Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Existência e não existência de grandes soluções inteiras para problemas elípticos semilineares

por

Sunamita Souza Silva

Brasília, 2010

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à meus pais,
pelo amor que sempre me dedicaram
e pelo apoio incondicional.
À vocês o meu amor e reconhecimento eterno...

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus pelo dom da vida e pelas oportunidades maravilhosas que tem me proporcionado.

Serei eternamente grata pelo amor, apoio e incentivo dos meus pais, pessoas que sempre lutaram para que pudesse realizar meus sonhos. Sem a força de vocês eu jamais conseguiria chegar até aqui.

Quero agradecer ao meu irmão Samuel que sempre torceu pelo meu sucesso e à minha irmãnzinha Sueylla Sunamita que mesmo tão pequena me enche de alegrias.

Aos meus tios Júnior e Neide, e primos Jéssica e Lucas o meu muito obrigada pelo apoio e carinho. Também agradeço minha prima Senhorinha, por ter participado deste momento tão especial para mim.

Agradeço pelo amor, companhia e paciência do meu namorado Renato, sempre ao meu lado, me tranquilizando em momentos difíceis.

Aos meu amigos Thaynara (minha irmãnzinha), Ana Paula, Brunão, Kaliana, Adriana, Kélem, Tarcísio, Wembesom, Wesley, Marcelo, Mariana, Bruninho, Eduardo e outros quero agradecê-los pela companhia e incentivo. Os momentos que passei ao lado de vocês meu deram forças para continuar. Essa conquista devo muito à vocês.

Os meus sinceros agradecimentos ao meu orientador Carlos Alberto. Obrigada pela atenção, paciência, dedicação e principalmente pela postura séria, com a qual aprendi e muito cresci. Muito obrigada também pela confiança depositada em mim.

Agradeço aos professores participantes da banca José Valde Abreu Gonçalves, Marcelo Furtado e Antônio Luís por terem aceito o convite e também pelas correções e sugestões.

Me senti honrrada com a participação de vocês em meu trabalho.

Aos funcionários Eveline, Sr. Manuel, Sr. Pereira, Célia, Cláudia e Irene, obrigada pela amizade e pelo carinho.

Enfim, obrigada a todos aqueles que participaram e torceram para a concretização de mais um dos meus sonhos.

Sumário

Sumário **v**

1 Noções Preliminares e Resultados auxiliares **8**

1.1 Espaços de Schauder e Sobolev 8

1.2 Princípios de Máximo, de Comparação e Regularidades 10

1.3 Teorema de Sub e Supersolução 13

1.4 Sobre os problemas $(P)_{p,f}$ e $(P)_{f,g}$ na forma radial. 15

1.5 Sobre a classe de problemas $(P)_{f,g}$ em domínios limitados 17

1.6 Funções Gama e Bessel 19

2 Existência de Soluções **20**

2.1 Demonstração do Teorema LM_1 21

2.2 Demonstração do Teorema LM_2 32

2.3 Aplicações dos Teoremas LM_1 e LM_2 36

2.3.1 Demonstração do Corolário 2.1. 37

2.3.2 Demonstração do Corolário 2.2 38

2.4 Exemplos 38

3 Relações de existência e não existência entre $(P)_{f,g}$ e $(P)_{p,f}$ **41**

3.1 Resultados de existência para a classe $(P)_{p,f}$ 41

3.2 Demonstração do Teorema M_1 43

3.3 Demonstração do Teorema M_2 44

A Demonstração de resultados auxiliares **50**

A.1 Demonstração do Lema 1.21 50

A.2 Demonstração do Lema 1.22 51

A.3 Demonstração do Lema 1.23 55

A.4 Demonstração do Lema 1.24 56

A.5 Demonstração do Lema 1.25 58

A.6 Demonstração do Lema 1.27 59

A.7 Demonstração da Afirmação 2.6 61

A.8 Existência de solução para $(P)_{p+q}$ 66

B Demonstrações de resultados técnicos **68**

B.1 Demonstração da Proposição 1.11 68

B.2 Demonstração da Proposição 1.12 69

Referências Bibliográficas **70**

Resumo

Neste trabalho, focaremos principalmente nas questões de existência e não existência de grandes soluções inteiras para uma classe de problemas elípticos semilineares cuja pertubação não linear do operador é constituída pela soma de dois termos.

Além disso, também estabeleceremos alguns resultados que enfatizam a interdependência de existência e não existência de soluções entre a classe de problema em que a pertubação do operador possui um único termo e àquela formada por dois termos não lineares.

Palavras-chave: Existência e não existência de soluções, Subsolução e Supersolução, Grandes soluções inteiras, Problemas semilineares elípticos.

Abstract

In this work, we will focus mainly on issues of existence and non-existence of large entire positive solutions for a class of semi-linear elliptic problems whose the nonlinear perturbation of operator is formed by a sum of two terms.

Moreover, also we will establish some results than emphasize the interdependency of existence and non-existence of solutions amongst the classes of problem in that the perturbation of the operator has a unique term and that constituted by two nonlinear terms.

Palavras-chave: Existence and nonexistence o solutions, Subsolution and Supersolution, Entire large solutions, Semilinear elliptic problems.

Introdução

Neste trabalho, consideraremos a seguinte classe de problemas de equações diferenciais parciais elípticas semilineares

$$(P)_{f,g} \qquad \begin{cases} \triangle u = p(x)f(u) + q(x)g(u), \ \mathbb{R}^N \\ \\ u \geq 0, \ u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \end{cases}$$

onde $N \geq 3$, $\triangle$ é o operador Laplaciano; $f, g : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ e $p, q : \mathbb{R}^N \longrightarrow [0, \infty)$ são funções contínuas.

Adicionalmente assumiremos na maior parte desse trabalho que f e g são funções continuamente diferenciáveis no intervalo $I = [0, \infty)$ e admitiremos também

$$(f_0) \qquad f(0) = g(0) = 0; \quad f(s), g(s) > 0 \text{ e } f'(s), g'(s) \geq 0, \ \forall \ s > 0,$$

e

$$(p_0) \qquad p, q \in C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^N)(\theta \in (0, 1)).$$

A classe de problemas $(P)_{f,g}$ se reduz ao problema com um só termo na pertubação não linear do operador se tomarmos por exemplo $q = 0$, ou seja,

$$(P)_{p,f} \qquad \begin{cases} \triangle u = p(x)f(u), \ \mathbb{R}^N \\ \\ u \geq 0, \ u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \end{cases}$$

que inicialmente despertou e motivou os estudos para a classe de problemas $(P)_{f,g}$.

