Theorem. Appropriate estimates on the mountain pass minimax level and the Concentration–Compactness Principle are used to overcome the lack of compactness due to the presence of the critical exponent of Sobolev and the unboundedness of the domain.

keywords: Mountain Pass Theorem, variational methods, quasilinear Schrödinger equations, Sobolev critical exponent

Sumário

Notações

Neste trabalho, fazemos uso das seguintes notações:

- $M, C, C_0, C_1, \ldots$ denotam constantes positivas (possivelmente diferentes);
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx$ é representada por $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f$;
- $B_R(p)$ denota a bola aberta de raio R com centro no ponto $p \in \mathbb{R}^N$; e $\partial B_R(p)$, denota a fronteira desta bola;
- $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$;
- Representamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o par dualidade entre os espaços E e seu dual E';
- Representamos a convergência fraca em E por " $\rightharpoonup$ " e a convergência forte, por " $\to$ ";
- $supp\,\varphi$ denota o suporte da função φ;
- $|\Omega|$ denota a medida de Lebesgue de um conjunto mensurável $\Omega \subset \mathbb{R}^N$;
- χ_Ω denota a função característica do conjunto Ω;
- $\|\cdot\|_E$ denota a norma do espaço E;
- Para $1 \leq p < N$, $p^* = \dfrac{Np}{N-p}$ é o expoente crítico de Sobolev;
- $A = O(x)$ quando $\dfrac{A}{x} \leq M$, para alguma constante $M > 0$;
- $A_n = o_n(x)$ se $\dfrac{A_n}{x} \to 0$ quando $n \to \infty$;
- $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$;

- $u^-(x) = \min\{u(x), 0\}$;
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$ é o gradiente da função u;
- $\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ é o laplaciano da função u;
- $C(\Omega) = C(\Omega, \mathbb{R})$ denota o espaço das funções contínuas em Ω e $C_0(\Omega)$ são as funções contínuas de suporte compacto em Ω;
- $C^k(\Omega)$, $k \geq 1$ inteiro, denota o espaço das funções k vezes continuamente diferenciáveis sobre Ω e $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\geq 1} C^k(\Omega)$;
- $C_0^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_0(\Omega)$ e $C_0^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega)$;
- $C^{0,\beta}(\overline{\Omega}) = \left\{u \in C(\Omega) : \sup_{x,y\in\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\beta} < \infty\right\}$ com $0 < \beta < 1$, e $C^{k,\beta}(\overline{\Omega})$ são as funções em $C^k(\Omega)$ tais que todas as derivadas parciais até a ordem k estão em $C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$;
- $L^p(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável} : \int_\Omega |u|^p dx < \infty\right\}$, em que $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é um aberto conexo, com norma dada por

$$\|u\|_p := \left(\int_\Omega |u|^p \, dx\right)^{1/p};$$

- $L^\infty(\Omega)$ denota o espaço das funções mensuráveis que são limitadas quase sempre em Ω com norma dada por

$$\|u\|_\infty := \inf\{C > 0 : |u(x)| \leq C \text{ quase sempre em } \Omega\};$$

- $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) := \{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) : |\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$ munido da norma $\|\nabla u\|_2$;
- $\mathcal{F} = \{h \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N) : |\{x \in \mathbb{R}^N : |h(x)| \geq \varepsilon\}| < \infty$ para todo $\varepsilon > 0\}$;
- Para $1 \leq p < \infty$,

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists\, g_1, g_2, \ldots, g_N \in L^p(\Omega) \text{ tais que} \\ \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx = -\int_\Omega g_i \varphi \, dx, \;\; \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ e } i = 1, \ldots, N \end{array} \right\}$$

com norma dada por

$$\|u\|_{1,p} = \left[\int_\Omega \left(|\nabla u|^p + |u|^p \right) dx \right]^{1/p}$$

e

$$W^{2,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{1,p}(\Omega), \text{ para todo } i = 1, \ldots, N \right\}.$$

Introdução

No presente trabalho, aplicando o método variacional, estudamos a existência de soluções para a equação de Schrödinger quasilinear da forma

$$i\varepsilon\partial_t z = -\varepsilon^2\Delta z + W(x)z - l(x,|z|^2)z - \kappa\varepsilon^2\Delta[\rho(|z|^2)]\rho'(|z|^2)z, \tag{1}$$

onde $z : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $W : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é um potencial dado, $\varepsilon > 0$, κ é uma constante real e l, ρ são funções reais adequadas.

Equações quasilineares da forma (1) aparecem, mais naturalmente, em problemas da Física-Matemática, principalmente em Física dos Plasmas e Mecânica dos Fluidos [29, 35, 36, 41, 49]; na Teoria Ferromagnética e dos Magnons de Heisenberg [3, 10, 32, 37]; em Mecânica Quântica Dissipativa [30]; e em Teoria da Matéria Condensada [26]. Estas equações têm sido tomadas como modelo de vários fenômenos físicos correspondentes aos vários tipos de ρ. O caso em que $\rho(s) = s$ foi usado por Kurihara em [35] na obtenção da equação da membrana de superfluido em Física dos Plasmas (veja também [36]). No caso $\rho(s) = (1+s)^{1/2}$, a equação (1) modela a canalização de um laser ultra-curto de alta potência na matéria (veja [7, 8, 12, 56] e as referências em [16]).

Consideramos, aqui, a existência de soluções para equações quasilineares de Schrödinger da forma (1), com $\rho(s) = |s|^\alpha$, $\alpha \geq 3/4$ e $\kappa\alpha = \varepsilon = 1$. Buscando soluções do tipo ondas estacionárias, a saber, soluções da forma

$$z(x,t) = \exp(-iFt)u(x), \quad F \in \mathbb{R},$$

obtemos uma equação do tipo elíptica com a seguinte estrutura formal:

$$-\Delta u + V(x)u - \Delta(|u|^{2\alpha})|u|^{2\alpha-2}u = l(x,u^2)u, \quad u > 0, \ x \in \mathbb{R}^N, \tag{2}$$

onde $V(x) = W(x) - F$ é a nova função potencial. Nos Capítulos 2 e 3 deste trabalho, suporemos $l(x,u^2)u = g(x,u)$, e nos Capítulos 4 e 5, $l(x,u^2)u = K(x)|u|^{2\alpha 2^*-2}u + g(x,u)$, com g possuindo crescimento subcrítico em ambos os casos. Enfatizamos aqui que $2\alpha 2^* = 4\alpha N/(N-2)$ é o expoente crítico para nossos problemas (veja [20, 44]).

O caso semilinear, correspondendo a $\kappa = 0$, tem sido largamente estudado nos últimos anos (veja, por exemplo, [1, 6, 18, 27, 55, 61], como também suas referências). Logo, existem muitos resultados sobre existência de soluções com expoente subcrítico, crítico e supercrítico (veja, por exemplo, [1, 4, 6, 17, 54, 61]). Quando a função potencial é periódica, encontramos uma extensa bibliografia para esta classe de equações. Em primeiro lugar, citamos o caso definido, isto é, quando V é estritamente positivo. Em [50], Pankov utilizando o princípio variacional de Nehari, provou a existência de ground states, isto é, soluções de energia mínima, dentre todas as soluções não triviais. Rabinowitz em [53], sob hipóteses menos restritivas na função potencial V, obteve um resultado de existência, mas não necessariamente, uma solução ground state. Além disso, em [15], Coti Zelati e Rabinowitz provaram a existência de infinitas soluções supondo hipóteses técnicas adicionais. Em trabalhos recentes, Troestler e Willem [63] e Kryszewski e Szulkin [34], utilizando o teorema de enlace generalizado, provaram um resultado de existência para o caso em que V é indefinido. Esta abordagem foi simplificada por Pankov e Pflüger [51] ao utilizarem a técnica de aproximação para funções periódicas. Posteriormente, Chabrowski e Jianfu [11], usaram esta mesma abordagem em uma equação Schrödinger semilinear e expoente crítico de Sobolev.

Estudos recentes têm direcionado a atenção na existência de soluções para (2) no caso em que $\kappa > 0$, com $l(x,s^2)s = |s|^{p-1}s$, quando $4 \leq p+1 < 22^*$, $N \geq 3$ (veja, por exemplo, [43, 44, 52]). A existência de uma solução ground state positiva foi provada por Poppenberg, Schmitt e Wang [52] e Liu e Wang [43]. Eles usaram, para potenciais positivos, um argumento de minimização com vínculo, estabelecendo uma solução de (2) com um multiplicador de Lagrange, μ, não conhecido, na frente do termo não-linear. Em [44], com uma mudança de variável o problema quasilinear foi reduzido a um problema semilinear e uma estrutura de espaço de Orlicz foi usada para provar a existência de uma solução positiva de (2) para todo μ positivo via Teorema do Passo da Montanha. Em [13], Colin e Jeanjean também fizeram uso da mudança de variável para reduzir a equação (2) a uma semilinear. Utilizando o espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)$, eles provaram a existência de soluções a partir dos resultados clássicos obtidos por Berestycki e Lions [6] quando $N = 1$ ou $N \geq 3$, e Berestycki, Gallouët e Kavian [5] quando $N = 2$.

Seguindo a mesma técnica de mudança de variável, Severo [57], do Ó e Severo [23, 24], do Ó e Moameni [21], do Ó, Moameni e Severo [22], Moameni [46, 47] e do Ó, Miyagaki e Soares [19, 20] desenvolveram outros trabalhos bastante consideráveis relacionados à existência, multiplicidade e comportamento de concentração de soluções para equações de Schrödinger quasilineares. Dentre eles, enfatizamos o trabalho de tese de Severo, [57], que traduziu-se em alguns artigos publicados, e além disso, foi subsídio de inestimável importância, junto com os trabalhos de Lins e Silva [38, 39], para concretude do presente trabalho, desde quando ainda procurávamos um rumo a seguir.

Todavia, a maioria destes trabalhos empregou espaços do tipo Orlicz na obtenção de seus resultados; alguns que não fizeram isto, trabalharam no espaço bi-dimensional $\mathbb{R}^2$, enquanto nós, trabalhamos em $\mathbb{R}^N$, com $N \geq 3$. Mesmo aqueles que usaram, diretamente, espaços de Sobolev em dimensões maiores que 2, não suprimem o valor de nossos resultados, uma vez que estudamos problemas com aspectos diferentes sobre a função potencial e a não-linearidade.

Apresentando demonstrações mais simples, nosso trabalho completa, até certo ponto, alguns dos trabalhos anteriores que tratam de equações do tipo (2). Como ponto de apoio, podemos mencionar que todos esses trabalhos lidam com potência pura ou empregam a condição de superlinearidade de Ambrosetti e Rabinowitz, enquanto que nossos resultados utilizam condições semelhantes às de Costa-Magalhães [14]. Além disso, em todos os trabalhos supracitados, exceto [43, 48], fora considerado apenas o caso em que $\alpha = 1$, enquanto nós consideramos $\alpha \geq 3/4$. Mesmo assim, o autor de [48] considera apenas $\alpha = 2^*/4$ para desenvolver seus resultados aplicando outro método – o fibering method –, e não, a mudança de variável introduzida por [44]; da mesma forma, mas agora, para todo $\alpha > 1/2$, em [43] é estabelecida a existência de ground states via argumento de minimização, não utilizando-se, novamente, a mudança de variável, a qual foi formulada posteriormente em [44]. Por outro lado, em [44], é resolvido um problema quasilinear com $\alpha = 1$, através da mudança de variável, ficando apenas uma afirmação (veja [44]-Observação 3.9) de que o problema poderia ser resolvido para todo $\alpha > 1/2$, utilizando-se aquela mudança de variável. Ainda falando em mudança, talvez caiba aqui falar que nossa metodologia na demonstração de nossos resultados principais (naqueles casos em que há alguma semelhança com trabalhos anteriores) é diferente. Finalmente, explicitamos o fato importante de que em nenhuma parte desta tese foram utilizados espaços de Orlicz, mesmo nos casos onde o potencial não é limitado.

Deveríamos enfatizar que as hipóteses utilizadas neste trabalho, bem como a metodologia empregada na apresentação dos problemas, foram inspiradas nos trabalhos de Lins e Silva [38, 39].

Em tudo o que se segue, suporemos que V seja uma função contínua uniformemente positiva, ou seja,

(V) existe uma constante $a_0 > 0$ tal que

$$V(x) \geq a_0 > 0, \quad \text{para todo } \; x \in \mathbb{R}^N.$$

Ao longo deste trabalho, admitiremos as seguintes propriedades para a função g, além de outras que serão consideradas em cada resultado específico:

(g_1) $g(x, s) = o(|s|)$, quando $s \to 0^+$, uniformemente em $x \in \mathbb{R}^N$;

(g_2) existem constantes $a_1, a_2 > 0$ e $4\alpha \leq q_1 < 2\alpha 2^*$ tais que

$$|g(x, s)| \leq a_1 + a_2|s|^{q_1 - 1}, \quad \text{para todo } \; (x, s) \in \mathbb{R}^N \times [0, +\infty).$$

Notamos que as condições (g_1) e (g_2) nos possibilitam usar métodos variacionais para estudarmos a Equação (2), e permitem-nos verificar que o funcional associado possui um mínimo local na origem. Na verdade, estudamos o funcional associado ao problema modificado. A condição (g_2) impõe um crescimento subcrítico para g. Entretanto, sob estas hipóteses, este funcional não satisfaz uma condição de compacidade do tipo Palais-Smale, desde que o domínio é todo o $\mathbb{R}^N$ ou o Problema (2) envolve o crescimento associado ao limite da imersão de Sobolev.

Nosso trabalho está dividido em cinco capítulos. O primeiro contém alguns resultados preliminares. Nos outros quatro abordaremos, com mais detalhes, nossos problemas sobre a existência de solução positiva. Observamos que os Capítulos 2 e 4 generalizam dois artigos [58, 59] já aceitos para publicação.

No **Capítulo 1**, apresentamos alguns resultados que servirão aos demais, principalmente, as propriedades da mudança de variável, que é a mola-mestra de todo o trabalho.

No **Capítulo 2**, tratamos o caso em que a nova não-linearidade $l(x, u^2)u = g(x, u)$ é não-negativa e possui crescimento subcrítico. Além disso, supomos que g tem comportamento periódico ou assintoticamente periódico no infinito. Mais especificamente, consideramos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u - \Delta(|u|^{2\alpha})|u|^{2\alpha-2}u + V(x)u \; = \; g(x, u), \qquad x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N), \; u > 0, \end{cases} \tag{3}$$

onde $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ são funções contínuas, satisfazendo, além das hipóteses anteriores ((V), (g_1) e (g_2)), as seguintes:

V é uma perturbação de uma função periódica no infinito. Mais claramente, denotando por $\mathcal{F}$ a classe de funções $h \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ tais que, para todo $\varepsilon > 0$, o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^N : |h(x)| \geq \varepsilon\}$ possui medida de Lebesgue finita, admitimos que V satisfaz

(V_1) existe uma função $V_0 \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, 1-periódica em x_i, $1 \leq i \leq N$, tal que $V_0 - V \in \mathcal{F}$ e

$$V(x) \leq V_0(x), \quad \text{para todo } \ x \in \mathbb{R}^N.$$

Considerando $G(x,s) = \int_0^s g(x,t)\,dt$, a primitiva de g, supomos:

(g_3) existem constantes $a_3 > 0$, $q_2 > N(q_1 - 4\alpha)/2$ e uma função $h_1 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tais que

$$\frac{1}{4\alpha} g(x,s)s - G(x,s) \geq a_3 s^{q_2} - h_1(x), \quad \text{para todo } \ (x,s) \in \mathbb{R}^N \times [0, +\infty),$$

onde q_1 é dada pela hipótese (g_2);

(g_4) existem uma constante $2 \leq q_3 < 2\alpha 2^*$ e funções $h_2 \in \mathcal{F}$, $g_0 \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$, 1-periódica em x_i, $1 \leq i \leq N$, tais que

(i) $G(x,s) \geq G_0(x,s) = \int_0^s g_0(x,t)\,dt, \quad$ para todo $(x,s) \in \mathbb{R}^N \times [0, +\infty)$,

(ii) $|g(x,s) - g_0(x,s)| \leq h_2(x)|s|^{q_3 - 1}, \quad$ para todo $(x,s) \in \mathbb{R}^N \times [0, +\infty)$,

(iii) a função $s \to g_0(x,s)/s^{4\alpha - 1}$ é não-decrescente na variável $s > 0$;

(g_5)
$$\liminf_{s \to \infty} \frac{G(x,s)}{s^{4\alpha}} > 0, \quad \text{uniformemente em } \ x \in \mathbb{R}^N.$$

Observamos que a condição (g_5) é mais geral do que aquela utilizada pelos autores em [59]. Esta mudança foi possível, devido a uma nova demonstração, utilizando a primeira autofunção do laplaciano, para a geometria do Passo da Montanha (é apenas neste ponto que tal hipótese é aplicada). Queremos também destacar que a condição (g_5) permitiria-nos considerar, também, o caso em que $q_1 = 4\alpha$.

O resultado principal deste capítulo é o seguinte:

Teorema 0.1. *Suponha que as condições (V), (V_1) e $(g_1) - (g_5)$ sejam satisfeitas. Então o Problema (3) possui uma solução.*

Observamos que no caso particular: $V = V_0$, $g = g_0$, a condição $(g_4)(iii)$ não é necessária para a existência de uma solução para o problema periódico; ou seja, considerando o Problema (3), sob as hipóteses: (V), $(g_1) - (g_3)$, (g_5) e, ainda,

(V_0) a função $V \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ é 1-periódica em x_i, $1 \leq i \leq N$;

(g_0) a função $g \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ é 1-periódica em x_i, $1 \leq i \leq N$,

podemos estabelecer:

Teorema 0.2. *Suponha que* (V), (V_0), (g_0), $(g_1) - (g_3)$ *e* (g_5) *sejam satisfeitas. Então o Problema* (3) *possui uma solução.*

Para demonstrarmos os resultados deste capítulo, utilizamos uma mudança de variável $v = f^{-1}(u)$ e obtemos uma equação semilinear cujo funcional associado está bem definido em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e possui a geometria do Passo da Montanha. A demonstração do Teorema 0.1 reside no estudo do funcional energia associado ao problema modificado. Primeiramente, mostramos que o funcional possui a geometria do Passo da Montanha e estabelecemos que o nível minimax, c, é positivo. Para encontrarmos um ponto crítico não-trivial, adaptamos os argumentos utilizados em [38, 39]: supomos que a solução da equação em (3) seja a nula. Considerando o funcional associado ao problema (funcional modificado), utilizamos uma versão do Teorema do Passo da Montanha sem condição de compacidade [25] para obtermos uma sequência de Cerami associada ao nível minimax do Passo da Montanha. A seguir, utilizamos essa sequência de Cerami para estabelecermos a existência de um ponto crítico não-trivial do funcional associado ao problema periódico. Finalmente, aplicamos uma versão local do Teorema do Passo da Montanha para garantirmos a existência de um ponto crítico não-nulo do funcional associado ao Problema (3), o que nos dá uma solução não-nula para a equação em (3).

O **Capítulo 3** trata o problema anterior, com menos hipóteses sobre a função g. Na verdade, com g satisfazendo as hipóteses $(g_1) - (g_3)$ e (g_5). Além do potencial $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ ser uma função contínua uniformemente positiva, isto é, cumprindo a condição (V), supomos aqui que V satisfaz a condição

(V_2) para qualquer $D > 0$, $|\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq D\}| < \infty$,

que generaliza a hipótese de coercividade e de integrabilidade do seu inverso (veja a introdução deste capítulo).

Observamos que a não limitação do potencial V não constitui impedimento para usarmos o espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)$, como era de se esperar, tendo em vista os trabalhos [23, 44, 57], dentre outras referências.

Como resultado central deste capítulo, temos:

Teorema 0.3. *Suponha que as condições* (V), (V_2), $(g_1) - (g_3)$ *e* (g_5) *sejam satisfeitas. Então o Problema (3) possui uma solução.*

Para demonstrarmos o Teorema 0.3, usamos a mesma mudança de variável empregada no Capítulo 2, e assim, obtemos um funcional associado bem definido em um subespaço $X \subset H^1(\mathbb{R}^N)$, caracterizado em função do potencial V (veja Capítulo 3), que permite-nos utilizar uma versão do Teorema do Passo da Montanha sem condição de compacidade e estudar o problema variacionalmente. Encontramos então, uma sequência de Cerami associada ao nível minimax, a qual nos direciona à solução de nosso problema. Utilizando apenas um argumento de contradição, supondo que a única solução para a nossa equação é a solução nula, obtemos que o nível do passo da montanha deveria ser igual a zero, o que é um absurdo. Isto nos leva a concluir a existência de solução (não-nula) para o nosso problema. O fato de que a solução encontrada é positiva, segue o mesmo argumento que usamos para a solução do Capítulo 2.

No **Capítulo 4**, tratamos o caso em que a nova não-linearidade $l(x,u^2)u = K(x)|u|^{2\alpha 2^*-2}u + g(x,u)$ possui crescimento crítico. Além disso, como no Capítulo 2, supomos que g tem comportamento periódico ou assintoticamente periódico no infinito. Mais especificamente, estudamos a existência de uma solução para o problema crítico

$$\begin{cases} -\Delta u - \Delta(|u|^{2\alpha})|u|^{2\alpha-2}u + V(x)u \;=\; K(x)|u|^{2\alpha 2^*-2}u + g(x,u), \qquad x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N), \; u > 0, \end{cases} \tag{4}$$

onde V, $K : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas satisfazendo, além das hipóteses (V), (V_1), (g_1), (g_2) e (g_4), as seguintes:

(K) existem uma função $K_0 \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, 1-periódica em x_i, $1 \leq i \leq N$, e um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^N$, tais que $K - K_0 \in \mathcal{F}$ e

(i) $K(x) \geq K_0(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$,

(ii) $K(x) = \|K\|_\infty + O(|x - x_0|^{N-2})$, quando $x \to x_0$;

(g_3') existe uma constante $2 \leq q_2 < 2\alpha 2^*$ e funções $h_1 \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $h_2 \in \mathcal{F}$ tais que

$$\frac{1}{4\alpha} g(x,s)s - G(x,s) \geq -h_1(x) - h_2(x)s^{q_2}, \quad \text{para todo } (x,s) \in \mathbb{R}^N \times [0, +\infty);$$

(g_5') existe um conjunto aberto e limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, contendo x_0 dado por $(K)(ii)$, tal que

$$\frac{G(x,s)}{\Psi(s)} \to \infty, \quad \text{quando } s \to \infty, \text{ uniformemente em } \Omega,$$

onde

$$\Psi(s) = \begin{cases} s^{2\alpha 2^*-1}, & \text{se } 3 \leq N \leq 8 \text{ e } \alpha > 3/4, \quad \text{ou } N \geq 9 \text{ e } \alpha > (N-2)/8, \\ s^{\frac{3}{2}2^*-1}\log s, & \text{se } 3 \leq N \leq 8 \text{ e } \alpha = 3/4, \\ s^{4\alpha}, & \text{se } N \geq 9 \text{ e } 3/4 \leq \alpha \leq (N-2)/8. \end{cases}$$

Observamos que, neste capítulo, como também, no próximo, a função g pode assumir valores negativos, enquanto que nos dois capítulos anteriores, pedimos $g \geq 0$. Notamos ainda que a condição (g_5') é fundamental para obtermos a estimativa apropriada para o nível minimax do Teorema do Passo da Montanha.

Dessa forma, o principal resultado do capítulo é o seguinte:

Teorema 0.4. *Suponha que* (V), (V_1), (K), (g_1), (g_2), (g_3'), (g_4) *e* (g_5') *sejam satisfeitas. Então o Problema (4) possui uma solução.*

De maneira análoga ao Teorema 0.2, no caso particular: $V = V_0$, $K = K_0$, $g = g_0$, a condição $(g_4)(iii)$ não é mais necessária para a existência de uma solução para o problema periódico. De fato, considerando o Problema (4), sob as hipóteses: (V), (V_0), (g_0), (g_1), (g_2), (g_3'), (g_5') e

(K_0) a função $K \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ é 1-periódica em x_i, $1 \leq i \leq N$, e existe um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^N$, tal que

(i) $K(x) > 0, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N,$

(ii) $K(x) = \|K\|_\infty + O(|x - x_0|^{N-2}), \quad \text{quando } \quad x \to x_0,$

podemos estabelecer:

Teorema 0.5. *Suponha que* (V), (V_0), (K_0), (g_0), (g_1), (g_2), (g_3') *e* (g_5') *sejam satisfeitas. Então o Problema (4) possui uma solução.*

A idéia para provarmos nossos resultados deste capítulo é motivada pelos argumentos usados em [13, 44]. Também usamos uma mudança de variável para reformularmos o problema, obtendo um problema semilinear que tem um funcional associado bem definido no espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)$ e satisfaz as propriedades geométricas do Teorema do Passo da Montanha (veja [2]). A seguir, adaptamos o argumento empregado em [38, 39], supondo que a solução para a equação de (4) é a solução nula. Considerando o funcional associado ao problema modificado, usamos uma versão do Teorema do Passo da Montanha, sem condição de compacidade [25], para obtermos uma sequência de Cerami associada ao nível minimax. Em seguida, utilizamos esta sequência e um resultado técnico devido a Lions (veja [15]) para obtermos um ponto crítico não-trivial do funcional associado ao problema periódico. Além disso, somos capazes de verificar que o valor do funcional associado ao Problema (4) neste ponto é menor ou igual ao nível minimax do Passo da Montanha e que este nível é atingido. Finalmente, empregamos uma versão local do Teorema do Passo da Montanha para obtermos uma solução para o Problema (4).

No **Capítulo 5**, estudamos a existência de uma solução para o Problema (4), onde V, $K : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, satisfazendo as hipóteses: (V), (V_2), (g_1), (g_2), (g_5') e

(K') $K \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, e existem uma constante $a_4 > 0$ e um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^N$, tais que

$$(i)\ \ K(x) \geq a_4 > 0, \quad \text{para todo } \ x \in \mathbb{R}^N,$$

$$(ii)\ \ K(x) = \|K\|_\infty + O(|x - x_0|^{N-2}), \quad \text{quando} \quad x \to x_0.$$

Dessa forma, o principal resultado do capítulo é o seguinte:

Teorema 0.6. *Suponha que (V), (V_2), (K'), (g_1), (g_2) e (g_5') sejam satisfeitas. Então o Problema (4) possui uma solução.*

Observamos que a condição (g_5') é essencial na verificação de que o nível minimax do Teorema do Passo da Montanha está no intervalo onde podemos estabelecer o resultado para o argumento de contradição.

Demonstramos o Teorema 0.6, usando idéias conjuntas dos Capítulos 3 e 4, obtendo um funcional associado bem definido no subespaço $X \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ apresentado no Capítulo 3, que satisfaz as propriedades geométricas do Teorema do Passo da Montanha. Encontramos então, uma sequência de Cerami associada ao nível minimax, que nos conduz à solução de nosso problema. Fazendo estimativas apropriadas sobre este nível, estabelecemos o resultado que possibilita-nos empregar um argumento de contradição na demonstração do Teorema 0.6. Para obtermos tais estimativas, inspirados nos trabalhos de Brézis-Nirenberg [9] e Lins e Silva [39], utilizamos funções que são extremos para a imersão de Sobolev de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Em seguida, utilizando apenas um argumento de contradição, ao supormos que a única solução para a nossa equação é a solução nula, obtemos que o nível do passo da montanha seria igual a zero, que é um absurdo. Isto nos leva a concluir a existência de solução (não-nula) para o nosso problema. O fato de que a solução encontrada é positiva, segue o mesmo argumento que usamos para a solução dos Capítulo 2 e 4.

Para a facilidade da leitura deste trabalho, repetiremos, em seus respectivos capítulos, os enunciados dos resultados principais, bem como especificaremos, novamente, as hipóteses sobre as funções V, K e g. Assim sendo, os capítulos foram redigidos de forma a possibilitar, o quanto possível, uma leitura independente dos mesmos.

Capítulo

1

Resultados preliminares

Apresentamos, neste capítulo, duas versões do Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti e Rabinowitz [2], ferramentas essenciais deste nosso trabalho. Aqui, também, demonstramos as propriedades da mudança de variável responsável pelas estruturas variacionais associadas aos problemas estudados e verificamos que os funcionais associados aos problemas em questão estão, realmente, bem definidos e são de classe C^1 nos espaços utilizados. Finalmente, estabelecemos que se v é uma solução dos problemas modificados pela mudança de variável, então u é uma solução para os problemas originalmente propostos.

1.1 Versões do Teorema do Passo da Montanha

Sejam E um espaço de Banach real e $I : E \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1. Denotamos por K o conjunto dos pontos críticos de I. Dado $c \in \mathbb{R}$, definimos $I^c = \{u \in E : I(u) \leq c\}$ e $K_c = \{u \in E : u \in K, I(u) = c\}$.

Como observamos na Introdução, os funcionais associados aos Problemas (2.1), (3.1), (4.1) e (5.1) não satisfazem uma condição do tipo Palais-Smale. Para contornarmos esta dificuldade, utilizamos versões do Teorema do Passo da Montanha. A seguir, enunciamos a primeira versão deste Teorema (veja [38, 57, 64]).

Relembramos que um funcional $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfaz a condição de Cerami no nível $c \in \mathbb{R}$, denotada por $(Ce)_c$, se toda sequência $(u_n) \subset E$ satisfazendo (i) $I(u_n) \to c$ e (ii) $\|I'(u_n)\|_{E'}(\|u_n\|_E + 1) \to 0$, quando $n \to \infty$, possui uma subsequência convergente. O funcional I satisfaz a condição de Cerami, denotada por (Ce), se ele satisfaz $(Ce)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$. Dizemos que $(u_n) \subset E$ é uma sequência $(Ce)_c$ se satisfaz (i) - (ii). Afirmamos que $(u_n) \subset E$ é uma sequência (Ce) se ela for uma sequência $(Ce)_c$ para algum $c \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.1. *Sejam E um espaço de Banach real e $I \in C^1(E,\mathbb{R})$. Seja S um subconjunto fechado de E que o desconecta (por caminhos) em componentes conexas distintas E_1 e E_2. Suponha ainda que $I(0) = 0$ e*

(I_1) *$0 \in E_1$ e existe $\tau > 0$ tal que $I|_S \geq \tau > 0$,*

(I_2) *existe $e \in E_2$ tal que $I(e) \leq 0$.*

Então I possui uma sequência $(Ce)_c$, com $c \geq \tau > 0$ dado por

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)), \tag{1.1}$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) \in I^0 \cap E_2\}. \tag{1.2}$$

Como veremos nos Capítulo 2 e 4, para provarmos os Teoremas 2.1 e 4.1, precisaremos também de uma versão local do Teorema 1.1. Primeiramente, enunciamos um resultado de deformação local. Observamos que, embora, ambos tenham sido provados em [38] (veja também [33]), apresentamos a prova do segundo, por completude.

Lema 1.2. *Seja E um espaço de Banach real. Suponha que $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ e que, para um certo $c \in \mathbb{R}$, exista um conjunto compacto $D \subset I^c$ tal que $D \neq \emptyset$ e $D \cap K_c = \emptyset$. Então, dado $\bar{\varepsilon} > 0$, existem $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$ e $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ tais que*

(η_1) *$\eta(t,u) = u$, para todo $t \in [0,1]$, $I(u) \notin [c - \bar{\varepsilon}, c + \bar{\varepsilon}]$,*

(η_2) *$I(\eta(t,u)) \leq I(u)$ para todo $u \in E$ e $t \in [0,1]$,*

(η_3) *$\eta(1,D) \subset I^{c-\varepsilon}$.*

Teorema 1.3. *Seja E um espaço de Banach real. Suponha que $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ satisfaça $I(0) = 0$, (I_1) e (I_2). Se existir $\gamma_0 \in \Gamma$, Γ definido por (1.2), tal que*

$$c = \max_{t\in[0,1]} I(\gamma_0(t)) > 0, \tag{1.3}$$

onde c é dado por (1.1), então I possui um ponto crítico não-nulo $u \in K_c \cap \gamma_0([0,1])$.

Demonstração. Argumentando por contradição, supomos que $\gamma_0([0,1]) \cap K_c = \emptyset$. Portanto, considerando $D = \gamma_0([0,1])$ e $0 < \bar{\varepsilon} < c$, podemos aplicar o Lema 1.2 para encontrar $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$ e $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ satisfazendo as condições $(\eta_1) - (\eta_3)$. Tomando

$\gamma(t) = \eta(1, \gamma_0(t))$ para todo $t \in [0,1]$, por $I(0) = 0$, (I_2), (η_1) e nossa escolha de $\bar{\varepsilon}$, concluímos que $\gamma \in \Gamma$. Além disto, por (1.3) e (η_3), temos que

$$\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \le c - \varepsilon.$$

Entretanto, esta desigualdade contradiz a definição de c. Isto conclui a demonstração do teorema. □

1.2 A mudança de variável

Observamos que os funcionais energia associados aos problemas sob consideração contêm um termo da forma

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2,$$

o qual pode ser infinito para $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Efetivamente, consideremos uma função $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, [0,1])$, $\phi \equiv 1$ em $B_1(0)$, $\phi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \backslash B_2(0)$ e tomemos a funçao $u \in C_0^1(\mathbb{R}^N \backslash \{0\})$ definida por

$$u(x) = |x|^{(2-N)/4\alpha}\phi(x), \quad \text{para } x \neq \{0\}.$$

Não é difícil de vermos que $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e que $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2(2\alpha-1)}|\nabla u|^2 = +\infty$.

Devido a este termo, não podemos aplicar diretamente os métodos minimax a estes funcionais. Do ponto de vista variacional, a primeira dificuldade que aparece para lidarmos com esta classe de problemas é encontrarmos um espaço de funções apropriado onde os funcionais associados estejam bem definidos. Portanto, a fim de substituirmos este termo por outro que contém apenas o quadrado do gradiente, fazemos uso da mudança de variável introduzida por [44], a saber, $v = f^{-1}(u)$, em que f é definida por

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{(1 + 2\alpha|f(t)|^{2(2\alpha-1)})^{1/2}} \quad \text{em} \quad [0, +\infty), \\ f(t) &= -f(-t) \quad \text{em} \quad (-\infty, 0]. \end{aligned} \tag{1.4}$$

O lema a seguir apresenta-nos as propriedades da mudança de variável f, necessitando de que $\alpha \ge 3/4$.

Lema 1.4. *Suponha que $\alpha \ge 3/4$. Então a função f goza das seguintes propriedades:*
(1) *f é unicamente definida, $C^1(\mathbb{R})$, $C^2(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ e invertível;*
(2) *$0 < f'(t) \le 1$ e $f'(0) = 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$;*
(3) *$|f(t)| \le |t|$ para todo $t \in \mathbb{R}$;*

(4) $f(t)/t \to 1$ *quando* $t \to 0$;
(5) $f(t)/t^{1/2\alpha} \to (2\alpha)^{1/4\alpha}$ *quando* $t \to +\infty$;
(6) $f(t)/2\alpha \leq tf'(t) \leq f(t)$ *para todo* $t \geq 0$;
(7) $|f(t)| \leq (2\alpha)^{1/4\alpha}|t|^{1/2\alpha}$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$;
(8) $f^2(t)/2\alpha \leq f(t)f'(t)t \leq f^2(t)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$;
(9) *existe uma constante positiva* C *tal que*

$$|f(t)| \geq \begin{cases} C|t|, & |t| \leq 1, \\ C|t|^{1/2\alpha}, & |t| \geq 1; \end{cases}$$

(10) $|f(t)|^{2\alpha-1}|f'(t)| \leq 1/\sqrt{2\alpha}$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Consideremos o Problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}(t) = W(y) = \left[1 + 2\alpha|y|^{2(2\alpha-1)}\right]^{-1/2}, \\ \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Afirmamos que W é lipschitziana se $\alpha \geq 3/4$. De fato, para $y \neq 0$, temos

$$W'(y) = -\frac{2\alpha(2\alpha-1)|y|^{4\alpha-4}y}{(1+2\alpha|y|^{4\alpha-2})^{3/2}}. \tag{1.6}$$

Consequentemente,

$$|W'(y)| = \left|\frac{2\alpha(2\alpha-1)|y|^{4\alpha-3}}{(1+2\alpha|y|^{4\alpha-2})^{3/2}}\right| \leq \frac{2\alpha-1}{(2\alpha)^{1/2}|y|^{2\alpha}} \to 0, , \quad \text{quando } \ |y| \to \infty.$$

E, por outro lado, se $\alpha \geq 3/4$,

$$|W'(y)| = \left|\frac{2\alpha(2\alpha-1)|y|^{4\alpha-3}}{(1+2\alpha|y|^{4\alpha-2})^{3/2}}\right| \leq 2\alpha(2\alpha-1)|y|^{4\alpha-3} \leq 2\alpha(2\alpha-1), \quad \text{para todo } \ |y| \leq 1.$$

Logo, por um argumento de compacidade, se $\alpha \geq 3/4$, temos que existe $M = M(\alpha) > 0$ tal que

$$|W'(y)| \leq M, \quad \text{para todo } \ y \neq 0. \tag{1.7}$$

Daí, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\xi \neq 0$ tal que

$$|W(y) - W(0)| = |W'(\xi)|\,|y| \leq M|y|.$$

Assim, para $y_2 < 0 < y_1$, temos

$$|W(y_1)-W(y_2)| \leq |W(y_1)-W(0)|+|W(y_2)-W(0)| \leq M(|y_1|+|y_2|) = M|y_1-y_2|. \quad (1.8)$$

Logo, de (1.7) e (1.8), segue que W é lipschitziana para $\alpha \geq 3/4$. A afirmação está provada.

Além disso, desde que W é par, pelo Teorema de Existência e Unicidade para equações diferenciais ordinárias (veja [60]), temos que f é única, ímpar e definida para t em um intervalo maximal (t^-, t^+). Afirmamos que $t^\pm = \pm\infty$. Se não, digamos que $t^+ < \infty$. Seja $t_n \to t^+$ com $t_n < t^+$. Desde que $W \leq 1$, integrando (1.5), obtemos

$$|y(t_{n+1}) - y(t_n)| \leq |t_{n+1} - t_n|.$$

Então, $y(t_n)$ é uma sequência de Cauchy e, portanto, converge para algum $a \in \mathbb{R}$. A solução de

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}(t) = W(y) = \left[1 + 2\alpha|y|^{2(2\alpha-1)}\right]^{-1/2}, \\ y(t^+) = a \end{cases}$$

fornece-nos uma continuação de f para valores de $t > t^+$, contradizendo a maximalidade de t^+. Similarmente, $t^- = -\infty$. Portanto, f está definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Além disso, como W é lipschitziana, temos que $f \in C^1(\mathbb{R})$ e, pela definição de W e (1.6), segue que $f \in C^2(\mathbb{R}\backslash\{0\})$. Assim, (1) fica provado.