Neste trabalho estaremos principalmente interessados em estudar questões de existência, não existência de soluções para os problemas $(P)_{p,f}$ e $(P)_{f,g}$ e também como esses problemas se relacionam. Isto é, estudaremos condições sobre p, q, f e g que garantam a existência e não existência de funções não negativas, não nulas, inteiras e clássicas

$u : \mathbb{R}^N \to [0, \infty)$, que satisfazem os problemas $(P)_{f,g}$ e $(P)_{p,f}$. Estas soluções são conhecidas como "grandes soluções inteiras" dos problemas $(P)_{f,g}$ e $(P)_{p,f}$, respectivamente.

Além disso, mostraremos que a interdependência entre essas duas classes de problemas se dá principalmente no sentido de que, sob condições apropriadas para os termos p, q, f e g podemos mostrar que:

(i) existência de solução para $(P)_{f,g}$ implica na existência de solução para $(P)_{p,f}$ (Teorema LM_2);

(ii) não existência de solução para $(P)_{p,f}$ implica na não existência de solução para $(P)_{f,g}$ (Teorema M_1);

(iii) existência de solução para $(P)_{p,f}$ e para $(P)_{q,g}$, mas não existência de solução para $(P)_{f,g}$ (Teorema M_2).

O estudo da classe de problemas $(P)_{p,f}$ foi motivado principalmente por modelos físicos e geométricos. Por exemplo: "se uma métrica Rimaniana é da forma $|ds|^2 = e^{2u(x)}|dx|^2$ e tem curvatura Gaussiana constante $-c^2$, então a função u deve satisfazer $\triangle u = c^2 e^{2u}$ ".

Em 1916, Bierbach [3] mostrou a existência de uma única solução para o problema

$$\begin{cases} \triangle u = e^u, \ \Omega \\ \\ u(x) \overset{x \to \partial\Omega}{\longrightarrow} \infty \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio limitado regular. Além disso, Bierbach também mostrou que essa única solução satisfaz $u(x) - log(dist(x, \partial\Omega)^{-2})$ limitada quando $dist(x, \partial\Omega) \to 0$.

Ao estudar um problema físico matemático, mais especificamente o estudo de potenciais elétricos em corpos metálicos, Rademacher [24] em 1943 deparou-se com o mesmo problema de Bierbach em domínios limitados do $\mathbb{R}^3$ e continuou o seu estudo.

Em 1992, Cheng e Ni [6] provaram que o problema

$$(P)_{p,u^\alpha} \qquad \begin{cases} \triangle u = p(x)u^\alpha, \ \mathbb{R}^N \\ \\ u \geq 0, \ u(x) \overset{|x| \to \infty}{\longrightarrow} \infty, \end{cases}$$

possui uma única solução positiva se $p : \mathbb{R}^N \longrightarrow [0, \infty)$ é de classe C^1 com $|x|^m p(x)$ limitada para $|x|$ grande, para algum $m > 2$ e $\alpha > 1$.

Lair [14] em 1999, concluiu que se f satisfaz a condição de Keller-Osserman, isto é,

$$(f_1) \qquad \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{F(t)}} dt < \infty, \ \text{com} \ F(t) = \int_0^t f(s)ds,$$

e p satisfaz

$$(p_1) \qquad \int_0^\infty tp^*(t)dt < \infty, \quad p^*(t) := \max_{|x|=t} p(|x|), \quad t \geq 0,$$

então $(P)_{p,f}$ possui uma solução. Em particular $f(s) = s^\alpha$ satisfaz (f_1) se, e somente se, $\alpha > 1$.

Um outro importante resultado acerca do problema $(P)_{p,u^\alpha}$, com p contínua, não negativa, não nula e radial, isto é

$$p^*(t) := p_*(t) := \min_{|x|=t} p(|x|), \quad t \geq 0$$

foi provado por Lair [15] em 2000 que mostrou que o problema $(P)_{p,u^\alpha}$, com $0 < \alpha \leq 1$, possui solução se, e somente se, p satisfaz

$$(p_2) \qquad \int_0^\infty tp_*(t)dt = \infty.$$

No caso de f não satisfazer Keller-Osserman, ou seja,

$$(f_2) \qquad \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{F(t)}}dt = \infty,$$

Lair [17] em 2007, provou que o problema $(P)_{p,f}$ possui pelo menos uma solução se p é radial e, adicionalmente se satisfaz (p_2).

Ainda em 2007, El Marbrouk e Hansen [21] também estudaram a classe de problemas $(P)_{p,f}$ sob condições um pouco diferentes daquelas admitidas em [17]. Ao supor que p é não radial, eles mostraram que uma restrição em p é necessária. Nesse trabalho concluíram que p deve ser assintoticamente radial, ou seja,

$$p_{osc}(t) \to 0, \quad \text{quando } t \to \infty,$$

onde

$$p_{osc}(t) := p^*(t) - p_*(t), \; t \geq 0. \tag{1}$$

Além disso, eles consideraram uma condição mais forte para f. Assumiram que f deve satisfazer

$$(f_3) \qquad \int_1^\infty \frac{1}{f(t)}dt = \infty.$$

Com alguns cálculos mostraremos, no Lema 1.23, que (f_3) implica (f_2).

De volta à classe de problemas $(P)_{f,g}$, consideremos as seguintes condições:

$$(p_3) \qquad \int_0^\infty tp_{osc}(t)f(\psi^{-1}(\hat{p}(t)))dt < \infty,$$

onde denotamos por ψ^{-1} a inversa da função crecente ψ, definida por

$$\psi(t) := \int_1^t \frac{1}{f(s)} ds, \ t > 0,$$

e

$$\hat{p}(t) = \int_0^t sp(s)ds, \ t > 0,$$

e a condição

$$(q_1) \qquad \int_0^\infty tq^*(t)g(\psi^{-1}\hat{p}(t))dt < \infty, \text{ onde } q^*(t) = \max_{|x|=t} q(|x|), \ t \geq 0.$$

No que segue enunciaremos os teoremas principais deste trabalho. Começaremos enunciando um recente teorema de existência de solução para o problema $(P)_{f,g}$ (Lair e Mohammed [19] – 2009).

Teorema LM_1**:** *Suponha que p e q satisfazem (p_0) e f e g satisfazem (f_0). Adicionalmente, admita $(f_3), (p_3)$ e (q_1) . Então, se p satisfaz (p_2), o problema $(P)_{f,g}$ possui pelo menos uma solução.*

Além de garantir a existência e não existência de solução para $(P)_{f,g}$, queremos estudar relações entre os problemas $(P)_{p,f}$ e $(P)_{f,g}$. Algumas delas estão explícitadas nos teoremas abaixo, onde o primeiro é devido à Lair e Mohammed [19] (2009) e o seguinte, devido à Magdalena [5] (2009).

Teorema LM_2**:** *Suponha que f e g satisfaçam (f_0). Se o problema $(P)_{f,g}$ possui solução, f satisfaz (f_1) e p é positiva em $\mathbb{R}^N$, então o problema $(P)_{p,f}$ posui solução. Se $f+g$ satisfaz (f_1), o problema*

$$\begin{cases} -\triangle w = p(x) + q(x), \ \mathbb{R}^N \\ \\ w \geq 0, \ w(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{cases}$$

admite uma solução não negativa e ξ é positiva em $\mathbb{R}^N$, onde $\xi(x) = min\{p(x), q(x), \ x \in \mathbb{R}^N\}$, então o problema $(P)_{f,g}$ possui solução.

O teorema que segue abaixo exibe um caso em que o problema $(P)_{f,g}$ não possui solução se $(P)_{p,f}$ não possuir.

Teorema (M_1)**:** *Suponha que $p \in C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ $(0 < \theta < 1)$ é positiva em $\Omega_n = B_n(0)$ e que são válidas as hipóteses abaixo:*

$$(f_4) \qquad f(s) = s^\beta, s \geq 0,$$

e

$$(g_1) \qquad g(s) = s^\alpha h(s), \ s \geq 0; h : [0,\infty) \overset{C^1}{\to} [1,\infty); \ h' \geq 0.$$

Se $\beta > 1$, então o problema $(P)_{f,g}$ não possui solução se $(P)_{p,f}$ não possuir.

Definição 0.1. *Dizemos que p é c-positiva em $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, domínio limitado, se $p(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in \Omega$, então existir um domínio Ω_0 com $x_0 \in \Omega_0 \subset\subset \Omega$ tal que $p > 0$ em $\partial\Omega_0$ e que p é c-positiva em $\mathbb{R}^N$, se existir uma sequência de domínios $\{\Omega_n\}$ regulares e limitados com $\Omega_n \subset\subset \Omega_{n+1}$ para todo n, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \mathbb{R}^N$ e p é c-positiva em cada Ω_n.*

Observação 0.1.1. *O Teorema LM_2 continua válido se trocarmos a hipótese de p e ξ positivas por p e ξ são c-positivas em $\mathbb{R}^N$.*

Uma pergunta interessante a se fazer é a seguinte: "se os problemas $(P)_{p,f}$ e $(P)_{q,g}$ possuírem soluções, então $(P)_{f,g}$ também possuirá? "A resposta é: "nem sempre". Temos casos em que existem soluções para $(P)_{p,f}$ e $(P)_{q,g}$, mas $(P)_{f,g}$ não admite solução.

Em 2008 Lair [18] mostrou que o problema

$$(P)_{1,u} \qquad \begin{cases} \triangle u = u, \ \mathbb{R}^N \\ \\ u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \end{cases}$$

e

$$(P)_{e^{-|\cdot|},u^\alpha} \qquad \begin{cases} \triangle u = e^{-|x|}u^\alpha, \ \mathbb{R}^N \\ \\ u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \end{cases}$$

possuem soluções não nulas, no entanto, o problema

$$(P)_{u,u^\alpha} \qquad \begin{cases} \triangle u = u + e^{|x|}u^\alpha, \ \mathbb{R}^N \\ \\ u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \end{cases}$$

não possui solução para $\alpha > 2$.

Um resultado mais geral que [18] foi apresentado no mesmo ano por Magdalena [4], onde provou-se que para $h : [0, \infty) \longrightarrow [1, \infty)$, com $h' \geq 0$ de classe C^1, então os problemas $(P)_{1,u}$ e

$$(P)_{e^{-|\cdot|^a},h} \qquad \begin{cases} \triangle u = e^{-|x|^a}u^\alpha h(u), \ \mathbb{R}^N \\ \\ u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \end{cases}$$

possuem soluções, mas o problema

$$(P)_{u,h} \qquad \begin{cases} \triangle u = u + e^{|x|^a}u^\alpha h(u), \ \mathbb{R}^N \\ \\ u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \end{cases}$$

não admite solução para $\alpha > 2$ e $a \geq 1$.

Um outro teorema que relaciona $(P)_{p,f}$, $(P)_{q,g}$ e $(P)_{f,g}$ e que generaliza os casos anteriores, por não considerar $p = 1$ em $(P)_{p,u}$ é o teorema abaixo, devido à Magdalena [5] (2009).

Teorema M_2: *Suponha* (f_4) *e* (g_1) . *Além disso, admita que* $p \in C(\mathbb{R}^N)$ *é radial e satisfaz* (p_2); q *localmente Hölder contínua para* $0 < \theta \leq 1$ *satisfaz*

$$(q_2) \qquad \int_0^\infty tq^*(t)dt < \infty$$

e $q(x) \geq e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}^N$. *Então, se* $\beta = 1$ *e* $\alpha > 2$, *os problemas* $(P)_{p,f}$ *e* $(P)_{q,g}$ *admitem soluções, mas* $(P)_{f,g}$ *não admite.*

A fim de ilustrar o Teorema LM_1 apresentaremos o seguinte:

Exemplo 1: O problema

$$(P)_{u^\alpha,u^\beta} \qquad \begin{cases} \triangle u = p(x)u^\alpha + q(x)u^\beta, & \mathbb{R}^N \\ \\ u \geq 0, \quad u(x) \stackrel{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \end{cases}$$

com:

(i) p e q admitem (p_0) e p satisfazendo (p_2);

(ii) $0 < \alpha \leq 1 < \beta$;

(iii) $\displaystyle\int_0^\infty tq^*(t)e^{\beta\hat{p}(t)}dt < \infty;$ onde $q^*(t) = \max_{|x|=t} q(|x|),\ t \geq 0, \hat{p}(t) = \displaystyle\int_0^s p_*(s)ds$ e

(iv) $\int_0^\infty tp_{osc}(t)e^{\beta\hat{p}(t)}dt < \infty$,

admite uma solução pelo Teorema (LM_1).

Nosso trabalho está dividido da seguinte forma:

No Capítulo 1 apresentamos algumas definições e resultados clássicos de Análise e Equações Diferenciais Parcias que foram usados durante nossas demonstrações. Também serão enunciados resultados de existência para problemas radias que serão auxiliares para garantir a existência de solução de nossos problemas mais gerais. E por último enunciaremos resultados importantes para a classe de problemas $(P)_{p,f}$ em domínios limitados que serão importantes nas demonstrações de nossos teoremas principais.