O item (2) segue da definição de f e do fato de f ser ímpar.

A desigualdade (3) é uma consequência de (2).

Em seguida, provamos (4). Como consequência do Teorema do Valor Médio e a propriedade (2) acima, existe $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$\frac{f(t)}{t} = \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = f'(\theta t) \to 1, \quad \text{quando } t \to 0.$$

Assim, (4) está provado.

A propriedade (5) está provada na Observação 1.8, como uma consequência de (7).

A primeira desigualdade em (6) é equivalente a $2\alpha t \geq \left(1 + 2\alpha f^{2(2\alpha-1)}(t)\right)^{1/2} f(t)$. Para verificá-la, consideramos a função $\zeta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$\zeta(t) = 2\alpha t - \left(1 + 2\alpha f^{2(2\alpha-1)}(t)\right)^{1/2} f(t).$$

Como $\zeta(0)=0$ e, para $t>0$,

$$\begin{aligned}
\zeta'(t) &= 2\alpha - \frac{1}{2}\left(1+2\alpha f^{2(2\alpha-1)}(t)\right)^{-\frac{1}{2}} 4\alpha(2\alpha-1)f^{4\alpha-3}(t)f'(t)f(t) \\
&\quad - \left(1+2\alpha f^{2(2\alpha-1)}(t)\right)^{\frac{1}{2}} f'(t) \\
&= \left[(2\alpha-1)\left(1+2\alpha f^{2(2\alpha-1)}(t)\right) - 2\alpha(2\alpha-1)f^{2(2\alpha-1)}(t)\right](f'(t))^2 \\
&= (2\alpha-1)(f'(t))^2 > 0,
\end{aligned} \tag{1.9}$$

obtemos a primeira desigualdade em (6). Analogamente, considerando a função $\eta:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, definida por $\eta(t)=f(t)-tf'(t)$, obtemos a segunda desigualdade em (6). Realmente, temos $\eta(0)=0$ e $\eta'(t)=f'(t)-f'(t)-tf''(t)=-tf''(t)$. Por outro lado, para $t>0$,

$$\begin{aligned}
f''(t) &= -\frac{1}{2}\left(1+2\alpha f^{2(2\alpha-1)}(t)\right)^{-3/2} 4\alpha(2\alpha-1)f^{4\alpha-3}(t)f'(t) \\
&= -2\alpha(2\alpha-1)(f'(t))^4 f^{4\alpha-3}(t) < 0.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Logo, $\eta'(t)>0$, para $t>0$, e a segunda desigualdade em (6) fica estabelecida.

Para provarmos (7), integramos $f'(t)\left(1+2\alpha|f(t)|^{2(2\alpha-1)}\right)^{1/2}=1$ e obtemos

$$\int_0^t f'(s)\left(1+2\alpha f^{2(2\alpha-1)}(s)\right)^{1/2} ds = t, \qquad \text{para } \ t>0.$$

Usando a mudança de variável $y=f(s)$, segue-se

$$t=\int_0^{f(t)}\left(1+2\alpha y^{2(2\alpha-1)}\right)^{1/2} dy \geq \int_0^{f(t)} (2\alpha)^{1/2} y^{2\alpha-1}\, dy = (2\alpha)^{-1/2} f^{2\alpha}(t),$$

o que implica (7) para $t\geq 0$. Para $t<0$, usamos que f é ímpar.

O item (8) é uma consequência imediata de (6) e do fato de f ser uma função ímpar.

O ponto (9) segue de (4) e (5).

Finalmente, a estimativa (10) segue diretamente da definição de f. O lema está demonstrado. □

Observação 1.5. *Notemos que W não é lipschitziana na origem para $1/2<\alpha<3/4$. Com efeito, considerando $y>0$, temos*

$$\begin{aligned}
\frac{W(y/2)-W(y)}{y-y/2} &= -\frac{2}{y}\int_{y/2}^{y} W'(s)\, ds = \frac{2}{y}\int_{y/2}^{y} \frac{2\alpha(2\alpha-1)s^{4\alpha-3}}{(1+2\alpha s^{4\alpha-2})^{3/2}}\, ds \\
&\geq \frac{4\alpha(2\alpha-1)}{(1+2\alpha y^{4\alpha-2})^{3/2}\, y}\int_{y/2}^{y} s^{4\alpha-3}\, ds = \frac{2\alpha(2^{4\alpha-2}-1)}{2^{4\alpha-2}\,(1+2\alpha y^{4\alpha-2})^{3/2}} y^{4\alpha-3}.
\end{aligned}$$

Assim, se $1/2 < \alpha < 3/4$*, temos que*

$$\frac{W(y/2) - W(y)}{y - y/2} \;\to\; \infty, \quad \text{quando } y \to 0.$$

Em trabalhos posteriores, a existência de solução para o caso em que $1/2 < \alpha < 3/4$ *também será considerada.*

Como consequência do Lema 1.4, temos

Corolário 1.6. *(i) A função* $f(t)f'(t)t^{-1}$ *é decrescente para todo* $t > 0$.
(ii) A função $f^{4\alpha-1}(t)f'(t)t^{-1}$ *é crescente para todo* $t > 0$.
(iii) A função $f^{2\alpha 2^*-1}(t)f'(t)t^{-1}$ *é crescente para todo* $t > 0$.

Demonstração. Usando (6) do Lema 1.4, segue facilmente que $f(t)/t$ é decrescente para $t > 0$. Logo, por (1.10), obtemos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{f(t)f'(t)}{t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{f(t)}{t}\right) f'(t) + \frac{f(t)}{t} f''(t) < 0 \quad \text{para } t > 0,$$

o que mostra o item (i).

Para provarmos o item (ii), calculamos a derivada abaixo, para $t > 0$,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{f'(t)f^{4\alpha-1}(t)}{t}\right) \\
&\qquad = \frac{(4\alpha-1)f^{4\alpha-2}(t)(f'(t))^2 t - 2\alpha(2\alpha-1)f^{8\alpha-4}(t)(f'(t))^4 t - f^{4\alpha-1}(t)f'(t)}{t^2} \\
&\qquad \geq f'(t)f^{4\alpha-2}(t)\frac{(4\alpha-1)f'(t)t - (2\alpha-1)f'(t)t - f(t)}{t^2} \\
&\qquad = f'(t)f^{4\alpha-2}(t)\frac{2\alpha f'(t)t - f(t)}{t^2} > 0,
\end{aligned}$$

onde usamos (1.10) e o Lema 1.4-$(2), (6), (10)$.

Agora, tendo em vista o Lema 1.4-(2), o fato de que f é crescente e $f(t) > 0$, para $t > 0$, o item (iii) segue da igualdade $f^{2\alpha 2^*-1}(t) = f^{2\alpha(2^*-2)}(t)f^{4\alpha-1}(t)$ e do item (ii). O corolário está provado. $\square$

A seguir, apresentamos um resultado técnico que será essencial para obtenção da estimativa apropriada do nível minimax; além disso, a partir de sua demonstração, verificamos o item (5) do Lema 1.4.

Lema 1.7. *Existem constantes $C_0, R > 0$ tais que, para todo $t \geq R$,*

$$f^{2\alpha 2^*}(t) - (2\alpha)^{2^*/2} t^{2^*} \geq \begin{cases} -C_0 t^{2^* - \frac{1}{2\alpha}} & \textit{se} \quad \alpha > 3/4; \\ -C_0 t^{2^* - \frac{1}{2\alpha}} \log t & \textit{se} \quad \alpha = 3/4. \end{cases}$$

Demonstração. Seja $t > t_0 \geq 1$, com t_0 fixado. Por definição, temos

$$f(t) - f(t_0) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\left(1 + 2\alpha f^{2(2\alpha-1)}(s)\right)^{1/2}}\, ds.$$

Do Lema 1.4-(7) segue que $2\alpha f^{2(2\alpha-1)}(s) \leq (2\alpha)^{\frac{4\alpha-1}{2\alpha}} s^{\frac{2\alpha-1}{\alpha}}$ para todo $s \geq 0$. Logo, para todo $t > t_0$,

$$f(t) - f(t_0) \geq \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\left(1 + (2\alpha)^{\frac{4\alpha-1}{2\alpha}} s^{\frac{2\alpha-1}{\alpha}}\right)^{1/2}}\, ds. \tag{1.11}$$

Dado $x > 0$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\frac{1}{(1+x)^{1/2}} - \frac{1}{x^{1/2}} = -\frac{1}{2(x+\theta)^{3/2}} \geq -\frac{1}{x^{3/2}}, \quad \text{para } \; x \geq 0.$$

Então, tomando $x = (2\alpha)^{\frac{4\alpha-1}{2\alpha}} s^{\frac{2\alpha-1}{\alpha}}$, de (1.11), obtemos, para todo $t > t_0$,

$$\begin{aligned} f(t) - f(t_0) &\geq \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\left((2\alpha)^{\frac{4\alpha-1}{2\alpha}} s^{\frac{2\alpha-1}{\alpha}}\right)^{1/2}}\, ds - \frac{1}{(2\alpha)^{\frac{3(4\alpha-1)}{4\alpha}}} \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\left(s^{\frac{2\alpha-1}{\alpha}}\right)^{3/2}}\, ds \\ &= \frac{1}{(2\alpha)^{\frac{4\alpha-1}{4\alpha}}} \int_{t_0}^{t} s^{\frac{1-2\alpha}{2\alpha}}\, ds - \frac{1}{(2\alpha)^{\frac{3(4\alpha-1)}{4\alpha}}} \int_{t_0}^{t} s^{\frac{3-6\alpha}{2\alpha}}\, ds. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Agora, para verificarmos o Lema 1.7, devemos considerar os dois casos possíveis:

Caso 1: $\alpha > 3/4$**.** De (1.12) segue que, para todo $t > t_0$,

$$\begin{aligned} f(t) &\geq f(t_0) + (2\alpha)^{\frac{1}{4\alpha}} \left(t^{\frac{1}{2\alpha}} - t_0^{\frac{1}{2\alpha}}\right) + \frac{(2\alpha)^{\frac{3-8\alpha}{4\alpha}}}{(4\alpha-3)} \left(t^{\frac{3-4\alpha}{2\alpha}} - t_0^{\frac{3-4\alpha}{2\alpha}}\right) \\ &= -d_1(t, t_0) + (2\alpha)^{\frac{1}{4\alpha}} t^{\frac{1}{2\alpha}}, \end{aligned} \tag{1.13}$$

onde

$$d_1(t, t_0) = (2\alpha)^{\frac{1}{4\alpha}} t_0^{\frac{1}{2\alpha}} - f(t_0) + \frac{(2\alpha)^{\frac{3-8\alpha}{4\alpha}}}{(4\alpha-3)} \left(t_0^{\frac{3-4\alpha}{2\alpha}} - t^{\frac{3-4\alpha}{2\alpha}}\right).$$

Como $3 - 4\alpha < 0$ e $t > t_0$, usando a propriedade (7) do Lema 1.4, temos

$$0 < d_1(t, t_0) \leq (2\alpha)^{\frac{1}{4\alpha}} t_0^{\frac{1}{2\alpha}} - f(t_0) + \frac{(2\alpha)^{\frac{3-8\alpha}{4\alpha}}}{(4\alpha - 3)} t_0^{\frac{3-4\alpha}{2\alpha}} = C_1. \tag{1.14}$$

Logo, existe $R > t_0$ tal que, para todo $t \geq R$,

$$d_1(t, t_0) < (2\alpha)^{\frac{1}{4\alpha}} t^{\frac{1}{2\alpha}}.$$

Portanto, de (1.13), para todo $t \geq R$,

$$f^{2\alpha 2^*}(t) - (2\alpha)^{\frac{2^*}{2}} t^{2^*} \geq \left((2\alpha)^{\frac{1}{4\alpha}} t^{\frac{1}{2\alpha}} - d_1(t, t_0)\right)^{2\alpha 2^*} - \left((2\alpha)^{\frac{1}{4\alpha}} t^{\frac{1}{2\alpha}}\right)^{2\alpha 2^*}. \tag{1.15}$$

Por outro lado, considerando $C_0 = 2\alpha 2^* (2\alpha)^{\frac{2\alpha 2^* - 1}{4\alpha}} C_1$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$\begin{aligned}
\left((2\alpha)^{\frac{1}{4\alpha}} t^{\frac{1}{2\alpha}}\right)^{2\alpha 2^*} &- \left((2\alpha)^{\frac{1}{4\alpha}} t^{\frac{1}{2\alpha}} - d_1(t, t_0)\right)^{2\alpha 2^*} \\
&\leq 2\alpha 2^* \left((2\alpha)^{\frac{1}{4\alpha}} t^{\frac{1}{2\alpha}} - \theta d_1(t, t_0)\right)^{2\alpha 2^* - 1} d_1(t, t_0) \\
&\leq 2\alpha 2^* d_1(t, t_0) (2\alpha)^{\frac{2\alpha 2^* - 1}{4\alpha}} t^{2^* - \frac{1}{2\alpha}} \\
&\leq C_0 t^{2^* - \frac{1}{2\alpha}},
\end{aligned} \tag{1.16}$$

para todo $t \geq R$. As relações (1.15) e (1.16) demonstram o Lema 1.7 para $\alpha > 3/4$.

Caso 2: $\alpha = 3/4$. Neste caso, existe $C_2 > 0$ tal que, para todo $t > t_0 + 1$,

$$\begin{aligned}
f(t) &\geq f(t_0) + (2\alpha)^{\frac{1}{4\alpha}} \left(t^{\frac{1}{2\alpha}} - t_0^{\frac{1}{2\alpha}}\right) - \frac{1}{(2\alpha)^2} \int_{t_0}^{t} \frac{1}{s}\, ds \\
&\geq -(2\alpha)^{\frac{1}{4\alpha}} t_0^{\frac{1}{2\alpha}} + (2\alpha)^{\frac{1}{4\alpha}} t^{\frac{1}{2\alpha}} - \frac{1}{(2\alpha)^2} \log t \\
&= -\left(\frac{(2\alpha)^{\frac{1}{4\alpha}} t_0^{\frac{1}{2\alpha}}}{\log t} + \frac{1}{(2\alpha)^2}\right) \log t + (2\alpha)^{\frac{1}{4\alpha}} t^{\frac{1}{2\alpha}} \\
&\geq -C_2 \log t + (2\alpha)^{\frac{1}{4\alpha}} t^{\frac{1}{2\alpha}}.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Além disso, existe $R > t_0 + 1$ tal que, para todo $t \geq R$,

$$0 < C_2 \log t < (2\alpha)^{\frac{1}{4\alpha}} t^{\frac{1}{2\alpha}}.$$

Logo, para todo $t \geq R$,

$$f^{2\alpha 2^*}(t) - (2\alpha)^{\frac{2^*}{2}} t^{2^*} \geq \left((2\alpha)^{\frac{1}{4\alpha}} t^{\frac{1}{2\alpha}} - C_2 \log t\right)^{2\alpha 2^*} - \left((2\alpha)^{\frac{1}{4\alpha}} t^{\frac{1}{2\alpha}}\right)^{2\alpha 2^*}. \tag{1.18}$$

Por outro lado, aplicando o Teorema do Valor Médio, temos que, para todo $t \geq R$,

$$\begin{aligned} \left((2\alpha)^{\frac{1}{4\alpha}} t^{\frac{1}{2\alpha}}\right)^{2\alpha 2^*} - \left((2\alpha)^{\frac{1}{4\alpha}} t^{\frac{1}{2\alpha}} - C_2 \log t\right)^{2\alpha 2^*} &\leq 2\alpha 2^* (2\alpha)^{\frac{2\alpha 2^* - 1}{4\alpha}} C_2 t^{2^* - \frac{1}{2\alpha}} \log t \\ &= C_0 t^{2^* - \frac{1}{2\alpha}} \log t, \end{aligned} \tag{1.19}$$

com $C_0 = 2\alpha 2^* (2\alpha)^{\frac{2\alpha 2^* - 1}{4\alpha}} C_2$. As relações (1.18) e (1.19) demonstram o Lema 1.7 para $\alpha = 3/4$.

Portanto, a demonstração do Lema 1.7 está completa. $\square$

Observação 1.8. *Da demonstração do Lema 1.7 acima, usando unicamente a propriedade* (7) *do Lema 1.4, obtemos a propriedade*

(5) $$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{t^{1/2\alpha}} = (2\alpha)^{1/4\alpha}.$$

Efetivamente, pelo Lema 1.4-(7)*, obtivemos (1.13), (1.14) e (1.17). Consequentemente,*

$$\liminf_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{t^{1/2\alpha}} \geq (2\alpha)^{1/4\alpha}.$$

Usando a propriedade (7) *do Lema 1.4 mais uma vez, segue-se*

$$\limsup_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{t^{1/2\alpha}} \leq (2\alpha)^{1/4\alpha}.$$

Portanto, (5) *vale.*

1.3 Regularidade dos funcionais

Nesta parte de nosso trabalho, vamos mostrar que os funcionais associados aos problemas em estudo têm as propriedades diferenciáveis desejadas. Desde já, será repetidamente utilizada, a seguinte consequência das hipóteses (g_1) e (g_2): dado $\delta > 0$, existe uma constante $C_\delta > 0$ tal que

$$|g(x,s)| \leq \delta |s| + C_\delta |s|^{q_1 - 1}, \quad \text{para todo } (x,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \tag{1.20}$$

$$|G(x,s)| \le \frac{\delta}{2}|s|^2 + \frac{C_\delta}{q_1}|s|^{q_1}, \quad \text{para todo } (x,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}. \tag{1.21}$$

O resultado seguinte refere-se aos funcionais dos Capítulos 2 e 4.

Proposição 1.9. *Suponha que as hipóteses (V), (V_1), (K), (g_1) e (g_2) sejam satisfeitas. Então o funcional I, definido por*

$$I(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v) - \frac{1}{2\alpha 2^*}\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|f(v^+)|^{2\alpha 2^*} - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, f(v)), \tag{1.22}$$

está bem definido em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e, além disso, $I \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$.

Demonstração. Primeiramente, observemos que se uma função de Carathéodory $h : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem a propriedade:

(h_0) existem constantes $a_1, a_2 > 0$ e $1 \le p \le 2^* - 1$ tais que

$$|h(x,s)| \le a_1|s| + a_2|s|^p,$$

então é padrão (veja [6, 54]) que $F : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ definida por $F(u) = \int_{\mathbb{R}^N} H(x,u)\,dx$ é de classe C^1, onde $H(x,s) := \int_0^s h(x,\tau)\,d\tau$.

Agora tomemos $h(x,s) := K(x)|f(s)|^{2\alpha 2^* - 2} f(s) f'(s) - V(x) f(s) f'(s) + g(x, f(s)) f'(s)$ e notemos que, pelas condições (V_1), (K) e o Lema 1.4-(2), (3), (10), (7), temos

$$|V(x) f(s) f'(s)| \le \|V\|_\infty |s|$$

e

$$\left|K(x)|f(s)|^{2\alpha 2^* - 1} f'(s)\right| \le \|K\|_\infty |f(s)|^{2\alpha(2^*-1)} |f(s)|^{2\alpha - 1} f'(s) \le (2\alpha)^{\frac{2^*-2}{2}} \|K\|_\infty |s|^{2^*-1}.$$

Além disso, como $4\alpha \le q_1 < 2\alpha 2^*$, de (1.20) e o Lema 1.4-(2), (3), (7), segue, para $s \neq 0$, que

$$\begin{aligned}
|g(x,f(s))f'(s)| &\le \delta|f(s)|\,|f'(s)| + C_\delta |f(s)|^{q_1-1}|f'(s)| \le \delta|s| + C_\delta |f(s)|^{q_1-1}\frac{|f(s)|}{|s|} \\
&= \delta|s| + C_\delta \frac{|f(s)|^{q_1}}{|s|} \le \delta|s| + C_\delta (2\alpha)^{\frac{q_1}{4\alpha}} |s|^{\frac{q_1}{2\alpha} - 1}.
\end{aligned}$$

Portanto, como V, K, g e f' são funções contínuas e a primeira integral de (1.22) é uma parte da norma do espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$, pelas estimativas e observação acima, o funcional I é de classe C^1. A Proposição 1.9 está demonstrada. $\square$

Para os funcionais referentes aos Capítulos 3 e 5, temos

Proposição 1.10. *Suponha que as hipóteses (V), (K'), (g_1) e (g_2) sejam satisfeitas. Então o funcional I, definido em (1.22), está bem definido em*

$$X := \{v \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x)v^2\,dx < \infty\}$$

e, além disso, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$.

Demonstração. Tendo em vista a Proposição 1.9, a fim de mostrarmos que $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, resta-nos verificar que o funcional $I_1 : X \to \mathbb{R}$, definido por

$$I_1(v) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v),$$

pertence a $C^1(X, \mathbb{R})$. Para tanto, vamos mostrar que se $v_n \to v$ em X, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)[f(v_n)f'(v_n) - f(v)f'(v)]u \to 0, \quad \text{para todo } u \in X,\ \|u\|_X \leq 1. \tag{1.23}$$

Desde que $v_n \to v$ em X, utilizando o Lema de Brezis-Lieb, obtemos $V(x)v_n^2 \to V(x)v^2$ em $L^1(\mathbb{R}^N)$. Assim, podemos tomar uma subsequência se necessário, para que $V(x)v_n^2(x) \to V(x)v^2(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ e $|V(x)v_n^2|, |V(x)v^2| \leq w$, para alguma função $w \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Logo, pela condição (V) e pelo Lema 1.4-(2), (3), segue-se

$$\begin{aligned} V(x)|f(v_n)f'(v_n) - f(v)f'(v)|^2 &\leq 2V(x)\left(|f(v_n)f'(v_n)|^2 + |f(v)f'(v)|^2\right) \\ &\leq 2V(x)\left(|v_n|^2 + |v|^2\right) \\ &\leq 4w. \end{aligned}$$

Esta desigualdade e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue mostram que

$$\sqrt{V(x)}f(v_n)f'(v_n) \to \sqrt{V(x)}f(v)f'(v) \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}^N).$$

Daí, pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} &\sup_{\substack{u\in X \\ \|u\|_X\leq 1}} \left|\int_{\mathbb{R}^N} \sqrt{V(x)}[f(v_n)f'(v_n) - f(v)f'(v)]\sqrt{V(x)}u\right| \\ &\qquad \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(v_n)f'(v_n) - f(v)f'(v)|^2\right)^{1/2} \sup_{\substack{u\in X \\ \|u\|_X\leq 1}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Isto conclui a verificação de (1.23). A Proposição 1.10 está demonstrada. □

1.4 Relação entre as soluções dos problemas originais e suas modificações

O próximo resultado relaciona as soluções fracas de

$$-\Delta u - \Delta(|u|^{2\alpha})|u|^{2\alpha-2}u + V(x)u = K(x)|u|^{2\alpha 2^*-2}u + g(x,u), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{1.24}$$

com as soluções fracas de

$$-\Delta v + V(x)f(v)f'(v) = K(x)|f(v)|^{2\alpha 2^*-2}f(v)f'(v) + g(x,f(v))f'(v), \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.25}$$

Enfatizamos que tal resultado já fora verificado, para $\alpha = 1$, por Severo [57]. Todavia, por uma questão de completude, preferimos apresentar aqui (adaptando os argumentos de [57]) a demonstração do mesmo para os valores de α que consideramos.

Definição 1.11. *Uma função $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é chamada uma solução fraca de (1.24) se $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ vale*

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1 + 2\alpha|u|^{2(2\alpha-1)})\nabla u \nabla\varphi + 2\alpha(2\alpha-1)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2|u|^{2(2\alpha-2)}u\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{h}(x,u)\varphi, \tag{1.26}$$

onde $\widetilde{h}(x,s) := K(x)|s|^{2\alpha 2^*-2}s - V(x)s + g(x,s)$.

Uma função $v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é chamada uma solução fraca de (1.25) se $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e para todo $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, vale

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla w = \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{h}(x, f(v))f'(v)w. \tag{1.27}$$

Desde que $h(x,s) = \widetilde{h}(x,f(s))f'(s)$, pela propriedade (h_0), temos que (1.27) vale se tomarmos $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ com suporte compacto.

Lema 1.12. *(i) se $v \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $v > 0$, é uma solução fraca de (1.25), então $u = f(v) \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $u > 0$, é uma solução fraca de (1.24);*

(ii) se v é uma solução clássica de (1.25), então $u = f(v)$ é uma solução clássica de (1.24).

Demonstração. Demonstração de (i). Pelo Lema 1.4-(3), (2), temos que $u^2 = f^2(v) \leq v^2$ e $|\nabla u|^2 = (f'(v))^2 |\nabla v|^2 \leq |\nabla v|^2$. Logo, $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Uma vez que

$(f^{-1})'(t) = \frac{1}{f'(f^{-1}(t))}$, segue-se

$$(f^{-1})'(t) = (1 + 2\alpha|f\left(f^{-1}(t)\right)|^{2(2\alpha-1)})^{1/2} = (1 + 2\alpha|t|^{2(2\alpha-1)})^{1/2}, \qquad (1.28)$$

donde

$$\nabla v = \nabla\left(f^{-1}(u)\right) = (f^{-1})'(u)\nabla u = (1 + 2\alpha|u|^{2(2\alpha-1)})^{1/2}\nabla u. \qquad (1.29)$$

Notemos que, para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, temos $(f'(v))^{-1}\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$. De fato, por (1.4), o fato de que $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e $\alpha \geq 3/4$, temos

$$(f'(v))^{-1}\varphi = (1 + 2\alpha|f(v)|^{2(2\alpha-1)})^{1/2}\varphi = (1 + 2\alpha|u|^{2(2\alpha-1)})^{1/2}\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N)$$

e

$$\begin{aligned} \nabla[(f'(v))^{-1}\varphi] &= \nabla[(1 + 2\alpha|u|^{2(2\alpha-1)})^{1/2}\varphi] \\ &= 2\alpha(2\alpha-1)(1 + 2\alpha|u|^{2(2\alpha-1)})^{-1/2}|u|^{4(\alpha-1)}u\varphi\nabla u \\ &\quad +(1 + 2\alpha|u|^{2(2\alpha-1)})^{1/2}\nabla\varphi \;\; \in L^2(\mathbb{R}^N). \end{aligned} \qquad (1.30)$$

Além disso, é claro que $(f'(v))^{-1}\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tem suporte compacto. Agora, tomando $w = (f'(v))^{-1}\varphi$ e substituindo em (1.27), e usando (1.29) e (1.30), obtemos (1.26). O item (i) está verificado.

Demonstração de (ii). Usando (1.28), temos

$$\Delta v = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left((f^{-1})'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left((1 + 2\alpha|u|^{2(2\alpha-1)})^{1/2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right),$$

que derivando, nos dá

$$\Delta v = \left(1 + 2\alpha|u|^{2(2\alpha-1)}\right)^{1/2}\Delta u + 2\alpha(2\alpha-1)(1 + 2\alpha|u|^{2(2\alpha-1)})^{-1/2}|u|^{4(\alpha-1)}u|\nabla u|^2.$$

Assim, de (1.25), vem

$$\begin{aligned} &\left(1 + 2\alpha|u|^{2(2\alpha-1)}\right)^{1/2}\Delta u \; + \; 2\alpha(2\alpha-1)\left(1 + 2\alpha|u|^{2(2\alpha-1)}\right)^{-1/2}|u|^{4(\alpha-1)}u|\nabla u|^2 \\ &\qquad = -\frac{1}{\left(1 + 2\alpha|u|^{2(2\alpha-1)}\right)^{1/2}}\widetilde{h}(x,u), \end{aligned}$$

que produz

$$\Delta u + 2\alpha|u|^{2(2\alpha-1)}\Delta u + 2\alpha(2\alpha-1)|u|^{4(\alpha-1)}u|\nabla u|^2 = -\widetilde{h}(x,u). \qquad (1.31)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\Delta\left(|u|^{2\alpha}\right) &= \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}|u|^{2\alpha}\right)=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(2\alpha|u|^{2\alpha-2}u\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\\ &= 2\alpha(2\alpha-1)|u|^{2\alpha-2}|\nabla u|^2+2\alpha|u|^{2\alpha-2}u\Delta u,\end{aligned}$$

implica que

$$\Delta\left(|u|^{2\alpha}\right)|u|^{2\alpha-2}u=2\alpha(2\alpha-1)|u|^{4(\alpha-1)}u|\nabla u|^2+2\alpha|u|^{2(2\alpha-1)}\Delta u. \tag{1.32}$$

Portanto, combinando (1.31) e (1.32), obtemos

$$-\Delta u-\Delta\left(|u|^{2\alpha}\right)|u|^{2\alpha-2}u=\widetilde{h}(x,u),$$

que mostra o item (ii). O Lema 1.12 está demonstrado. □

Então, fica claro que para obtermos uma solução fraca positiva de (1.24), é suficiente obtermos uma solução fraca positiva de (1.25) em $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Observação 1.13. *Supondo que as funções V, K e g sejam localmente Hölder contínuas, além das hipóteses mencionadas na Introdução, temos que qualquer solução fraca de (1.25) é de classe $C^{2,\beta}_{loc}(\mathbb{R}^N)$. De fato, seja v uma solução fraca de (1.25), ou seja, v satisfaz, no sentido fraco, a equação*

$$-\Delta v=h(x,v)\quad \text{em }\ \mathbb{R}^N.$$

Devido ao comportamento da função V, temos a propriedade (h_0), apenas localmente. De fato, pelo Lema 1.4-(2),(3),(7),(10), pela relação (1.20) e a continuidade das funções V e K, temos em toda bola B_R,

$$\begin{aligned}|h(x,v)| &\le f'(v)\big|K(x)|f(v)|^{2\alpha 2^*-2}f(v)-V(x)f(v)+g(x,f(v))\big|\\ &\le f'(v)\big[C_1|f^{2\alpha(2^*-1)}(v)||f(v)|^{2\alpha-1}+C_2|f(v)|+\delta|f(v)|+C_\delta|f(v)|^{q_1-2\alpha}|f(v)|^{2\alpha-1}\big]\\ &\le (2\alpha)^{(2^*-2)/2}C_1|v|^{2^*-1}+(C_2+\delta)|v|+(2\alpha)^{(q_1-4\alpha)/4\alpha}C_\delta|v|^{(q_1-2\alpha)/2\alpha}\\ &\le C_3|v|^{2^*-1},\end{aligned}$$

para algumas constantes positivas C_1, C_2, C_3, uma vez que $1\le (q_1-2\alpha)/2\alpha<2^*-1$. Usando um resultado devido a Brezis-Kato (veja [62]), segue que $h\in L^p(B_R)$ para todo $p<\infty$, com $R>0$ arbitrário. Pela teoria de regularidade elíptica, podemos concluir que $v\in W^{2,p}(B_R)$. Logo, $v\in C^{1,\beta}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para algum $\beta\in(0,1)$. Daí, a função h é localmente Hölder contínua. Consequentemente, $v\in C^{2,\beta}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para algum $\beta\in(0,1)$.

Portanto, pelo Lema 1.12 e a Observação 1.13 acima, para obtermos soluções clássicas positivas de (1.24), é suficiente conseguirmos soluções fracas positivas de (1.25).

Capítulo 2

Equações de Schrödinger quasilineares assintoticamente periódicas com crescimento subcrítico

Neste capítulo, estudamos a existência de solução para o problema elíptico quasilinear da forma

$$\begin{cases} -\Delta u - \Delta(|u|^{2\alpha})|u|^{2\alpha-2}u + V(x)u \;=\; g(x,u), & x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N),\; u > 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\alpha \geq 3/4$, $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ são funções contínuas.

Nosso objetivo principal é estabelecer a existência de uma solução para o Problema (2.1) sob uma condição de periodicidade assintótica no infinito, e com a função g tendo crescimento subcrítico.

Denotamos por $\mathcal{F}$ a classe de funções $h \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ tais que, para todo $\varepsilon > 0$, o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^N : |h(x)| \geq \varepsilon\}$ possui medida de Lebesgue finita. Supomos que V é uma perturbação de uma função periódica no infinito. Mais especificamente, admitimos que V satisfaz

(V) existe uma constante $a_0 > 0$ tal que

$$V(x) \geq a_0 > 0, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N;$$

(V_1) existe uma função $V_0 \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, 1-periódica em x_i, $1 \leq i \leq N$, tal que $V_0 - V \in \mathcal{F}$ e

$$V(x) \leq V_0(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

Observamos que a condição (V_1) implica que V é limitada. A função V definida por $V(x) = e^{\frac{-1}{|x|+1}}$ satisfaz (V) e (V_1), com $a_0 = e^{-1}$ e $V_0 \equiv 1$.

Considerando $G(x,s) = \int_0^s g(x,t)\,dt$, a primitiva de g, supomos também as seguintes hipóteses:

(g_1) $g(x,s) = o(|s|), \quad$ quando $s \to 0^+$, uniformemente em $x \in \mathbb{R}^N$;

(g_2) existem constantes $a_1, a_2 > 0$ e $4\alpha \leq q_1 < 2\alpha 2^*$ tais que

$$|g(x,s)| \leq a_1 + a_2|s|^{q_1-1}, \quad \text{para todo } (x,s) \in \mathbb{R}^N \times [0,+\infty);$$

(g_3) existem constantes $a_3 > 0$, $q_2 > N(q_1 - 4\alpha)/2$ e uma função $h_1 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tais que

$$\frac{1}{4\alpha} g(x,s)s - G(x,s) \geq a_3 s^{q_2} - h_1(x), \quad \text{para todo } (x,s) \in \mathbb{R}^N \times [0,+\infty),$$

onde q_1 é dada pela hipótese (g_2).

Já observamos, na Introdução, que as condições (g_1) e (g_2) possibilitam-nos aplicar métodos variacionais para estudarmos o Problema (2.1), e permitem-nos verificar que o funcional associado possui um mínimo local na origem. Na verdade, estudamos o funcional associado ao problema modificado. A condição (g_2) impõe um crescimento subcrítico para g. Entretanto, sob estas hipóteses, este funcional não satisfaz uma condição de compacidade do tipo Palais-Smale, desde que o domínio é todo o $\mathbb{R}^N$. Também observamos que de (g_2) e (g_3), obtemos $0 < q_2 \leq q_1$. Observamos ainda que a condição (g_3) é utilizada na demonstração de que toda sequência de Cerami do funcional associado ao Problema (2.1) é limitada; além disto, pedimos aqui, que a função g seja não-negativa. É interessante lembrarmos que $2\alpha 2^* = 4\alpha N/(N-2)$ se comporta como o expoente crítico para o Problema (2.1).

O fato de que g é assintoticamente periódica no infinito é dado pela seguinte condição:

(g_4) existem uma constante $2 \leq q_3 < 2\alpha 2^*$ e funções $h_2 \in \mathcal{F}$, $g_0 \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$, 1-periódica em x_i, $1 \leq i \leq N$, tais que

(i) $G(x,s) \geq G_0(x,s) = \int_0^s g_0(x,t)\,dt, \quad$ para todo $(x,s) \in \mathbb{R}^N \times [0,+\infty)$,

(ii) $|g(x,s) - g_0(x,s)| \leq h_2(x)|s|^{q_3-1}, \quad$ para todo $(x,s) \in \mathbb{R}^N \times [0,+\infty)$,

(iii) a função $s \to g_0(x,s)/s^{4\alpha-1}$ é não-decrescente na variável $s > 0$.

Finalmente, também supomos que g satisfaz a hipótese:

(g_5) $$\liminf_{s\to\infty} \frac{G(x,s)}{s^{4\alpha}} > 0, \quad \text{uniformemente em } x \in \mathbb{R}^N.$$

Agora podemos enunciar o nosso resultado principal deste capítulo.

Teorema 2.1. *Suponha que as condições* (V), (V_1) *e* $(g_1)-(g_5)$ *sejam satisfeitas. Então o Problema* (2.1) *possui uma solução.*

Observamos que no caso particular: $V = V_0$, $g = g_0$, o Teorema 2.1 claramente nos dá uma solução para o problema periódico. Realmente, a condição $(g_4)(iii)$ torna-se desnecessária para a existência de uma solução para o problema periódico. Dito de outra forma, considerando o Problema (2.1), sob as hipóteses: (V), $(g_1)-(g_3)$, (g_5) e, ainda,

(V_0) a função $V \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ é 1-periódica em x_i, $1 \le i \le N$;

(g_0) a função $g \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ é 1-periódica em x_i, $1 \le i \le N$,

podemos estabelecer

Teorema 2.2. *Suponha que* (V), (V_0), (g_0), $(g_1)-(g_3)$ *e* (g_5) *sejam satisfeitas. Então o Problema* (2.1) *possui uma solução.*

Em [44] Liu e Wang estabeleceram a existência de soluções ground states para (2.1) no espaço inteiro. Eles consideraram as funções reais ρ, l sendo potências puras. Para tal, estes autores trabalharam em um espaço de Orlicz apropriado. Em [13], Colin e Jeanjean deram uma prova mais simples e resumida dos resultados de [44], pois não utilizaram espaços de Orlicz, mas o espaço usual $H^1(\mathbb{R}^N)$. O fato de terem trabalhado em $H^1(\mathbb{R}^N)$ também permitiu cobrir uma classe diferente de não-linearidades.

O Problema (2.1) foi estudado por Moameni [47] quando $N = 2$, V e g são duas funções contínuas 1-periódicas, e g tem crescimento exponencial crítico. Em [44] Liu e Wang consideraram vários tipos de funções potenciais, dentre eles, o caso em que V é periódico. Entretanto, esses trabalhos foram desenvolvidos em espaços de Orlicz. Com o mesmo propósito de Colin e Jeanjean em [13], damos uma prova mais simples dos resultados de [44], já que usamos o espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)$. Nosso resultado (para $N \ge 3$) complementa, de certa forma, aquele feito em [13], uma vez que Colin e Jeanjean não estudaram o caso periódico e, além disso, nós contemplamos uma nova classe de funções potenciais, que engloba o potencial periódico.