No Capítulo 2 estudamos o problema $(P)_{f,g}$, tratando a questão de existência de soluções positivas usando principalmente o Teorema de Sub e Supersolução.

No Capítulo 3 tratamos das relações entre os problemas $(P)_{f,g}$ e $(P)_{p,f}$.

Finalizamos o trabalho com dois apêndices. No primeiro estão demonstrados alguns resultados intimamente relacionados à classe de problemas $(P)_{f,g}$, e no o segundo estão demonstrados apenas alguns resultados técnicos utilizados.

Capítulo 1

Noções Preliminares e Resultados auxiliares

Neste capítulo, faremos uma breve revisão de alguns tópicos de Espaços de Banach, Equações Diferenciais Parciais e teoremas importantes para o desenvolvimento do nosso trabalho, tais como teoremas de regularidades, princípios de máximo e comparação, imersões, existência de soluções radias assim como existência de grande soluções para $(P)_{f,g}$ em domínios limitados.

1.1 Espaços de Schauder e Sobolev

Faremos uma breve introdução sobre espaços de Schauder. Para isto vamos fazer algumas considerações iniciais, as quais foram baseadas no livro de Adams [1]. Seja $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N$ um multi-índice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$ tal que $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Dado um tal multi-índice e uma função $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, denotamos

$$D^\alpha u(x) = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \cdots \partial_{x_m}^{\alpha_m} u(x)$$

e, para $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$D^m u(x) := \{D^\alpha u(x) : \alpha \text{ é um multi-índice tal que } |\alpha| = m\}.$$

Com estas notações definimos, para $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$C^m(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N ; \exists\ D^\alpha u \text{ contínua } \forall \text{ multi-índice } \alpha \text{ com } |\alpha| \leq m\}.$$

Note que, se $u \in C(\Omega)$ for uniformemente contínua em Ω, podemos estender u continuamente (e de maneira única) para $\overline{\Omega}$. Sendo assim, temos:

$$C^m(\overline{\Omega}) = \{u \in C^m(\Omega); u \text{ limitada e uniformemente contínua em } \Omega\}.$$

O espaço $C^m(\overline{\Omega})$ munido da norma $\|.\|_{C^m(\overline{\Omega})}$, é um espaço de Banach, onde

$$\|u\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_0 \text{ e } \|u\|_0 = \max_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)|.$$

Definição 1.1. *Dado $0 < \theta \leq 1$ e uma função $u \in C(\overline{\Omega})$, dizemos que u é Hölder contínua com expoente θ se*

$$H_\theta[u] = \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\theta} < \infty.$$

O fato importante é que se denotarmos por

$$C^{0,\theta}(\overline{\Omega}) = \{u \in C(\overline{\Omega}) : H_\theta[u] < \infty\},$$

então $C^{0,\theta}(\overline{\Omega})$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})} = \|u\|_0 + H_\theta[u], \ \forall\ u \in C^{0,\theta}(\overline{\Omega}).$$

Se $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, então

$$C^{m,\theta}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^m(\overline{\Omega}) : H_\theta[D^\alpha u] < \infty, \ \forall\ |\alpha| \leq m\},$$

também é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{C^{m,\theta}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C^m(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})}, \ \forall u \in C^{m,\theta}(\overline{\Omega}).$$

O espaço $C^{m,\theta}(\overline{\Omega})$ é chamado *Espaço de Schauder.*

Temos ainda,

$$C^{m,\theta}(\Omega) = \{u \in C^m(\Omega) : u \in C^{m,\theta}(\overline{\Omega_0}), \ \forall\ \Omega_0 \subset\subset \Omega\} = C^{m,\theta}_{loc}(\Omega).$$

Em relação ao espaço $C^{0,\theta}_{loc}(\Omega)$, com Ω limitado temos o seguinte Teorema.

Teorema 1.2. *Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ com $\partial\Omega$ regular (com repeito ao Laplaciano). Se $p : \Omega \to \mathbb{R}$ é limitada e localmente Hölder contínua em Ω, então, dado uma função φ contínua em $\partial\Omega$, existe uma única solução clássica para o problema de Dirichlet*

$$(D) \qquad \begin{cases} \triangle u = p, \ \Omega \\ \\ u = \varphi, \ \partial\Omega \end{cases}$$

Demonstração. Confira Gilbarg - Trudinger [11], Corolário 3.2, pág 32. ∎

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $m \geq 0$ um inteiro, $1 \leq p < \infty$, e α um multi-índice. Denotamos,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \quad / \quad D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ para todo } \alpha \text{ com } |\alpha| \leq m\},$$

sendo $D^\alpha u$ a derivada de u no sentido das distribuições e

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ é mensurável e } \int_\Omega |u|^p < \infty\}.$$

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left[\sum_{|\alpha|\leq m} \left(\int_\Omega |D^\alpha u|^p dx\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

é um espaço de Banach, chamado *Espaço de Sobolev.*

O espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ é definido como sendo o fecho no espaço $W^{m,p}(\Omega)$ das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω. Se $p = 2$, denotaremos $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$.

1.2 Princípios de Máximo, de Comparação e Regularidades

Vamos introduzir algumas definições importantes para então enunciarmos resultados de equações diferenciais parciais que serão usados posteriormente em nossas demostrações.

Seja L um operador diferencial linear de segunda ordem da forma

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x) D_{ij} u + \sum_{i=1}^{N} b^i(x) D_i u + c(x)u, \quad a^{ij} = a^{ji} \tag{1.1}$$

onde $x = (x_1, \cdots, x_N)$ pertence a um domínio Ω de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. Também vamos supor em todo este capítulo que a^{ij}, b^i e c estão em $L^\infty(\Omega)$.

Adotaremos as seguintes definições:

Definição 1.3. *L é elíptico em um ponto $x \in \Omega$ se a matriz coeficiente $[a^{ij}(x)]$ é positiva; isto é, se $\lambda(x), \Lambda(x)$ denotam respectivamente os auto-valores mínimo e máximo de $[a^{ij}(x)]$, então*

$$0 < \lambda(x)|\xi|^2 \leq a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x)|\xi|^2$$

para todo $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N - \{0\}$. Daí, se $\lambda > 0$ em Ω, então L é elíptico em Ω. E, se existe uma constante μ tal que $\Lambda/\lambda \leq \mu$, dizemos que L é um operador uniformemente elíptico em Ω com constante de elipticidade μ.

Um exemplo de operador diferencial linear de segunda ordem uniformemente elíptico é o Laplaciano, isto é, $L = \triangle$.

Agora, vamos apresentar teoremas de Princípio do Máximo, de Comparação que serão de extrema importância em nossas demostrações. Antes vejamos algumas definições:

Definição 1.4. *Se $u \in C(\overline{\Omega})$ definimos $u^+, u^- \in C(\overline{\Omega})$ como segue*

$$u^+ = \max\{u(x), 0\}, \quad x \in \Omega,$$

$$u^- = \max\{-u(x), 0\}, \quad x \in \Omega.$$

Observe que $u^+, u^- \geq 0$.

Teorema 1.5 (Princípio do Máximo Fraco para $c \leq 0$)**.** *Suponha que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $c \leq 0$ em Ω, L é uniformemente elíptico e Ω é um aberto limitado. Então:*

(i) *se $Lu \geq 0$ então $\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+$;*

(ii) *se $Lu \leq 0$ então $\min_{\overline{\Omega}} u \geq -\max_{\partial\Omega} u^-$.*

Demonstração. Conforme Gilbarg - Trudinger [11], Teorema 2, pág. 329. ∎

O próximo teorema é uma consequência imediata do teorema anterior.

Teorema 1.6 (Princípio de Comparação)**.** *Se L é uniformemente elíptico, $c \leq 0$, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e Ω um aberto limitado. Então*

(i) *se $Lu \geq 0$ e $u \leq 0$ em $\partial\Omega$, então $u \leq 0$ em $\overline{\Omega}$;*

(ii) *se $Lu \leq 0$ e $u \geq 0$ em $\partial\Omega$, então $u \geq 0$ em $\overline{\Omega}$.*

Demonstração.
(i) Como $Lu \geq 0$ então, pelo Teorema 1.5,

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+ \leq 0.$$

Assim, $u \leq 0$ em $\overline{\Omega}$.
O caso **(ii)** é análogo. ∎

Abaixo seguem algumas definições e teoremas de regularidade que serão usados posteriormente.

Definição 1.7. *Dizemos que o espaço normado X está imerso no espaço normado Y, e escrevemos $X \hookrightarrow Y$ para designar esta imersão, se*

(i) *X é um subespaço vetorial de Y, e*

(ii) *o operador identidade I definido de X em Y por $Ix = x$, para todo $x \in X$ é contínuo.*

Observação 1.7.1. *Desde que I é linear, **(ii)** é equivalente a existência de uma constante M tal que*

$$||Ix||_Y \leq M||x||_X, \qquad x \in X$$

onde $||.||_X$ e $||.||_Y$ são as normas dos espaços X e Y, respectivamente.

Definição 1.8. *Considere X e Y espaços normados. Dizemos que $T : X \longrightarrow Y$ é uma aplicação compacta se $T(A)$ é precompacto em Y quando A é limitado em X, isto é, $\overline{T(A)}^{||\cdot||_Y} \subset Y$ é compacto.*

Definição 1.9. *Dizemos que X está compactamente imerso em Y se o operador I é compacto.*

Teorema 1.10. *Sejam Ω um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^N$, com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1, $k \geq 1$ e $1 \leq p \leq \infty$. Se $kp \leq N$, então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^\theta(\Omega)$, onde:*

(i) *$\theta = k - \frac{N}{p}$ se $k - \frac{N}{p} < 1$;*

(ii) *$\theta \in [0, 1)$ é arbitrário se $k - \frac{N}{p} = 1$ e*

(iii) *$p > 1$ e $\theta = 1$ se $k - \frac{N}{p} > 1$.*

Demonstração. Conforme Ambrosetti [2], Lema 0.4, pág 4. ∎

Proposição 1.11. *Sejam $g : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 e $u : \Omega \longrightarrow (0, \infty) \in C^\theta_{loc}(\Omega)$. Então $g \circ u \in C^\theta_{loc}(\Omega)$.*

Demonstração. Confira (B.1) no Apêndice B. ∎

Proposição 1.12. *Sejam g e u definidas como na proposição anterior e $b : \Omega \longrightarrow (0, \infty)$ $\in C^\theta_{loc}(\Omega)$, $\theta \in (0, 1)$. Então $h(x) := b(x)g(u(x)) \in C^\theta_{loc}(\Omega)$.*

Demonstração. Confira (B.2) no Apêndice B. ∎

Teorema 1.13. *Sejam m um inteiro não negativo e $0 < \nu < \lambda \leq 1$. Então*

(i) $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega})$;

(ii) $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{m,\nu}(\overline{\Omega})$.

*Se Ω é limitado, então as imersões **(i)** e **(ii)** são compactas.*

Demonstração. Conforme Adams [1], Teorema 1.31, pág. 11. ■

Teorema 1.14 (Estimativa Interior de Schauder). *Sejam Ω um domínio aberto de $\mathbb{R}^N$, L um operador elíptico com coeficientes reais $a_{ij} \in C^\alpha(\Omega)$ e μ a constante de elipticidade de L. Então para, Ω_0 e Ω_1 abertos limitados, com $\overline{\Omega_0} \subset \Omega_1 \subset \overline{\Omega_1} \subset \Omega$ e $\overline{\Omega}$ compacto existe uma constante $C = C(\mu, \Omega_0, \Omega_1, ||u||_{C^\theta(\overline{\Omega_1}), a_{ij}})$ tal que*

$$||u||_{C^{2,\theta}(\Omega_0)} \leq C(||Lu||_{C^\theta(\Omega_1)} + ||u||_{C^0(\Omega_1)}), \ \forall \ u \in C^{2,\theta}(\Omega)$$

Demonstração. Confira Figueiredo [10], Teorema 1.7, pág. 11. ■

Teorema 1.15. *Sejam Ω um domínio aberto de $\mathbb{R}^N$ e $u \in C^2(\Omega)$, $f \in C^\theta_{loc}(\Omega)$, $\theta \in (0,1)$, tal que $\triangle u = f$ em Ω. Então $u \in C^{2,\theta}(\Omega)$ e para Ω_0, Ω_1 abertos limitados com $\Omega_0, \Omega_1 \subset \Omega$, $\overline{\Omega_0} \subset \Omega_1 \subset \Omega$ e $\overline{\Omega_1}$ compacto existe $k = k(\Omega_0, \Omega_1)$ tal que*

$$||u||_{C^{2,\theta}(\Omega_0)} \leq k(||u||_{C(\Omega_1)} + ||f||_{C^\theta}(\Omega_1)), \ \forall \ u \in C^{2,\theta}(\Omega)$$

Demonstração. Conforme Gilbarg - Trudinger [11],Teorema 4.6, pág. 59. ■

1.3 Teorema de Sub e Supersolução

Para demonstrar a existência de solução para o problema $(P)_{f,g}$, usamos o Princípio de sub e supersolução. Antes de enunciá-lo apresentaremos algumas definições:

Considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} Lu = f(x,u), \ \Omega \\ u = g, \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio aberto e regular e $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função apropriada e $g \in C(\partial\Omega)$.