Seguindo a estratégia desenvolvida em [13], também utilizamos uma mudança de variável $v = f^{-1}(u)$ e obtemos uma equação semilinear cujo funcional associado está bem definido em $H^1(\mathbb{R}^N)$. A demonstração do Teorema 2.1 reside no estudo do funcional energia associado ao problema modificado. Primeiramente, mostramos que o funcional possui a geometria do Passo da Montanha e estabelecemos que o nível minimax, c, é positivo (veja Lema 2.3). Para encontrarmos um ponto crítico, a principal dificuldade a ser contornada é a possível perda de compacidade, desde que o Problema (2.1) é posto em todo o $\mathbb{R}^N$. Contornamos esta dificuldade adaptando os argumentos utilizados em [38, 39]: supomos que a solução da equação em (2.1) seja a nula. Considerando o funcional associado ao problema (funcional modificado), utilizamos uma versão do Teorema do Passo da Montanha sem condição de compacidade [25] para obtermos uma sequência de Cerami associada ao nível minimax. A seguir, utilizamos essa sequência de Cerami para estabelecermos a existência de um ponto crítico não-trivial do funcional associado ao problema periódico. Além disto, somos capazes de verificar que o valor do funcional associado ao Problema (2.1), neste ponto, não é superior ao nível minimax do Passo da Montanha e que, na realidade, este nível minimax é atingido. Finalmente, aplicamos uma versão local do Teorema do Passo da Montanha (Teorema 1.3) para garantirmos a existência de um ponto crítico não-nulo do funcional associado ao Problema (2.1).

Organizamos este capítulo como segue: na Seção 2.1, apresentamos a estrutura variacional devido à mudança de variável (1.4), verificando, ainda, as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha e mostrando a limitação das sequências de Cerami associadas ao nível minimax; e além disso, demonstramos um lema que ser-nos-á fundamental para mostrarmos que a solução encontrada não é nula. Na Seção 2.2, apresentamos dois resultados técnicos necessários à demonstração do Teorema 2.1. Na Seção 2.3, demonstramos os Teoremas 2.1 e 2.2 e, assim, a existência de solução para o Problema (2.1) é estabelecida. Finalmente, na Seção 2.4 – Apêndice –, fornecemos um exemplo de funções g e g_0 que cumprem as hipóteses $(g_1) - (g_5)$.

2.1 Estrutura variacional

Como estamos interessados em usar métodos variacionais, observamos inicialmente que o Problema (2.1) é a equação de Euler-Lagrange associada ao funcional energia

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(1+2\alpha|u|^{2(2\alpha-1)})|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,u).$$

Todavia, devido à presença do termo $\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)})|\nabla u|^2$, fazemos uso da mudança de variável (1.4) para tratarmos o problema variacionalmente. Depois desta mudança de variável, a partir de J, obtemos o funcional

$$I(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v) - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,f(v)), \tag{2.2}$$

que está bem definido em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e é de classe C^1 sob as hipóteses (V), (V_1), (g_1) e (g_2) (veja Proposição 1.9). Além disso (veja Lema 1.12), os pontos críticos positivos do funcional I são as soluções fracas do problema

$$\begin{cases} -\Delta v + V(x)f'(v)f(v) \;=\; g(x, f(v))f'(v), \\ v \in H^1(\mathbb{R}^N),\ v > 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Observamos que se $v \in C^2(\mathbb{R}^N) \cap H^1(\mathbb{R}^N)$, $v > 0$, é um ponto crítico do funcional I, então a função $u = f(v)$ é uma solução clássica de (2.1) (veja Observação 1.13). Para o caso onde $\alpha = 1$, veja [13] ou [57]. Também observamos que para obtermos uma solução não-negativa para (2.3), tomamos $g(x, s) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $s < 0$. De fato, seja v um ponto crítico de I. Tomando $w = v^-$, onde $v^- = \min\{v, 0\}$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v^-|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f'(v)f(v)v^- = 0.$$

Como $f(v)v^- \geq 0$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v^-|^2 = 0 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} \frac{V(x)f(v)v^-}{\sqrt{1 + 2\alpha|f(v)|^{2(2\alpha-1)}}} = 0.$$

Logo, podemos concluir que $v^- = 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^N$ e, portanto, $v = v^+ \geq 0$. Consequentemente $u = f(v)$ é uma solução (não-negativa) do Problema (2.1).

De maneira análoga, associado ao problema periódico, temos o funcional $I_0 \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$, definido por

$$I_0(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V_0(x)f^2(v) - \int_{\mathbb{R}^N} G_0(x, f(v)), \tag{2.4}$$

onde $g_0(x, s) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $s < 0$.

Dessa forma, trabalhamos com o espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$ munido de uma das seguintes normas

$$\|v\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + V(x)v^2)\right)^{1/2},$$

$$\|v\|_0 = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + V_0(x)v^2)\right)^{1/2}.$$

Observamos que, em vista das condições (V) e (V_1), ambas as normas acima são equivalentes à norma usual de $H^1(\mathbb{R}^N)$.

2.1.1 Propriedades geométricas

Aqui, apresentamos os resultados variacionais utilizados na demonstração dos Teoremas 2.1 e 2.2. Primeiramente, verificamos as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha. Em seguida, apresentamos dois resultados relativos às sequências de Cerami do funcional associado.

O lema seguinte mostra que o funcional (modificado) associado ao Problema (2.1), satisfaz as propriedades geométricas do Teorema do Passo da Montanha. Observamos que a condição (V_1) consta, como hipótese, em todos os resultados desta subseção apenas para termos $\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v) < \infty$.

Lema 2.3. *Suponha que (V), (V_1), (g_1), (g_2) e (g_5) sejam satisfeitas. Então o funcional I, definido por (2.2), satisfaz as condições $I(0) = 0$, (I_1) e (I_2) do Teorema 1.1.*

Demonstração. Primeiramente, note que $I(0) = 0$. Agora, defina, para cada $\rho > 0$,

$$S_\rho := \left\{ v \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v) = \rho^2 \right\}.$$

Desde que a função $\Psi : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$, dada por

$$\Psi(v) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v),$$

é contínua, S_ρ é um subconjunto fechado que desconecta o espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$. Tomando $0 < \lambda < 1$ tal que $q_1/2 = (1-\lambda) + \lambda\alpha 2^*$, por (V), a relação (1.21), a desigualdade de Hölder, o Lemma 1.4-(7) e o Teorema das Imersões de Sobolev, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} G(x, f(v)) &\leq \frac{\delta}{2}\int_{\mathbb{R}^N} f^2(v) + \frac{C_\delta}{q_1}\int_{\mathbb{R}^N} |f^2(v)|^{q_1/2} \\
&\leq \frac{\delta}{2a_0}\rho^2 + \frac{C_\delta}{q_1}\left(\int_{\mathbb{R}^N} f^2(v)\right)^{1-\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}^N} (f^2(v))^{\alpha 2^*}\right)^{\lambda} \\
&\leq \frac{\delta}{2a_0}\rho^2 + (2\alpha)^{\lambda 2^*/2}\frac{C_\delta}{q_1}\left(\int_{\mathbb{R}^N} f^2(v)\right)^{1-\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{2^*}\right)^{\lambda} \\
&\leq \frac{\delta}{2a_0}\rho^2 + \frac{(2\alpha)^{\lambda 2^*/2}C_0C_\delta}{q_1 a_0^{1-\lambda}}\rho^{2(1-\lambda)}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2\right)^{\lambda 2^*/2} \\
&\leq \frac{\delta}{2a_0}\rho^2 + \frac{(2\alpha)^{\lambda 2^*/2}C_0C_\delta}{q_1 a_0^{1-\lambda}}\rho^{2(1-\lambda)+\lambda 2^*},
\end{aligned}$$

para todo $v \in S_\rho$ e alguma constante $C_0 > 0$. Logo,

$$I(v) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta}{2a_0}\right)\rho^2 - \frac{(2\alpha)^{\lambda 2^*/2} C_0 C_\delta}{q_1 a_0^{1-\lambda}} \rho^{2(1-\lambda)+\lambda 2^*},$$

para todo $v \in S_\rho$. Como $(1-\lambda)2 + \lambda 2^* > 2$, escolhendo $0 < \delta < a_0$, concluímos, para ρ suficientemente pequeno, que

$$c_0 := \inf_{S_\rho} I \geq \tau > 0.$$

A condição (I_1) é satisfeita.

Para mostrarmos a condição (I_2), basta mostramos que existe $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $\varphi \geq 0$ tal que

$$I(t\varphi) \to -\infty, \quad \text{quando } \ t \to +\infty. \tag{2.5}$$

Considerando $\varphi_r > 0$ a primeira autofunção associada ao primeiro autovalor, λ_r, do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda w, & \text{em } \ B_r(0), \\ \quad w = 0, & \text{sobre } \ \partial B_r(0), \end{cases}$$

tomamos a extensão nula de φ_r para todo $\mathbb{R}^N$ (ainda denotada por φ_r). Em vista da condição (g_5), encontramos constantes C_0, $R > 0$ tais que

$$G(x,s) \geq C_0 s^{4\alpha} \quad \text{para todo } \ s \geq R \ \text{ e } \ x \in \mathbb{R}^N.$$

Pela continuidade de G, existe uma constante $C_1 > 0$, dependendo de C_0 e R, tal que

$$G(x,s) \geq C_0 s^{4\alpha} - C_1, \quad \text{para todo } \ (x,s) \in \overline{B}_r(0) \times [0, +\infty).$$

Logo, considerando o Lema 1.4-(7), (9) e a continuidade de V, obtemos, para todo $t > 0$,

$$\begin{aligned} & I(t\varphi_r) \\ & \quad \leq \frac{t^2}{2}\int_{B_r(0)} |\nabla \varphi_r|^2 + \frac{1}{2}\int_{B_r(0)} V(x) f^2(t\varphi_r) - C_0 \int_{B_r(0)\cap\{t\varphi_r(x)>1\}} f^{4\alpha}(t\varphi_r) + C_1|B_r(0)| \\ & \quad \leq \frac{\lambda_r t^2}{2}\int_{B_r(0)} \varphi_r^2 + \frac{(2\alpha)^{\frac{1}{2\alpha}} C_2 t^{\frac{1}{\alpha}}}{2}\int_{B_r(0)} \varphi_r^{\frac{1}{\alpha}} - C_0 C^{4\alpha} t^2 \int_{B_r(0)\cap\{t\varphi_r(x)>1\}} \varphi_r^2 + C_1|B_r(0)|, \end{aligned}$$

para alguma constante $C_2 > 0$. Agora, dado $\varepsilon > 0$, existe $r = r(\varepsilon) > 0$ tal que $\lambda_r < \varepsilon$. Assim,

$$I(t\varphi_r) < \frac{\varepsilon t^2}{2}\int_{B_r(0)} \varphi_r^2 + \frac{(2\alpha)^{\frac{1}{2\alpha}} C_2 t^{\frac{1}{\alpha}}}{2}\int_{B_r(0)} \varphi_r^{\frac{1}{\alpha}} - C_0 C^{4\alpha} t^2 \int_{B_r(0)\cap\{t\varphi_r(x)>1\}} \varphi_r^2 + C_1|B_r(0)|.$$

Como
$$\int_{B_r(0)} \varphi_r^2 - \int_{B_r(0)\cap\{t\varphi_r(x)>1\}} \varphi_r^2 = \int_{B_r(0)\cap\{t\varphi_r(x)\le 1\}} \varphi_r^2 \le \frac{|B_r(0)|}{t^2},$$
segue que

$$I(t\varphi_r) < \left(\frac{\varepsilon}{2} - C_0C^{4\alpha}\right) t^2 \int_{B_r(0)} \varphi_r^2 + \frac{(2\alpha)^{\frac{1}{2\alpha}} C_2}{2} t^{\frac{1}{\alpha}} \int_{B_r(0)} \varphi_r^{\frac{1}{\alpha}} + (C_0C^{4\alpha} + C_1)|B_r(0)|.$$

Tomando $\varepsilon < 2C_0C^{4\alpha}$, obtemos $\lim_{t\to+\infty} I(t\varphi_r) = -\infty$. Portanto (2.5) está provado. A prova do lema está completa. □

Como consequência do Teorema 1.1 e do Lema 2.3, temos

Corolário 2.4. *Suponha que (V), (V_1), (g_1), (g_2) e (g_5) sejam satisfeitas. Então o funcional I possui uma sequencia $(Ce)_c$, com c dado por (1.1).*

A seguir, verificamos a limitação das sequências de Cerami (Ce) associadas ao funcional I, e um resultado concernente ao comportamento dessas sequências.

Lema 2.5. *Suponha que (V), (V_1), $(g_1) - (g_3)$ sejam satisfeitas. Então toda sequência de Cerami (v_n) em $H^1(\mathbb{R}^N)$ associada ao funcional I é limitada.*

Demonstração. Inicialmente, afirmamos que se uma sequência $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ satisfaz
$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) \le M \tag{2.6}$$
para alguma constante $M > 0$, então ela é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Para mostrarmos isto, precisamos apenas provar que $\int_{\mathbb{R}^N} v_n^2$ é limitada. Pela condição (V), o Lema 1.4-(9), (2.6) e o Teorema das Imersões de Sobolev, existem constantes C, $C_0 > 0$ tais que
$$\int_{\{|v_n(x)|\le 1\}} v_n^2 \le \frac{1}{C^2} \int_{\{|v_n(x)|\le 1\}} f^2(v_n) \le \frac{1}{C^2 a_0} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) \le \frac{M}{a_0 C^2}$$
e
$$\int_{\{|v_n(x)|>1\}} v_n^2 \le \int_{\{|v_n(x)|>1\}} |v_n|^{2^*} \le C_0 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2\right)^{2^*/2} \le C_0 M^{2^*/2}.$$
Portanto,
$$\int_{\mathbb{R}^N} v_n^2 = \int_{\{|v_n(x)|\le 1\}} v_n^2 + \int_{\{|v_n(x)|>1\}} v_n^2 \le \frac{M}{a_0 C^2} + C_0 M^{2^*/2}.$$
A afirmação está provada.

Seja, então, $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência de Cerami para I no nível $c \in \mathbb{R}$, isto é,

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, f(v_n)) = c + o_n(1), \\ \|I'(v_n)\|(1 + \|v_n\|) = o_n(1).\end{gathered} \tag{2.7}$$

Tomando $0 < \delta < a_0$, por (2.7), (1.21) e a condição (V), temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) &= \int_{\mathbb{R}^N} G(x, f(v_n)) + c + o_n(1) \\ &\leq \frac{\delta}{2a_0}\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) + \frac{C_\delta}{q_1}\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{q_1} + c + o_n(1),\end{aligned}$$

o que implica em

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta}{2a_0}\right)\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) \leq \frac{C_\delta}{q_1}\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{q_1} + c + o_n(1). \tag{2.8}$$

Pelo Lema 1.4-(6), (8), a condição (V), e notando que $g \geq 0$ e $g(x, s) = 0$ se $s < 0$, temos

$$\langle I'(v_n), v_n\rangle \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2\alpha} g(x, f(v_n)) f(v_n).$$

Consequentemente, por (g_3),

$$\begin{aligned}I(v_n) - \frac{1}{2}\langle I'(v_n), v_n\rangle &\geq \int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{1}{4\alpha} g(x, f(v_n)) f(v_n) - G(x, f(v_n))\right] \\ &\geq a_3\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{q_2} - \int_{\mathbb{R}^N} h_1.\end{aligned}$$

Então, por (2.7) e o fato de que $h_1 \in L^1(\mathbb{R}^N)$, encontramos uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{q_2} \leq C_1. \tag{2.9}$$

Como observamos na introdução deste capítulo, $q_2 \leq q_1$. Se $q_1 = q_2$, a desigualdade (2.6) é obtida por (2.8), (2.9) e pela nossa escolha de δ. Agora, considere $q_2 < q_1$. Seja $0 < \lambda < 1$ tal que $q_1 = \lambda q_2 + (1 - \lambda) 2\alpha 2^*$. Pela desigualdade de Hölder, (2.8), (2.9), o Lema 1.4-(7)

e a Imersão de Sobolev, temos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta}{2a_0}\right)\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) \\
&\qquad \leq \frac{C_\delta}{q_1}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{q_2}\right)^{\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{2\alpha 2^*}\right)^{1-\lambda} + c + o_n(1) \\
&\qquad \leq (2\alpha)^{\frac{2^*}{2}(1-\lambda)} C_1^{\lambda}\frac{C_\delta}{q_1}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*}\right)^{1-\lambda} + c + o_n(1) \\
&\qquad \leq (2\alpha)^{\frac{2^*}{2}(1-\lambda)} C_1^{\lambda}\frac{C_\delta}{q_1}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^{2}\right)^{\frac{2^*}{2}(1-\lambda)} + c + o_n(1).
\end{aligned}
$$

Agora, note que, pela condição (g_3), $\frac{2^*}{2}(1-\lambda) = \frac{2^*}{2}\frac{q_1 - q_2}{2\alpha 2^* - q_2} < 1$. Portanto, a estimativa (2.6) é satisfeita, o que demonstra o lema. $\square$

Lema 2.6. *Suponha que (V), (V_1), (g_1) e (g_2) sejam satisfeitas. Seja $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência $(Ce)_c$, com c dado por (1.1), tal que $v_n \rightharpoonup 0$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Então existem uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ e $r, \eta > 0$ tais que $|y_n| \to \infty$ e*

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{B_r(y_n)} |v_n|^2 \geq \eta > 0.$$

Demonstração. Se o lema for falso, então

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{B_r(y_n)} |v_n|^2 = 0, \quad \text{para todo } r > 0.$$

Logo, temos (veja [15, 40] ou [64]):

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{\sigma} = 0, \quad \text{para todo } \sigma \in (2, 2^*). \tag{2.10}$$

Seja $0 < \beta < (2^* - 2)/2$ suficientemente pequeno de modo que $2 + \beta < q_1 < 2\alpha 2^* - 2\alpha\beta$. Agora tome $0 < \lambda < 1$ tal que $q_1 = \lambda(2+\beta) + (1-\lambda)(2\alpha 2^* - 2\alpha\beta)$. Aplicando a desigualdade de Hölder e o Lema 1.4-(3), (7), temos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{q_1} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{2+\beta}\right)^{\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{2\alpha(2^*-\beta)}\right)^{1-\lambda} \\
&\leq (2\alpha)^{\frac{(1-\lambda)(2^*-\beta)}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2+\beta}\right)^{\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*-\beta}\right)^{1-\lambda}.
\end{aligned}
$$

Notando que $2 < 2+\beta$, $2^* - \beta < 2^*$, de (1.20), do Lema 1.4-(6), e de (2.10), vemos que para todo $\delta > 0$,

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |g(x, f(v_n))f'(v_n)v_n| \\
&\quad \leq \limsup_{n\to\infty} \left[\delta \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^2 + C_\delta (2\alpha)^{\frac{(1-\lambda)(2^*-\beta)}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2+\beta} \right)^\lambda \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*-\beta} \right)^{1-\lambda} \right] \\
&\quad = \delta \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^2.
\end{aligned}$$

Então, como $\delta > 0$ pode ser escolhido arbitrariamente pequeno e a sequência $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é limitada, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} g(x, f(v_n))f'(v_n)v_n = 0. \tag{2.11}$$

Desse limite e do fato de que $\langle I'(v_n), v_n \rangle \to 0$, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f'(v_n)f(v_n)v_n \right) = 0.$$

Usando o Lema 1.4-(8), temos

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v_n) \right) = 0. \tag{2.12}$$

Com um argumento similar àquele usado na verificação de (2.11), podemos mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} G(x, f(v_n)) = 0.$$

Este limite, juntamente com (2.12), implica que $I(v_n) \to 0$, o que contradiz $I(v_n) \to c > 0$. O lema está demonstrado. □

2.2 Resultados técnicos

Precisaremos também dos seguintes resultados na demonstração do Teorema 2.1. Antes de enunciá-los, vamos estabelecer um lema que será empregado diversas vezes neste trabalho. No que segue, dada $h \in \mathcal{F}$, utilizamos as notações: $D_\varepsilon = D_\varepsilon(h) = \{x \in \mathbb{R}^N : |h(x)| \geq \varepsilon\}$ e $D_\varepsilon(R) = D_\varepsilon(R, h) = \{x \in \mathbb{R}^N : |h(x)| \geq \varepsilon, |x| \geq R\}$.

Lema 2.7. *Suponha que $h \in \mathcal{F}$. Então $|D_\varepsilon(R)| \to 0$ quando $R \to \infty$.*

Demonstração. Como $h \in \mathcal{F}$, $|D_\varepsilon| < \infty$ para todo $\varepsilon > 0$. Queremos mostrar que

$|D_\varepsilon(R)| \to 0$ quando $R \to \infty$, isto é, $\lim_{n\to\infty} |D_\varepsilon(R_n)| = 0$, para toda sequência $(R_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $R_n \to \infty$. Consideremos a função $\zeta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por $\zeta(x) = \chi_{D_\varepsilon}(x)$, ou seja,

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in D_\varepsilon, \\ 0, & \text{se } x \notin D_\varepsilon. \end{cases}$$

Temos $\zeta \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $\|\zeta\|_1 = \int_{\mathbb{R}^N} |\zeta| = |D_\varepsilon|$. Além do mais, definindo a sequência de funções $\zeta_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ por $\zeta_n(x) = \chi_{D_\varepsilon(R_n)}(x)$, segue-se $|\zeta_n(x)| \le |\zeta(x)|$. Observando que $\zeta_n(x) \to 0$ para quase todo ponto em $\mathbb{R}^N$, quando $n \to \infty$, temos, em virtude do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que $\int_{\mathbb{R}^N} \zeta_n \to 0$ quando $n \to \infty$, demonstrando o lema. □

Lema 2.8. *Suponha que (V_1) e (g_4) sejam satisfeitas. Seja $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência limitada e $w_n(x) = w(x - y_n)$, onde $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$. Se $|y_n| \to \infty$, então temos*

$$[V_0(x) - V(x)] f(v_n) f'(v_n) w_n \to 0,$$

$$[g_0(x, f(v_n)) - g(x, f(v_n))] f'(v_n) w_n \to 0,$$

fortemente em $L^1(\mathbb{R}^N)$, quando $n \to \infty$.

Demonstração. Dado $\delta > 0$, como $w \in H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$, com $p \in [2, 2^*]$, encontramos $0 < \varepsilon < \delta$ tal que, para todo conjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^N$ satisfazendo $|A| < \varepsilon$, temos

$$\int_A |w|^2 < \delta \quad \text{e} \quad \int_A |w|^{2^*} < \delta. \tag{2.13}$$

Fixando o valor de $\varepsilon > 0$, pomos $D_\varepsilon(R_1) = \{x \in \mathbb{R}^N : |V_0(x) - V(x)| \ge \varepsilon, |x| \ge R_1\}$. Invocando o Lema 2.7 e a condição (V_1), encontramos $R_1 > 0$ tal que $|D_\varepsilon(R_1)| < \varepsilon$. Logo, aplicando o Lema 1.4-(2), (3), a desigualdade de Hölder e a condição (V_1), obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{R_1}(0)} |V_0(x) - V(x)|\, |f'(v_n)|\, |f(v_n)|\, |w_n| \\
&\qquad \le \|V_0\|_\infty \int_{D_\varepsilon(R_1)} |f(v_n)|\, |w_n| + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N \setminus (B_{R_1}(0) \cup D_\varepsilon(R_1))} |f(v_n)|\, |w_n| \\
&\qquad \le \|V_0\|_\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^2 \right)^{1/2} \|w_n\|_{L^2(D_\varepsilon(R_1))} + \varepsilon \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^2 \right)^{1/2} \|w\|_2 \\
&\qquad \le \|V_0\|_\infty \|v_n\|_2 \|w_n\|_{L^2(D_\varepsilon(R_1))} + \varepsilon \|v_n\|_2 \|w\|_2.
\end{aligned}$$

Consequentemente, usando (2.13) e tendo em vista que $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é limitada, encontramos uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_{R_1}(0)} |V_0(x) - V(x)|\,|f'(v_n)|\,|f(v_n)|\,|w_n| < C_1(\delta^{1/2} + \delta). \tag{2.14}$$

Por outro lado, utilizando o Lema 1.4-(2), (3), a desigualdade de Hölder, a condição (V_1) e o fato de $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ ser limitada mais uma vez, encontramos $C_2 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\int_{B_{R_1}(0)} &|V_0(x) - V(x)|\,|f'(v_n)|\,|f(v_n)|\,|w_n| \\ &\leq \|V_0\|_\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^2\right)^{1/2} \left(\int_{B_{R_1}(0)} |w(x-y_n)|^2\right)^{1/2} \\ &\leq C_2 \left(\int_{B_{R_1}(-y_n)} |w(x)|^2\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Portanto, uma vez que $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $|y_n| \to \infty$, decorre do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{B_{R_1}(0)} |V_0(x) - V(x)|\,|f'(v_n)|\,|f(v_n)|\,|w_n| \leq C_2\delta, \tag{2.15}$$

para todo $n \geq n_0$. As desigualdades (2.14), (2.15) e o fato de $\delta > 0$ poder ser escolhido arbitrariamente pequeno, implicam que $[V_0(x) - V(x)]f(v_n)f'(v_n)w_n \to 0$ fortemente em $L^1(\mathbb{R}^N)$ quando $n \to \infty$.

Para mostrarmos o segundo limite no Lema 2.8, definimos $D_\varepsilon(R_2) = \{x \in \mathbb{R}^N : |h_2(x)| \geq \varepsilon, |x| \geq R_2\}$, $A_n = [\mathbb{R}^N \backslash B_{R_2}(0)] \cap \{x \in \mathbb{R}^N : |v_n(x)| \leq 1\}$ e $B_n = \mathbb{R}^N \backslash [A_n \cup B_{R_2}(0)]$. Desde que $h_2 \in \mathcal{F}$, aplicando o Lema 2.7, encontramos $R_2 > 0$ tal que $|D_\varepsilon(R_2)| < \varepsilon$. Logo, aplicando a condição (g_4), o Lema 1.4-(2), (3), a desigualdade de Hölder e a limitação da sequência $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$, encontramos uma constante $C_3 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\int_{A_n} &|g_0(x, f(v_n)) - g(x, f(v_n))|\,|f'(v_n)|\,|w_n| \\ &\leq \|h_2\|_\infty \int_{A_n \cap D_\varepsilon(R_2)} |f(v_n)|\,|w_n| + \varepsilon \int_{A_n \backslash D_\varepsilon(R_2)} |f(v_n)|\,|w_n| \\ &< \|h_2\|_\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^2\right)^{1/2} \|w_n\|_{L^2(D_\varepsilon(R_2))} + \delta \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^2\right)^{1/2} \|w\|_2 \\ &< C_3(\delta^{1/2} + \delta).\end{aligned} \tag{2.16}$$

Por outro lado, como f é crescente, existe uma constante $C_4 > 0$ tal que $|f(s)|^{q_3} \leq$

$C_4|f(s)|^{2\alpha 2^*}$ para todo $|s| \geq 1$. Logo, aplicando a condição (g_4), o Lema 1.4-(6), (7), a desigualdade de Hölder e a limitação da sequência $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$, encontramos uma constante $C_5 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
&\int_{B_n} |g_0(x, f(v_n)) - g(x, f(v_n))|\,|f'(v_n)|\,|w_n| \\
&\quad\leq \|h_2\|_\infty \int_{B_n \cap D_\varepsilon(R_2)} |f(v_n)|^{q_3-1}|f'(v_n)|\,|w_n| + \varepsilon \int_{B_n \setminus D_\varepsilon(R_2)} |f(v_n)|^{q_3-1}|f'(v_n)|\,|w_n| \\
&\quad< \|h_2\|_\infty \int_{B_n \cap D_\varepsilon(R_2)} \frac{|f(v_n)|^{q_3}}{|v_n|}|w_n| + \delta \int_{B_n \setminus D_\varepsilon(R_2)} \frac{|f(v_n)|^{q_3}}{|v_n|}|w_n| \\
&\quad\leq (2\alpha)^{2^*/2} C_4 \|h_2\|_\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*}\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \|w_n\|_{L^{2^*}(D_\varepsilon(R_2))} \\
&\qquad + (2\alpha)^{2^*/2} C_4 \delta \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*}\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \|w\|_{2^*} \\
&\quad< C_5(\delta^{1/2^*} + \delta).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Semelhantemente, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{B_{R_2}(0)} |g_0(x, f(v_n)) - g(x, f(v_n))|\,|f'(v_n)|\,|w_n| \\
&\qquad\leq C_6 \left(\int_{B_{R_2}(-y_n)} |w(x)|^2\right)^{1/2} + C_7 \left(\int_{B_{R_2}(-y_n)} |w(x)|^{2^*}\right)^{1/2^*},
\end{aligned}$$

para algumas constantes C_6, $C_7 > 0$. Portanto, uma vez que $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $|y_n| \to \infty$, decorre do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{B_{R_2}(0)} |g_0(x, f(v_n)) - g(x, f(v_n))|\,|f'(v_n)|\,|w_n| \leq (C_6 + C_7)\delta, \quad \text{para todo } n \geq n_0. \tag{2.18}$$

Finalmente, as desigualdades (2.16) – (2.18) e o fato de $\delta > 0$ poder ser escolhido arbitrariamente pequeno implicam que $[g_0(x, f(v_n)) - g(x, f(v_n))]f'(v_n)w_n \to 0$, fortemente em $L^1(\mathbb{R}^N)$, quando $n \to \infty$. Isto conclui a demonstração do Lema 2.8. □

Lema 2.9. *Suponha que $2 \leq q < 2\alpha 2^*$ e $h \in \mathcal{F}$. Seja $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência tal que $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Então*

$$h(x)|f(v_n)|^q \to h(x)|f(v)|^q \quad \textit{fortemente em } L^1(\mathbb{R}^N), \ \textit{quando } n \to \infty.$$

Demonstração. Argumentando por contradição, supomos que existem uma subsequência, ainda denotada por (v_n), e $\varepsilon > 0$ tais que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |h(x)|\cdot\big||f(v_n)|^q - |f(v)|^q\big| \geq \varepsilon > 0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{2.19}$$

Agora definimos $D_\delta(R) = \{x \in \mathbb{R}^N : |h(x)| \geq \delta, |x| \geq R\}$. Como $h \in \mathcal{F}$, aplicando o Lema 2.7, encontramos $R = R_\delta > 0$ tal que $|D_\delta(R)| < \delta$. Consequentemente, uma vez que a sequência (v_n) é limitada, utilizando a desigualdade de Hölder, a propriedade (7) do Lema 1.4, e o Teorema das Imersões de Sobolev, temos

$$\int_{D_\delta(R)} |f^2(v_n)|^{q/2} \leq \left(\int_{D_\delta(R)} 1^{\frac{2\alpha 2^*}{2\alpha 2^*-q}}\right)^{\frac{2\alpha 2^*-q}{2\alpha 2^*}} \left(\int_{D_\delta(R)} |f(v_n)|^{2\alpha 2^*}\right)^{q/2\alpha 2^*} < C\delta^{\frac{2\alpha 2^*-q}{2\alpha 2^*}},$$

para alguma constante $C > 0$. Dessa forma,

$$\int_{D_\delta(R)} |h(x)|\cdot\big||f(v_n)|^q - |f(v)|^q\big| \leq \|h\|_\infty \int_{D_\delta(R)} (|f(v_n)|^q + |f(v)|^q) < C_1\delta^{\frac{2\alpha 2^*-q}{2\alpha 2^*}}, \tag{2.20}$$

para alguma constante $C_1 > 0$. Ainda pela definição de $D_\delta(R)$, e pela limitação de (v_n), existe uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus[B_R(0)\cup D_\delta(R)]} |h(x)|\cdot\big||f(v_n)|^q - |f(v)|^q\big| \leq \delta \int_{\mathbb{R}^N} (|f(v_n)|^q + |f(v)|^q) \leq C_2\delta. \tag{2.21}$$

Como $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$, decorre do Teorema das Imersões de Sobolev que $v_n \to v$ em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $p \in [1, 2^*)$. Então, para $R = R_\delta > 0$ dado acima, a menos de subsequência, temos

$$\begin{aligned}
&v_n(x) \to v(x) \quad \text{q.t.p. em } B_R, \text{ quando } n \to \infty,\\
&|f(v_n(x))|^q \to |f(v(x))|^q \quad \text{q.t.p. em } B_R, \text{ quando } n \to \infty,\\
&|v_n(x)| \leq w_p(x) \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N} \text{ e q.t.p. em } B_R, \text{ com } w_p \in L^p(B_R).
\end{aligned}$$

Agora, para $2\alpha \leq q < 2\alpha 2^*$, temos pela propriedade (7) do Lema 1.4, que

$$|f(v_n(x))|^q \leq (2\alpha)^{q/4\alpha}|v_n(x)|^{q/2\alpha} \leq (2\alpha)^{q/4\alpha}w_{q/2\alpha}^{q/2\alpha}(x) \ \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \text{ e q.t.p. em } B_R.$$

Por outro lado, se $2 \leq q \leq 2\alpha$, dividimos em dois casos: $|v_n(x)| > 1$ e $|v_n(x)| \leq 1$. Se $|v_n(x)| > 1$, pelo Lema 1.4-(7) novamente, segue que

$$|f(v_n(x))|^q \leq (2\alpha)^{q/4\alpha}|v_n(x)|^{q/2\alpha} \leq (2\alpha)^{q/4\alpha}|v_n(x)| \leq (2\alpha)^{q/4\alpha}w_1(x)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ e q.t.p. em B_R. E se $|v_n(x)| \leq 1$, pela propriedade (3) do Lema 1.4, temos

$$|f(v_n(x))|^q \leq |v_n(x)|^q \leq 1 \in L^1(B_R).$$

Considerando estas estimativas e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\int_{B_R(0)} \big|\,|f(v_n)|^q - |f(v)|^q\big| \to 0, \quad \text{quando } \ n \to \infty.$$

Logo, tendo em vista que $h \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{B_R(0)} |h(x)| \cdot \big|\,|f(v_n)|^q - |f(v)|^q\big| < \delta, \quad \text{para todo } n \geq n_0. \tag{2.22}$$

Portanto, decorre de (2.20) - (2.22) que, para $n \geq n_0 = n_0(\delta)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |h(x)| \cdot \big|\,|f(v_n)|^q - |f(v)|^q\big| < C_1 \delta^{\frac{2\alpha 2^* - q}{2\alpha 2^*}} + C_2\delta + \delta.$$

para todo $n \geq n_0 = n_0(\delta)$. Como $\delta > 0$ pode ser escolhido arbitrariamente pequeno, a relação acima contradiz (2.19). Portanto, o lema está demonstrado. □

2.3 Demonstrações dos Teoremas 2.1 e 2.2

Nesta seção, demonstramos os Teoremas 2.1 e 2.2, verificando que os funcionais I e I_0, definidos por (2.2) e (2.4), respectivamente, possuem pontos críticos não-nulos.

2.3.1 Demonstração do Teorema 2.1

Pelo Corolário 2.4, existe uma sequência de Cerami no nível c, isto é, $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$I(v_n) \to c \geq \tau > 0 \quad \text{e} \quad \|I'(v_n)\|(1 + \|v_n\|) \to 0, \quad \text{quando } \ n \to \infty, \tag{2.23}$$

com c dado pelo Teorema 1.1. Aplicando o Lema 2.5, podemos supor, sem perda de generalidade, que $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Deste fato e (1.20), temos que v é um ponto crítico de I, isto é, $I'(v) = 0$. Com efeito, pelo fato de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ ser denso em

$H^1(\mathbb{R}^N)$, basta mostrarmos que $\langle I'(v), \varphi \rangle = 0$ para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Observe que

$$\begin{aligned} \langle I'(v_n), \varphi \rangle - \langle I'(v), \varphi \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v_n - \nabla v) \nabla \varphi \\ = \int_{\mathbb{R}^N} \left[f(v_n) f'(v_n) - f(v) f'(v) \right] V(x) \varphi \\ + \int_{\mathbb{R}^N} \left[g(x, f(v)) f'(v) - g(x, f(v_n)) f'(v_n) \right] \varphi. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Como $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$, temos que $v_n \to v$ em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$, com $p \in [1, 2^*)$. Assim, a menos de subsequência,

$$\begin{aligned} & v_n(x) \to v(x) \quad \text{q.t.p. em } \mathcal{K} := supp\, \varphi, \text{ quando } n \to \infty, \\ & |v_n(x)| \leq |w_p(x)| \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N} \text{ e q.t.p. em } \mathcal{K}, \text{ com } w_p \in L^p(\mathcal{K}). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} & f(v_n) f'(v_n) \to f(v) f'(v) \quad \text{q.t.p. em } \mathcal{K}, \text{ quando } n \to \infty, \\ & g(x, f(v_n)) f'(v_n) \to g(x, f(v)) f'(v) \quad \text{q.t.p. em } \mathcal{K}, \text{ quando } n \to \infty. \end{aligned}$$

Além disso, pela condição (V_1) e o Lema 1.4-(2), (3),

$$|V(x) f(v_n) f'(v_n) \varphi| \leq |V(x) f(v_n) \varphi| \leq \|V\|_\infty |w_2|\, |\varphi| \in L^1(\mathcal{K})$$

e, como $4\alpha \leq q_1 < 2\alpha 2^*$, por (1.20) e o Lema 1.4-(2), (3), (6), (7), temos, para $v_n \neq 0$, que

$$\begin{aligned} |g(x, f(v_n)) f'(v_n) \varphi| &\leq \delta |v_n|\, |\varphi| + C_\delta |f(v_n)|^{q_1 - 1} |f'(v_n)|\, |\varphi| \\ &\leq \delta |w_2|\, |\varphi| + C_\delta |f(v_n)|^{q_1 - 1} \frac{|f(v_n)|}{|v_n|} |\varphi| \\ &\leq \delta |w_2|\, |\varphi| + (2\alpha)^{q_1/4\alpha} C_\delta |w_{\frac{q_1}{2\alpha} - 1}|^{\frac{q_1}{2\alpha} - 1} |\varphi| \in L^1(\mathcal{K}). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Usando estas estimativas, (2.24), o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e a convergência fraca $v_n \rightharpoonup v$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\langle I'(v_n), \varphi \rangle - \langle I'(v), \varphi \rangle \to 0.$$

Como $I'(v_n) \to 0$, concluímos que $I'(v) = 0$.

Logo, se $v \neq 0$ a demonstração fica concluída. Por outro lado, se $v = 0$, argumentamos como segue. Pelo Lema 2.6, existem uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ e r, $\eta > 0$ tais que

$|y_n| \to \infty$ quando $n \to \infty$, e

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{B_r(y_n)} |v_n|^2 \geq \eta > 0, \quad \text{para todo } \ n \in \mathbb{N}. \tag{2.26}$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $(y_n) \subset \mathbb{Z}^N$. De fato, se $y_n = (y_n^1, y_n^2, \ldots, y_n^N) \in \mathbb{R}^N$, existe $z_n^i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq N$, tal que $|y_n^i - z_n^i| \leq 1/2$. Agora, considerando $z_n = (z_n^1, z_n^2, \ldots, z_n^N) \in \mathbb{Z}$, temos que $|z_n - y_n| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^N |z_n^i - y_n^i|^2} \leq \sqrt{N}/2$. Logo, $B_r(y_n) \subset B_{r+\sqrt{N}/2}(z_n)$, pois se $x \in B_r(y_n)$, temos $|z_n - x| \leq |z_n - y_n| + |y_n - x| < \sqrt{N}/2 + r$. Portanto,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{B_{r+\sqrt{N}/2}(z_n)} |v_n|^2 \geq \limsup_{n\to\infty} \int_{B_r(y_n)} |v_n|^2 \geq \eta > 0, \quad \text{para todo } \ n \in \mathbb{N}.$$

Então, definindo $u_n(x) = v_n(x+y_n)$, $n \in \mathbb{N}$, temos que $\|u_n\|_0 = \|v_n\|_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, a menos de subsequência, existe $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$, $u_n \to u$ fortemente em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e $u_n(x) \to u(x)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$. De (2.26), temos $u \neq 0$.