Uma supersolução deste problema é uma função $\varphi \in C^2(\Omega) \cap C(\partial\Omega)$ satisfazendo:

$$\begin{cases} L\varphi \leq f(x,\varphi), \ \Omega \\ \varphi \geq g, \ \partial\Omega \end{cases}$$

Uma subsolução deste problema é uma função $\psi \in C^2(\Omega) \cap C(\partial\Omega)$ satisfazendo:

$$\begin{cases} L\psi \geq f(x, \psi), \ \Omega \\ \psi \leq g, \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Assumimos que $\partial\Omega, f$ e g e os coeficientes de L são regulares no que segue:

Abaixo descrevemos o Teorema de Sub e Supersolução para domínios limitados e para o $\mathbb{R}^N$ que serão ultilizado em nossas demostrações.

Teorema 1.16. *(Teorema de Sub e Supersolução para domínios limitados)Seja* $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função satisfazendo a seguinte condição:*

$$f(x, s) - f(x, t) \geq -c(s - t), \quad \forall s, t \in I. \tag{1.3}$$

Se ψ *e* φ *são uma subesolução e uma supersolução do problema (*1.2*) respectivamente, com*

$$\psi \leq \varphi, \quad \Omega$$

então o problema (1.2) *possui uma solução* $u \in C^{2,\theta}(\Omega)$ *tal que* $\psi \leq u \leq \varphi$*.*

Demonstração. Confira Sattinger [27]. ∎

Considerando $\Omega = \mathbb{R}^N$, temos

Teorema 1.17. *(Teorema de Sub e Supersolução para o* $\mathbb{R}^N$*) Suponha que* $\Phi \in C^2(\mathbb{R}^N)$ *seja uma supersolução de*

$$Lu + f(x, u) = 0, \ \mathbb{R}^N (N \geq 2), \tag{1.4}$$

ou seja,

$$L\Phi + f(x, u) \leq 0, \ \mathbb{R}^N$$

onde L *é um operador uniformemente elíptico de segunda ordem,* f *é uma função localmente Hölder contínua em* x *e localmente Lipschitz em* u*.*

Se $\psi \in C^2(\mathbb{R}^N)$ *é uma subsolução de* (1.4)*, ou seja*

$$L\psi + f(x, u) \geq 0, \ \mathbb{R}^N$$

com $\Phi \geq \psi$ *em* $\mathbb{R}^N$*. Então* (1.4) *possui uma solução* $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ *com*

$$\Phi \geq u \geq \psi.$$

Demonstração. Confira Ni [22]. ∎

Observação 1.17.1. *Note que uma função localmente Lipschitziana ou de classe* C^1 *satisfaz a condição* (1.3)*.*

1.4 Sobre os problemas $(P)_{p,f}$ e $(P)_{f,g}$ na forma radial.

Nesta seção enunciaremos alguns resultados técnicos que serão ultilizados durante as demonstrações dos resultados principais.

Uma importante ferramenta usada na demonstração do Teorema LM_1 é a equivalência entre as equações dos problemas $(P)_{p,f}$ e $(P_{rad})_{p,f}$ para funções radialmente simétricas, onde

$$(P_{rad})_{p,f} \qquad \begin{cases} (r^{N-1}v')' = r^{N-1}p(r)f(v), \ r > 0 \\ v(0) = \gamma \geq 0, \ v'(0) = 0. \end{cases}$$

Istó é,

Lema 1.18. *Sejam* $u : \mathbb{R}^N \xrightarrow{C^2} [0, \infty)$, $v : [0, \infty) \xrightarrow{C^2} [0, \infty)$ *e* $p : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ *radialmente simétrica. Então u satisfaz a equação de* $(P)_{p,f}$ *se somente se v satisfaz a equação de* $(P_{rad})_{p,f}$, *onde*

$$u(x) = v(|x|), \ x \in \mathbb{R}^N.$$

Demonstração. Temos por definição que

$$\triangle v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(v(|x|)). \tag{1.5}$$

Derivando v em relação à i-ésima coordenada ,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(v(|x|)) = \frac{x_i}{|x|}v'(|x|).$$

Derivando novamente, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(v(|x|)) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{|x|}v'(|x|)\right) \\ &= v''(|x|)\frac{x_i x_i}{|x||x|} + \frac{|x| - x_i|x|^{-1}x_i}{|x|^2}v'(|x|) \\ &= \frac{v''(|x|).x_i^2}{|x|^2} + \frac{|x| - x_i^2|x|^{-1}}{|x|^2}, \end{aligned}$$

substituindo a expressão acima em (1.5) temos que

$$\begin{aligned}\triangle v &= \sum_{i=1}^{n} \frac{v''(|x|)x_i^2}{|x|^2} + \frac{|x| - x_i^2|x|^{-1}}{|x|^2} \\ &= \frac{v''(|x|)|x|^2}{|x|^2} + \frac{n|x| - |x|^2|x|^{-1}}{|x|^2} v'(|x|) \\ &= v''(|x|) + \frac{|x|}{(N-1)} v'(|x|).\end{aligned}$$

Fazendo $|x| = r$ e substituindo a expressão acima em $\triangle v = p(|x|)f(v)$ obtemos

$$v''(r) + \frac{(N-1)}{r} v'(r) = p(r)f(v).$$

Mutiplicando ambos os lados da equação acima por r^{N-1}, segue que

$$r^{N-1}v''(r) + r^{N-1}\frac{(N-1)}{r}v'(r) = r^{N-1}p(r)f(v). \tag{1.6}$$

Note que

$$(r^{N-1}v'(r))' = r^{N-1}v''(r) + r^{N-1}\frac{(N-1)}{r}v'(r),$$

Substituindo a expressão acima em (1.6) temos

$$(r^{N-1}v'(r))' = r^{N-1}p(r)f(v).$$

■

Agora enunciaremos alguns teoremas importantes relativos à $(P_{rad})_{p,f}$. Antes relembremos o conceito de sub e supersolução para $(P_{rad})_{p,f}$.