Afirmamos que u é um ponto crítico de I_0. De fato, note primeiro que

$$\langle I_0'(u_n), \varphi\rangle \to \langle I_0'(u), \varphi\rangle, \quad \text{quando} \quad n \to \infty, \ \text{ para todo } \ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{2.27}$$

Com efeito, escrevendo

$$\begin{aligned} \langle I_0'(u_n), \varphi\rangle - \langle I_0'(u), \varphi\rangle - &\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n - \nabla u)\nabla\varphi \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[f(u_n)f'(u_n) - f(u)f'(u)\right] V_0(x)\varphi \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \left[g_0(x, f(u)) - g_0(x, f(u_n))\right] f'(v_n)\varphi, \end{aligned} \tag{2.28}$$

pelos mesmos argumentos usados acima, deduzimos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n - \nabla u)\nabla\varphi \to 0, \quad \textit{quando } \ n \to \infty$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[f(u_n)f'(u_n) - f(u)f'(u)\right] V_0(x)\varphi \to 0, \quad \textit{quando } \ n \to \infty.$$

Logo, a fim de provarmos (2.27), resta-nos analisar a última integral em (2.28). Veja que

$$\begin{aligned}&[g_0(x, f(u)) - g_0(x, f(u_n))]\, f'(v_n)\varphi \\ &\quad = [g_0(x, f(u)) - g(x, f(u_n))]\, f'(v_n)\varphi + [g(x, f(u_n)) - g_0(x, f(u_n))]\, f'(v_n)\varphi.\end{aligned} \tag{2.29}$$

Agora, pela condição $(g_4)(ii)$ e com argumentos usados na prova de (2.25), obtemos uma função $\psi \in L^1(\mathcal{K})$, $\mathcal{K} := supp\, \varphi$, tal que

$$|[g(x, f(u_n)) - g_0(x, f(u_n))]f'(u_n)\varphi| \leq \psi. \tag{2.30}$$

Então, aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue mais uma vez, obtemos

$$[g(x, f(u_n)) - g_0(x, f(u_n))]\, f'(u_n)\varphi \to [g(x, f(u)) - g_0(x, f(u))]\, f'(u)\varphi \tag{2.31}$$

em $L^1(\mathcal{K})$. A estimativa (2.25) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue também fornecem

$$g(x, f(u_n))f'(u_n)\varphi \to g(x, f(u))f'(u)\varphi \quad \text{em} \;\; L^1(\mathcal{K}).$$

Além disso, de (2.25), (2.30) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, novamente, obtemos

$$g_0(x, f(u))f'(u_n)\varphi \to g_0(x, f(u))f'(u)\varphi \quad \text{em} \;\; L^1(\mathcal{K}).$$

Consequentemente,

$$[g_0(x, f(u)) - g(x, f(u_n))]\, f'(u_n)\varphi \to [g_0(x, f(u)) - g(x, f(u))]\, f'(u)\varphi \tag{2.32}$$

em $L^1(\mathcal{K})$. As relações (2.29), (2.31) e (2.32) concluem a verificação de (2.27).

Por outro lado, considerando $\varphi_n(x) = \varphi(x - y_n)$, para $n \in \mathbb{N}$, pelas periodicidades de V_0 e g_0, obtemos

$$\langle I_0'(u_n), \varphi\rangle = \langle I_0'(v_n), \varphi_n\rangle, \quad \text{para todo} \;\; n \in \mathbb{N}. \tag{2.33}$$

Efetivamente, como $u_n(x) = v_n(x + y_n)$,

$$
\begin{aligned}
\langle I_0'(u_n(x)), \varphi(x)\rangle \;=\; & \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n(x+y_n)\nabla\varphi(x)\,dx \\
& + \int_{\mathbb{R}^N} V_0(x) f(v_n(x+y_n)) f'(v_n(x+y_n))\varphi(x)\,dx \\
& - \int_{\mathbb{R}^N} g_0(x, f(v_n(x+y_n))) f'(v_n(x+y_n))\varphi(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

Logo, fazendo a mudança de variável $z = x + y_n$ e considerando as periodicidades de V_0 e g_0, temos

$$
\begin{aligned}
\langle I_0'(u_n), \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n(z)\nabla\varphi(z-y_n)\,dz + \int_{\mathbb{R}^N} V_0(z-y_n) f(v_n(z)) f'(v_n(z))\varphi(z-y_n)\,dz \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} g_0(z-y_n, f(v_n(z))) f'(v_n(z))\varphi(z-y_n)\,dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n(z)\nabla\varphi_n(z)\,dz + \int_{\mathbb{R}^N} V_0(z) f(v_n(z)) f'(v_n(z))\varphi_n(z)\,dz \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} g_0(z, f(v_n(z))) f'(v_n(z))\varphi_n(z)\,dz \\
&= \langle I_0'(v_n), \varphi_n\rangle,
\end{aligned}
$$

o que verifica (2.33).

Além disso, aplicando o Lema 2.8, temos

$$
|\langle I_0'(v_n), \varphi_n\rangle - \langle I'(v_n), \varphi_n\rangle| \to 0, \quad \text{quando } n \to \infty. \tag{2.34}
$$

Desde que $\|\varphi_n\| \leq \|\varphi_n\|_0 = \|\varphi\|_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e que $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é uma sequência $(Ce)_c$, temos que $\langle I'(v_n), \varphi_n\rangle \to 0$. Logo, por (2.34), obtemos

$$
\langle I_0'(v_n), \varphi_n\rangle \to 0, \quad \text{quando } n \to \infty.
$$

O limite acima, (2.33) e (2.27) mostram que u é um ponto crítico de I_0, como havíamos afirmado.

Nossa próxima tarefa é verificar que $I_0(u) \leq c$. Para tanto, aplicamos a definição da sequência (u_n) e a condiçao (V_1) para obtermos

$$
\begin{aligned}
I(v_n) - \frac{1}{2}\langle I'(v_n), v_n\rangle \;=\; & \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V_0(x)[f^2(u_n) - f(u_n)f'(u_n)u_n] \\
& + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (V(x) - V_0(x))[f^2(v_n) - f(v_n)f'(v_n)v_n] \qquad (2.35) \\
& + \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{2} g(x, f(v_n))f'(v_n)v_n - G(x, f(v_n))\right].
\end{aligned}
$$

Agora, pelas condições (V), (V_1), a propriedade (8) do Lema 1.4, e o lema de Fatou,

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V_0(x)[f^2(u_n)-f(u_n)f'(u_n)u_n]\geq\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V_0(x)[f^2(u)-f(u)f'(u)u]. \tag{2.36}$$

Observamos que, em vista de $v_n \rightharpoonup 0$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$, pelo Lema 2.9, com $h = V - V_0$, e pelo Lema 1.4-(8), obtemos

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(V(x)-V_0(x))[f^2(v_n)-f(v_n)f'(v_n)v_n]=0. \tag{2.37}$$

Afirmamos, também, que

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}&\left[\frac{1}{2}g(x,f(v_n))f'(v_n)v_n-G(x,f(v_n))\right]\\&\geq\int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{1}{2}g_0(x,f(u))f'(u)u-G_0(x,f(u))\right].\end{aligned} \tag{2.38}$$

Supondo a afirmação como verdadeira, utilizamos (2.23), (2.35) – (2.38) e o fato de u ser um ponto crítico de I_0, para concluirmos

$$\begin{aligned}c&\geq\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V_0(x)[f^2(u)-f(u)f'(u)u]+\int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{1}{2}g_0(x,f(u))f'(u)u-G_0(x,f(u))\right]\\&=I_0(u)-\frac{1}{2}\langle I_0'(u),u\rangle=I_0(u),\end{aligned} \tag{2.39}$$

isto é, $I_0(u) \leq c$.

Agora, vamos mostrar que $\max_{t\geq 0} I_0(tu) = I_0(u)$. Para isto, definamos a função $\eta(t) := I_0(tu)$, para $t \geq 0$. Como u é um ponto crítico de I_0, segue que $u > 0$ (veja o argumento abaixo). Portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned}\eta'(t)&=t\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2+\int_{\mathbb{R}^N}V_0(x)f(tu)f'(tu)u-\int_{\mathbb{R}^N}g_0(x,f(tu))f'(tu)u\\&=t\left\{\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2-\int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{g_0(x,f(t|u|))f'(t|u|)}{t|u|}-\frac{V_0(x)f(t|u|)f'(t|u|)}{t|u|}\right]u^2\right\}.\end{aligned}$$

Note que, fixado $x \in \mathbb{R}^N$, a função $\zeta : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\zeta(s)=\frac{g_0(x,f(s))f'(s)}{s}-\frac{V_0(x)f(s)f'(s)}{s}$$

é crescente. Este fato é uma consequência direta de $(g_4)(iii)$ e do Corolário 1.6 aplicados

a
$$\zeta(s) = \frac{g_0(x, f(s))}{f^{4\alpha-1}(s)} \frac{f^{4\alpha-1}(s) f'(s)}{s} + V_0(x) \left(-\frac{f(s)f'(s)}{s} \right).$$
Agora observamos que $\eta'(1) = 0$, já que u é um ponto crítico de I_0. Além disso, temos que $\eta'(t) > 0$ para $0 < t < 1$ e $\eta'(t) < 0$ para $t > 1$. Portanto, $I_0(u) = \eta(1) = \max_{t \geq 0} \eta(t) = \max_{t \geq 0} I_0(tu)$. Consequentemente, por (2.39), $(g_4)(i)$ e a definição de c,

$$c \leq \max_{t \geq 0} I(tu) \leq \max_{t \geq 0} I_0(tu) = I_0(u) \leq c.$$

Isto implica que existe $\gamma \in \Gamma$ que verifica (1.3). Pelo Teorema 1.3, I possui um ponto crítico v no nível c. De $c \geq \tau > 0 = I(0)$, temos que v é um ponto crítico não trivial de I. Isto conclui a demonstração do Teorema 2.1, exceto pela afirmação (2.38) e pela verificação de que $u > 0$.

Mostremos agora que $u > 0$ em $\mathbb{R}^N$. Para tal, basta verificarmos que $v > 0$ em $\mathbb{R}^N$. Sabemos que $v \geq 0$. Além disso, pela Observação 1.13, temos que $v \in C^{1,\beta}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para algum $\beta \in (0, 1)$. Agora, argumentando por contradição, supomos que existe $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $v(x_0) = 0$. A equação (2.3) pode ser reescrita como

$$-\Delta v + c(x)v = V(x)f'(v)(v - f(v)) + g(x, f(v))f'(v) \geq 0,$$

onde $c(x) = V(x)f'(v(x)) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, é uma função contínua e limitada. Notamos também que do Lema 1.4-(3) temos $v - f(v) \geq 0$. Assim, aplicando o Princípio do Máximo Forte para soluções fracas (veja [28]) em uma bola arbitrária centrada em x_0, obtemos que $v \equiv 0$. Isto contradiz o fato de que v é não-nula.

Finalmente, concluímos a demonstração do Teorema 2.1, verificando a relação (2.38). Primeiro, observamos que pelo Lema 2.9,

$$\int_{\mathbb{R}^N} h_2 |f(v_n)|^{q_3} \to 0, \text{ quando } n \to \infty,$$

já que $h_2 \in \mathcal{F}$, $2 \leq q_3 < 2\alpha 2^*$ e $v_n \rightharpoonup 0$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Invocando (g_4) e o Lema 1.4-(6), temos

$$\begin{aligned} |g(x, f(s))f'(s)s - g_0(x, f(s))f'(s)s| &= |[g(x, f(s)) - g_0(x, f(s))]f'(s)s| \\ &\leq |[g(x, f(s)) - g_0(x, f(s))]f(s)| \\ &\leq h_2(x)|f(s)|^{q_3}. \end{aligned}$$

Logo,
$$g(x, f(v_n))f'(v_n)v_n - g_0(x, f(v_n))f'(v_n)v_n \to 0$$

fortemente em $L^1(\mathbb{R}^N)$, quando $n \to \infty$. Analogamente,

$$G(x, f(v_n)) - G_0(x, f(v_n)) \to 0$$

fortemente em $L^1(\mathbb{R}^N)$, quando $n \to \infty$. Consequentemente, pela periodicidade de g_0,

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} &\left[\frac{1}{2}g(x, f(v_n))f'(v_n)v_n - G(x, f(v_n))\right] \\ &= \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{2}g_0(x, f(u_n))f'(u_n)u_n - G_0(x, f(u_n))\right]. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Agora, de (g_3), (g_4) e o Lema 1.4-(6), temos, para $s \geq 0$,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}g_0(x, f(s))f'(s)s - G_0(x, f(s)) \\ &\qquad \geq \frac{1}{4\alpha}[g_0(x, f(s)) - g(x, f(s))]f(s) \\ &\qquad\quad + \frac{1}{4\alpha}g(x, f(s))f(s) - G(x, f(s)) + \ [G(x, f(s)) - G_0(x, f(s))] \\ &\qquad \geq -\frac{1}{4\alpha}h_2(x)|f(s)|^{q_3} - h_1(x). \end{aligned}$$

Além disso, pelo Lema 2.9, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} h_2(x)|f(u_n)|^{q_3} \to \int_{\mathbb{R}^N} h_2(x)|f(u)|^{q_3}, \quad \text{quando } \ n \to \infty. \tag{2.41}$$

Portanto, desde que $g_0(x, s) = 0$ se $s < 0$, pelo Lema de Fatou,

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} &\left[\frac{1}{2}g_0(x, f(u_n))f'(u_n)u_n - G_0(x, f(u_n)) + \frac{1}{4\alpha}h_2|f(u_n)|^{q_3} + h_1\right] \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{2}g_0(x, f(u))f'(u)u - G_0(x, f(u)) + \frac{1}{4\alpha}h_2|f(u)|^{q_3} + h_1\right]. \end{aligned} \tag{2.42}$$

De (2.40) – (2.42) obtemos (2.38). A demonstração do Teorema 2.1 está completa. □

2.3.2 Demonstração do Teorema 2.2

Nossa argumentação segue os passos iniciais da demonstração do Teorema 2.1. Como g satisfaz (g_1), (g_2) e (g_5), empregando o Corolário 2.4, encontramos uma sequência $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$I_0(v_n) \to c \geq \tau > 0 \quad \text{e} \quad \|I_0'(v_n)\|(1 + \|v_n\|) \to 0, \quad \text{quando } \ n \to \infty, \tag{2.43}$$

onde c é dado pelo Teorema 1.1. Em vista do Lema 2.5, podemos supor, sem perda de generalidade, que $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Deste fato e (1.20), temos que v é um ponto crítico de I_0, isto é, $I_0'(v) = 0$. Logo, para concluirmos a demonstração do Teorema 2.2, basta supormos que $v = 0$.

Pelo Lema 2.6, existem uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ e $r, \eta > 0$ tais que $|y_n| \to \infty$ quando $n \to \infty$, e

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{B_r(y_n)} |v_n|^2 \geq \eta > 0, \quad \text{para todo } \ n \in \mathbb{N}. \tag{2.44}$$

Como na demonstração do Teorema 2.1, podemos supor que $(y_n) \subset \mathbb{Z}^N$. Assim, definindo $u_n(x) = v_n(x+y_n)$, $n \in \mathbb{N}$, temos que $\|u_n\|_0 = \|v_n\|_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente, tomando uma subsequência se necessário, existe $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$, $u_n \to u$ fortemente em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e $u_n(x) \to u(x)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$. Afirmamos que u é um ponto crítico de I_0. De fato, dado $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, por (V_1), (g_1) e (g_2), obtemos

$$\langle I_0'(u_n), \varphi\rangle \to \langle I_0'(u), \varphi\rangle, \quad \text{quando } \ n \to \infty. \tag{2.45}$$

Por outro lado, considerando $\varphi_n(x) = \varphi(x - y_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pelas periodicidades de V_0 e g_0, obtemos

$$\langle I_0'(u_n), \varphi\rangle = \langle I_0'(v_n), \varphi_n\rangle, \quad \text{para todo } \ n \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente, por (2.43) e o fato de que $\|\varphi_n\|_0 = \|\varphi\|_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, concluímos que

$$\langle I_0'(u_n), \varphi\rangle \to 0, \quad \text{quando } \ n \to \infty.$$

Este limite, juntamente com (2.45), mostra que u é ponto crítico de I_0, e a afirmação está provada. Além disso, (2.44) implica que $u \neq 0$, e como no Teorema 2.1, $u > 0$. O Teorema 2.2 está demonstrado. $\square$

2.4 Apêndice

Um exemplo de funções g e g_0 que satisfazem as hipóteses $(g_1) - (g_5)$ é dado a seguir. Tomando $4\alpha < q_1 < 2\alpha 2^*$, consideremos

$$g(x,s) = \left(1 + \frac{1}{|x|+1}\right) g_0(x,s) \qquad \text{e} \qquad g_0(x,s) = \begin{cases} f(x)|s|^{q_1-1}, & s > 0; \\ 0, & s \leq 0, \end{cases}$$

onde $f(x)$ é uma função contínua, 1-periódica e limitada inferiormente por uma constante positiva (por exemplo, $f(x) = 2 + \sin[2\pi(x_1 + x_2 + \ldots + x_N)]$).

Verifiquemos as hipóteses:

(g_1) $\dfrac{g(x,s)}{|s|} = f(x)\left(1 + \dfrac{1}{|x|+1}\right)|s|^{q_1-2} \to 0$ quando $s \to 0^+$.

(g_2) $|g(x,s)| = f(x)\left(1 + \dfrac{1}{|x|+1}\right)|s|^{q_1-1} \leq a_1 + a_2|s|^{q_1-1}$.

(g_3) Tomando $q_2 = q_1$ e $h_1 \geq 0$, existe $a_3 > 0$ tal que

$$\frac{1}{4\alpha}g(x,s)s - G(x,s) = \left(\frac{1}{4\alpha} - \frac{1}{q_1}\right)f(x)\left(1 + \frac{1}{|x|+1}\right)|s|^{q_1} \geq a_3|s|^{q_1} \geq a_3|s|^{q_2} - h_1(x).$$

(g_4) Tomando $q_3 = q_1$ e $h_2 = 1/(|x|+1)$, temos

(i) $g \geq g_0$ implica que $G \geq G_0$;

(ii) $|g(x,s) - g_0(x,s)| = \dfrac{1}{|x|+1}|s|^{q_1-1} = h_2(x)|s|^{q_3-1}$;

(iii) $\dfrac{g_0(x,s)}{s^{4\alpha-1}} = f(x)|s|^{q_1-4\alpha}$ é não-decrescente na variável $s > 0$.

(g_5) $\liminf\limits_{s\to\infty} \dfrac{G(x,s)}{s^{4\alpha}} = \liminf\limits_{s\to\infty} \dfrac{1}{q_1}f(x)\left(1 + \dfrac{1}{|x|+1}\right)|s|^{q_1-4\alpha} > 0$, uniformemente em $x \in \mathbb{R}^N$.

Capítulo

3

Equações de Schrödinger quasilineares com potencial não-limitado e não-linearidade subcrítica

Neste capítulo, estudamos a existência de uma solução para o problema elíptico quasilinear

$$\begin{cases} -\Delta u - \Delta(|u|^{2\alpha})|u|^{2\alpha-2}u + V(x)u \; = \; g(x,u), \qquad x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N), \; u > 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\alpha \geq 3/4$, $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ são funções contínuas.

A principal razão deste capítulo é mostrar que a não limitação do potencial V não exige a utilização de espaços do tipo Orlicz, utilizados em [44, 57] e nos outros trabalhos que lidam com esta classe de potencial, para se encontrar uma solução para o Problema (3.1) via teoremas de minimax. Mais especificamente, usando uma estrutura variacional, estabelecemos uma solução para o Problema (3.1), supondo que V satisfaz:

(V) existe uma constante $a_0 > 0$ tal que

$$V(x) \geq a_0 > 0, \quad \text{para todo } \; x \in \mathbb{R}^N;$$

(V_2) para qualquer $D > 0$, $|\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq D\}| < \infty$.

Sendo $G(x,s) = \int_0^s g(x,t)\,dt$ a primitiva de g, também supomos as seguintes hipóteses, já comentadas anteriormente:

(g_1) $g(x,s) = o(|s|)$, quando $s \to 0^+$, uniformemente em $x \in \mathbb{R}^N$;

(g_2) existem constantes $a_1, a_2 > 0$ e $4\alpha \leq q_1 < 2\alpha 2^*$ tais que

$$|g(x,s)| \leq a_1 + a_2|s|^{q_1-1}, \quad \text{para todo } (x,s) \in \mathbb{R}^N \times [0,+\infty);$$

(g_3) existem constantes $a_3 > 0$, $q_2 > N(q_1 - 4\alpha)/2$ e uma função $h_1 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tais que

$$\frac{1}{4\alpha} g(x,s)s - G(x,s) \geq a_3 s^{q_2} - h_1(x), \quad \text{para todo } (x,s) \in \mathbb{R}^N \times [0,+\infty),$$

onde q_1 é dada pela hipótese (g_2);

$$(g_5) \qquad \liminf_{s\to\infty} \frac{G(x,s)}{s^{4\alpha}} > 0, \quad \text{uniformemente em } x \in \mathbb{R}^N.$$

O nosso principal resultado deste capítulo é o seguite:

Teorema 3.1. *Suponha que* (V), (V_2), $(g_1) - (g_3)$ *e* (g_5) *sejam satisfeitas. Então o Problema* (3.1) *possui uma solução.*

Além de generalizar outros fatores mencionados na Introdução, como a condição de crescimento subcrítico, o valor de α e a condição de superlinearidade de Ambrosetti-Rabinowitz, este capítulo melhora, no que se refere à existência de solução, os trabalhos [23] ou [57], e outros relacionados, uma vez que lida com a função potencial V não-limitada, sem recorrer aos espaços de Orlicz, que foram imprescindivelmente empregados nesses trabalhos.

Observamos que a hipótese (V_2) generaliza: $\int_{\mathbb{R}^N} 1/V < \infty$ e $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = +\infty$ adotadas em [23]. Realmente, temos $\frac{1}{D}|\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq D\}| = \int_{\{x\in\mathbb{R}^N : V(x)\leq D\}} \frac{1}{D} \leq \int_{\{x\in\mathbb{R}^N : V(x)\leq D\}} \frac{1}{V(x)} \leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{V(x)} < \infty$. A generalização da coercividade é imediata. Os exemplos a seguir ilustram a distinção destas propriedades. A função $V(x) = |x| + 1$ satisfaz a condição (V), $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = +\infty$, mas não satisfaz $\int_{\mathbb{R}^N} [V(x)]^{-1} < \infty$. Já a função $V(x_1, x_2, \ldots, x_N) = 1 + x_1^2[\sin^2(2\pi x_1) + x_2^2 + \ldots + x_N^2]^\alpha$, com $\alpha > N$, satisfaz a condição (V), $\int_{\mathbb{R}^N} [V(x)]^{-1} < \infty$, mas não satisfaz $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = +\infty$.

Para demonstrarmos o Teorema 3.1, usamos a mesma mudança de variável empregada no Capítulo 2, e assim, obtemos um funcional associado bem definido no subespaço $X \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ caracterizado abaixo, que permite-nos utilizar uma versão do Teorema do Passo da Montanha sem condição de compacidade e estudar o problema variacionalmente. Encontramos então, uma sequência de Cerami associada ao nível minimax, a qual nos direciona à solução de nosso problema. Utilizando apenas um argumento de contradição, ao supormos que a única solução para a nossa equação é a solução nula, obtemos que o nível do passo da montanha deveria ser igual a zero, o que é um absurdo. Isto nos leva a concluir a existência de solução (não-nula) para o nosso problema. O fato de que a solução encontrada é positiva, segue o mesmo argumento que usamos para a solução do Capítulo 2.

Cremos que a brevidade deste capítulo dispensa o anúncio de um roteiro para o mesmo.

3.1 Estrutura variacional

Com a mesma mudança de variável (1.4), o funcional (modificado) associado ao problema deste capítulo é o mesmo do Capítulo 2:

$$I(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v) - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, f(v)). \tag{3.2}$$

Todavia, devido à condição (V_2), não é possível estudarmos o problema utilizando diretamente o espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)$. Por esta razão, empregamos um subespaço fechado deste, a saber,

$$X = \left\{ v \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x)v^2 \, dx < \infty \right\},$$

munido com a seguinte norma

$$\|v\|_X = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + V(x)v^2) \right)^{1/2},$$

o qual também nos permite obter a limitação, em $H^1(\mathbb{R}^N)$, das sequências de Cerami associadas ao nível minimax do Teorema do Passo da Montanha. Notamos que, pela condição (V), a imersão $(X, \|\cdot\|_X) \hookrightarrow (H^1(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^N)})$ é contínua.

Como demonstrado no Capítulo 1, sob as hipóteses (V), (g_1) e (g_2), o funcional I está bem definido em X e pertence a $C^1(X, \mathbb{R})$ (veja Proposição 1.10). Além do mais, sua derivada é dada por

$$\langle I'(v), w \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla w + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f'(v)f(v)w - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, f(v))f'(v)w,$$

para todo $v, w \in X$ (veja também [57]). A equação de Euler-Lagrange associada ao funcional energia I é dada por

$$-\Delta v + V(x)f'(v)f(v) = g(x, f(v))f'(v), \quad v \in X. \tag{3.3}$$

Uma função $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é chamada uma solução fraca de (3.3) se, para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, vale

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla \varphi + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f'(v) f(v) \varphi - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, f(v)) f'(v) \varphi = 0.$$

Em conformidade com o Capítulo 2, também observamos que, a fim de obtermos uma solução não-negativa para (3.3), supomos $g(x,s) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $s < 0$.

3.2 Propriedades geométricas e alguns resultados

Nesta seção, apresentamos os resultados que, juntos, compõem a demonstração do Teorema 3.1. Seguindo a idéia do Capítulo 2, apresentamos as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha e a limitação em $H^1(\mathbb{R}^N)$, e não, em X, das sequências de Cerami do funcional associado. Finalmente, demonstramos dois resultados técnicos imprescindíveis à nossa prova do Teorema 3.1.

Lema 3.2. *Suponha que (V), (g_1), (g_2) e (g_5) sejam satisfeitas. Então o funcional I, definido por (3.2), satisfaz as condições $I(0) = 0$, (I_1) e (I_2) do Teorema 1.1.*

Demonstração. Como no Capítulo 2, definimos, para cada $\rho > 0$, o conjunto

$$S_\rho := \left\{ v \in X : \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v) = \rho^2 \right\},$$

e definimos a função $\Psi : X \to \mathbb{R}$, por $\Psi(v) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v)$. A demonstração é a mesma do Lema 2.3. $\square$

Como consequência do Teorema 1.1 e do Lema 3.2, temos

Corolário 3.3. *Suponha que (V), (g_1), (g_2) e (g_5) sejam satisfeitas. Então o funcional I possui uma sequência $(Ce)_c$, com c dado por (1.1).*

O lema seguinte estabelece a limitação em $H^1(\mathbb{R}^N)$ das sequências de Cerami associadas ao funcional I.

Lema 3.4. *Suponha que (V), $(g_1) - (g_3)$ sejam satisfeitas. Então toda sequência de Cerami $(v_n) \subset X$ associada ao funcional I é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração. Obtemos essa limitação a partir do fato de que podemos mostrar que $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) \leq M$, para alguma constante $M > 0$. Para isto, referimos o leitor ao Lema 2.5, no Capítulo 2. $\square$

Os próximos resultados são fundamentais para o argumento de contradição na nossa demonstração do Teorema 3.1. O lema a seguir é a principal razão de não utilizarmos espaços do tipo Orlicz no tratamento do Problema (3.1).

Lema 3.5. *Suponha que (V), (V_2), $(g_1)-(g_3)$ sejam satisfeitas. Se $(v_n) \subset X$ é uma sequência $(Ce)_c$ tal que $v_n \rightharpoonup 0$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$, então $c=0$.*

Demonstração. Desde que $\langle I'(v_n), v_n\rangle \to 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f(v_n) f'(v_n) v_n = \int_{\mathbb{R}^N} g(x, f(v_n)) f'(v_n) v_n + o_n(1).$$

Assim, pelo Lema 1.4-(6), (8), pela condição (V) e (1.20), segue-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + \frac{1}{2\alpha}\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) \leq \delta \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^2 + C_\delta \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{q_1} + o_n(1). \tag{3.4}$$

Além disso, como $I(v_n) \to c$, segue que

$$c = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, f(v_n)) + o_n(1), \tag{3.5}$$

e também, por (1.21), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |G(x, f(v_n))| \leq \frac{\delta}{2}\int_{\mathbb{R}^N} f^2(v_n) + \frac{C_\delta}{q_1}\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{q_1}. \tag{3.6}$$

Afirmamos que se $v_n \rightharpoonup 0$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$, então

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^p = 0, \quad \text{para todo } 2 \leq p < 2\alpha 2^*. \tag{3.7}$$

Supondo a afirmação como verdadeira e usando (3.4)–(3.6), obtemos $c=0$. Portanto, o Lema 3.5 está demonstrado, exceto por (3.7), que a partir de agora, passaremos a provar

Da prova do Lema 3.4, existe $M>0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) \leq M. \tag{3.8}$$

Consequentemente, pelo Teorema das Imersões de Sobolev, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} \leq C_1. \tag{3.9}$$

Agora, dado $D>0$, defina $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq D, |x| \geq R\}$ e $\mathcal{B} = \mathbb{R}^N \backslash (B_R(0) \cup \mathcal{A})$.

Pela condição (V_2), (3.8) e o Lema 1.4-(9),

$$\begin{aligned} M &\geq \int_{\mathcal{B}} V(x) f^2(v_n) \\ &\geq \int_{\mathcal{B}} D f^2(v_n) \\ &\geq C^2 D \int_{\mathcal{B}\cap\{|v_n|\leq 1\}} v_n^2 + C^2 D \int_{\mathcal{B}\cap\{|v_n|>1\}} |v_n|^{1/\alpha}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Além disso, como $2 \leq p < 2\alpha 2^*$, pelo Lema 1.4-(3), (7) e a desigualdade de Hölder, encontramos $0 < \lambda \leq 1$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} |f(v_n)|^p &\leq \int_{\mathcal{B}\cap\{|v_n|\leq 1\}} |v_n|^p + (2\alpha)^{p/4\alpha} \int_{\mathcal{B}\cap\{|v_n|>1\}} |v_n|^{p/2\alpha} \\ &\leq \int_{\mathcal{B}\cap\{|v_n|\leq 1\}} v_n^2 + (2\alpha)^{p/4\alpha} \left(\int_{\mathcal{B}\cap\{|v_n|>1\}} |v_n|^{1/\alpha} \right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} \right)^{1-\lambda}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

para todo $R = R_D > 0$. De (3.9), (3.10), (3.11), temos

$$\int_{\mathcal{B}} |f(v_n)|^p \leq \frac{M}{C^2 D} + (2\alpha)^{p/4\alpha} \left(\frac{M}{C^2 D} \right)^{\lambda} C_1^{1-\lambda}. \tag{3.12}$$

Por outro lado, usando a condição (V_2) mais uma vez, podemos encontrar um $R = R_D > 0$ tal que $|\mathcal{A}| < 1/D$. Consequentemente, usando a desigualdade de Hölder, o Lema 1.4-(7) e (3.9), temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}} |f(v_n)|^p &\leq |\mathcal{A}|^{\frac{2\alpha 2^*-p}{2\alpha 2^*}} \left(\int_{\mathcal{A}} |f(v_n)|^{2\alpha 2^*} \right)^{p/2\alpha 2^*} \\ &< C_2 \left(\frac{1}{D} \right)^{\frac{2\alpha 2^*-p}{2\alpha 2^*}}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

para alguma constante $C_2 > 0$. Então, por (3.12), (3.13), dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar $D > 0$ suficientemente grande de modo que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |f(v_n)|^p < \varepsilon.$$

Finalmente, como $v_n \rightharpoonup 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, pelo Lema 1.4-(7) e o Teorema das Imersões de Sobolev, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_R(0)} |f(v_n)|^p = 0.$$

Portanto, (3.7) vale, como afirmado. O Lema 3.5 está demonstrado. $\square$

Lema 3.6. *Suponha que (g_1) e (g_2) sejam satisfeitas. Seja $(v_n) \subset X$ uma sequência $(Ce)_c$ tal que $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Então v é uma solução fraca para a equação de (3.3).*

Demonstração. Como $(v_n) \subset X$ é uma sequência $(Ce)_c$, para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, segue-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n \nabla \varphi + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f(v_n) f'(v_n)\varphi - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, f(v_n)) f'(v_n)\varphi \to 0.$$

Logo, devemos verificar que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v_n - \nabla v)\nabla\varphi + \int_{\mathbb{R}^N} [f(v_n)f'(v_n) - f(v)f'(v)]\, V(x)\varphi \\ &\qquad - \int_{\mathbb{R}^N} [g(x, f(v_n))f'(v_n) - g(x, f(v))f'(v)]\, \varphi \to 0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Uma vez que $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$, temos que $v_n \to v$ em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$, com $p \in [1, 2^*)$. Então, a menos de subsequência,

$$\begin{aligned} &v_n(x) \to v(x) \quad \text{q.t.p. em } \mathcal{K} := supp\, \varphi, \ \text{ quando } n \to \infty, \\ &|v_n(x)| \le |w_p(x)| \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e q.t.p. em } \mathcal{K}, \ \text{ com } w_p \in L^p(\mathcal{K}). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} &f(v_n)f'(v_n) \to f(v)f'(v) \quad \text{q.t.p. em } \mathcal{K}, \ \text{ quando } n \to \infty, \\ &g(x, f(v_n))f'(v_n) \to g(x, f(v))f'(v) \quad \text{q.t.p. em } \mathcal{K}, \ \text{ quando } n \to \infty. \end{aligned}$$

Além disso, pela continuidade de V e do Lema 1.4-(2), (3), existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|V(x)f(v_n)f'(v_n)\varphi| \le |V(x)f(v_n)\varphi| \le C|w_2|\,|\varphi| \ \in L^1(\mathcal{K})$$

e, como $4\alpha \le q_1 < 2\alpha 2^*$, por (1.20) e o Lema 1.4-(2), (3), (6), (7), temos, para $v_n \neq 0$, que

$$\begin{aligned} |g(x, f(v_n))f'(v_n)\varphi| &\le \delta|v_n|\,|\varphi| + C_\delta |f(v_n)|^{q_1-1}|f'(v_n)|\,|\varphi| \\ &\le \delta|w_2|\,|\varphi| + C_\delta |f(v_n)|^{q_1-1}\frac{|f(v_n)|}{|v_n|}|\varphi| \\ &\le \delta|w_2|\,|\varphi| + (2\alpha)^{q_1/4\alpha} C_\delta |w_{\frac{q_1}{2\alpha}-1}|^{\frac{q_1}{2\alpha}-1}|\varphi| \ \in L^1(\mathcal{K}). \end{aligned}$$

Usando estas estimativas, o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e a convergência fraca $v_n \rightharpoonup v$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, obtemos (3.14). O Lema 3.6 está demonstrado. □

3.3 Demonstração do Teorema 3.1

Nesta seção, demonstramos o Teorema 3.1.

Inicialmente, invocamos o Corolário 3.3 para encontrarmos uma sequência de Cerami no nível c, isto é, $(v_n) \subset X$ tal que

$$I(v_n) \to c \geq \tau > 0 \quad \text{e} \quad \|I'(v_n)\|(1 + \|v_n\|) \to 0, \quad \text{quando} \;\; n \to \infty,$$

com c dado pelo Teorema 1.1. Aplicando o Lema 3.4, podemos supor, sem perda de generalidade, que $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Do Lema 3.6, temos que v é uma solução para a equação (3.3). Agora, supomos por contradição, que a função identicamente nula seja a única solução para a equação (3.3). Logo, tendo em vista o Lema 3.5, obtemos $c = 0$, que é uma contradição. Assim, v é não-nula. Mais do que isto, obtemos que $v > 0$ e, portanto, u é uma solução (positiva) para nosso Problema (3.1) (veja Capítulo 2). A demonstração do Teorema 3.1 está completa. □

Observação 3.7. *Queremos destacar um fato curioso: embora tenhamos trabalhado com um subespaço $X \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ definido apropriadamente em função do potencial V, sabemos, apenas, que $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ mas não temos, necessariamente, que $v \in X$. Por outro lado, a solução $u = f(v)$ encontrada para nosso problema original está, realmente, em X. De fato, por (3.8) e o Lema de Fatou, temos que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v_n) \leq M.$$

Capítulo

4

Equações de Schrödinger quasilineares assintoticamente periódicas com crescimento crítico

Nosso objetivo aqui é estabelecer, sob uma condição de periodicidade assintótica no infinito, a existência de uma solução para o problema crítico

$$\begin{cases} -\Delta u - \Delta(|u|^{2\alpha})|u|^{2\alpha-2}u + V(x)u \;=\; K(x)|u|^{2\alpha 2^*-2}u + g(x,u), \qquad x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N),\; u > 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $\alpha \geq 3/4$, e $V,\ K : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas. Note que $2\alpha 2^* = 4\alpha N/(N-2)$ corresponde ao expoente crítico para o Problema (4.1).

Consideramos, também, neste capítulo, a classe $\mathcal{F}$ de funções $h \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ tais que, para todo $\varepsilon > 0$, o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^N : |h(x)| \geq \varepsilon\}$ tem medida de Lebesgue finita. Então, supomos que V e K satisfazem

(V) existe uma constante $a_0 > 0$ tal que

$$V(x) \geq a_0 > 0, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N;$$

(V_1) existe uma função $V_0 \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, 1-periódica em x_i, $1 \leq i \leq N$, tal que $V_0 - V \in \mathcal{F}$ e

$$V(x) \leq V_0(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

(K) existe uma função $K_0 \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, 1-periódica em x_i, $1 \leq i \leq N$, e um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^N$, tais que $K - K_0 \in \mathcal{F}$ e

(i) $K(x) \geq K_0(x) > 0, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N,$

(ii) $K(x) = \|K\|_\infty + O(|x - x_0|^{N-2}), \quad \text{quando} \quad x \to x_0.$

Considerando $G(x,s) = \int_0^s g(x,t)\,dt$, a primitiva de g, também supomos as seguintes hipóteses:

(g_1) $g(x,s) = o(|s|)$, quando $s \to 0^+$, uniformemente em $x \in \mathbb{R}^N$;

(g_2) existem constantes $a_1, a_2 > 0$ e $4\alpha \leq q_1 < 2\alpha 2^*$ tais que

$$|g(x,s)| \leq a_1 + a_2|s|^{q_1-1}, \quad \text{para todo } (x,s) \in \mathbb{R}^N \times [0, +\infty);$$

(g_3') existe uma constante $2 \leq q_2 < 2\alpha 2^*$ e funções $h_1 \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $h_2 \in \mathcal{F}$ tais que

$$\frac{1}{4\alpha} g(x,s)s - G(x,s) \geq -h_1(x) - h_2(x)s^{q_2}, \quad \text{para todo } (x,s) \in \mathbb{R}^N \times [0, +\infty).$$

Conforme dito na Introdução deste trabalho, as condições (g_1) e (g_2) possibilitam-nos usar métodos variacionais para estudarmos o Problema (4.1), e permitem-nos verificar que o funcional associado possui um mínimo local na origem. A condição (g_2) impõe um crescimento subcrítico para g. Sob as hipóteses acima, o funcional associado não satisfaz uma condição de compacidade do tipo Palais-Smale, uma vez que o termo $K(x)|u|^{2\alpha 2^*-2}u$ é crítico e o domínio é todo o $\mathbb{R}^N$.

Como antes, a periodicidade assintótica de g no infinito é dada pela seguinte condição.

(g_4) existem uma constante $2 \leq q_3 < 2\alpha 2^*$ e funções $h_3 \in \mathcal{F}$, $g_0 \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$, 1-periódica em x_i, $1 \leq i \leq N$, tais que

(i) $G(x,s) \geq G_0(x,s) = \int_0^s g_0(x,t)\,dt, \quad \text{para todo } (x,s) \in \mathbb{R}^N \times [0, +\infty),$

(ii) $|g(x,s) - g_0(x,s)| \leq h_3(x)|s|^{q_3-1}, \quad \text{para todo } (x,s) \in \mathbb{R}^N \times [0, +\infty),$

(iii) a função $s \to g_0(x,s)/s^{4\alpha-1}$ é não-decrescente na variável $s > 0$.

Observamos que, devido ao termo crítico, a condição $(g_4)(ii)$ nos capacita a verificarmos a limitação das sequências $(Ce)_c$ sem que ocorra $g \geq 0$, como exigido no Capítulo 2.

Finalmente, também supomos que g satisfaz:

(g_5') existe um conjunto aberto e limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, contendo x_0 dado por $(K)(ii)$, tal que

$$\frac{G(x,s)}{\Psi(s)} \to \infty, \quad \text{quando } s \to \infty, \text{ uniformemente em } x \in \Omega,$$

onde

$$\Psi(s) = \begin{cases} s^{2\alpha 2^* - 1}, & \text{se } 3 \leq N \leq 8 \text{ e } \alpha > 3/4, \quad \text{ou } N \geq 9 \text{ e } \alpha > (N-2)/8, \\ s^{\frac{3}{2}2^* - 1} \log s, & \text{se } 3 \leq N \leq 8 \text{ e } \alpha = 3/4, \\ s^{4\alpha}, & \text{se } N \geq 9 \text{ e } 3/4 \leq \alpha \leq (N-2)/8. \end{cases}$$

Agora, podemos enunciar nosso resultado principal deste capítulo, que fornece a existência de soluções para o caso de expoente crítico, que fora conjecturado em [44].

Teorema 4.1. *Suponha que* (V), (V_1), (K), (g_1), (g_2), (g_3'), (g_4) *e* (g_5') *sejam satisfeitas. Então o Problema* (4.1) *possui uma solução.*

Assim como no Capítulo 2, observamos que no caso particular: $V = V_0$, $K = K_0$, $g = g_0$, o Teorema 4.1, sem a condição $(g_4)(iii)$, claramente nos dá uma solução para o problema periódico. Mais especificamente, considerando o Problema (4.1), sob as hipóteses: (V), (g_1), (g_2), (g_3'), (g_5') e

(V_0) a função $V \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ é 1-periódica em x_i, $1 \leq i \leq N$;

(K_0) a função $K \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ é 1-periódica em x_i, $1 \leq i \leq N$, e existe um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^N$, tal que

(i) $K(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$,

(ii) $K(x) = \|K\|_\infty + O(|x - x_0|^{N-2})$, quando $x \to x_0$;

(g_0') a função $g \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ é 1-periódica em x_i, $1 \leq i \leq N$,

podemos estabelecer:

Teorema 4.2. *Suponha que* (V), (V_0), (K_0), (g_0'), (g_1), (g_2), (g_3') *e* (g_5') *sejam satisfeitas. Então o Problema (4.1) possui uma solução.*

As funções g e g_0, fornecidas no Capítulo 2, também, satisfazem as hipóteses (g_3') e (g_5'). Para vermos isto, basta tomarmos qualquer $2 \leq q_2 < 2\alpha 2^*$, h_1, $h_2 \geq 0$ e

(a) $2\alpha 2^* - 1 < q_1 < 2\alpha 2^*$, se $3 \leq N \leq 8$ e $\alpha > 3/4$ ou $N \geq 9$ e $\alpha > (N-2)/8$;

(b) $32^*/2 \leq q_1 < 2\alpha 2^*$, se $3 \leq N \leq 8$ e $\alpha = 3/4$;

(c) $4\alpha < q_1 < 2\alpha 2^*$, se $N \geq 9$ e $3/4 \leq \alpha \leq (N-2)/8$.

Estudos matemáticos recentes [43, 44, 45, 52] têm se concentrado na existência de soluções para (4.1) no caso subcrítico ($K \equiv 0$) e $g(x,s) = |s|^{p-1}s$, $4 \leq p+1 < 22^*$, $N \geq 3$. Em [44], por uma mudança de variável, o problema quasilinear foi reduzido a um semilinear e uma estrutura de espaços de Orlicz foi usada para provar a existência de uma solução positiva para todo μ positivo (em frente ao termo não-linear) via Teorema do Passo da Montanha. Em [13], Colin e Jeanjean também fizeram uso de uma mudança de variável no intuito de reduzir a equação (4.1), com $K \equiv 0$, à uma equação semilinear. Usando o espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)$, eles provaram a existência de soluções, fundamentados nos resultados clássicos desenvolvidos por Berestycki e Lions [6] onde $N = 1$ ou $N \geq 3$, e Berestycki, Gallouët e Kavian [5] onde $N = 2$. Deveríamos também mencionar o artigo [45] onde os autores usaram o método de Nehari e consideraram um problema quasilinear mais geral, incluíndo casos nos quais a mudança de variável não se aplica.

Os principais resultados neste artigo fornecem a existência de solução para o caso de expoente crítico, o qual fora mencionado e deixado em aberto em [44].

Observamos que um problema do tipo (4.1) fora estudado por Moameni [47], para $N = 2$, com V e g sendo duas funções contínuas 1-periódicas e g com crescimento exponencial crítico. Para $N \geq 3$, Moameni [46] estabeleceu a existência de uma solução não-negativa para o caso onde o expoente é crítico e a função potencial V é radialmente simétrica e satisfaz alguma condição geométrica diferente da periódica. Além disso, uma estrutura de espaços de Orlicz fora empregada.

Notamos, também, que durante a preparação deste trabalho, veio ao nosso conhecimento um outro resultado [20], devido a do Ó, Miyagaki e Soares, que contém um resultado similar ao Teorema 4.2 sob uma hipótese mais restrita para o potencial V. Além disto, o termo não-linear g considerado em [20] foi uma potência pura.

A idéia para provarmos nossos resultados deste capítulo é motivada pelos argumentos usados em [13, 44]. Também usamos uma mudança de variável para reformularmos o problema, obtendo um problema semilinear que tem um funcional associado bem definido no espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)$ e satisfaz as propriedades geométricas do Teorema do Passo da Montanha (veja [2]). A seguir, adaptamos o argumento empregado em [38, 39], supondo que a solução para a equação de (4.1) é a solução nula. Considerando o funcional associado ao problema modificado, usamos uma versão do Teorema do Passo da Montanha, sem condição de compacidade [25], para obtermos uma sequência de Cerami associada ao nível minimax. Em seguida, utilizamos esta sequência e um resultado técnico devido a Lions (veja [15]) para obtermos um ponto crítico não-trivial do funcional associado ao problema periódico. Além disso, somos capazes de verificar que o valor do funcional associado ao Problema (4.1) neste ponto é menor ou igual ao nível minimax do Passo da Montanha e que este nível é atingido. Finalmente, empregamos uma versão local do Teorema do Passo da Montanha (Teorema 1.3) para obtermos uma solução para o Problema (4.1).

Organizamos este capítulo da seguinte forma: na Seção 4.1, introduzimos a estrutura variacional associada ao Problema (4.1), verificando a geometria do Passo da Montanha e o comportamento das sequências de Cerami associadas com o nível do Passo da Montanha. Na Seção 4.2, apresentamos uma estimativa que assegura que o nível minimax do funcional associado ao problema modificado está abaixo de um certo nível crítico. Na Seção 4.3, demonstramos os Teoremas 4.1 e 4.2.

4.1 Estrutura variacional

Nesta seção, além de introduzirmos o espaço de funções no qual iremos trabalhar, verificamos as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha e apresentamos resultados concernentes ao comportamento das sequências de Cerami do funcional associado: mostramos a limitação das sequências de Cerami e uma proposição que será essencial para garantir que as soluções encontradas nas nossas demonstrações dos Teoremas 4.1 e 4.2 não sejam nulas.

Observamos que o Problema (4.1) é a equação de Euler-Lagrange associada ao funcional energia

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(1+2\alpha|u|^{2(2\alpha-1)})|\nabla u|^2+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)u^2-\frac{1}{2\alpha 2^*}\int_{\mathbb{R}^N}K(x)|u^+|^{2\alpha 2^*}-\int_{\mathbb{R}^N}G(x,u).$$

A fim de empregarmos métodos variacionais no tratamento de nosso problema, utilizamos, devido ao termo $\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(2\alpha-1)})|\nabla u|^2$, a mudança de variável $v = f^{-1}(u)$, onde f é definida por (1.4), encontrando assim, um espaço de funções apropriado, onde possamos empregar métodos de minimax ao novo funcional obtido.

Depois de tal mudança de variável, (1.4), a partir de J, obtemos o funcional

$$I(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^2+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)f^2(v)-\frac{1}{2\alpha 2^*}\int_{\mathbb{R}^N}K(x)|f(v^+)|^{2\alpha 2^*}-\int_{\mathbb{R}^N}G(x,f(v)), \quad (4.2)$$

que está bem definido em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e é de classe C^1 sob as hipóteses (V), (V_1), (K), (g_1) e (g_2) (veja Proposição 1.9). Além disso, tendo em vista o Lema 1.12, os pontos críticos positivos do funcional I são as soluções fracas do problema

$$\begin{cases} -\Delta v + V(x)f'(v)f(v) \;=\; K(x)|f(v)|^{2\alpha 2^*-2}f(v)f'(v) + g(x,f(v))f'(v), \\ v \in H^1(\mathbb{R}^N),\; v > 0, \end{cases} \tag{4.3}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \langle I'(v), w\rangle \;=\; & \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla w + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f(v)f'(v)w \\ & - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|f(v^+)|^{2\alpha 2^*-1}f'(v^+)w - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,f(v))f'(v)w, \end{aligned}$$

para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Observamos, novamente (veja Observação 1.13), que se $v \in C^2(\mathbb{R}^N) \cap H^1(\mathbb{R}^N)$, $v > 0$, é um ponto crítico do funcional I, então a função $u = f(v)$ é uma solução clássica de (4.1). Argumentando como no Capítulo 2, para obtermos uma solução não-negativa para (4.3), tomamos $g(x,s) = 0$, para $x \in \mathbb{R}^N$, $s < 0$. Consequentemente, $u = f(v)$ é uma solução (não-negativa) do Problema (4.1).

De maneira análoga, associado ao problema periódico, temos o funcional $I_0 \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$, definido por

$$I_0(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V_0(x)f^2(v) - \frac{1}{2\alpha 2^*}\int_{\mathbb{R}^N} K_0(x)|f(v^+)|^{2\alpha 2^*} - \int_{\mathbb{R}^N} G_0(x,f(v)), \tag{4.4}$$

com $g_0(x,s) = 0$, para $x \in \mathbb{R}^N$, $s < 0$.

Dessa forma, trabalhamos com o espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$ munido de uma das normas

$$\|v\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + V(x)v^2)\right)^{1/2},$$

$$\|v\|_0 = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + V_0(x)v^2)\right)^{1/2}.$$

Observamos mais uma vez que, em vista das condições (V) e (V_1), ambas as normas acima são equivalentes à norma usual de $H^1(\mathbb{R}^N)$.

4.1.1 Geometria do Passo da Montanha

O lema abaixo mostra que o funcional (modificado) associado ao Problema (4.1) satisfaz as propriedades geométricas do Teorema do Passo da Montanha.

Lema 4.3. *Suponha que (V), (V_1), (K), (g_1), (g_2) e $(g_4)(i)$ sejam satisfeitas. Então o* *funcional I, definido por (4.2), satisfaz as condições $I(0) = 0$, (I_1) e (I_2) do Teorema 1.1.*

Demonstração. Primeiramente, note que $I(0) = 0$. Agora, defina, para cada $\rho > 0$,

$$S_\rho := \left\{ v \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v) = \rho^2 \right\}.$$

Desde que $\Psi : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$, dada por

$$\Psi(v) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v),$$

é contínua, S_ρ é um subconjunto fechado que desconecta o espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$. Tomando $0 < \lambda < 1$ tal que $q_1/2 = \lambda + (1-\lambda)\alpha 2^*$, por (V), a relação (1.21), a desigualdade de Hölder, o Lema 1.4-(7) e o Teorema das Imersões de Sobolev, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(x, f(v)) \leq \frac{\delta}{2a_0}\rho^2 + \frac{(2\alpha)^{2^*(1-\lambda)/2} C_0 C_\delta}{q_1 a_0^\lambda} \rho^{\lambda 2 + (1-\lambda)2^*},$$

para todo $v \in S_\rho$ e alguma constante $C_0 > 0$. Além disso, pelo Lema 1.4-(7), a condição (K) e o Teorema das Imersões de Sobolev,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|f(v^+)|^{2\alpha 2^*} &\leq (2\alpha)^{2^*/2}\|K\|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{2^*} \leq (2\alpha)^{2^*/2} C_0 \|K\|_\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 \right)^{2^*/2} \\ &\leq (2\alpha)^{2^*/2} C_0 \|K\|_\infty \rho^{2^*}. \end{aligned}$$

Logo,

$$I(v) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta}{2a_0} \right) \rho^2 - \frac{(2\alpha)^{2^*/2} C_0 \|K\|_\infty}{2\alpha 2^*} \rho^{2^*} - \frac{(2\alpha)^{2^*(1-\lambda)/2} C_0 C_\delta}{q_1 a_0^\lambda} \rho^{\lambda 2 + (1-\lambda)2^*},$$

para todo $v \in S_\rho$. Como $\lambda 2 + (1-\lambda)2^* > 2$, escolhendo $0 < \delta < a_0$, concluímos, para ρ suficientemente pequeno, que

$$c_0 := \inf_{S_\rho} I \geq \tau > 0.$$

A condição (I_1) é satisfeita.

Para mostrarmos a condição (I_2), basta mostrarmos que existe $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $\varphi \geq 0$ tal que

$$I(t\varphi) \to -\infty, \quad \text{quando } \ t \to +\infty. \tag{4.5}$$

De fato, consideremos $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^+)$, $\varphi \not\equiv 0$. Das propriedades (3) e (9) do Lema 1.4, da condição (V) e $(g_4)(i)$, obtemos, para todo $t > 0$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} I(t\varphi) &\leq \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi|^2 + \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)\varphi^2 - \frac{1}{2\alpha 2^*}\inf_{\mathbb{R}^N} K \int_{\mathbb{R}^N} f^{2\alpha 2^*}(t\varphi) \\ &\leq \frac{t^2}{2}\|\varphi\|^2 - \frac{C^{2\alpha 2^*}}{2\alpha 2^*} t^{2^*} \inf_{\mathbb{R}^N} K \int_{\{t\varphi(x)\geq 1\}} \varphi^{2^*}.\end{aligned}$$

(4.5) está provado e a condição (I_2) é satisfeita. Assim, a demonstração do lema está completa. □

Como consequência do Teorema 1.1 e do Lema 4.3, temos

Corolário 4.4. *Suponha que (V), (V_1), (K), (g_1), (g_2) e $(g_4)(i)$ sejam satisfeitas. Então o funcional I possui uma sequência $(Ce)_c$, com c dado por (1.1).*

4.1.2 Comportamento das sequências de Cerami

No próximo resultado, verificamos a limitação das sequências (Ce) associadas ao funcional I.

Lema 4.5. *Suponha que (V), (V_1), (K), (g_1), (g_2), (g_3') e $(g_4)(ii)$ sejam satisfeitas. Então toda sequência de Cerami $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ associada ao funcional I é limitada.*

Demonstração. Como no Capítulo 2, basta mostrarmos que a sequência de Cerami $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) \leq M,$$

para alguma constante $M > 0$.

Seja, $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência de Cerami para I no nível $c \in \mathbb{R}$, isto é,

$$\begin{aligned}c + o_n(1) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) \\ &\quad -\frac{1}{2\alpha 2^*}\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*} - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, f(v_n)), \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\|I'(v_n)\|(1 + \|v_n\|) = o_n(1).$$

Por (4.6), (1.21) e as condições (V) e (K), temos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n|^2+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)f^2(v_n)&\\
&=\frac{1}{2\alpha 2^*}\int_{\mathbb{R}^N}K(x)|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*}+\int_{\mathbb{R}^N}G(x,f(v_n))+c+o_n(1)\\
&\leq \frac{\|K\|_\infty}{2\alpha 2^*}\int_{\mathbb{R}^N}|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*}+\frac{\delta}{2a_0}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)f^2(v_n)+\frac{C_\delta}{q_1}\int_{\mathbb{R}^N}|f(v_n^+)|^{q_1}+c+o_n(1).
\end{aligned}
$$

Dado $0<\varepsilon\leq 1$ a ser escolhido posteriormente, existe $0<\delta_1<1$ tal que $|s|^{q_1}\leq\varepsilon|s|^2$ para todo $|s|\leq\delta_1$. Então, tendo em vista o Lema 1.4-(3), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n|^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2a_0}\right)\int_{\mathbb{R}^N}V(x)f^2(v_n)\\
&\leq \frac{C_\delta}{q_1}\int_{\{|v_n(x)|\leq\delta_1\}}|f(v_n)|^{q_1}+\frac{C_\delta}{q_1}\int_{\{|v_n(x)|>\delta_1\}}|f(v_n^+)|^{q_1}+\frac{\|K\|_\infty}{2\alpha 2^*}\int_{\mathbb{R}^N}|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*}+c+o_n(1)\\
&\leq \frac{\varepsilon C_\delta}{q_1}\int_{\{|v_n(x)|\leq\delta_1\}}f^2(v_n)+\frac{C_\delta}{q_1}\int_{\{|v_n(x)|>\delta_1\}}|f(v_n^+)|^{q_1}+\frac{\|K\|_\infty}{2\alpha 2^*}\int_{\mathbb{R}^N}|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*}+c+o_n(1),
\end{aligned}
$$

o que implica em

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n|^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2a_0}-\frac{\varepsilon C_\delta}{q_1 a_0}\right)\int_{\mathbb{R}^N}V(x)f^2(v_n)&\\
\leq \frac{C_\delta}{q_1}\int_{\{|v_n(x)|>\delta_1\}}|f(v_n^+)|^{q_1}+\frac{\|K\|_\infty}{2\alpha 2^*}\int_{\mathbb{R}^N}|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*}+c+o_n(1).&
\end{aligned}
$$

Observe que se $|s|>\delta_1$, existe uma constante $C_1>0$ tal que $|s|^{q_1}\leq C_1|s|^{2\alpha 2^*}$. Assim, obtemos

$$
\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n|^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2a_0}-\frac{\varepsilon C_\delta}{q_1 a_0}\right)\int_{\mathbb{R}^N}V(x)f^2(v_n)\leq C_2\int_{\mathbb{R}^N}|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*}+c+o_n(1), \quad (4.7)
$$

onde $C_2=C_\delta C_1/q_1+\|K\|_\infty/2\alpha 2^*$. Tome δ e ε suficientemente pequenos de modo que $\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2a_0}-\frac{\varepsilon C_\delta}{q_1 a_0}>0$. Logo, a fim de concluirmos a demonstração do lema, é suficiente mostrarmos que o lado direito em (4.7) é limitado.

Notando que $g(x,s)=0$ se $s<0$, do Lema 1.4-(6), (8) e das condições (V) e (K), segue-se

$$
\begin{aligned}
\langle I'(v_n),v_n\rangle \;\leq\; & \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n|^2+\int_{\mathbb{R}^N}V(x)f^2(v_n)\\
&-\frac{1}{2\alpha}\int_{\mathbb{R}^N}K(x)|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*}-\int_{\mathbb{R}^N}g(x,f(v_n^+))f'(v_n^+)v_n^+.
\end{aligned}
$$

Usando o Lema 1.4-(6), juntamente com $(g_4)(ii)$, temos, para $s \geq 0$,

$$\begin{aligned} g(x,f(s))f'(s)s &\geq g_0(x,f(s))f'(s)s - h_3(x)|f(s)|^{q_3-1}f'(s)s \\ &\geq \frac{1}{2\alpha}g_0(x,f(s))f(s) - h_3(x)|f(s)|^{q_3} \\ &\geq \frac{1}{2\alpha}g_(x,f(s))f(s) - \frac{1+2\alpha}{2\alpha}h_3(x)|f(s)|^{q_3}. \end{aligned}$$

Logo, obtemos

$$\begin{aligned} \langle I'(v_n), v_n\rangle &\leq \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^N}V(x)f^2(v_n) - \frac{1}{2\alpha}\int_{\mathbb{R}^N}K(x)|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*} \\ &\quad -\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{2\alpha}g(x,f(v_n^+))f(v_n^+) + \frac{1+2\alpha}{2\alpha}\int_{\mathbb{R}^N}h_3|f(v_n^+)|^{q_3}. \end{aligned}$$

Consequentemente, por (g_3'),

$$\begin{aligned} &I(v_n) - \frac{1}{2}\langle I'(v_n), v_n\rangle \\ &\geq \frac{1}{2\alpha N}\int_{\mathbb{R}^N}K(x)|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*} - \frac{1+2\alpha}{4\alpha}\int_{\mathbb{R}^N}h_3|f(v_n^+)|^{q_3} \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{1}{4\alpha}g(x,f(v_n^+))f(v_n^+) - G(x,f(v_n^+))\right] \\ &\geq \frac{1}{2\alpha N}\int_{\mathbb{R}^N}K(x)|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*} - \frac{1+2\alpha}{4\alpha}\int_{\mathbb{R}^N}h_3|f(v_n^+)|^{q_3} - \int_{\mathbb{R}^N}h_1 - \int_{\mathbb{R}^N}h_2|f(v_n^+)|^{q_2}. \end{aligned}$$

Então, por (4.6) e o fato de que $h_1 \in L^1(\mathbb{R}^N)$, encontramos uma constante $C_3 > 0$ tal que

$$\frac{1}{2\alpha N}\int_{\mathbb{R}^N}K(x)|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*} \leq \int_{\mathbb{R}^N}h_2|f(v_n^+)|^{q_2} + \frac{1+2\alpha}{4\alpha}\int_{\mathbb{R}^N}h_3|f(v_n^+)|^{q_3} + C_3. \tag{4.8}$$

Dado $\epsilon > 0$, pomos $D_\epsilon(R) = \{x \in \mathbb{R}^N : |h_2(x)| \geq \epsilon, |x| \geq R\}$ para todo $R > 0$. Então, desde que $h_2 \in \mathcal{F}$, aplicando o Lema 2.7, encontramos um $R = R_\epsilon > 0$ tal que $|D_\epsilon(R)| < \epsilon$. Logo, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \int_{D_\epsilon(R)}h_2|f(v_n^+)|^{q_2} &\leq \|h_2\|_\infty|D_\epsilon(R)|^{\frac{2\alpha 2^*-q_2}{2\alpha 2^*}}\left(\int_{D_\epsilon(R)}|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*}\right)^{\frac{q_2}{2\alpha 2^*}} \\ &< \|h_2\|_\infty\epsilon^{\frac{2\alpha 2^*-q_2}{2\alpha 2^*}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*}\right)^{\frac{q_2}{2\alpha 2^*}}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Por outro lado,

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus D_\epsilon(R)} h_2|f(v_n^+)|^{q_2} \leq \|h_2\|_\infty \left(\frac{\omega_N R^N}{N}\right)^{\frac{2\alpha 2^*-q_2}{2\alpha 2^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*}\right)^{\frac{q_2}{2\alpha 2^*}} + \epsilon \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n^+)|^{q_2}. \tag{4.10}$$

Além disso, considerando $0 < \lambda \leq 1$ tal que $q_2 = 2\lambda + (1-\lambda)2\alpha 2^*$, aplicamos a desigualdade de Hölder, a condição (V) e (4.7) para encontrarmos $C_4 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n^+)|^{q_2} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} f^2(v_n^+)\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*}\right)^{1-\lambda} \\
&\leq \left(\frac{1}{a_0}\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n)\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*}\right)^{1-\lambda} \\
&\leq C_4 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*}\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*}\right)^{1-\lambda} \\
&= C_4 \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*}.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Logo, de (4.9) – (4.11), obtemos uma constante $C_5 > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} h_2|f(v_n^+)|^{q_2} \leq C_5 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*}\right)^{\frac{q_2}{2\alpha 2^*}} + \epsilon C_4 \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*}.$$

Observando que uma estimativa análoga vale para $\int_{\mathbb{R}^N} h_3|f(v_n^+)|^{q_3}$ e usando (4.8), existe uma constante $C_6 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\alpha N}\inf_{\mathbb{R}^N} K \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*} \\
&\qquad \leq C_5 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*}\right)^{\frac{q_2}{2\alpha 2^*}} + \epsilon C_4 \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*} \\
&\qquad\quad + \frac{1+2\alpha}{4\alpha} C_6 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*}\right)^{\frac{q_3}{2\alpha 2^*}} + \frac{1+2\alpha}{4\alpha}\epsilon C_4 \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*} + C_3,
\end{aligned}$$

que implica

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2\alpha N}\inf_{\mathbb{R}^N} K - \frac{6\alpha+1}{4\alpha} C_4 \epsilon\right) \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*} \\
&\qquad \leq C_5 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*}\right)^{\frac{q_2}{2\alpha 2^*}} + \frac{1+2\alpha}{4\alpha} C_6 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*}\right)^{\frac{q_3}{2\alpha 2^*}} + C_3.
\end{aligned}$$

Como $q_2, q_3 < 2\alpha 2^*$, tomando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, obtemos o resultado desejado. □

Antes de estabelecermos o próximo resultado, lembremos que a melhor constante para a imersão de Sobolev $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \subset L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ é dada por

$$S = \inf_{\substack{v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \\ v \neq 0}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{2^*}\right)^{2/2^*}}. \tag{4.12}$$

Proposição 4.6. *Suponha que* (V), (V_1), (K), (g_1) *e* (g_2) *sejam satisfeitas. Seja* $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ *uma sequência* $(Ce)_b$ *com* $0 < b < \frac{1}{2\alpha N} \|K\|_\infty^{\frac{2-N}{2}} S^{\frac{N}{2}}$, *e* $v_n \rightharpoonup 0$ *fracamente em* $H^1(\mathbb{R}^N)$. *Então existem uma sequência* $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ *e* $r, \eta > 0$ *tais que* $|y_n| \to \infty$ *e*

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{B_r(y_n)} |v_n|^2 \geq \eta > 0.$$

Demonstração. Supondo que o resultado não é verdadeiro, temos (veja [15] ou [64]):

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^\sigma = 0, \quad \text{para todo } \sigma \in (2, 2^*). \tag{4.13}$$

Uma vez que g possui crescimento subcrítico, obtemos, como no Capítulo 2,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} g(x, f(v_n) f'(v_n) v_n = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} G(x, f(v_n)) = 0. \tag{4.14}$$

Assim, como $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é uma sequência $(Ce)_b$ para o funcional I, segue que

$$\begin{aligned} b + o_n(1) &= I(v_n) - \frac{1}{2}\langle I'(v_n), v_n\rangle \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)[f^2(v_n) - f(v_n)f'(v_n)v_n] \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} K(x)\left[\frac{1}{2}|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*-1} f'(v_n^+)v_n^+ - \frac{1}{2\alpha 2^*}|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*}\right]. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Afirmamos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)[f^2(v_n) - f(v_n)f'(v_n)v_n] = 0; \tag{4.16}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} K(x)\left[(2\alpha)^{\frac{2^*}{2}}|v_n^+|^{2^*} - |f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*}\right] = 0; \tag{4.17}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} K(x)\left[|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*-1} f'(v_n^+)v_n^+ - (2\alpha)^{\frac{2^*-2}{2}}|v_n^+|^{2^*}\right] = 0. \tag{4.18}$$

Supondo que a afirmação é verdadeira, e usando (4.15), obtemos

$$b + o_n(1) = \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|v_n^+|^{2^*} \left[\frac{1}{2}(2\alpha)^{\frac{2^*-2}{2}} - \frac{(2\alpha)^{\frac{2^*-2}{2}}}{2^*}\right] = \frac{(2\alpha)^{\frac{2^*-2}{2}}}{N} \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|v_n^+|^{2^*}.$$

Logo

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|v_n^+|^{2^*} = \frac{Nb}{(2\alpha)^{\frac{2^*-2}{2}}} > 0. \tag{4.19}$$

Consequentemente, usando (4.18), obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*-1} f'(v_n^+)v_n^+ = Nb. \tag{4.20}$$

Por outro lado, tomando o primeiro limite em (4.14), o segundo em (4.22) abaixo, e o fato de que $\langle I'(v_n), v_n\rangle \to 0$, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \left[\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*-1} f'(v_n^+)v_n^+ - \|v_n\|^2\right] = 0.$$

Portanto, de (4.20), segue-se

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n\|^2 = Nb. \tag{4.21}$$

Da definição (4.12), temos

$$\frac{1}{\|K\|_\infty} \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|v_n^+|^{2^*} \le \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} \le \left(\frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2\right)^{\frac{2^*}{2}} \le \left(\frac{\|v_n\|^2}{S}\right)^{\frac{2^*}{2}}.$$

Passando ao limite na desigualdade acima, em vista de (4.19) e (4.21), obtemos

$$\frac{1}{\|K\|_\infty} \frac{Nb}{(2\alpha)^{\frac{2^*-2}{2}}} \le \left(\frac{Nb}{S}\right)^{\frac{2^*}{2}},$$

isto é,

$$b \ge \frac{1}{2\alpha N}\|K\|_\infty^{\frac{2-N}{2}} S^{\frac{N}{2}},$$

contradizendo a hipótese de que $b < \frac{1}{2\alpha N}\|K\|_\infty^{\frac{2-N}{2}} S^{\frac{N}{2}}$. Isto conclui a demonstração da Proposição 4.6, exceto por (4.16), (4.17) e (4.18).

A fim de provarmos (4.16), simplesmente verificamos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)[f^2(v_n) - v_n^2] = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)[v_n^2 - f(v_n)f'(v_n)v_n] = 0. \tag{4.22}$$

Realmente, para $\delta > 0$ a ser escolhido posteriormente, podemos escrever

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)[f^2(v_n) - v_n^2] = \int_{\{|v_n(x)|>\delta\}} V(x)[f^2(v_n) - v_n^2] + \int_{\{|v_n(x)|\leq\delta\}} V(x)[f^2(v_n) - v_n^2].$$

Usando (4.13), a condição (V_1) e o Lema 1.4-(3), obtemos

$$\int_{\{|v_n(x)|>\delta\}} \left|V(x)[f^2(v_n) - v_n^2]\right| \leq 2\|V\|_\infty \int_{\{|v_n(x)|>\delta\}} v_n^2 < \frac{2\|V\|_\infty}{\delta^{\sigma-2}} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^\sigma \to 0, \quad (4.23)$$

quando $n \to \infty$. Por outro lado, pelo Lema 1.4-(4), dado $\varepsilon > 0$, escolhemos $\delta > 0$ tal que $|(f(s)/s)^2 - 1| < \varepsilon$, se $|s| \leq \delta$. Assim, pela condição (V_1), temos

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \int_{\{0<|v_n(x)|\leq\delta\}} & \left|V(x)v_n^2\left[\left(\frac{f(v_n)}{v_n}\right)^2 - 1\right]\right| \\
&\leq \|V\|_\infty \limsup_{n\to\infty} \int_{\{0<|v_n(x)|\leq\delta\}} v_n^2 \left|\left(\frac{f(v_n)}{v_n}\right)^2 - 1\right| \\
&< \varepsilon\|V\|_\infty \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} v_n^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} & \int_{\mathbb{R}^N} \left|V(x)[f^2(v_n) - v_n^2]\right| \\
& \leq \limsup_{n\to\infty} \int_{\{|v_n(x)|>\delta\}} \left|V(x)[f^2(v_n) - v_n^2]\right| + \varepsilon\|V\|_\infty \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} v_n^2.
\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ pode ser tomado tão pequeno quanto desejarmos e $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é limitada, usando (4.23), temos o primeiro limite em (4.22). Pelas propriedades (3), (4) e (8) do Lema 1.4 e pelo fato de que $f'(s) \to 1$ quando $s \to 0$, a verificação do segundo limite em (4.22) é similar à verificação do primeiro. Portanto, (4.16) vale.

A verificação de (4.17) é similar à anterior. Com efeito, para $R > 0$ a ser escolhido posteriormente, escrevemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} K(x)\left[(2\alpha)^{\frac{2^*}{2}}|v_n^+|^{2^*} - |f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*}\right] &= \int_{\{|v_n(x)|\leq R\}} K(x)\left[(2\alpha)^{\frac{2^*}{2}}|v_n^+|^{2^*} - |f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*}\right] \\
&\quad + \int_{\{|v_n(x)|>R\}} K(x)\left[(2\alpha)^{\frac{2^*}{2}}|v_n^+|^{2^*} - |f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*}\right].
\end{aligned}$$

Pela condição (K), o Lema 1.4-(7) e (4.13),

$$\begin{aligned}\int_{\{|v_n(x)|\leq R\}} & \left|K(x)\left[(2\alpha)^{\frac{2^*}{2}}|v_n^+|^{2^*}-|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*}\right]\right| \\ & \leq\ 2(2\alpha)^{\frac{2^*}{2}}\|K\|_\infty\int_{\{|v_n(x)|\leq R\}}|v_n|^{2^*} \\ & \leq 2(2\alpha)^{\frac{2^*}{2}}\|K\|_\infty R^{2^*-\sigma}\int_{\mathbb{R}^N}|v_n|^\sigma \\ & \to 0,\end{aligned} \tag{4.24}$$

quando $n\to\infty$. Por outro lado, pelo Lema 1.4-(5), dado $\varepsilon>0$, podemos escolher $R>0$ suficientemente grande para que $|1-\big(f(|s|)/(2\alpha)^{1/4\alpha}|s|^{1/2\alpha}\big)^{2\alpha 2^*}|<\varepsilon$ para $|s|>R$. Assim, pela condição (K),

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\int_{\{|v_n(x)|>R\}} & \left|K(x)\left[(2\alpha)^{\frac{2^*}{2}}|v_n^+|^{2^*}-|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*}\right]\right| \\ & \leq \|K\|_\infty\limsup_{n\to\infty}\int_{\{|v_n(x)|>R\}}(2\alpha)^{\frac{2^*}{2}}|v_n^+|^{2^*}\left|1-\left(\frac{f(v_n^+)}{(2\alpha)^{1/4\alpha}|v_n^+|^{1/2\alpha}}\right)^{2\alpha 2^*}\right| \\ & < \varepsilon(2\alpha)^{\frac{2^*}{2}}\|K\|_\infty\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|v_n|^{2^*}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} & \left|K(x)\left[(2\alpha)^{\frac{2^*}{2}}|v_n^+|^{2^*}-|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*}\right]\right| \\ & \leq \limsup_{n\to\infty}\int_{\{|v_n(x)|\leq R\}}\left|K(x)\left[(2\alpha)^{\frac{2^*}{2}}|v_n^+|^{2^*}-|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*}\right]\right| \\ & \quad +\varepsilon(2\alpha)^{\frac{2^*}{2}}\|K\|_\infty\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|v_n|^{2^*}.\end{aligned}$$

Como $\varepsilon>0$ é arbitrário e $(v_n)\subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é limitada, usamos (4.24) para concluirmos (4.17).

Finalmente, usando a identidade abaixo

$$\frac{|f(s)|^{2\alpha 2^*-1}f'(s)s}{(2\alpha)^{(2^*-2)/2}|s|^{2^*}}=\frac{1}{(1/(2\alpha)|f(s)|^{2(2\alpha-1)}+1)^{1/2}}\left(\frac{f(|s|)}{(2\alpha)^{1/4\alpha}|s|^{1/2\alpha}}\right)^{2\alpha(2^*-1)},\quad \text{com}\ \ s\neq 0,$$

pelo Lema 1.4-(5), (7), (8) e pela condição (K), um argumento similar àquele usado acima mostra (4.18). A Proposição 4.6 está demonstrada. □

4.2 Estimativas

Nesta seção, verificamos que o nível minimax associado ao Teorema do Passo da Montanha (Teorema 1.1) está no intervalo onde a Proposição 4.6 pode ser aplicada. Para obtermos esse resultado, usamos funções-testes apropriadas como aquelas empregadas por Brézis e Nirenberg [9], e verificamos alguns resultados auxiliares sobre estas funções. Então, estabelecemos o resultado principal deste capítulo, provando a estimativa para o nível minimax c, dado por (1.1).

4.2.1 Funções-testes

Sem perda de generalidade, supomos que x_0, dado pela condição (K), é a origem de $\mathbb{R}^N$ e que $B_2(0) \subset \Omega$, onde Ω é dado pela condição (g_5').