Definição 1.19. *Dizemos que v é uma supersolução de $(P_{rad})_{p,f}$ em $[0, R]$ se $v \in C^2(0, R)$ e $(r^{N-1}v')' \leq p(r)f(v)$, $r \in (0, R)$ e $v(0) \geq \gamma$.*

Definição 1.20. *Dizemos que u é uma subsolução de $(P_{rad})_{p,f}$ em $[0, R]$ $u \in C^2(0, R)$ e $(r^{N-1}u')' \geq p(r)f(u)$ $r \in (0, R)$ e $u(0) \leq \gamma$.*

O lema abaixo compara uma sub e uma supersolução para uma determinada condição inicial.

Lema 1.21. *Seja $0 < R \leq \infty$ e suponha f monótona não decrescente; v supersolução e u subsolução de $(P_{rad})_{p,f}$ em $(0, R)$. Se $v(0) < u(0)$ e $u'(0) = v'(0) = 0$, então $v(r) \leq u(r)$ para todo $r \in [0, R]$.*

Demonstração. Confira A.1 do Apêndice A. ■

Agora exibiremos um lema de existência de solução para $(P_{rad})_{p,f}$.

Lema 1.22. *Sejam* $p : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *contínua;* f *monótona não decrescente satisfazendo* (f_2)*. Então* $(P_{rad})_{p,f}$ *admite uma solução* $v \in C^2[0,\infty)$*. Além disso, se* p *satisfaz* (p_2)*, então* $v(r) \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Demonstração. Confira A.2 do Apêndice A. ∎

Observação 1.22.1. *Os Lemas 1.18, 1.21 e 1.22 também se aplicam para o problema*

$$(P_{rad})_{f,g}. \qquad \begin{cases} (r^{N-1}v')' = r^{N-1}(p(r)f(v) + q(r)g(v)),\ r > 0 \\ v(0) = \gamma \geq 0,\ v'(0) = 0 \end{cases}$$

e o problema $(P)_{f,g}$ *se considerarmos soluções radiais. Onde* $p, q : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *contínuas;* f, g *monótonas não decrescentes;* f *satisfazendo* (f_2) *e* p *satisfazendo* (p_2)*. As demonstrações são análogas.*

Agora enunciaremos um lema que exibe uma classe de funções que não satisfazem a condição de Keller-Osserman, ou seja, não satisfazem (f_1).

Lema 1.23. *Seja* $f : [0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ *monónotona não decrescente tal que*

$$\int_1^\infty \frac{1}{f(t)}dt = \infty,$$

então

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{F(t)}}dt = \infty.$$

Em outras palavras (f_3) *implica* (f_2).

Demonstração. Confira A.3 no Apêndice A. ∎

1.5 Sobre a classe de problemas $(P)_{f,g}$ em domínios limitados

Enunciaremos aqui alguns lemas auxiliares para domínios limitados, estudados por Lair [19](2009). Também exibiremos um importante teorema também devido a Lair [14](1999).

Lema 1.24. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio regular;* f, g *satisfazendo* (f_0)*;* p *e* q *satisfazendo* (p_0) *e* $\phi \in C^2(\partial\Omega)$ *positiva. Se* v *é uma supersolução de*

$$(P_\phi)_{f,g} \qquad \begin{cases} \triangle u = p(x)f(u) + q(x)g(u),\ \Omega \\ u = \phi,\ \partial\Omega, \end{cases}$$

então $(P_\phi)_{f,g}$ *possui uma solução* u *satisfazendo,* $0 < u \leq v$ *em* Ω.

Demonstração. Confira (A.4) do Apêndice A. ∎

O próximo lema é uma consequência do lema anterior e será usado na prova do Teorema LM_1. Ele mostra a existência de solução para $(P_\phi)_{f,g}$ com $p, q : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ apenas contínuas e radiais f e g positivas e não decrescentes em $[0,\infty)$; $\phi = \phi_0 = cte$ e $\Omega = B_R(0)$.

Lema 1.25. *Sejam p e $q \in C([0,\infty),[0,\infty))$; f e g contínuas e não decrescente em $[0,\infty)$; $B_R(0)$ uma bola em $\mathbb{R}^N$ com raio R e centro na origem. Então dada uma constante positiva ϕ_0, existe uma solução radial $u \in C^2(B_R(0)) \cap C(\overline{B_R(0)})$ para o problema*

$$(P_{\phi_0})_{f,g} \qquad \begin{cases} \triangle u = p(|x|)f(u) + q(|x|)g(u), \ B_R(0) \\ \\ u = \phi_0, \ \partial B_R(0) \end{cases}$$

Demonstração. Confira (A.5) do Apêndice A. ∎

O próximo lema será essencial para provarmos o Teorema LM_2. Antes de enunciá-lo será necessário admitirmos o seguinte resultado:

Teorema 1.26. *Suponha Ω um aberto limitado e regular de $\mathbb{R}^N$ e $p \in C(\overline{\Omega})$ é uma função não negativa e c-positiva em Ω. Se f satisfaz (f_0) e (f_1), então o problema*

$$(P_\Omega)_{p,f} \qquad \begin{cases} \triangle u = p(x)f(u), \ \Omega \\ \\ u \geq 0, \ u(x) \stackrel{x\to\partial\Omega}{\longrightarrow} \infty, \end{cases}$$

admite uma solução.

Demonstração. Veja Lair [14], Teorema 1, pág. 208. ∎

Agora podemos enunciar o seguinte:

Lema 1.27. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e regular. Suponhamos que f e g satisfazem (f_0). Então o problema:*

$$(P_\Omega)_{f,g} \qquad \begin{cases} \triangle u = p(x)f(u) + q(x)g(u), \ \Omega \\ \\ u \geq 0, \ u(x) \stackrel{x\to\partial\Omega}{\longrightarrow} \infty, \end{cases}$$

possui uma solução se:

(i) *f satisfaz (f_1) e p é c-positiva em Ω, ou*
(ii) *$(f+g)$ satisfaz (f_1) e ξ é c-positiva em Ω, onde $\xi(x) = min\{p(x), q(x),\}$ $x \in \Omega$*

Demonstração. Confira (A.6) do Apêndice A. ∎

1.6 Funções Gama e Bessel

Para provar o Teorema M_2 usamos algumas propiedades de funções especiais. Nesta seção as apresentaremos, a fim de facilitar o entendimento do leitor.

Primeiro definiremos a função Gama (veja Feller [9]).