Dado $\varepsilon > 0$, consideramos a função $w_\varepsilon : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definida por

$$w_\varepsilon(x) = C(N)\frac{\varepsilon^{(N-2)/2}}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{(N-2)/2}}, \qquad \text{onde} \quad C(N) = [N(N-2)]^{(N-2)/4}.$$

Observamos (veja [64]) que $\{w_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ é uma família de funções nas quais o ínfimo que define a melhor constante, S, para a imersão de Sobolev $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \subset L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ é atingido. Consideramos ainda $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, [0,1]), \phi \equiv 1$ em $B_1(0)$, $\phi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \backslash B_2(0)$ e definimos

$$u_\varepsilon = \phi w_\varepsilon, \quad v_\varepsilon = \frac{u_\varepsilon}{(\int_{\mathbb{R}^N} K u_\varepsilon^{2^*})^{1/2^*}}.$$

Os seguintes lemas foram inspirados por [9, 38] e [64].

Lema 4.7. *Suponha que a condição (K) seja satisfeita. Então, existem constantes positivas k_1, k_2 e ε_0 tais que*

$$\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_1(0)} |\nabla u_\varepsilon|^2 = O(\varepsilon^{N-2}), \quad \textit{quando } \varepsilon \to 0^+, \tag{4.25}$$

$$k_1 < \int_{\mathbb{R}^N} K u_\varepsilon^{2^*} < k_2, \quad \textit{para todo } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, \tag{4.26}$$

$$\int_{|x|\leq 1} |x|^{N-2} w_\varepsilon^{2^*} = O(\varepsilon^{N-2}), \quad \textit{quando } \varepsilon \to 0^+, \tag{4.27}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_\varepsilon|^2 \leq \|K\|_\infty^{(2-N)/N} S + O(\varepsilon^{N-2}), \quad \textit{quando } \varepsilon \to 0^+. \tag{4.28}$$

Demonstração. A fim de demonstrarmos (4.25), primeiramente notemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1(0)} |\nabla u_\varepsilon|^2 = C^2(N)\varepsilon^{N-2}\int_{B_2(0)\setminus B_1(0)} |\nabla z_\varepsilon|^2, \tag{4.29}$$

onde

$$z_\varepsilon(x) = \frac{\phi(x)}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{\frac{N-2}{2}}}.$$

Como

$$\nabla z_\varepsilon(x) = \frac{\nabla\phi(x)}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{\frac{N-2}{2}}} - (N-2)\frac{\phi(x)x}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{\frac{N}{2}}},$$

temos

$$\begin{aligned} |\nabla z_\varepsilon(x)|^2 &\leq C_1\left[\frac{|\nabla\phi(x)|^2}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{N-2}} + (N-2)^2\frac{|x|^2}{(\varepsilon^2+|x|^2)^N}\right] \\ &\leq C_1\max\{(N-2)^2, \|\nabla\phi\|_\infty^2\}\left[\frac{1}{|x|^{2N-4}}+\frac{1}{|x|^{2N-2}}\right] \leq C_2\frac{2}{|x|^{2N-4}}, \end{aligned}$$

para algumas constantes $C_1,\ C_2>0$. Logo, existe uma constante $C_3>0$ tal que

$$\int_{B_2(0)\setminus B_1(0)} |\nabla z_\varepsilon|^2 \leq C_3.$$

A desigualdade acima e a relação (4.29) estabelecem a identidade (4.25).

Passemos agora à demonstração de (4.26). Uma vez que $K\in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $K\in C(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ e $K>0$ em $\mathbb{R}^N$, existem constantes $0<m_1\leq m_2<\infty$ tais que $m_1\leq K\leq m_2$ em $\overline{B_2(0)}$. Portanto, basta mostrarmos que

$$0<\lambda_1<\int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon^{2^*}<\lambda_2<\infty,$$

para determinadas constantes λ_1 e λ_2, e $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno. Temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon^{2^*} = C^{2^*}(N)\varepsilon^N\left[\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{(\varepsilon^2+|x|^2)^N} + \int_{\mathbb{R}^N}\frac{\phi^{2^*}(x)-1}{(\varepsilon^2+|x|^2)^N}\right]. \tag{4.30}$$

Na segunda integral , introduzimos a mudança de variável $y=x/\varepsilon$, obtendo

$$\int_{\mathbb{R}^N}(\varepsilon^2+|x|^2)^{-N}\,dx = \varepsilon^{-N}\int_{\mathbb{R}^N}(1+|y|^2)^{-N}\,dy. \tag{4.31}$$

Usando o fato de que $0 \leq \phi \leq 1$ e $\phi \equiv 1$ em $B_1(0)$, estimamos a terceira integral de (4.30):

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\phi^{2^*}(x) - 1}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^N}\, dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_1(0)} |x|^{-2N}\, dx = \omega_N \int_1^\infty t^{-2N+N-1}\, dt < \infty, \tag{4.32}$$

onde ω_N denota a área de superfície da esfera de raio unitário em $\mathbb{R}^N$. Podemos utilizar (4.30)-(4.32) para concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon^{2^*} = C^{2^*}(N) \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |y|^2)^{-N}\, dy + O(\varepsilon^N) \to C^{2^*}(N) \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |y|^2)^{-N}\, dy,$$

quando $\varepsilon \to 0^+$. A relação (4.26) está demonstrada. Observamos que a integral $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (1+|y|^2)^{-N}\, dy$ está bem definida, uma vez que a função $t \mapsto (1+t^2)^{-N} t^{N-1}$ é integrável em $[0, \infty)$.

Agora, verificaremos (4.27). Notamos que

$$\int_{|x| \leq 1} |x|^{N-2} w_\varepsilon^{2^*}(x)\, dx = C^{2^*}(N) \varepsilon^N \omega_N \int_0^1 \frac{t^{2N-3}}{(\varepsilon^2 + t^2)^N}\, dt.$$

Após a mudança de variável $s = t/\varepsilon$, obtemos

$$\int_{|x| \leq 1} |x|^{N-2} w_\varepsilon^{2^*}(x)\, dx = C^{2^*}(N) \varepsilon^{N-2} \omega_N \int_0^{1/\varepsilon} \frac{s^{2N-3}}{(1 + s^2)^N}\, ds.$$

Como

$$\int_0^{1/\varepsilon} \frac{s^{2N-3}}{(1 + s^2)^N}\, ds \leq \int_0^1 s^{2N-3}\, ds + \int_1^{1/\varepsilon} s^{-3}\, ds < \infty\ ,$$

a relação (4.27) está demonstrada.

No que segue, apresentamos a verificação de (4.28). Em vista de (4.25) e da definição de u_ε temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\varepsilon|^2 = \int_{B_1(0)} |\nabla w_\varepsilon|^2 + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_1(0)} |\nabla u_\varepsilon|^2 = \int_{B_1(0)} |\nabla w_\varepsilon|^2 + \ O(\varepsilon^{N-2}). \tag{4.33}$$

Como w_ε é radialmente decrescente, sua derivada normal, $\partial w_\varepsilon / \partial n = w_\varepsilon'(|x|)$, é negativa na fronteira da bola unitária $\partial B_1(0) \subset \mathbb{R}^N$. Portanto, aplicando o Teorema da Divergência ao campo $F = w_\varepsilon \nabla w_\varepsilon$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_{\partial B_1(0)} w_\varepsilon \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial n} = \int_{B_1(0)} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(w_\varepsilon \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_j}\right) \\ &= \int_{B_1(0)} \left(|\nabla w_\varepsilon|^2 + w_\varepsilon(\Delta w_\varepsilon)\right) \\ &= \int_{B_1(0)} \left(|\nabla w_\varepsilon|^2 - w_\varepsilon^{2^*}\right). \end{aligned}$$

Logo

$$\int_{B_1(0)} |\nabla w_\varepsilon|^2 \leq \int_{B_1(0)} w_\varepsilon^{2^*}.$$

Utilizando a estimativa acima e (4.33) decorre

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\varepsilon|^2 &\leq \int_{B_1(0)} w_\varepsilon^{2^*} + O(\varepsilon^{N-2}) \\ &= \int_{B_1(0)} \frac{K}{\|K\|_\infty} w_\varepsilon^{2^*} + \int_{B_1(0)} \frac{\|K\|_\infty - K}{\|K\|_\infty} w_\varepsilon^{2^*} + O(\varepsilon^{N-2}). \end{aligned}$$

Portanto, em vista da condição (K) e de (4.27),

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\varepsilon|^2 \leq \int_{B_1(0)} \frac{K}{\|K\|_\infty} w_\varepsilon^{2^*} + O(\varepsilon^{N-2}). \tag{4.34}$$

Como w_ε satisfaz (veja [64])

$$S = \left(\int_{\mathbb{R}^N} w_\varepsilon^{2^*} \right)^{2/N}.$$

Decorre de (4.34) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\varepsilon|^2 \leq S \|K\|_\infty^{\frac{2-N}{N}} \left(\int_{B_1(0)} K w_\varepsilon^{2^*} \right)^{\frac{N-2}{N}} + O(\varepsilon^{N-2}).$$

Portanto, uma vez que $u_\varepsilon = w_\varepsilon$ em $B_1(0) \subset \mathbb{R}^N$, levando (4.26) em consideração, temos, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_\varepsilon|^2 &= \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\varepsilon|^2}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} K u_\varepsilon^{2^*} \right)^{2/2^*}} \leq \frac{\|K\|_\infty^{\frac{2-N}{N}} S \left(\displaystyle\int_{B_1(0)} K w_\varepsilon^{2^*} \right)^{2/2^*} + O(\varepsilon^{N-2})}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} K u_\varepsilon^{2^*} \right)^{2/2^*}} \\ &\leq \|K\|_\infty^{(2-N)/N} S + O(\varepsilon^{N-2}). \end{aligned}$$

Logo, a relação (4.28) é satisfeita, o que conclui a demonstração do Lema 4.7. □

Lema 4.8. *Suponha que a condição (K) seja satisfeita. Então, quando $\varepsilon \to 0$, temos*

$$(i)\quad \|v_\varepsilon\|_2^2 = \begin{cases} O(\varepsilon), & se\ \ N=3, \\ O\left(\varepsilon^2|\log\varepsilon|\right), & se\ \ N=4, \\ O\left(\varepsilon^2\right), & se\ \ N\geq 5; \end{cases}$$

$$(ii)\quad \|v_\varepsilon\|_{2^*-\frac{1}{2\alpha}}^{2^*-\frac{1}{2\alpha}} = O\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{4\alpha}}\right), \quad se\ \ N\geq 3;$$

$$(iii)\quad \int_{\mathbb{R}^N} |v_\varepsilon|^{2^*-\frac{1}{2\alpha}}\log(Mv_\varepsilon) = O\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{4\alpha}}|\log\varepsilon|\right), \quad se\ \ N\geq 3\ \ e\ \ M>0\ constante.$$

Demonstração. Em vista de (4.26) e da condição (K), é suficiente verificarmos que o Lema 4.8 é verdadeiro para u_ε no lugar de v_ε. A fim de simplificarmos a demonstração deste lema, faremos, inicialmente, um simples cálculo utilizando uma potência mais geral, que aplicaremos em cada item, para o valor de β apropriado. Utilizando a definição de u_ε, usando coordenadas polares, levando em consideração o fato de que $0\leq\phi\leq 1$, e fazendo a mudança de variável $s=t/\varepsilon$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon(x)|^{\frac{2\beta}{N-2}}\,dx &= C^{\frac{2\beta}{N-2}}(N)\varepsilon^\beta \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\phi^{\frac{2\beta}{N-2}}(x)}{(\varepsilon^2+|x|^2)^\beta}\,dx \\ &\leq C^{\frac{2\beta}{N-2}}(N)\varepsilon^\beta \int_{B_2(0)} \frac{1}{(\varepsilon^2+|x|^2)^\beta}\,dx \\ &= C^{\frac{2\beta}{N-2}}(N)\omega_N\varepsilon^\beta \int_0^2 \frac{t^{N-1}}{(\varepsilon^2+t^2)^\beta}\,dt \\ &= C^{\frac{2\beta}{N-2}}(N)\omega_N\varepsilon^{N-\beta} \int_0^{2/\varepsilon} \frac{s^{N-1}}{(1+s^2)^\beta}\,ds \\ &\leq C^{\frac{2\beta}{N-2}}(N)\omega_N\varepsilon^{N-\beta}\left[\int_0^1 s^{N-1}\,ds + \int_1^{2/\varepsilon} s^{N-2\beta-1}\,ds\right]. \end{aligned} \tag{4.35}$$

A seguir, verificamos os quatro ítens separadamente.

(i) $\dfrac{2\beta}{N-2} = 2$ $(\beta = N-2)$.

Aqui devemos considerar três situações para o valor de N, uma vez que $2\beta - N$ não é positivo, em geral. Para $N=3$,

$$\|u_\varepsilon\|_2^2 \leq C^2(3)\omega_3\varepsilon^2\int_0^{2/\varepsilon}\frac{s^2}{1+s^2}\,ds \leq C^2(3)\omega_3\varepsilon^2\int_0^{2/\varepsilon}ds = \left(2C^2(3)\omega_3\right)\varepsilon.$$

Para $N = 4$,

$$\|u_\varepsilon\|_2^2 \leq C^2(4)\omega_4\varepsilon^2 \left[\int_0^1 s^3\, ds + \int_1^{2/\varepsilon} s^{-1}\, ds\right] = C^2(4)\omega_4\varepsilon^2 \left[\frac{1}{4} + \log 2 + |\log\varepsilon|\right].$$

Escolhemos $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno, de tal sorte que $|\log\varepsilon| > 1/4 + \log 2$ para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Então,

$$\|u_\varepsilon\|_2^2 \leq \left(2C^2(4)\omega_4\right)\varepsilon^2|\log\varepsilon|.$$

Para $N \geq 5$,

$$\|u_\varepsilon\|_2^2 \leq C^2(N)\omega_N\varepsilon^2\left[\frac{1}{N} - \frac{1}{N-4}\left(\frac{\varepsilon^{N-4}}{2^{N-4}} - 1\right)\right] \leq C^2(N)\omega_N\left[\frac{1}{N} + \frac{1}{N-4}\right]\varepsilon^2.$$

O item (i) é verdadeiro.

(ii) $\dfrac{2\beta}{N-2} = 2^* - \dfrac{1}{2\alpha}$ $\left(\beta = N - \dfrac{N-2}{4\alpha}\right)$.

Como, neste caso, temos $2\beta - N > 0$, de (4.35), segue-se

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon\|_{2^*-\frac{1}{2\alpha}}^{2^*-\frac{1}{2\alpha}} &= \int_{\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon(x)|^{\frac{2\beta}{N-2}}\, dx \\
&\leq C^{\frac{2\beta}{N-2}}(N)\omega_N\varepsilon^{N-\beta}\left[\frac{1}{N} + \frac{1}{N-2\beta}\left(\frac{\varepsilon^{2\beta-N}}{2^{2\beta-N}} - 1\right)\right] \\
&\leq C^{\frac{2\beta}{N-2}}(N)\omega_N\left[\frac{1}{N} + \frac{1}{2\beta-N}\right]\varepsilon^{\frac{N-2}{4\alpha}}.
\end{aligned}$$

Logo, o item (ii) fica demonstrado.

(iii) $\dfrac{2\beta}{N-2} = 2^* - \dfrac{1}{2\alpha}$ $\left(\beta = N - \dfrac{N-2}{4\alpha}\right)$.

Por (4.35), novamente, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon(x)|^{2^*-\frac{1}{2\alpha}} \log(Mu_\varepsilon)\, dx \\
&\quad\leq C^{\frac{2\beta}{N-2}}(N)\omega_N\varepsilon^{N-\beta}\int_0^{2/\varepsilon} \frac{s^{N-1}}{(1+s^2)^\beta}\log\left(\frac{MC(N)\varepsilon^{\frac{2-N}{2}}}{(1+s^2)^{\frac{N-2}{2}}}\right) ds \\
&\quad\leq C^{\frac{2\beta}{N-2}}(N)\omega_N\varepsilon^{N-\beta}\int_0^{2/\varepsilon} \frac{s^{N-1}}{(1+s^2)^\beta}\log MC(N)\varepsilon^{\frac{2-N}{2}}\, ds \\
&\quad\leq C^{\frac{2\beta}{N-2}}(N)\omega_N\log MC(N)\varepsilon^{N-\beta}\int_0^{2/\varepsilon} \frac{s^{N-1}}{(1+s^2)^\beta}\, ds \\
&\qquad+C^{\frac{2\beta}{N-2}}(N)\omega_N\varepsilon^{N-\beta}\frac{(N-2)}{2}\log\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{2/\varepsilon} \frac{s^{N-1}}{(1+s^2)^\beta}\, ds.
\end{aligned}$$

Agora, utilizando o item (ii) acima, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon(x)|^{2^*-\frac{1}{2\alpha}} \log(Mu_\varepsilon) = O\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{4\alpha}}\right) + O\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{4\alpha}} |\log \varepsilon|\right) = O\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{4\alpha}} |\log \varepsilon|\right),$$

o que prova o item (iii).

Portanto, a demonstração do Lema 4.8 está completa. □

4.2.2 Estimativa do nível minimax

Antes de enunciarmos o resultado principal desta seção, vamos estabelecer um lema que será necessário para a sua demonstração.

Lema 4.9. *Suponha que (V), (V_1), (K), (g_1), (g_2) e $(g_4)(i)$ sejam satisfeitas. Considere $t_\varepsilon > 0$ tal que $I(t_\varepsilon v_\varepsilon) = \max_{t\geq 0} I(tv_\varepsilon)$. Então, existem $\varepsilon_0 > 0$ e constantes positivas T_1 e T_2 tais que $T_1 \leq t_\varepsilon \leq T_2$ para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.*

Demonstração. Inicialmente, observamos que, pelo Lema 4.3, I satisfaz $I(0) = 0$ e a condição (I_1). Consequentemente, como $I \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ e $\|v_\varepsilon\|$ é limitada, concluímos que existe $T_1 > 0$ tal que $t_\varepsilon \geq T_1 > 0$ para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Por outro lado, por $(g_4)(i)$, as condições (V), (K) e o Lema 1.4-(3), temos

$$\begin{aligned} I(t_\varepsilon v_\varepsilon) &\leq \frac{t_\varepsilon^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_\varepsilon|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(t_\varepsilon v_\varepsilon) - \frac{1}{2\alpha 2^*}\int_{\mathbb{R}^N} K(x) f^{2\alpha 2^*}(t_\varepsilon v_\varepsilon) \\ &\leq \frac{t_\varepsilon^2}{2}\|v_\varepsilon\|^2 - \frac{1}{2\alpha 2^*}\inf_{\mathbb{R}^N} K \int_{\mathbb{R}^N} f^{2\alpha 2^*}(t_\varepsilon v_\varepsilon). \end{aligned}$$

Afirmamos que existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f^{2\alpha 2^*}(t_\varepsilon v_\varepsilon) \geq C_1 t_\varepsilon^{2^*}. \tag{4.36}$$

De fato, pela propriedade (9) do Lema 1.4, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} f^{2\alpha 2^*}(t_\varepsilon v_\varepsilon) \geq C^{2\alpha 2^*} t_\varepsilon^{2^*} \int_{\{t_\varepsilon v_\varepsilon(x) \geq 1\}} v_\varepsilon^{2^*}.$$

Consideramos $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $|x| \leq \varepsilon < 1$. Então, em vista de (4.26), obtemos

$$v_\varepsilon(x) \geq \frac{1}{k_2} w_\varepsilon(x) \geq \frac{C(N)}{k_2} \frac{1}{2^{\frac{N}{2}-1}\varepsilon^{\frac{N}{2}-1}}.$$

Consequentemente, como $t_\varepsilon \geq T_1 > 0$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe um $\varepsilon_0 > 0$ tal que $t_\varepsilon v_\varepsilon(x) \geq 1$ sempre que $|x| \leq \varepsilon < \varepsilon_0$. Agora, com cálculos semelhantes aos do Lema 4.8, encontramos uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$\int_{\{t_\varepsilon v_\varepsilon(x)\geq 1\}} v_\varepsilon^{2^*} \geq \frac{1}{k_2}\int_{B_\varepsilon(0)} w_\varepsilon^{2^*} = \frac{C^{2^*}(N)}{k_2}\int_{B_\varepsilon(0)} \frac{\varepsilon^N}{(\varepsilon^2+|x|^2)^N} \geq C^{2^*}(N)\omega_N C_2.$$

Isto conclui a prova da afirmação.

Assim, de (4.36), vem

$$\tau \leq I(t_\varepsilon v_\varepsilon) \leq \frac{t_\varepsilon^2}{2}\|v_\varepsilon\|^2 - \left(\frac{C_1}{2\alpha 2^*}\inf_{\mathbb{R}^N} K\right) t_\varepsilon^{2^*},$$

que implica

$$\left(\frac{C_1}{2\alpha 2^*}\inf_{\mathbb{R}^N} K\right) t_\varepsilon^{2^*} \leq \frac{t_\varepsilon^2}{2}\|v_\varepsilon\|^2 - \tau.$$

Desde que $\|v_\varepsilon\|$ é limitada, obtemos a estimativa $t_\varepsilon \leq T_2 < \infty$. O lema está demonstrado. $\square$

Agora, demonstramos o resultado que fornece uma estimativa apropriada para o nível minimax.

Proposição 4.10. *Suponha que (V), (V_1), (K), (g_1), (g_2), $(g_4)(i)$ e (g_5') sejam satisfeitas. Então existe $v \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$ tal que*

$$\max_{t\geq 0} I(tv) < \frac{1}{2\alpha N}\|K\|_\infty^{\frac{2-N}{2}} S^{\frac{N}{2}}.$$

Demonstração. Consideramos t_ε como definido pelo Lema 4.9. Observando que $\int_{\mathbb{R}^N} K(x)v_\varepsilon^{2^*} = 1$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\alpha 2^*}\int_{\mathbb{R}^N} K(x) f^{2\alpha 2^*}(t_\varepsilon v_\varepsilon)\\
&\quad = \frac{1}{2\alpha 2^*}\int_{\{t_\varepsilon v_\varepsilon(x)<R\}} K(x)\left(f^{2\alpha 2^*}(t_\varepsilon v_\varepsilon) - (2\alpha)^{\frac{2^*}{2}}(t_\varepsilon v_\varepsilon)^{2^*}\right)\\
&\qquad + \frac{1}{2\alpha 2^*}\int_{\{t_\varepsilon v_\varepsilon(x)\geq R\}} K(x)\left(f^{2\alpha 2^*}(t_\varepsilon v_\varepsilon) - (2\alpha)^{\frac{2^*}{2}}(t_\varepsilon v_\varepsilon)^{2^*}\right)\\
&\qquad + \frac{1}{2\alpha 2^*}\int_{\mathbb{R}^N} K(x)(2\alpha)^{\frac{2^*}{2}}(t_\varepsilon v_\varepsilon)^{2^*}\\
&\quad \geq -\frac{(2\alpha)^{\frac{2^*}{2}-1}}{2^*}\|K\|_\infty \int_{\{t_\varepsilon v_\varepsilon(x)<R\}} (t_\varepsilon v_\varepsilon)^{2^*} + \frac{(2\alpha)^{\frac{2^*}{2}-1}}{2^*} t_\varepsilon^{2^*}\\
&\qquad - \frac{\|K\|_\infty}{2\alpha 2^*}\int_{\mathbb{R}^N}\left(f^{2\alpha 2^*}(t_\varepsilon v_\varepsilon) - (2\alpha)^{\frac{2^*}{2}}(t_\varepsilon v_\varepsilon)^{2^*}\right).
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Agora, a fim de demonstrarmos a Proposição 4.10, devemos considerar as duas possibilidades para α:

(a) $\alpha > 3/4$. De (4.37) e do Lema 1.7, temos

$$\frac{1}{2\alpha 2^*}\int_{\mathbb{R}^N} K(x)f^{2\alpha 2^*}(t_\varepsilon v_\varepsilon)$$
$$\geq -\frac{(2\alpha)^{\frac{2^*}{2}-1}}{2^*}\|K\|_\infty \int_{\{t_\varepsilon v_\varepsilon(x)<R\}}(t_\varepsilon v_\varepsilon)^{2^*} - \frac{C_0\|K\|_\infty}{2\alpha 2^*}\int_{\mathbb{R}^N}(t_\varepsilon v_\varepsilon)^{2^*-\frac{1}{2\alpha}} + \frac{(2\alpha)^{\frac{2^*}{2}-1}}{2^*}t_\varepsilon^{2^*}.$$

Note que se $0 \leq |s| < R$, existe $C_1 > 0$ tal que $|s|^{2^*} \leq C_1|s|^{2^*-\frac{1}{2\alpha}}$. Logo,

$$\int_{\{t_\varepsilon v_\varepsilon(x)<R\}}(t_\varepsilon v_\varepsilon)^{2^*} \leq C_1\int_{\{t_\varepsilon v_\varepsilon(x)<R\}}(t_\varepsilon v_\varepsilon)^{2^*-\frac{1}{2\alpha}} \leq C_1\int_{\mathbb{R}^N}(t_\varepsilon v_\varepsilon)^{2^*-\frac{1}{2\alpha}}.$$

Assim, obtemos uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$\frac{1}{2\alpha 2^*}\int_{\mathbb{R}^N} K(x)f^{2\alpha 2^*}(t_\varepsilon v_\varepsilon) \geq \frac{(2\alpha)^{\frac{2^*}{2}-1}}{2^*}t_\varepsilon^{2^*} - C_2\int_{\mathbb{R}^N}(t_\varepsilon v_\varepsilon)^{2^*-\frac{1}{2\alpha}}. \tag{4.38}$$

Utilizando a condição (V_1), o Lema 1.4-(3) e a relação (4.38), temos

$$\begin{aligned} I(t_\varepsilon v_\varepsilon) &= \frac{t_\varepsilon^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_\varepsilon|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)f^2(t_\varepsilon v_\varepsilon) \\ &\quad -\frac{1}{2\alpha 2^*}\int_{\mathbb{R}^N}K(x)f^{2\alpha 2^*}(t_\varepsilon v_\varepsilon) - \int_{\mathbb{R}^N}G(x, f(t_\varepsilon v_\varepsilon)) \\ &\leq \frac{t_\varepsilon^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_\varepsilon|^2 + \frac{t_\varepsilon^2}{2}\|V\|_\infty\int_{\mathbb{R}^N}v_\varepsilon^2 - \frac{(2\alpha)^{\frac{2^*}{2}-1}}{2^*}t_\varepsilon^{2^*} \\ &\quad + C_2\int_{\mathbb{R}^N}(t_\varepsilon v_\varepsilon)^{2^*-\frac{1}{2\alpha}} - \int_{\mathbb{R}^N}G(x, f(t_\varepsilon v_\varepsilon)). \end{aligned}$$

Agora, denotando por X_ε a integral $\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_\varepsilon|^2$, temos

$$\begin{aligned} I(t_\varepsilon v_\varepsilon) &\leq \frac{t_\varepsilon^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_\varepsilon|^2 + \frac{t_\varepsilon^2}{2}\|V\|_\infty\|v_\varepsilon\|_2^2 - \frac{(2\alpha)^{\frac{2^*}{2}-1}}{2^*}t_\varepsilon^{2^*} \\ &\quad + C_2 t_\varepsilon^{2^*-\frac{1}{2\alpha}}\|v_\varepsilon\|_{2^*-\frac{1}{2\alpha}}^{2^*-\frac{1}{2\alpha}} - \int_{\mathbb{R}^N}G(x, f(t_\varepsilon v_\varepsilon)) \\ &\leq \frac{1}{2\alpha N}X_\varepsilon^{N/2} + C_3\|v_\varepsilon\|_2^2 + C_4\|v_\varepsilon\|_{2^*-\frac{1}{2\alpha}}^{2^*-\frac{1}{2\alpha}} - \int_{\mathbb{R}^N}G(x, f(t_\varepsilon v_\varepsilon)), \end{aligned}$$

para algumas constantes C_3, $C_4 > 0$. De fato, considerando a função $h = h_\varepsilon : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $h(t) = \frac{1}{2}X_\varepsilon t^2 - \frac{(2\alpha)^{(2^*-2)/2}}{2^*}t^{2^*}$, temos que $t_0 = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}X_\varepsilon^{1/(2^*-2)}$ é um ponto de máximo isolado de h, e $h(t_0) = \frac{1}{2\alpha N} X_\varepsilon^{N/2}$. Decorre da estimativa (4.28) que

$$I(t_\varepsilon v_\varepsilon) \leq \frac{1}{2\alpha N}(\|K\|_\infty^{\frac{2-N}{N}} S + O(\varepsilon^{N-2}))^{\frac{N}{2}} + C_3\|v_\varepsilon\|_2^2 + C_4\|v_\varepsilon\|_{2^*-\frac{1}{2\alpha}}^{2^*-\frac{1}{2\alpha}} - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, f(t_\varepsilon v_\varepsilon)).$$

Aplicando a desigualdade

$$(b+c)^\zeta \leq b^\zeta + \zeta(b+c)^{\zeta-1}c, \qquad b, c \geq 0, \quad \zeta \geq 1,$$

chegamos a

$$I(t_\varepsilon v_\varepsilon) \leq \frac{1}{2\alpha N}\|K\|_\infty^{\frac{2-N}{2}} S^{\frac{N}{2}} + C_3\|v_\varepsilon\|_2^2 + C_4\|v_\varepsilon\|_{2^*-\frac{1}{2\alpha}}^{2^*-\frac{1}{2\alpha}} - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, f(t_\varepsilon v_\varepsilon)) + O(\varepsilon^{N-2}). \tag{4.39}$$

Agora, consideramos

$$\gamma(\varepsilon) = \max \begin{cases} \{\varepsilon, \varepsilon^{\frac{N-2}{4\alpha}}\}, & \text{se } N = 3, \\ \{\varepsilon^2 |\log \varepsilon|, \varepsilon^{\frac{N-2}{4\alpha}}\}, & \text{se } N = 4, \\ \{\varepsilon^2, \varepsilon^{\frac{N-2}{4\alpha}}\}, & \text{se } N \geq 5. \end{cases}$$

Observe que, dado $p > 0$, temos $\varepsilon^p < |\log \varepsilon| = \log(1/\varepsilon) < (1/\varepsilon)^p$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Note também que $\alpha > 3/4$ implica $(N-2)/4\alpha < (N-2)/3$. Além disso, se $N \leq 8$ ($N \leq 5$), então $(N-2)/3 \leq 2$ ($(N-2)/3 \leq 1$). Por outro lado, $(N-2)/4\alpha < 2$ para $\alpha > (N-2)/8$. Logo

$$\gamma(\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon^{\frac{N-2}{4\alpha}}, & \text{se } 3 \leq N \leq 8, \text{ ou } N \geq 9 \text{ e } \alpha > \dfrac{N-2}{8}, \\ \varepsilon^2, & \text{se } N \geq 9 \text{ e } \dfrac{3}{4} < \alpha \leq \dfrac{N-2}{8}. \end{cases} \tag{4.40}$$

Em vista do Lema 4.8 e das relações (4.39) e (4.40), encontramos uma constante $C_5 > 0$ tal que

$$I(t_\varepsilon v_\varepsilon) \leq \frac{1}{2\alpha N}\|K\|_\infty^{(2-N)/2} S^{N/2} + \gamma(\varepsilon)\left[C_5 - \frac{1}{\gamma(\varepsilon)}\int_{\mathbb{R}^N} G(x, f(t_\varepsilon v_\varepsilon))\right]. \tag{4.41}$$

A fim de demonstrarmos a Proposição 4.10, é suficiente verificarmos que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\gamma(\varepsilon)} \int_{\mathbb{R}^N} G(x, f(t_\varepsilon v_\varepsilon)) > C_5. \tag{4.42}$$

Por $(g_4)(i)$, temos

$$G(x,s)+s^2 \geq 0, \quad \text{para todo } \ x \in \Omega, \ s \geq 0. \tag{4.43}$$

Dado $A_0 > 0$, invocamos (g_5') para obtermos $R = R(A_0) > 0$ tal que, para $x \in \Omega, s \geq R$,

$$G(x,s) \geq \begin{cases} A_0 s^{2\alpha 2^*-1}, & \text{se } 3 \leq N \leq 8, \text{ ou } N \geq 9 \text{ e } \alpha > \dfrac{N-2}{8}, \\ A_0 s^{4\alpha}, & \text{se } N \geq 9 \text{ e } \dfrac{3}{4} < \alpha \leq \dfrac{N-2}{8}. \end{cases} \tag{4.44}$$

Agora, consideramos a função $\eta_\varepsilon : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\eta_\varepsilon(r) = \frac{\varepsilon^{(N-2)/2}}{(\varepsilon^2 + r^2)^{(N-2)/2}}.$$

Como $\phi \equiv 1$ em $B_1(0)$, obtemos, em vista de (4.26), uma constante $C_6 > 0$ tal que $v_\varepsilon(x) \geq C_6 \eta_\varepsilon(|x|)$, para $|x| < 1$. Além disso, uma vez que η_ε é decrescente e f é crescente, existe uma constante positiva $\tilde{\alpha}$ tal que, para $|x| < \varepsilon$,

$$f(t_\varepsilon v_\varepsilon(x)) \geq f(T_1 C_6 \eta_\varepsilon(|x|)) \geq f(T_1 C_6 \eta_\varepsilon(\varepsilon)) \geq f(\tilde{\alpha}\varepsilon^{\frac{2-N}{2}}).$$

Observamos que T_1 é obtido pelo Lema 4.9. Podemos, então, escolher $\varepsilon_1 > 0$ de sorte que

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}\varepsilon^{\frac{2-N}{2}} &\geq 1, \\ f(t_\varepsilon v_\varepsilon(x)) \geq f(\tilde{\alpha}\varepsilon^{\frac{2-N}{2}}) &\geq R = R(A_0), \end{aligned} \tag{4.45}$$

para $|x| < \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$. Como $B_\varepsilon(0) \subset \Omega$, decorre de (4.44) e (4.45) que

$$G(x, f(t_\varepsilon v_\varepsilon)) \geq \begin{cases} A_0 f^{2\alpha 2^*-1}(t_\varepsilon v_\varepsilon), & \text{se } 3 \leq N \leq 8, \text{ ou } N \geq 9 \text{ e } \alpha > \dfrac{N-2}{8}, \\ A_0 f^{4\alpha}(t_\varepsilon v_\varepsilon), & \text{se } N \geq 9 \text{ e } \dfrac{3}{4} < \alpha \leq \dfrac{N-2}{8}, \end{cases} \tag{4.46}$$

para $|x| < \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$.

Agora, para a verificação de (4.42), consideramos os dois possíveis casos:

Caso 1: $3 \leq N \leq 8$, ou $N \geq 9$ e $\alpha > \dfrac{N-2}{8}$. Pelas relações (4.45), (4.46) e o Lema 1.4-(9),

$$G(x, f(t_\varepsilon v_\varepsilon)) \geq A_0 f^{2\alpha 2^*-1}(t_\varepsilon v_\varepsilon) \geq A_0 f^{2\alpha 2^*-1}(\tilde{\alpha}\varepsilon^{\frac{2-N}{2}}) \geq A_0 C^{2\alpha 2^*-1} \tilde{\alpha}^{\frac{2\alpha 2^*-1}{2\alpha}} \varepsilon^{\frac{(2\alpha 2^*-1)(2-N)}{4\alpha}},$$

para todo $x \in B_\varepsilon(0)$ e $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$. Assim, uma vez que $B_2(0) \subset \Omega$, invocamos (4.43) e o Lema 1.4-(3) para obtermos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} G(x, f(t_\varepsilon v_\varepsilon)) &= \int_{B_\varepsilon(0)} G(x, f(t_\varepsilon v_\varepsilon)) + \int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(0)} G(x, f(t_\varepsilon v_\varepsilon)) \\
&\geq A_0 C^{2\alpha 2^*-1} \tilde{\alpha}^{\frac{2\alpha 2^*-1}{2\alpha}} \varepsilon^{\frac{(2\alpha 2^*-1)(2-N)}{4\alpha}} |B_\varepsilon(0)| - \int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(0)} f^2(t_\varepsilon v_\varepsilon) \\
&\geq A_0 C^{2\alpha 2^*-1} \tilde{\alpha}^{\frac{2\alpha 2^*-1}{2\alpha}} \omega_N \varepsilon^{\frac{(2\alpha 2^*-1)(2-N)}{4\alpha}} \varepsilon^N - T_2^2 \int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(0)} v_\varepsilon^2 \\
&\geq A_0 C^{2\alpha 2^*-1} \tilde{\alpha}^{\frac{2\alpha 2^*-1}{2\alpha}} \omega_N \varepsilon^{\frac{N-2}{4\alpha}} - T_2^2 \|v_\varepsilon\|_2^2,
\end{aligned}$$

para $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, com T_2 obtido pelo Lema 4.9. Consequentemente, pelo Lema 4.8, obtemos

$$\frac{1}{\varepsilon^{\frac{N-2}{4\alpha}}} \int_{\mathbb{R}^N} G(x, f(t_\varepsilon v_\varepsilon)) \geq A_0 C^{2\alpha 2^*-1} \tilde{\alpha}^{\frac{2\alpha 2^*-1}{2\alpha}} \omega_N - \Gamma(\varepsilon), \tag{4.47}$$

onde

$$\Gamma(\varepsilon) = \begin{cases} O(\varepsilon^{1-\frac{1}{4\alpha}}), & \text{se } N = 3, \\ O(\varepsilon^{2-\frac{1}{2\alpha}} |\log \varepsilon|), & \text{se } N = 4, \\ O(\varepsilon^{2-\frac{N-2}{4\alpha}}), & \text{se } 5 \leq N \leq 8, \text{ ou } N \geq 9 \text{ e } \alpha > \dfrac{N-2}{8} \end{cases}.$$

Desde que A_0 é arbitrário, a relação acima e (4.47) estabelecem (4.42).

Caso 2: $\frac{3}{4} < \alpha \leq \frac{N-2}{8}$ **e** $N \geq 9$**.** Aplicando as relações (4.45), (4.46) e o Lema 1.4-(9) mais uma vez, temos

$$G(x, f(t_\varepsilon v_\varepsilon)) \geq A_0 f^{4\alpha}(t_\varepsilon v_\varepsilon) \geq A_0 f^{4\alpha}(\tilde{\alpha} \varepsilon^{\frac{2-N}{2}}) \geq A_0 C^{4\alpha} \tilde{\alpha}^2 \varepsilon^{2-N},$$

para todo $x \in B_\varepsilon(0)$ e $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$. Logo, em vista de $B_2(0) \subset \Omega$, da relação (4.43) e o Lema 1.4-(3), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} G(x, f(t_\varepsilon v_\varepsilon)) &= \int_{B_\varepsilon(0)} G(x, f(t_\varepsilon v_\varepsilon)) \int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(0)} G(x, f(t_\varepsilon v_\varepsilon)) \\
&\geq A_0 C^{4\alpha} \tilde{\alpha}^2 \varepsilon^{2-N} |B_\varepsilon(0)| - \int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(0)} f^2(t_\varepsilon v_\varepsilon) \\
&\geq A_0 C^{4\alpha} \tilde{\alpha}^2 \omega_N \varepsilon^{2-N} \varepsilon^N - T_2^2 \int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(0)} v_\varepsilon^2 \\
&\geq A_0 C^{4\alpha} \tilde{\alpha}^2 \omega_N \varepsilon^2 - T_2^2 \|v_\varepsilon\|_2^2,
\end{aligned}$$

para $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, com T_2 dado pelo Lema 4.9. Consequentemente, pelo Lema 4.8, existe

$C_7 > 0$ tal que
$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\mathbb{R}^N} G(x, f(t_\varepsilon v_\varepsilon)) \geq A_0 C^{4\alpha}\tilde{\alpha}^2\omega_N - C_7.$$
Como $A_0 > 0$ pode ser escolhido arbitrariamente grande, a relação acima estabelece (4.42). Portanto, a Proposição 4.10 está demonstrada para $\alpha > 3/4$.

(b) $\alpha = 3/4$. De (4.37) e do Lema 1.7, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\alpha 2^*}\int_{\mathbb{R}^N} K(x) f^{2\alpha 2^*}(t_\varepsilon v_\varepsilon) \quad &\geq \quad -\frac{(2\alpha)^{\frac{2^*}{2}-1}}{2^*}\|K\|_\infty \int_{\{t_\varepsilon v_\varepsilon(x)<R\}} (t_\varepsilon v_\varepsilon)^{2^*} \\ &\quad -\frac{C_0\|K\|_\infty}{2\alpha 2^*}\int_{\mathbb{R}^N} (t_\varepsilon v_\varepsilon)^{2^*-\frac{1}{2\alpha}}\log(t_\varepsilon v_\varepsilon) + \frac{(2\alpha)^{\frac{2^*}{2}-1}}{2^*} t_\varepsilon^{2^*}.\end{aligned}$$

Como em (a), em vista do Lema 4.8, existem constantes C_8, $C_9 > 0$ tais que

$$\frac{1}{2\alpha 2^*}\int_{\mathbb{R}^N} K(x) f^{2\alpha 2^*}(t_\varepsilon v_\varepsilon) \geq \frac{(2\alpha)^{\frac{2^*}{2}-1}}{2^*} t_\varepsilon^{2^*} - C_8\int_{\mathbb{R}^N} (t_\varepsilon v_\varepsilon)^{2^*-\frac{1}{2\alpha}} - C_9\int_{\mathbb{R}^N} (t_\varepsilon v_\varepsilon)^{2^*-\frac{1}{2\alpha}}\log(t_\varepsilon v_\varepsilon).$$

Assim, usando o Lema 1.4-(3), (4.28), encontramos constantes C_{10}, $C_{11} > 0$ tais que

$$\begin{aligned} I(t_\varepsilon v_\varepsilon) \quad &\leq \quad \frac{1}{2\alpha N}\|K\|_\infty^{\frac{2-N}{2}} S^{\frac{N}{2}} + C_3\|v_\varepsilon\|_2^2 + C_{10}\|v_\varepsilon\|_{2^*-\frac{1}{2\alpha}}^{2^*-\frac{1}{2\alpha}} \\ &\quad + C_{11}\int_{\mathbb{R}^N} v_\varepsilon^{2^*-\frac{1}{2\alpha}}\log(t_\varepsilon v_\varepsilon) - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, f(t_\varepsilon v_\varepsilon)) + O(\varepsilon^{N-2}). \end{aligned} \tag{4.48}$$

Agora, considere

$$\gamma(\varepsilon) = \max\begin{cases} \{\varepsilon, \varepsilon^{\frac{N-2}{4\alpha}}, \varepsilon^{\frac{N-2}{4\alpha}}|\log\varepsilon|\} = \{\varepsilon, \varepsilon^{\frac{1}{3}}, \varepsilon^{\frac{1}{3}}|\log\varepsilon|\}, & \text{se } N = 3, \\ \{\varepsilon^2|\log\varepsilon|, \varepsilon^{\frac{N-2}{4\alpha}}, \varepsilon^{\frac{N-2}{4\alpha}}|\log\varepsilon|\} = \{\varepsilon^2|\log\varepsilon|, \varepsilon^{\frac{2}{3}}, \varepsilon^{\frac{2}{3}}|\log\varepsilon|\}, & \text{se } N = 4, \\ \{\varepsilon^2, \varepsilon^{\frac{N-2}{4\alpha}}, \varepsilon^{\frac{N-2}{4\alpha}}|\log\varepsilon|\} = \{\varepsilon^2, \varepsilon^{\frac{N-2}{3}}, \varepsilon^{\frac{N-2}{3}}|\log\varepsilon|\}, & \text{se } N \geq 5; \end{cases}$$

isto é,
$$\gamma(\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon^{\frac{N-2}{4\alpha}}|\log\varepsilon|, & \text{se } 3 \leq N \leq 8, \\ \varepsilon^2, & \text{se } N \geq 9. \end{cases}$$

Consequentemente, por (4.48) e o Lema 4.8, obtemos (4.41). Daí, é suficiente verificarmos (4.42). Por outro lado, como $B_\varepsilon(0) \subset \Omega$, invocando (g_5') e (4.45) mais uma vez, obtemos

$$G(x, f(t_\varepsilon v_\varepsilon)) \geq \begin{cases} A_0 f^{\frac{(4\alpha-1)N+2}{N-2}}(t_\varepsilon v_\varepsilon)\log f(t_\varepsilon v_\varepsilon), & \text{se } 3 \leq N \leq 8, \\ A_0 f^{4\alpha}(t_\varepsilon v_\varepsilon), & \text{se } N \geq 9, \end{cases} \tag{4.49}$$

para todo $|x| < \varepsilon$ e $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$.

Agora, para verificarmos (4.42), vamos considerar os dois casos possíveis:

Caso 1: $3 \leq N \leq 8$**.** Por (4.45), (4.49) e o Lema 1.4-(9),

$$G(x, f(t_\varepsilon v_\varepsilon)) \geq A_0 f^{\frac{2N+2}{N-2}}(\tilde{\alpha}\varepsilon^{\frac{2-N}{2}}) \log f(\tilde{\alpha}\varepsilon^{\frac{2-N}{2}}) \geq A_0 C^{\frac{2N+2}{N-2}} \tilde{\alpha}^{\frac{4N+4}{3N-6}} \varepsilon^{\frac{-2N-2}{3}} \log(C\tilde{\alpha}^{\frac{2}{3}}\varepsilon^{\frac{2-N}{3}}),$$

para todo $x \in B_\varepsilon(0)$ e $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$. Logo, como $B_2(0) \subset \Omega$, invocamos (4.43) e o Lema 1.4-(3) para obtermos

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(x, f(t_\varepsilon v_\varepsilon)) \geq A_0 C^{\frac{2N+2}{N-2}} \tilde{\alpha}^{\frac{4N+4}{3N-6}} \omega_N \varepsilon^{\frac{N-2}{3}} \log(C\tilde{\alpha}^{\frac{2}{3}}\varepsilon^{\frac{2-N}{3}}) - T_2^2 \|v_\varepsilon\|_2^2,$$

para $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$. Consequentemente, pelo Lema 4.8, obtemos

$$\frac{1}{\varepsilon^{\frac{N-2}{3}}|\log\varepsilon|} \int_{\mathbb{R}^N} G(x, f(t_\varepsilon v_\varepsilon)) \geq A_0 C^{\frac{2N+2}{N-2}} \tilde{\alpha}^{\frac{4N+4}{3N-6}} \omega_N \frac{\log(C\tilde{\alpha}^{\frac{2}{3}}\varepsilon^{\frac{2-N}{3}})}{|\log\varepsilon|} - \Gamma(\varepsilon), \tag{4.50}$$

onde

$$\Gamma(\varepsilon) = \begin{cases} O(\frac{\varepsilon^{2/3}}{|\log\varepsilon|}), & \text{se } N = 3, \\ O(\varepsilon^{4/3}), & \text{se } N = 4, \\ O(\varepsilon^{\frac{8-N}{3}}|\log\varepsilon|), & \text{se } 5 \leq N \leq 8. \end{cases} \tag{4.51}$$

Aplicando L'Hospital, é fácil ver que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\log(C\tilde{\alpha}^{\frac{2}{3}}\varepsilon^{\frac{2-N}{3}})}{|\log\varepsilon|} = \frac{N-2}{3}.$$

Portanto, escolhendo $A_0 > 0$ suficientemente grande, as relações (4.50) e (4.51) estabelecem (4.42).

Caso 2: $N \geq 9$**.** Veja (a)–Caso 2.

Logo, a Proposição 4.10 está demonstrada para $\alpha = 3/4$.

A demonstração da Proposição 4.10 está completa. □

4.3 Demonstrações dos Teoremas 4.1 e 4.2

Neste capítulo, demonstramos os Teoremas 4.1 e 4.2, verificando que os funcionais I e I_0, definidos por (4.2) e (4.4), respectivamente, têm pontos críticos não-triviais. Mas, antes de demonstrá-los, introduzimos dois resultados técnicos necessários à demonstração do primeiro deles.

Lema 4.11. *Suponha que* (V_1), (K) *e* (g_4) *sejam satisfeitas. Sejam* $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ *uma sequência limitada e* $w_n(x) = w(x - y_n)$, *onde* $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *e* $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$. *Se* $|y_n| \to \infty$, *então temos*

$$[V_0(x) - V(x)]f(v_n)f'(v_n)w_n \to 0,$$

$$[K(x) - K_0(x)]|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^* - 1}f'(v_n^+)w_n \to 0,$$

$$[g_0(x, f(v_n)) - g(x, f(v_n))]f'(v_n)w_n \to 0,$$

fortemente em $L^1(\mathbb{R}^N)$, *quando* $n \to \infty$.

Demonstração. Considerando que os outros limites já foram provados no Capítulo 2, vamos provar apenas o segundo limite no Lema 4.11. Dado $\delta > 0$, desde que $w \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, encontramos $0 < \varepsilon < \delta$ tal que, para todo conjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^N$ satisfazendo $|A| < \varepsilon$, temos

$$\int_A |w|^{2^*} < \delta. \tag{4.52}$$

Fixamos $\varepsilon > 0$ e definimos $D_\varepsilon(R) = \{x \in \mathbb{R}^N : |K(x) - K_0(x)| \geq \varepsilon, |x| \geq R\}$. Pela condição (K) e o Lema 2.7, existe $R > 0$ tal que $|D_\varepsilon(R)| < \varepsilon$. Logo, aplicando Lema 1.4-$(10),(7)$, a desigualdade de Hölder, a condição (K), (4.52) e o fato de que $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é limitada, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |K(x) - K_0(x)|\, |f(v_n^+)|^{2\alpha 2^* - 1} |f'(v_n^+)|\, |w_n| \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |K(x) - K_0(x)|\, |f(v_n^+)|^{2\alpha(2^*-1)} |f(v_n^+)|^{2\alpha - 1} |f'(v_n^+)|\, |w_n| \\
&\quad \leq \frac{\|K\|_\infty}{\sqrt{2\alpha}} \int_{D_\varepsilon(R)} |f(v_n^+)|^{2\alpha(2^*-1)} |w_n| \\
&\qquad + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\alpha}} \int_{\mathbb{R}^N \setminus [B_R(0) \cup D_\varepsilon(R)]} |f(v_n^+)|^{2\alpha(2^*-1)} |w_n| \\
&\quad < \frac{\|K\|_\infty}{\sqrt{2\alpha}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*} \right)^{(2^*-1)/2^*} \|w_n\|_{L^{2^*}(D_\varepsilon(R))} \\
&\qquad + \frac{\delta}{\sqrt{2\alpha}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*} \right)^{(2^*-1)/2^*} \|w\|_{2^*} \\
&\quad \leq (2\alpha)^{\frac{2^*-2}{2}} \|K\|_\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} \right)^{(2^*-1)/2^*} \|w_n\|_{L^{2^*}(D_\varepsilon(R))} \\
&\qquad + (2\alpha)^{\frac{2^*-2}{2}} \delta \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} \right)^{(2^*-1)/2^*} \|w\|_{2^*} \\
&\quad < C_1(\delta^{1/2^*} + \delta),
\end{aligned} \tag{4.53}$$

para alguma constante $C_1 > 0$. Por outro lado, utilizando mais uma vez o Lema 1.4-(10), (7), a desigualdade de Hölder, a condição (K) e o fato de $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ ser limitada, encontramos $C_2 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\int_{B_R(0)} & |K(x) - K_0(x)|\,|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*-1}|f'(v_n^+)|\,|w_n| \\
&\leq \frac{\|K\|_\infty}{\sqrt{2\alpha}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*}\right)^{(2^*-1)/2^*} \left(\int_{B_R(0)} |w(x-y_n)|^{2^*}\right)^{1/2^*} \\
&\leq (2\alpha)^{\frac{2^*-2}{2}}\|K\|_\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*}\right)^{(2^*-1)/2^*} \left(\int_{B_R(0)} |w(x-y_n)|^{2^*}\right)^{1/2^*} \\
&\leq C_2 \left(\int_{B_R(-y_n)} |w(x)|^{2^*}\right)^{1/2^*}.
\end{aligned}$$

Portanto, uma vez que $w \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ e $|y_n| \to \infty$, decorre do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{B_R(0)} |K(x) - K_0(x)|\,|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*-1}|f'(v_n^+)|\,|w_n| \leq C_2\delta, \quad \text{for all } \ n \geq n_0. \tag{4.54}$$

As desigualdades (4.53), (4.54) e o fato de $\delta > 0$ poder ser escolhido arbitrariamente pequeno implicam que $[K(x) - K_0(x)]|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*-1}f'(v_n^+)w_n \to 0$ fortemente em $L^1(\mathbb{R}^N)$, quando $n \to \infty$, como desejado. A demonstração do Lema 4.11 está completa. □

O seguinte resultado já fora demonstrado no Capítulo 2.

Lema 4.12. *Suponha que $2 \leq q < 2\alpha 2^*$ e $h \in \mathcal{F}$. Seja $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência tal que $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$, quando $n \to \infty$. Então*

$$h(x)|f(v_n)|^q \to h(x)|f(v)|^q \quad \textit{fortemente em } L^1(\mathbb{R}^N), \ \ \textit{quando } \ n \to \infty.$$

Agora, podemos demonstrar os Teoremas 4.1 e 4.2.

4.3.1 Demonstração do Teorema 4.1

Pelo Corolário 4.4, existe uma sequência de Cerami no nível c, isto é, $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$I(v_n) \to c \geq \tau > 0 \quad \text{e} \quad \|I'(v_n)\|(1 + \|v_n\|) \to 0, \quad \text{quando } \ n \to \infty, \tag{4.55}$$

com c dado pelo Teorema 1.1. Aplicando o Lema 4.5, podemos supor, sem perda de generalidade, que $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Deste fato e (1.20), temos que v é um ponto crítico de I, isto é, $I'(v) = 0$. Com efeito, pelo fato de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ ser denso em $H^1(\mathbb{R}^N)$, basta mostrarmos que $\langle I'(v), \varphi\rangle = 0$ para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Observe que

$$\begin{aligned}\langle I'(v_n), \varphi\rangle - \langle I'(v), \varphi\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v_n - \nabla v)\nabla\varphi \\ = \int_{\mathbb{R}^N} [f(v_n)f'(v_n) - f(v)f'(v)]\, V(x)\varphi \\ + \int_{\mathbb{R}^N} \left[|f(v^+)|^{2\alpha 2^*-1} f'(v^+) - |f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*-1} f'(v_n^+)\right] K(x)\varphi \\ + \int_{\mathbb{R}^N} [g(x, f(v))f'(v) - g(x, f(v_n))f'(v_n)]\, \varphi.\end{aligned} \tag{4.56}$$

Como $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$, temos que $v_n \to v$ em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$, com $p \in [1, 2^*)$. Então, a menos de subsequência,

$$\begin{aligned}&v_n(x) \to v(x) \quad \text{q.t.p. em } \mathcal{K} := supp\,\varphi, \ \text{ quando } \ n \to \infty,\\ &|v_n(x)| \le |w_p(x)| \quad \text{para todo } \ n \in \mathbb{N} \ \text{ e q.t.p. em } \mathcal{K}, \ \text{ com } \ w_p \in L^p(\mathcal{K}).\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}&f(v_n)f'(v_n) \to f(v)f'(v) \quad \text{q.t.p. em } \mathcal{K}, \ \text{ quando } \ n \to \infty,\\ &|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*-1} f'(v_n^+) \to |f(v^+)|^{2\alpha 2^*-1} f'(v^+) \quad \text{q.t.p. em } \mathcal{K}, \ \text{ quando } \ n \to \infty,\\ &g(x, f(v_n))f'(v_n) \to g(x, f(v))f'(v) \quad \text{q.t.p. em } \mathcal{K}, \ \text{ quando } \ n \to \infty.\end{aligned}$$

Além disso, pela condição (V_1) e o Lema 1.4-(2), (3), obtemos

$$\begin{aligned}|V(x)f(v_n)f'(v_n)\varphi| &\le |V(x)f(v_n)\varphi|\\ &\le \|V\|_\infty |w_2|\,|\varphi| \ \in L^1(\mathcal{K}),\end{aligned}$$

e, pelo Lema 1.4-(10), (7) e a condição (K),

$$\begin{aligned}\left|K(x)|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*-1} f'(v_n^+)\varphi\right| &\le \|K\|_\infty |f(v_n^+)|^{2\alpha(2^*-1)} |f(v_n^+)|^{2\alpha-1} |f'(v_n^+)|\,|\varphi|\\ &\le \frac{\|K\|_\infty}{\sqrt{2\alpha}}(2\alpha)^{\frac{2^*-1}{2}} |v_n|^{2^*-1}|\varphi|\\ &\le \|K\|_\infty (2\alpha)^{\frac{2^*-2}{2}} |w_{2^*-1}|^{2^*-1}|\varphi| \ \in L^1(\mathcal{K}).\end{aligned}$$

Ainda, como $4\alpha \le q_1 < 2\alpha 2^*$, por (1.20) e o Lema 1.4-(2), (3), (6), (7), temos, para $v_n \ne 0$, que

$$
\begin{aligned}
|g(x,f(v_n))f'(v_n)\varphi| &\leq \delta|v_n|\,|\varphi| + C_\delta|f(v_n)|^{q_1-1}|f'(v_n)|\,|\varphi| \\
&\leq \delta|w_2|\,|\varphi| + C_\delta|f(v_n)|^{q_1-1}\frac{|f(v_n)|}{|v_n|}|\varphi| \\
&\leq \delta|w_2|\,|\varphi| + (2\alpha)^{q_1/4\alpha}C_\delta|w_{\frac{q_1}{2\alpha}-1}|^{\frac{q_1}{2\alpha}-1}|\varphi| \ \in L^1(\mathcal{K}).
\end{aligned}
\tag{4.57}
$$

Usando estas estimativas, (4.56), o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e a convergência fraca $v_n \rightharpoonup v$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, temos

$$
\langle I'(v_n),\varphi\rangle - \langle I'(v),\varphi\rangle \to 0.
$$

Como $I'(v_n)\to 0$, concluímos que $I'(v)=0$.

A fim de demonstrarmos o Teorema 4.1, supomos que $v=0$, pois caso contrário, o teorema já estaria demonstrado.

Em vista da Proposição 4.10, segue-se $0<\tau\leq c<\frac{1}{2\alpha N}\|K\|_\infty^{(2-N)/2}S^{N/2}$. Além disso, pela Proposição 4.6, existem uma sequência $(y_n)\subset\mathbb{R}^N$ e r, $\eta>0$ tais que $|y_n|\to\infty$, quando $n\to\infty$, e

$$
\limsup_{n\to\infty}\int_{B_r(y_n)}|v_n|^2\geq\eta>0 \quad \text{para todo } \ n\in\mathbb{N}. \tag{4.58}
$$

Sem perda de generalidade (veja no Capítulo 2), podemos supor que $(y_n)\subset\mathbb{Z}^N$. Então, definindo $u_n(x)=v_n(x+y_n)$, $n\in\mathbb{N}$, temos que $\|u_n\|_0=\|v_n\|_0$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Portanto, tomando uma subsequência se necessário, existe $u\in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n\rightharpoonup u$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$, $u_n\to u$ fortemente em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e $u_n(x)\to u(x)$ para quase todo $x\in\mathbb{R}^N$. De (4.58), temos $u\neq 0$.

Afirmamos que u é um ponto crítico de I_0. De fato, primeiro observe

$$
\langle I_0'(u_n),\varphi\rangle\to\langle I_0'(u),\varphi\rangle, \quad \text{quando } \ n\to\infty, \ \text{ para todo } \ \varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{4.59}
$$

Efetivamente, escrevendo

$$
\begin{aligned}
&\langle I_0'(u_n),\varphi\rangle - \langle I_0'(u),\varphi\rangle - \int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u_n-\nabla u)\nabla\varphi \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^N}\left[f(u_n)f'(u_n)-f(u)f'(u)\right]V_0(x)\varphi \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N}\left[|f(u^+)|^{2\alpha 2^*-1}f'(u^+)-|f(u_n^+)|^{2\alpha 2^*-1}f'(u_n^+)\right]K_0(x)\varphi \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N}\left[g_0(x,f(u))-g_0(x,f(u_n))\right]f'(v_n)\varphi,
\end{aligned}
\tag{4.60}
$$

pelos argumentos usados acima, deduzimos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n - \nabla u)\nabla\varphi \to 0, \quad quando \;\; n \to \infty,$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[f(u_n)f'(u_n) - f(u)f'(u)\right] V_0(x)\varphi \to 0, \quad quando \;\; n \to \infty$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[|f(u^+)|^{2\alpha 2^*-1} f'(u^+) - |f(u_n^+)|^{2\alpha 2^*-1} f'(u_n^+)\right] K_0(x)\varphi \to 0, \quad quando \;\; n \to \infty.$$

Logo, para provarmos (4.59), resta-nos analisar a última integral em (4.60). Note que

$$\begin{aligned} &[g_0(x, f(u)) - g_0(x, f(u_n))]\, f'(v_n)\varphi \\ &\quad = [g_0(x, f(u)) - g(x, f(u_n))]\, f'(v_n)\varphi + [g(x, f(u_n)) - g_0(x, f(u_n))]\, f'(v_n)\varphi. \end{aligned} \tag{4.61}$$

Agora, pela condição $(g_4)(ii)$ e os argumentos usados na prova de (4.57), obtemos $\psi \in L^1(\mathcal{K})$, $\mathcal{K} := supp\, \varphi$, tal que

$$|[g(x, f(u_n)) - g_0(x, f(u_n))]f'(u_n)\varphi| \leq \psi. \tag{4.62}$$

Portanto, aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue mais uma vez, obtemos

$$[g(x, f(u_n)) - g_0(x, f(u_n))]f'(u_n)\varphi \to [g(x, f(u)) - g_0(x, f(u))]f'(u)\varphi \tag{4.63}$$

em $L^1(\mathcal{K})$. A estimativa (4.57) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue também fornecem

$$g(x, f(u_n))f'(u_n)\varphi \to g(x, f(u))f'(u)\varphi \quad \text{em} \;\; L^1(\mathcal{K}).$$

Além disso, por (4.57), (4.62) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, novamente,

$$g_0(x, f(u))f'(u_n)\varphi \to g_0(x, f(u))f'(u)\varphi \quad \text{em} \;\; L^1(\mathcal{K}).$$

Consequentemente,

$$[g_0(x, f(u)) - g(x, f(u_n))]\, f'(u_n)\varphi \to [g_0(x, f(u)) - g(x, f(u))]\, f'(u)\varphi \tag{4.64}$$

em $L^1(\mathcal{K})$. As relações (4.61), (4.63) e (4.64) estabelecem (4.59).

Por outro lado, considerando $\varphi_n(x) = \varphi(x - y_n)$, para $n \in \mathbb{N}$, pelas periodicidades de V_0, K_0 e g_0, obtemos

$$\langle I_0'(u_n), \varphi\rangle = \langle I_0'(v_n), \varphi_n\rangle, \quad \text{para todo } \ n \in \mathbb{N}. \tag{4.65}$$

Além disso, aplicando o Lema 4.11, obtemos

$$|\langle I_0'(v_n), \varphi_n\rangle - \langle I'(v_n), \varphi_n\rangle| \to 0, \quad \text{quando } \ n \to \infty. \tag{4.66}$$

Desde que $\|\varphi_n\| \leq \|\varphi_n\|_0 = \|\varphi\|_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e que $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é uma sequência $(Ce)_c$, temos que $\langle I'(v_n), \varphi_n\rangle \to 0$. Logo, por (4.66), obtemos

$$\langle I_0'(v_n), \varphi_n\rangle \to 0, \quad \text{quando } \ n \to \infty.$$

O limite acima, (4.65) e (4.59) mostram que u e um ponto crítico de I_0, como afirmamos.

Nossa próxima tarefa é verificar que $I_0(u) \leq c$. Para tanto, aplicamos as condições (V), (K) e a definição da sequência (u_n) para obtermos

$$\begin{aligned} I(v_n) - \frac{1}{2}\langle I'(v_n), v_n\rangle \ \geq \ & \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V_0(x)[f^2(u_n) - f'(u_n)f(u_n)u_n] \\ & + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (V(x) - V_0(x))[f^2(v_n) - f'(v_n)f(v_n)v_n] \\ & + \int_{\mathbb{R}^N} K_0(x)\left[\frac{1}{2}|f(u_n^+)|^{2\alpha 2^*-1}f'(u_n^+)u_n^+ - \frac{1}{2\alpha 2^*}|f(u_n^+)|^{2\alpha 2^*}\right] \\ & + \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{2}g(x, f(v_n))f'(v_n)v_n - G(x, f(v_n))\right]. \end{aligned} \tag{4.67}$$

Agora, pela propriedade (8) do Lema 1.4, as condições (V), (V_1), (K) e o Lema de Fatou,

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} & \int_{\mathbb{R}^N} K_0(x)\left[\frac{1}{2}|f(u_n^+)|^{2\alpha 2^*-1}f'(u_n^+)u_n^+ - \frac{1}{2\alpha 2^*}|f(u_n^+)|^{2\alpha 2^*}\right] \\ & \geq \int_{\mathbb{R}^N} K_0(x)\left[\frac{1}{2}|f(u^+)|^{2\alpha 2^*-1}f'(u^+)u^+ - \frac{1}{2\alpha 2^*}|f(u^+)|^{2\alpha 2^*}\right] \end{aligned} \tag{4.68}$$

e

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V_0(x)[f^2(u_n) - f'(u_n)f(u_n)u_n] \geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V_0(x)[f^2(u) - f'(u)f(u)u]. \tag{4.69}$$

Observamos que, em vista de $v_n \rightharpoonup 0$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$, pelo Lema 4.12, com

$h = V - V_0$, e o Lema 1.4-(8), obtemos

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (V(x) - V_0(x))[f^2(v_n) - f'(v_n)f(v_n)v_n] = 0. \tag{4.70}$$

Afirmamos, também, que

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} &\left[\frac{1}{2}g(x, f(v_n))f'(v_n)v_n - G(x, f(v_n))\right] \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{2}g_0(x, f(u))f'(u)u - G_0(x, f(u))\right].\end{aligned} \tag{4.71}$$

Supondo a afirmação como verdadeira, utilizamos (4.55), (4.67) – (4.71) e o fato de u ser um ponto crítico de I_0, para concluirmos que

$$\begin{aligned} c &\geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V_0(x)[f^2(u) - f'(u)f(u)u] + \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{2}g_0(x, f(u))f'(u)u - G_0(x, f(u))\right] \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} K_0(x)\left[\frac{1}{2}|f(u^+)|^{2\alpha 2^*-1}f'(u^+)u^+ - \frac{1}{2\alpha 2^*}|f(u^+)|^{2\alpha 2^*}\right] \\ &= I_0(u) - \frac{1}{2}\langle I_0'(u), u\rangle = I_0(u), \end{aligned} \tag{4.72}$$

isto é, $I_0(u) \leq c$.

Agora, vamos mostrar que $\max_{t\geq 0} I_0(tu) = I_0(u)$. Para isto, definimos a função $\eta(t) := I_0(tu)$ para $t \geq 0$. Desde que u é um ponto crítico de I_0, segue que $u > 0$ (veja o argumento abaixo). Então, podemos escrever

$$\begin{aligned} \eta'(t) &= t\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V_0(x)f'(tu)f(tu)u \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} K_0(x)f^{2\alpha 2^*-1}(tu)f'(tu)u - \int_{\mathbb{R}^N} g_0(x, f(tu))f'(tu)u \\ &= t\Bigg\{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 - \int_{\mathbb{R}^N}\Bigg[\frac{K_0 f^{2\alpha 2^*-1}(t|u|)f'(t|u|)}{t|u|} + \frac{g_0(x, f(t|u|))f'(t|u|)}{t|u|} \\ &\qquad - \frac{V_0(x)f'(t|u|)f(t|u|)}{t|u|}\Bigg]u^2\Bigg\}. \end{aligned}$$

Notemos que, fixado $x \in \mathbb{R}^N$, a função $\zeta : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\zeta(s) = \frac{K_0(x)f^{2\alpha 2^*-1}(s)f'(s)}{s} + \frac{g_0(x, f(s))f'(s)}{s} - \frac{V_0(x)f'(s)f(s)}{s}$$

é crescente. Com efeito, isto é uma consequência direta de $(g_4)(iii)$ e do Corolário 1.6

aplicados a

$$\zeta(s) = K_0(x)\frac{f^{2\alpha 2^*-1}(s)f'(s)}{s} + \frac{g_0(x,f(s))}{f^{4\alpha-1}(s)}\frac{f^{4\alpha-1}(s)f'(s)}{s} + V_0(x)\left(-\frac{f'(s)f(s)}{s}\right).$$

Agora, observamos que $\eta'(1) = 0$, já que u é um ponto crítico de I_0. Além disso, temos que $\eta'(t) > 0$ para $0 < t < 1$ e $\eta'(t) < 0$ para $t > 1$. Portanto, $I_0(u) = \eta(1) = \max_{t\geq 0}\eta(t) = \max_{t\geq 0} I_0(tu)$. Consequentemente, por (4.72), $(g_4)(i)$ e a definição de c,

$$c \leq \max_{t\geq 0} I(tu) \leq \max_{t\geq 0} I_0(tu) = I_0(u) \leq c.$$

Isto implica que existe $\gamma \in \Gamma$ tal que (1.3) vale. Pelo Teorema 1.3, I possui um ponto crítico v no nível c. De $c \geq \tau > 0 = I(0)$, temos que v é um ponto crítico não-trivial de I. Isto conclui a demonstração do Teorema 4.1, exceto pela afirmação (4.71) e pela verificação de que $u > 0$.

Mostremos agora que $u > 0$ em $\mathbb{R}^N$. Para tal, basta verificarmos que $v > 0$ em $\mathbb{R}^N$. Já temos que $v \geq 0$. Além disso, pela Observação 1.13, sabemos que $v \in C^{1,\beta}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para algum $\beta \in (0,1)$. Agora suponhamos, por contradição, que exista $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $v(x_0) = 0$. A equação (4.3) pode ser reescrita como

$$-\Delta v + c(x)v = V(x)f'(v)(v - f(v)) + K(x)f^{2\alpha 2^*-1}(v)f'(v) + g^+(x, f(v))f'(v) \geq 0,$$

onde $c(x) = [V(x) - \frac{g^-(x,f(v(x)))}{v(x)}]f'(v(x)) > 0$, para $x \in \mathbb{R}^N$, com $\frac{g^-(x,f(v))}{v}$ definida como sendo 0 se $v = 0$. Note que, do Lema 1.4-(3), temos $v - f(v) \geq 0$. Em vista de (g_1) e do Lema 1.4-(4), temos que c é uma função contínua em $\mathbb{R}^N$. Logo, aplicando o Princípio do Máximo Forte para soluções fracas (veja [28]), para uma bola arbitrária centrada em x_0, podemos concluir que $v \equiv 0$, o que contradiz o fato de que $v \not\equiv 0$.

Finalmente, concluímos a demonstração do Teorema 4.1, verificando a relação (4.71). Primeiro, observamos que, pelo Lema 4.12,

$$\int_{\mathbb{R}^N} h_3|f(v_n)|^{q_3} \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

já que $h_3 \in \mathcal{F}$, $2 \leq q_3 < 2\alpha 2^*$ e $v_n \rightharpoonup 0$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Por (g_4) e o Lema 1.4-(6), temos

$$\begin{aligned} |g(x,f(s))f'(s)s - g_0(x,f(s))f'(s)s| &= |[g(x,f(s)) - g_0(x,f(s))]f'(s)s| \\ &\leq |[g(x,f(s)) - g_0(x,f(s))]f(s)| \\ &\leq h_3(x)|f(s)|^{q_3}. \end{aligned}$$

Logo,

$$g(x, f(v_n))f'(v_n)v_n - g_0(x, f(v_n))f'(v_n)v_n \to 0$$

fortemente em $L^1(\mathbb{R}^N)$, quando $n \to \infty$. Analogamente,

$$G(x, f(v_n)) - G_0(x, f(v_n)) \to 0$$

fortemente em $L^1(\mathbb{R}^N)$, quando $n \to \infty$. Consequentemente, pela periodicidade de g_0,

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} &\left[\frac{1}{2}g(x, f(v_n))f'(v_n)v_n - G(x, f(v_n))\right] \\ &= \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{2}g_0(x, f(u_n))f'(u_n)u_n - G_0(x, f(u_n))\right].\end{aligned} \tag{4.73}$$

Agora, por (g_3'), (g_4) e a propriedade (6) do Lema 1.4, temos, para $s \geq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}&g_0(x, f(s))f'(s)s - G_0(x, f(s)) \\ &\geq \frac{1}{4\alpha}[g_0(x, f(s)) - g(x, f(s))]f(s) + \frac{1}{4\alpha}g(x, f(s))f(s) - G(x, f(s)) \\ &\quad + [G(x, f(s)) - G_0(x, f(s))] \\ &\geq -\frac{1}{4\alpha}h_3(x)|f(s)|^{q_3} - h_1(x) - h_2(x)|f(s)|^{q_2}.\end{aligned}$$

Além disso, pelo Lema 4.12, segue-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} h_i(x)|f(u_n)|^{q_i} \to \int_{\mathbb{R}^N} h_i(x)|f(u)|^{q_i}, \quad \text{quando } n \to \infty, \ \ i = 2, 3.$$

Logo, como $g_0(x, s) = 0$ se $s < 0$, pelo Lema de Fatou,

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} &\left[\frac{1}{2}g_0(x, f(u_n))f'(u_n)u_n - G_0(x, f(u_n)) + \ h_2|f(u_n)|^{q_2} + \frac{1}{2}h_3|f(u_n)|^{q_3} + h_1\right] \\ \geq \int_{\mathbb{R}^N} &\left[\frac{1}{2}g_0(x, f(u))f'(u)u - G_0(x, f(u)) + \ h_2|f(u)|^{q_2} + \frac{1}{2}h_3|f(u)|^{q_3} + h_1\right].\end{aligned} \tag{4.74}$$

As relações (4.73) e (4.74) concluem a verificação de (4.71). A demonstração do Teorema 4.1 está concluída. □

4.3.2 Demonstração do Teorema 4.2

Nossa argumentação segue os passos iniciais da demonstração do Teorema 4.1. Como g satisfaz (g_1) e (g_2), empregando o Corolário 4.4, podemos encontrar uma sequência

$(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$I_0(v_n) \to c \geq \tau > 0 \quad \text{e} \quad \|I_0'(v_n)\|(1 + \|v_n\|) \to 0, \quad \text{quando } n \to \infty, \tag{4.75}$$

com c dado pelo Teorema 1.1. Em vista do Lema 4.5, podemos supor, sem perda de generalidade, que $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Deste fato e (1.20), temos que v é um ponto crítico de I_0, isto é, $I_0'(v) = 0$. Logo, para concluirmos a demonstração do Teorema 4.2, basta supormos que $v = 0$.

Notamos que a Proposição 4.10 implica que $0 < \tau \leq c < \frac{1}{2\alpha N}\|K\|_\infty^{(2-N)/2} S^{N/2}$. Além disso, pela Proposição 4.6, existem uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ e $r, \eta > 0$ tais que $|y_n| \to \infty$, quando $n \to \infty$, e

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{B_r(y_n)} |v_n|^2 \geq \eta > 0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{4.76}$$

Como na demonstração do Teorema 4.1, podemos supor que $(y_n) \subset \mathbb{Z}^N$. Assim, definindo $u_n(x) = v_n(x+y_n)$, $n \in \mathbb{N}$, temos que $\|u_n\|_0 = \|v_n\|_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente, tomando uma subsequência se necessário, existe $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$, $u_n \to u$ fortemente em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e $u_n(x) \to u(x)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$. Afirmamos que u é um ponto crítico de I_0. De fato, dado $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, por (V_1), (K), (g_1) e (g_2), obtemos

$$\langle I_0'(u_n), \varphi\rangle \to \langle I_0'(u), \varphi\rangle, \quad \text{quando } n \to \infty. \tag{4.77}$$

Por outro lado, considerando $\varphi_n(x) = \varphi(x - y_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pelas periodicidades de V_0, K_0 e g_0, obtemos

$$\langle I_0'(u_n), \varphi\rangle = \langle I_0'(v_n), \varphi_n\rangle, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente, por (4.75) e o fato de que $\|\varphi_n\|_0 = \|\varphi\|_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, concluímos que

$$\langle I_0'(u_n), \varphi\rangle \to 0, \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Este limite, juntamente com (4.77), mostra que u é ponto crítico de I_0, e a afirmação está provada. Além disso, (4.76) implica que $u \neq 0$, e como no Teorema 4.1, $u > 0$. O Teorema 4.2 está demonstrado. $\square$

Observação 4.13. *Consideremos a seguinte variação do Problema (4.1):*

$$\begin{cases} -\Delta u - \Delta(|u|^{2\alpha})|u|^{2\alpha-2}u + V(x)u \;=\; K(x)|u|^{2\alpha 2^*-2}u + \lambda g(x,u), \qquad x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N),\ u > 0, \end{cases} \tag{4.78}$$

onde $\alpha \geq 3/4$, *e* $V,\ K : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *são funções contínuas.*

Tendo em vista (4.42), podemos substituir a hipótese (g_5') *pela seguinte:*

(g_5'') *existem uma constante* $a_5 > 0$ *e um conjunto aberto e limitado* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, *contendo* x_0 *dado por* $(K)(ii)$, *tais que*

$$\liminf_{s\to\infty} \frac{G(x,s)}{\Psi(s)} \geq a_5, \quad \textit{uniformemente em } x \in \Omega,$$

onde

$$\Psi(s) = \begin{cases} s^{2\alpha 2^*-1}, \ \textit{se}\ 3 \leq N \leq 8\ \textit{e}\ \alpha > 3/4, \quad \textit{ou}\ N \geq 9\ \textit{e}\ \alpha > (N-2)/8, \\ s^{\frac{3}{2}2^*-1}\log s, \ \textit{se}\ 3 \leq N \leq 8\ \textit{e}\ \alpha = 3/4, \\ s^{4\alpha}, \ \textit{se}\ N \geq 9\ \textit{e}\ 3/4 \leq \alpha \leq (N-2)/8, \end{cases}$$

a fim de obtermos solução para o Problema (4.78), para λ *suficientemente grande.*

Observamos ainda que a hipótese (g_5''), *para* $N \geq 9$ *e* $3/4 \leq \alpha \leq (N-2)/8$, *permite-nos tomar* $q_1 = 4\alpha$ *no exemplo, dado no Capítulo 2, para a não-linearidade* g. *No Capítulo 5, a seguir, também podemos considerar a hipótese* (g_5''), *ao invés de* (g_5').

Capítulo

5

Equações de Schrödinger quasilineares com potencial não-limitado e não-linearidade crítica

No presente capítulo, estudamos a existência de solução positiva para uma classe de equações de Schrödinger quasilineares. Mais especificamente, buscamos solução para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u - \Delta(|u|^{2\alpha})|u|^{2\alpha-2}u + V(x)u \;=\; K(x)|u|^{2\alpha 2^*-2}u + g(x,u), \qquad x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N),\; u > 0, \end{cases} \tag{5.1}$$

onde $V(x)$ não é limitado e $\alpha \geq 3/4$.

Como anteriormente, consideramos que V, $K : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sejam funções contínuas. Mais precisamente, supomos V satisfazendo:

(V) existe uma constante $a_0 > 0$ tal que

$$V(x) \geq a_0 > 0, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N;$$

(V_2) para qualquer $D > 0$, $|\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq D\}| < \infty$.

Lembremos, do Capítulo 3, que esta última hipótese generaliza $\int_{\mathbb{R}^N} 1/V < \infty$ e $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = +\infty$.

Estamos também supondo que K satisfaz:

(K') $K \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, e existe uma constante $a_4 > 0$ e um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^N$, tais que

(i) $K(x) \geq a_4 > 0, \quad \text{para todo } \ x \in \mathbb{R}^N,$

(ii) $K(x) = \|K\|_\infty + O(|x - x_0|^{N-2}), \quad \text{quando} \quad x \to x_0.$

Desde que $G(x,s) = \int_0^s g(x,t)\,dt$, também supomos as seguintes hipóteses:

(g_1) $g(x,s) = o(|s|)$, quando $s \to 0^+$, uniformemente em $x \in \mathbb{R}^N$;

(g_2) existem constantes $a_1, a_2 > 0$ e $4\alpha \leq q_1 < 2\alpha 2^*$ tais que

$$|g(x,s)| \leq a_1 + a_2|s|^{q_1 - 1}, \quad \text{para todo } \ (x,s) \in \mathbb{R}^N \times [0, +\infty);$$

(g_5') existe um conjunto aberto e limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, contendo x_0 dado por $(K')(ii)$, tal que

$$\frac{G(x,s)}{\Psi(s)} \to \infty, \quad \text{quando } \ s \to \infty, \ \text{ uniformemente em } \ x \in \Omega,$$

onde

$$\Psi(s) = \begin{cases} s^{2\alpha 2^* - 1}, \ \text{ se } \ 3 \leq N \leq 8 \ \text{ e } \ \alpha > 3/4, \quad \text{ou } \ N \geq 9 \ \text{ e } \ \alpha > (N-2)/8, \\ s^{\frac{3}{2}2^* - 1} \log s, \ \text{ se } \ 3 \leq N \leq 8 \ \text{ e } \ \alpha = 3/4, \\ s^{4\alpha}, \ \text{ se } \ N \geq 9 \ \text{ e } \ 3/4 \leq \alpha \leq (N-2)/8. \end{cases}$$

Notemos que neste capítulo não necessitamos da hipótese (g_3') para garantirmos a limitação, em $H^1(\mathbb{R}^N)$, da sequência de Cerami $(v_n) \subset X$, pois o termo crítico, juntamente com a hipótese (V_2), contornaram a situação.

Nosso principal resultado neste capítulo é o seguinte:

Teorema 5.1. *Suponha que* (V), (V_2), (K'), (g_1), (g_2) *e* (g_5') *sejam satisfeitas. Então o Problema* (5.1) *possui uma solução.*

Em contraste com outros resultados (veja [23] ou [57], por exemplo) que lidaram com o caso de potencial não-limitado empregando uma estrutura de espaços de Orlicz, nós usamos apenas o espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)$, na obtenção de uma solução positiva para a equação de Schrödinger quasilinear (5.1).

Neste trabalho, para a demonstração do Teorema 5.1, usamos idéias conjuntas dos Capítulos 3 e 4, obtendo um funcional associado bem definido no subespaço $X \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ apresentado no Capítulo 3, que satisfaz as propriedades geométricas do Teorema do Passo da Montanha. Encontramos, então, uma sequência de Cerami associada ao nível minimax, que nos conduz à solução de nosso problema. Em seguida, inspirados nos trabalhos de Brézis-Nirenberg [9] e Lins e Silva [39], obtemos uma estimativa para este nível minimax. Em seguida, utilizando apenas um argumento de contradição, ao supormos que a única solução para a nossa equação é a solução nula, obtemos que o nível do passo da montanha seria igual a zero, que é um absurdo. Isto nos leva a concluirmos a existência de solução (não-nula) para o nosso problema. O fato de que a solução encontrada é positiva, segue o mesmo argumento que usamos para a solução dos Capítulo 2 e 4.

Assim como no Capítulo 3, embora saibamos que a solução fraca, v, do Problema (5.3) pertença, apenas, ao espaço de Sobolev usual $H^1(\mathbb{R}^N)$, usando a relação (5.5) e o Lema de Fatou, concluímos que a solução do nosso Problema (5.1), $u = f(v)$, pertence, realmente, ao subespaço $X \subset H^1(\mathbb{R}^N)$, no qual trabalhamos neste capítulo. Interessante, não!

A organização deste capítulo é a seguinte: na Seção 5.1, introduzimos a estrutura variacional associada ao Problema (5.1), verificando também a geometria do Passo da Montanha e a limitação das sequências de Cerami associadas ao nível do Passo da Montanha. Aqui, também, enunciamos uma estimativa sobre o nível minimax do funcional associado ao problema modificado, a qual garante que este nível está abaixo de um certo valor crítico. Finalmente, na Seção 5.2, demonstramos o Teorema 5.1.

5.1 Estrutura variacional

Nesta seção, verificamos as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha e a limitação, em $H^1(\mathbb{R}^N)$, das sequências de Cerami do funcional associado ao Problema (5.3) abaixo. Apresentamos também, sem demonstração, o resultado que assegura a estimativa necessária para o nível minimax do Passo da Montanha.

Como nos capítulos anteriores, não podemos aplicar diretamente os métodos de minimax ao funcional associado ao Problema (5.1), a saber,

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(1+2\alpha|u|^{2(2\alpha-1)})|\nabla u|^2+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2-\frac{1}{2\alpha 2^*}\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|u^+|^{2\alpha 2^*}-\int_{\mathbb{R}^N} G(x,u).$$

Para contornarmos tal dificuldade, encontrando, ainda, o espaço de funções apropriado

$$X = \left\{ v \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x)v^2\, dx < \infty \right\},$$

munido com a norma

$$\|v\|_X = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + V(x)v^2) \right)^{1/2},$$

empregamos mais uma vez a mudança de variável (1.4), que a partir da qual, de J, obtemos o funcional

$$I(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v) - \frac{1}{2\alpha 2^*}\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|f(v^+)|^{2\alpha 2^*} - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, f(v)), \quad (5.2)$$

que, sob as hipóteses (V), (K'), (g_1) e (g_2), é de classe $C^1(X, \mathbb{R})$ (veja Proposição 1.10). Além do mais, sua derivada é dada por

$$\begin{aligned}\langle I'(v), w\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla w + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f(v) f'(v) w \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|f(v^+)|^{2\alpha 2^* - 1} f'(v^+) w - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, f(v)) f'(v) w,\end{aligned}$$

para todo $v, w \in X$ (veja também [57]). A equação de Euler-Lagrange associada ao funcional energia I é dada pelo problema

$$\begin{cases} -\Delta v + V(x) f(v) f'(v) = K(x)|f(v)|^{2\alpha 2^* - 2} f(v) f'(v) + g(x, f(v)) f'(v), \\ v \in H^1(\mathbb{R}^N), \ v > 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

Uma função $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é chamada uma solução fraca de (5.3) se, para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, vale

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla \varphi + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f(v) f'(v) \varphi \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|f(v^+)|^{2\alpha 2^* - 1} f'(v^+) \varphi - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, f(v)) f'(v) \varphi.\end{aligned}$$

Conforme os capítulos anteriores, também observamos que para obtermos uma solução não-negativa para (5.3), tomamos $g(x, s) = 0$, para $x \in \mathbb{R}^N$, $s < 0$. Consequentemente, $u = f(v)$ é uma solução (não-negativa) do Problema (5.1).

Enfatizamos mais uma vez que, assim como no Capítulo 3, não foi possível usarmos diretamente o espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)$, devido à não limitação do potencial V, ou melhor, devido à condição (V_2). Notamos ainda que, pela condição (V), a imersão $(X, \|\cdot\|_X) \hookrightarrow (H^1(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^N)})$ é contínua.

5.1.1 Geometria do Passo da Montanha

As propriedades geométricas do Teorema do Passo da Montanha são cumpridas pelo funcional (modificado), conforme o lema seguinte.

Lema 5.2. *Suponha que* (V), (K'), (g_1) *e* (g_2) *sejam satisfeitas. Então o funcional* I, *definido por (5.2), satisfaz as condições* $I(0) = 0$, (I_1) *e* (I_2) *do Teorema 1.1.*

Demonstração. Primeiramente, note que $I(0) = 0$. Agora, defina, para cada $\rho > 0$,

$$S_\rho := \left\{ v \in X : \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v) = \rho^2 \right\}.$$

Desde que $\Psi : X \to \mathbb{R}$, dada por

$$\Psi(v) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v),$$

é contínua, S_ρ é um subconjunto fechado que desconecta o espaço X. Como no Capítulo 4, obtemos, para ρ suficientemente pequeno,

$$c_0 := \inf_{S_\rho} I \geq \tau > 0.$$

A condição (I_1) é satisfeita.

Para mostrarmos a condição (I_2), basta mostrarmos que existe $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $\varphi \geq 0$, tal que

$$I(t\varphi) \to -\infty \quad \text{quando} \quad t \to +\infty. \tag{5.4}$$

De fato, consideremos $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^+)$, $\varphi \not\equiv 0$. Das propriedades (3), (7) e (9) do Lema 1.4, da condição (K') e da relação (1.21), obtemos, para todo $t > 0$,

$$\begin{aligned} I(t\varphi) &\leq \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^2 + \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) \varphi^2 - \frac{1}{2\alpha 2^*} a_4 \int_{\mathbb{R}^N} f^{2\alpha 2^*}(t\varphi) \\ &\quad + \frac{\delta}{2} \int_{\mathbb{R}^N} f^2(t\varphi) + \frac{C_\delta}{q_1} \int_{\mathbb{R}^N} f^{q_1}(t\varphi) \\ &\leq \frac{t^2}{2} \|\varphi\|^2 + \frac{\delta}{2} t^2 \int_{\mathbb{R}^N} \varphi^2 + \frac{(2\alpha)^{q_1/4\alpha} C_\delta}{q_1} t^{q_1/2\alpha} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi^{q_1/2} - \frac{a_4 C^{2\alpha 2^*}}{2\alpha 2^*} t^{2^*} \int_{\{t\varphi(x) \geq 1\}} \varphi^{2^*}. \end{aligned}$$

Como $q_1/2\alpha < 2^*$, (5.4) está verificado e a condição (I_2) é satisfeita. O lema está demonstrado. □

Como consequência do Teorema 1.1 e do Lema 5.2, temos

Corolário 5.3. *Suponha que* (V), (K'), (g_1) *e* (g_2) *sejam satisfeitas. Então o funcional* I *possui uma sequência* $(Ce)_c$, *com* c *dado por (1.1).*

5.1.2 Limitação das sequências de Cerami

No último resultado desta seção, verificamos a limitação, em $H^1(\mathbb{R}^N)$, das sequências (Ce) associadas ao funcional I.

Lema 5.4. *Suponha que (V), (V_2), (K'), (g_1) e (g_2) sejam satisfeitas. Então toda sequência de Cerami $(v_n) \subset X$ associada ao funcional I é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração. Lembremos do Capítulo 2, que se uma sequência $(v_n) \subset X$ satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) \leq M \tag{5.5}$$

para alguma constante $M > 0$, então ela é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Seja $(v_n) \subset X$ uma sequência de Cerami para I no nível $c \in \mathbb{R}$, isto é,

$$I(v_n) = c + o_n(1) \qquad \text{e} \qquad \|I'(v_n)\|(1 + \|v_n\|) = o_n(1). \tag{5.6}$$

Uma vez que $g(x, s) = 0$ se $s < 0$, pela relação (1.21), obtemos

$$\begin{aligned} I(v_n) \geq\ & \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) - \frac{1}{2\alpha 2^*}\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*} \\ & -\frac{\delta}{2}\int_{\mathbb{R}^N} f^2(v_n) - \frac{C_\delta}{q_1}\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n^+)|^{q_1} \end{aligned}$$

e, pelo Lema 1.4-(6), (8) e a relação (1.20), segue-se

$$\begin{aligned} \langle I'(v_n), v_n\rangle \leq\ & \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) - \frac{1}{2\alpha}\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*} \\ & + \int_{\mathbb{R}^N} |g(x, f(v_n^+)) f'(v_n^+) v_n^+| \\ \leq\ & \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) - \frac{1}{2\alpha}\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*} \\ & + \delta \int_{\mathbb{R}^N} f^2(v_n) + C_\delta \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n^+)|^{q_1}. \end{aligned}$$

Consequentemente, tomando $\theta \in (2, 2^*)$ e usando a condição (V), temos

$$\begin{aligned} I(v_n) - \frac{1}{\theta}\langle I'(v_n), v_n\rangle \geq\ & \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) \\ & + \left(\frac{1}{2\alpha\theta} - \frac{1}{2\alpha 2^*}\right)\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*} \\ & - \left(\frac{\delta}{2a_0} + \frac{\delta}{\theta a_0}\right)\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) - \left(\frac{1}{q_1} + \frac{1}{\theta}\right) C_\delta \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n^+)|^{q_1}. \end{aligned}$$

Logo, por (5.6) e a condição (K'), vem

$$\begin{aligned} c + o_n(1) \geq & \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} - \frac{\delta}{2a_0} - \frac{\delta}{\theta a_0}\right) \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) \\ & + \left(\frac{1}{2\alpha\theta} - \frac{1}{2\alpha 2^*}\right) a_4 \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*} - \left(\frac{C_\delta}{q_1} + \frac{C_\delta}{\theta}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n^+)|^{q_1}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Por outro lado, sendo $\mathcal{V} = \{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq D\}$ para algum $D > 0$ a ser escolhido posteriormente, pela condição (V_2), a desigualdade de Hölder e escrevendo $q_1 = 2\lambda + (1-\lambda)2\alpha 2^*$, com $\lambda \in (0,1)$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n^+)|^{q_1} &= \int_{\mathcal{V}} |f(v_n^+)|^{q_1} + \int_{\mathbb{R}^N \setminus \mathcal{V}} |f(v_n^+)|^{q_1} \\ &\leq |\mathcal{V}|^{\frac{2\alpha 2^* - q_1}{2\alpha 2^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*}\right)^{\frac{q_1}{2\alpha 2^*}} \\ &\quad + \frac{1}{D^\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus \mathcal{V}} V(x) f^2(v_n)\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*}\right)^{1-\lambda}. \end{aligned}$$

Agora, usando a desigualdade de Young, segue-se

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n^+)|^{q_1} &\leq |\mathcal{V}|^{\frac{2\alpha 2^* - q_1}{2\alpha 2^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*}\right)^{\frac{q_1}{2\alpha 2^*}} \\ &\quad + \frac{\lambda}{D^\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) + \frac{(1-\lambda)}{D^\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*}. \end{aligned}$$

Esta desigualdade e (5.7) implicam que

$$\begin{aligned} c + o_n(1) \geq & \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + C_1 \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) + C_2 \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*} \\ & - \left(\frac{C_\delta}{q_1} + \frac{C_\delta}{\theta}\right) |\mathcal{V}|^{\frac{2\alpha 2^* - q_1}{2\alpha 2^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*}\right)^{\frac{q_1}{2\alpha 2^*}}, \end{aligned}$$

onde $C_1 = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} - \frac{\delta}{2a_0} - \frac{\delta}{\theta a_0} - \left(\frac{C_\delta}{q_1} + \frac{C_\delta}{\theta}\right)\frac{\lambda}{D^\lambda}\right]$ e $C_2 = \left[\frac{a_4}{2\alpha\theta} - \frac{a_4}{2\alpha 2^*} - \left(\frac{C_\delta}{q_1} + \frac{C_\delta}{\theta}\right)\frac{(1-\lambda)}{D^\lambda}\right]$. Escolhendo $\delta > 0$ suficientemente pequeno e $D > 0$ suficientemente grande, obtemos C_1, $C_2 > 0$. Além disso, como $q_1 < 2\alpha 2^*$ e, pela condição (V_2), $|\mathcal{V}| < \infty$, existe uma constante $C_3 > 0$ tal que $\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{2\alpha 2^*} \leq C_3$. Logo, pela estimativa acima e (5.6), existe uma constante $C_4 > 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + C_1 \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) \leq C_4.$$

Como $\theta > 2$, obtemos (5.5). Portanto, o Lema 5.4 está demonstrado. $\square$

Argumentando como no Capítulo 4 e empregando as mesmas funções-testes, podemos verificar que o nível minimax associado ao Teorema do Passo da Montanha (Teorema 1.1) está no intervalo onde o Lema 5.6 a seguir, poderá ser aplicado. Observamos que essa verificação é feita com algumas leves adaptações da demonstração da Proposição 4.10, encontrada no Capítulo 4 (A não limitação de V não afeta a estimativa, uma vez que se trabalha com funções de suporte compacto). Por esta razão, a omitimos.

Proposição 5.5. *Suponha que (V), (K'), (g_1), (g_2) e (g_5') sejam satisfeitas. Então existe $v \in X\backslash\{0\}$ tal que*

$$\max_{t\geq 0} I(tv) < \frac{1}{2\alpha N}\|K\|_\infty^{\frac{2-N}{2}} S^{\frac{N}{2}}.$$

5.2 Demonstração do Teorema 5.1

Nesta seção, demonstramos o Teorema 5.1. Mas, antes de demonstrá-lo, introduzimos dois resultados técnicos necessários à sua demonstração. Primeiramente lembremo-nos de que a melhor constante para a imersão de Sobolev $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \subset L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ é dada por

$$S = \inf_{\substack{v\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\\ v\neq 0}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{2^*}\right)^{2/2^*}}. \tag{5.8}$$

Lema 5.6. *Suponha que (V), (V_2), (K'), (g_1) e (g_2) sejam satisfeitas. Se $(v_n) \subset X$ é uma sequência $(Ce)_b$, com $b < \frac{1}{2\alpha N}\|K\|_\infty^{(2-N)/2} S^{N/2}$, tal que $v_n \rightharpoonup 0$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$, então $b = 0$.*

Demonstração. Uma vez que $g(x,s) = 0$ se $s < 0$, pela relação (1.21), obtemos

$$\begin{aligned} I(v_n) \;\geq\; & \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v_n) - \frac{1}{2\alpha 2^*}\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*} \\ & -\frac{\delta}{2}\int_{\mathbb{R}^N} f^2(v_n) - \frac{C_\delta}{q_1}\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n^+)|^{q_1} \end{aligned}$$

e, pelo Lema 1.4-(6), (8) e a relação (1.20), segue-se

$$\begin{aligned} \langle I'(v_n), v_n\rangle \;\leq\; & \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v_n) - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*-1} f'(v_n^+)v_n^+ \\ & + \int_{\mathbb{R}^N} |g(x, f(v_n^+))f'(v_n^+)v_n^+| \\ \leq\; & \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v_n) - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*-1} f'(v_n^+)v_n^+ \\ & + \delta\int_{\mathbb{R}^N} f^2(v_n) + C_\delta\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n^+)|^{q_1}. \end{aligned}$$

Consequentemente, como (v_n) é uma sequência $(Ce)_b$, tendo em vista que $v_n \rightharpoonup 0$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$, o limite (3.7) do Capítulo 3, o Lema 1.4-(6) e que $3 \leq q_1 < 2\alpha 2^*$, obtemos

$$\begin{aligned}
b + o_n(1) &= I(v_n) - \frac{1}{2}\langle I'(v_n), v_n\rangle \geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*-1} f'(v_n^+)v_n^+ \\
&\quad - \frac{1}{2\alpha 2^*}\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*} \\
&\geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*-1} f'(v_n^+)v_n^+ - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*-1} f'(v_n^+)v_n^+ \\
&= \frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*-1} f'(v_n^+)v_n^+.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Por simplicidade, façamos

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*-1} f'(v_n^+)v_n^+ = l.$$

Notemos que se fosse $l = 0$, teríamos $b = 0$, e assim, o lema estaria demonstrado. De fato, usando $\langle I'(v_n), v_n\rangle \to 0$ e a propriedade (6) do Lema 1.4, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + \frac{1}{2\alpha}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v_n) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f(v_n)f'(v_n)v_n \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*-1} f'(v_n^+)v_n^+ + \delta\int_{\mathbb{R}^N} f^2(v_n) + C_\delta\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n^+)|^{q_1} + o_n(1).
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Logo, se tivéssemos $l = 0$, empregando o limite (3.7) mais uma vez, teríamos

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 + \frac{1}{2\alpha}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v_n)\right] \leq l = 0.$$

Além disso, pela propriedade (6) do Lema 1.4, teríamos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\alpha}\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*} \leq \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*-1} f'(v_n^+)v_n^+ = l = 0.$$

e ainda, por (3.7), novamente, e a relação (1.21),

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} |G(x, f(v_n))| \leq \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\delta}{2}\int_{\mathbb{R}^N} f^2(v_n) + \frac{C_\delta}{q_1}\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{q_1}\right] = 0.$$

Portanto, pelos limites acima, obteríamos $I(v_n) \to 0 = b$, já que $I(v_n) \to b$.

Por outro lado, supondo por contradição que $b \neq 0$, então, pelo que fizemos acima, $l \neq 0$. Utilizando (3.7) e (5.10), obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 \leq l. \tag{5.11}$$

Aplicando a definição da função f e o Lema 1.4-(7), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*-1} f'(v_n^+)v_n^+ &= \int_{\mathbb{R}^N} K(x) \frac{|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*-1} v_n^+}{(1+2\alpha|f(v_n^+)|^{2(2\alpha-1)})^{1/2}} \\ &\leq (2\alpha)^{\frac{2^*-2}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|v_n^+|^{2^*}. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Da definição (5.8) e da condição (K'), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|v_n^+|^{2^*} \leq \|K\|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} |v_n^+|^{2^*} \leq \|K\|_\infty \left(\frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2\right)^{2^*/2}. \tag{5.13}$$

Combinando (5.12) e (5.13), vem

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*-1} f'(v_n^+)v_n^+ \leq (2\alpha)^{\frac{2^*-2}{2}} \|K\|_\infty \left(\frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2\right)^{2^*/2}.$$

Em vista de (5.11), passando esta desigualdade ao limite, quando $n \to \infty$, obtemos

$$l \leq (2\alpha)^{\frac{2^*-2}{2}} \|K\|_\infty \left(\frac{l}{S}\right)^{2^*/2},$$

ou melhor,

$$l \geq \frac{S^{N/2}}{2\alpha\|K\|_\infty^{(N-2)/2}}. \tag{5.14}$$

Por outro lado, por (5.9) e a nossa hipótese sobre b, obtemos

$$l \leq Nb \ < \ N\frac{1}{2\alpha N}\|K\|_\infty^{(2-N)/2} S^{N/2} = \frac{S^{N/2}}{2\alpha\|K\|_\infty^{(N-2)/2}},$$

que contradiz (5.14). Portanto $b = 0$, e o Lema 5.6 está demonstrado. □

Lema 5.7. *Suponha que (g_1) e (g_2) sejam satisfeitas. Seja $(v_n) \subset X$ uma sequência $(Ce)_c$ tal que $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Então v é uma solução fraca para a equação de (5.3).*

Demonstração. Como $(v_n) \subset X$ é uma sequência $(Ce)_c$, para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, segue

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n \nabla\varphi + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f(v_n)f'(v_n)\varphi \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*-1} f'(v_n^+)\varphi - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,f(v_n))f'(v_n)\varphi \ \to \ 0. \end{aligned}$$

Logo, devemos verificar que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla v_n - \nabla v)\nabla\varphi + \int_{\mathbb{R}^N}\left[f(v_n)f'(v_n) - f(v)f'(v)\right]V(x)\varphi & \\
- \int_{\mathbb{R}^N}[|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*-1}f'(v_n^+) - |f(v^+)|^{2\alpha 2^*-1}f'(v^+)]K(x)\varphi & \qquad (5.15)\\
- \int_{\mathbb{R}^N}\left[g(x,f(v_n))f'(v_n) - g(x,f(v))f'(v)\right]\varphi \ \ \rightarrow \ \ 0. &
\end{aligned}$$

Notemos que, pelo Lema 1.4-(10), (7) e a continuidade de K, obtemos uma constante $C>0$ tal que

$$\begin{aligned}
\left|K(x)|f(v_n^+)|^{2\alpha 2^*-1}f'(v_n^+)\varphi\right| &\leq C|f(v_n^+)|^{2\alpha(2^*-1)}|f(v_n^+)|^{2\alpha-1}|f'(v_n^+)|\,|\varphi|\\
&\leq \frac{C}{\sqrt{2\alpha}}(2\alpha)^{\frac{2^*-1}{2}}|v_n|^{2^*-1}|\varphi|\\
&\leq C(2\alpha)^{\frac{2^*-2}{2}}|w_{2^*-1}|^{2^*-1}|\varphi|.
\end{aligned}$$

Então, argumentando como no Lema 3.6 do Capítulo 3, usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e a convergência fraca $v_n \rightharpoonup v$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, obtemos (5.15). O Lema 5.7 está demonstrado. □

5.2.1 Demonstração do Teorema 5.1

Agora demonstramos, de fato, o Teorema 5.1.

Inicialmente, invocamos o Corolário 5.3 para encontrarmos uma sequência de Cerami no nível c, isto é, $(v_n)\subset X$ tal que

$$I(v_n)\to c\geq\tau>0 \quad \text{e} \quad \|I'(v_n)\|(1+\|v_n\|)\to 0, \quad \text{quando } \ n\to\infty,$$

com c dado pelo Teorema 1.1. Aplicando o Lema 5.4, podemos supor, sem perda de generalidade, que $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Do Lema 5.7, temos que v é uma solução para o Problema (5.3). Agora, supomos por contradição, que zero seja a única solução para o Problema (5.3). Em vista da Proposição 5.5, segue-se $0<\tau\leq c<\frac{1}{2\alpha N}\|K\|_\infty^{(2-N)/2}S^{N/2}$. Logo, tendo em vista o Lema 5.6, obtemos $c=0$, que é uma contradição.

Mostremos agora que $v>0$ em $\mathbb{R}^N$. Já sabemos do Capítulo 4, que $v\geq 0$ e $v\in C^{1,\beta}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para algum $\beta\in(0,1)$. Agora, desde que $g\geq 0$, como no Capítulo 2, obtemos $v>0$. A demonstração do Teorema 5.1 está concluída. □

Referências Bibliográficas

[1] Alves, C.O., do Ó, J.M., Miyagaki, O.H.: On nonlinear perturbations of a periodic in $\mathbb{R}^2$ involving critical growth. Nonlinear Anal. **56** (2004), 781–791.

[2] Ambrosetti, A., Rabinowitz, P.H.: Dual variational methods in critical point theory and applications. J. Funct. Anal. **14** (1973), 349–381.

[3] Bass, F.G., Nasanov, N.N.: Nonlinear electromagnetic-spin waves. Phys. Rep. **189** (1990), 165-223.

[4] Ben-Naoum, A.K., Troestler, C., Willem, M.: Extrema problems with critical Sobolev exponents on unbounded domains. Nonlinear Anal. **26** (1996), 823-833.

[5] Berestycki, H., Gallouët, T., Kavian, O.: Équations de Champs scailares euclidiens non linéaires dans le plan, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **297** (1983), 307–310.

[6] Berestycki, H., Lions, P.L.: Nonlinear scalar field equations, **I**: Existence of a ground state. Arch. Rational Mech. Anal. **82** (1982), 313–346.

[7] Borovskii, A.V., Galkin, A.L.: Dynamical modulation of an ultrashort high-intensity laser pulse in matter. JEPP **77** (1993), 562–573.

[8] Brandi, H.S., Manus, C., Mainfray, G., Lehner, T., Bonnaud, G.: Relativistic and ponderomotive self-focusing of a laser beam in a radially inhomogeneous plasma. Phys. Fluids B **5** (1993), 3539–3550.

[9] Brézis, H., Nirenberg, L.: Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), 437–477.

[10] Capel, H.W., Quispel, G.R.W.: Equation of motion for the Heisenberg spin chain. Phys. A. **110** (1982), 41–80.

[11] Chabrowski, J., Yang, J.: On Schrödinger equation with periodic potential and critical Sobolev exponent. Topol. Methods Nonlinear Anal. **12** (1998), 245–261.

[12] Chen, X.L., Sudan, R.N.: Necessary and sufficient conditions for self-focusing of short ultraintense laser pulse. Phys. Rev. Lett. **70** (1993), 151–171.

[13] Colin, M., Jeanjean, L.: Solutions for a quasilinear Schrödinger equation: a dual approach. Nonlinear Anal. **56** (2004), 213–226.

[14] Costa, D.G., Magalhães, C.A.: Variational elliptic problems which are nonquadratic at infinity. Nonlinear Anal. **23** (1994), 1401–1412.

[15] Coti Zelati, V., Rabinowitz, P.H.: Homoclinic type solutions for a semilinear elliptic PDE on $\mathbb{R}^N$. Comm. Pure Appl. Math. **45** (1992), 1217–1269.

[16] de Bouard, A., Hayashi, N., Saut, J.-C.: Global existence of small solutions to a relativistic nonlinear Schrödinger equation. Comm. Math. Phys. **189** (1997), 73–105.

[17] Del Pino, M., Felmer, P.L.: Local Mountain Pass for semilinear elliptic problems in unbounded domains. Cal. Var. Partial Differential Equations **4** (1996), 121–137.

[18] Ding, W.Y., Ni, W.M.: On the existence of positive entire solution of a semilinear elliptic equations. Arch. Rational Mech. Anal. **91** (1986), 283–308

[19] do Ó, J.M., Miyagaki, O.H., Soares, S.H.M.: Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations: The critical exponential case. Nonlinear Anal. **67** (2007), 3357–3372.

[20] do Ó, J.M., Miyagaki, O.H., Soares, S.H.M.: Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations with critical growth. J. Differential Equations **248** (2010), 722–744.

[21] do Ó, J.M., Moameni, A.: Solitary waves for quasilinear Schrödinger equations arising in plasma physics. Adv. Nonlinear Stud. **9** (2009), 479–497.

[22] do Ó, J.M., Moameni, A., Severo, U.B.: Semi-classical states for quasilinear Schrödinger equations arising in plasma physics. Commun. Contemp. Math. **11** (2009), 547–583.

[23] do Ó, J.M., Severo, U.B.: Quasilinear Schrödinger equations involving concave and convex nonlinearities. Commun. Pure Appl. Anal. **8** (2009), 621–644.

[24] do Ó, J.M., Severo, U.B.: Solitary waves for a class of quasilinear Schrödinger equations in dimension two. Calc. Var. Partial Differential Equations, in press.

[25] Ekeland, I.: On the variational principle. J. Math. Anal. Appl. **47** (1974), 324–353.

[26] Fedyanin, V.K., Makhankov, V.G.: Nonlinear effects in quasi-one-dimensional models of condensed matter theory. Phys. Rep. **104** (1984), 1–86.

[27] Floer, A., Weistein, A.: Lectures Nonspreading wave packets for the cubic Schrödinger equation with a bounded potential. J. Funct. Anal. **96** (1986), 397–408.

[28] Gilbarg, D., Trudinger, N.S.: Elliptic partial differential equations of second order, 2nd ed. Springer–Verlag, Berlin (1983).

[29] Goldman, M.V., Porkolab, M.: Upper hybrid solitons and oscillating-two-stream instabilities. Phys. Fluids **19** (1976), 872–881.

[30] Hasse, R.W.: A general method for the solution of nonlinear soliton and kink Schrödinger equations. Z. Physik B **37** (1980), 83–87.

[31] Homma, S., Takeno, S.: Classical planar Heisenberg ferromagnet, complex scalar fields and nonlinear excitations. P. Phys. **65** (1981), 172–189.

[32] Ivanov, B.A., Kosevich, A.M., Kovalev, A.S.: Magnetic solitons. Phys. Rep. **194** (1990), 117–238.

[33] Jabri, Y.: The Mountain Pass Theorem: variants, generalizations and some applications. In: Encyclopedia of mathematics and its applications. Cambridge University Press (2003).

[34] Kryszewski, W., Szulkin, A.: Generalized linking theorem with an application to semilinear Schrödinger equation. Adv. Differential Equations **3** (1998), 441–472.

[35] Kurihara, S.: Large-amplitude quasi-solitons in superfluid films. J. Phys. Soc. Japan **50** (1981), 3262–3267.

[36] Laedke, E.W., Spatschek, K. H., Stenflo, L.: Evolution theorem for a class of perturbed envelope soliton solutions. J. Math. Phys. **24** (1983), 2764–2769.

[37] Lange, H., Toomire, B., Zweifel, P.F.: Time-dependent dissipation in nonlinear Schrödinger systems. J. Math. Phys. **36** (1995), 1274–1283.

[38] Lins, H.F.: Equações elípticas quasilineares assintoticamente periódicas com crescimento crítico. Doctoral Dissertation, UnB (2004).

[39] Lins, H.F., Silva, E.A.B.: Quasilinear asymptotically periodic elliptic equations with critical growth. Nonlinear Anal. **71** (2009), 2890–2905.

[40] Lions, P. L.: The concentration–compactness principle in the calculus of variations. The limit case, part 1, 2. Rev. Mat. Iberoamericana **1** (1985), 145–201, 45–121.

[41] Litvak, A.G., Sergeev, A.M.: One dimensional collapse of plasma waves. JETP Lett. **27** (1978), 517–520.

[42] Liu, Z., Wang, Z.-Q.: Schrödinger equations with concave and convex nonlinearities. Z. Angew. Math. Phys. **56** (2005), 609–629.

[43] Liu, J., Wang, Z.-Q.: Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations I. Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2002), 441–448.

[44] Liu, J., Wang, Y.-Q., Wang, Z.-Q.: Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations II. J. Differential Equations **187** (2003), 473–493.

[45] Liu, J., Wang, Y.-Q., Wang, Z.-Q.: Solutions for quasilinear Schrödinger equations via the Nehari Method. Comm. Partial Differential Equations **29** (2004), 879–901.

[46] Moameni, A.: Existence of soliton solutions for a quasilinear Schrödinger equation involving critical exponent in $\mathbb{R}^N$. J. Differential Equations **229** (2006), 570–587.

[47] Moameni, A.: On a class of periodic quasilinear Schrödinger equations involving critical growth in $\mathbb{R}^2$. J. Math. Anal. Appl. **334** (2007), 775–786.

[48] Moameni, A.: On the existence of standing wave solutions to quasilinear Schrödinger equations. Nonlinearity **19** (2006), 937–957.

[49] Nakamura, A.: Damping and modification of exciton solitary waves. J. Phys. Soc. Japan **42** (1977), 1824–1835.

[50] Pankov, A.A.: Semilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ with nonstabilizing coefficients. Ukrain. Math. Zh. **41** (1989), 1247–1251 ; translation in Ukrainian Math. J. **41** (1990), 1075–1078.

[51] Pankov, A.A., Pflüger, K.: On a semilinear Schrödinger equation with periodic potential. Nonlinear Anal. **33** (1998), 593–609.

[52] Poppenberg, M., Schmitt, K., Wang, Z.-Q.: On the existence of soliton solutions to quasilinear Schrödinger equations. Calc. Var. Partial Differential Equations **14** (2002), 329–344.

[53] Rabinowitz, P.H.: A note on a semilinear elliptic equation on $\mathbb{R}^N$. Nonlinear analysis, 307–317, Sc. Norm. Super. di Pisa Quaderni, Scuola Norm. Sup., Pisa, (1991).

[54] Rabinowitz, P. H.: Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations. CBMS Conf. Ser. in Math. **65** Amer. Math. Soc., (1986).

[55] Rabinowitz, P.H.: On a class of nonlinear Schrödinger equations. Z. Angew. Math. Phys. **43** (1992), 270–291.

[56] Ritchie, B.: Relativistic self-focusing and channel formation in laser-plasma interactions. Phys. Rev. E **50** (1994), 687–689.

[57] Severo, U.B.: Estudo de uma classe de equações de Schrödinger quaselineares. Doctoral Dissertation, UNICAMP (2007).

[58] Silva, E.A.B., Vieira, G.F.: Quasilinear asymptotically periodic Schrödinger equations with critical growth. Calc. Var. Partial Differential Equations, in press.

[59] Silva, E.A.B., Vieira, G.F.: Quasilinear asymptotically periodic Schrödinger equations with subcritical growth. Nonlinear Anal. **72** (2010), 2935–2949.

[60] Sotomayor, J.: Lições de Equações Diferenciais Ordinárias. IMPA, Rio de Janeiro (1979).

[61] Strauss, W.A.: Existence of solitary waves in higher dimensions. Comm. Math. Phys. **55** (1977), 149–162.

[62] Struwe, M.: Variational methods: Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1996).

[63] Troestler, C., Willem, M.: Nontrivial solution of a semilinear Schrödinger equation. Comm. Partial Differential Equations **21** (1996), 1431–1449.

[64] Willem, M.: Minimax Theorems. Birkhäuser, Basel (1996).