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty e^{-t} t^{r-1} dt, \ r > 0.$$

Segue da definição que

$$(\Gamma.1) \qquad \Gamma(r+1) = r\Gamma(r), \ r > 0;$$

$$(\Gamma.2) \qquad \Gamma(k+1) = k!, \ k \text{ natural};$$

$$(\Gamma.3) \qquad \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{r}{2})^{2k}}{k!\Gamma\left(\frac{N}{2}+k\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{2k}}{k!2^k N(N+2)\cdots(N+2k-2)}, \ r > 0.$$

As propriedades $(\Gamma.1)$ e $(\Gamma.2)$ são simples e seguem da definição. Provaremos aqui apenas $(\Gamma.3)$.

De fato, usando a propriedade $(\Gamma.1)$, obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{r}{2})^{2k}}{k!\Gamma\left(\frac{N}{2}+k\right)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{N}{2})(\frac{r}{2})^{2k}}{k!\left(\frac{N}{2}+(k-1)\right)\left(\frac{N}{2}+(k-2)\right)\cdots(\frac{N}{2}+1)\frac{N}{2}\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{2k}}{2^k k!(N+2k-2)(N+2k-4)\cdots(N+2)(N)} \end{aligned}$$

E essas são as informações da função Γ que serão úteis para o nosso trabalho.

Outra função que também usaremos é a função de Bessel (Veja Pastor [25]) definida por:

$$(I.1) \qquad I_\alpha(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\frac{r}{2})^{\alpha+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha+k+1)}, \ \alpha, \ r > 0.$$

A propriedade dessa função que nos será útil é a seguinte

$$(I.2) \qquad I_\alpha(r) \geq Ce^r r^{-\frac{1}{2}}, \ \alpha > 0, \ \text{algum } C > 0 \text{ e } r \ \text{ suficientemente grande.}$$

Em nosso trabalho tomaremos $\alpha = N/2 - 1 > 0$, pois $N \geq 3$, e então $(I.1)$ e $(I.2)$ continuam válidas.

No próximo capítulo provaremos a existência de soluções para a classe de problemas $(P)_{f,g}$ e alguns de seus casos particulares. Para isso faremos uso da teoria, dos lemas e teoremas que acabamos de enunciar.

Capítulo 2

Existência de Soluções

Neste capítulo, vamos estudar a existência de solução para a classe de problemas

$$(P)_{f,g}: \quad \begin{cases} \triangle u = p(x)f(u) + q(x)g(u), \ \mathbb{R}^N \\ \\ u \geq 0, \ u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \infty. \end{cases}$$

O principal resultado deste capítulo é o teorema de existência de solução pra $(P)_{f,g}$ que será relembrado abaixo.

Teorema LM_1**:** *Suponha que p e q admitem (p_0) e f e g satisfazem (f_0). Adicionalmente, admita $(f_3), (p_3)$ e (q_1) . Então se p satisfaz (p_2) o problema $(P)_{f,g}$ possui pelo menos uma solução.*

A idéia principal para a prova do Teorema LM_1 consiste em construir uma supersolução radial do problema $(P)_{f,g}$, que é garantida pelos lemas que provamos anteriormente, e construir uma subsolução radial , em bolas, de $(P)_{f,g}$. Em seguida, por um processo de limite nos raios dessas bolas obteremos uma subsolução para o problema $(P)_{f,g}$. Finalmente usamos um teorema de sub e supersolução para garantir a existência de solução para nosso problema $(P)_{f,g}$.

Provaremos adicionalmente neste capítulo, um teorema que relaciona a existência de soluções dos problemas $(P)_{f,g}$ e $(P)_{p,f}$ e além disso é um teorema de existência pra $(P)_{f,g}$. Recordando temos :

Teorema LM_2**:** *Suponha que f e g satisfaçam (f_0). Se o problema $(P)_{f,g}$ possui solução, f satisfaz (f_1) e p é positiva em $\mathbb{R}^N$, então o problema $(P)_{p,f}$ posui solução. Se $f + g$*

satisfazem (f_1)*, o problema*

$$\begin{cases} -\triangle w = p(x) + q(x), \ \mathbb{R}^N \\ \\ w \geq 0, \ w(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{cases}$$

admite uma solução não negativa e ξ *é positiva em* $\mathbb{R}^N$*, onde* $\xi(x) = min\{p(x), q(x), \ x \in \mathbb{R}^N\}$*, então o problema* $(P)_{f,g}$ *possui solução.*

Reservamos uma seção deste capítulo para estudar alguns critérios de existência e não existência de solução para a classe de problemas $(P)_{f,g}$ e $(P)_{p,f}$. Esses resultados foram provados em [19].

Para o problema $(P)_{p,f}$ provaremos:

Corolário 2.1. *Suponha* (f_0) *e* (f_3) *são válidas para* f*. Adicionalmente suponha* (p_3)*. Então o problema* $(P)_{p,f}$ *admite solução se, e somente se* p *satisfaz* (p_2)*.*

Considerando o problema mais geral $(P)_{f,g}$ segue:

Corolário 2.2. *Suponha que* f *e* g *satisfaçam* (f_0) *e que* p *e* q *satisfaçam* (p_1)*. Se* $(f+g)$ *satisfizer* (f_3)*, então o problema* $(P)_{f,g}$ *não possui solução. Em outras palavras o problema* $(P)_{f,g}$ *admite solução se* $(f+g)$ *satisfazem* (f_1) *e a função* ξ *é c-positiva em* $\mathbb{R}^N$*.*

2.1 Demonstração do Teorema LM_1

Agora demonstraremos o resultado principal deste capítulo.

Demonstração. Desde de que p é localmente Hölder contínua, temos que p_* é contínua, onde

$$p_*(t) := \min_{|x|=t} p(|x|), \ t \geq 0.$$

De f satisfazer (f_2) (veja Lema 1.23) segue pelo Lema 1.22 que, dado $\eta \in (0,1)$, existe $\tilde{v} \in C^2[0,\infty)$ positiva com

$$(r^{N-1}\tilde{v}'(r))' = r^{N-1}p(r)f(\tilde{v}), \ \tilde{v}(0) = \eta, \ \tilde{v}'(0) = 0.$$

Além disso,

$$\tilde{v}(r) \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Ou seja, $v(x) = \tilde{v}(|x|)$ satisfaz

$$\begin{cases} \triangle v = p_*(|x|)f(v), \ \mathbb{R}^N \\ \\ v > 0, \ v(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \infty. \end{cases}$$

Observando que

$$\triangle v = p_*(|x|)f(v) \leq p(x)f(v) \leq p(x)f(v) + q(x)g(v),$$

segue que v é uma supersolução de $(P)_{f,g}$.

No que segue construiremos uma subsolução w de $(P)_{f,g}$, tal que, $w \leq v$ em $\mathbb{R}^N$. De p e q serem localmente Hölder contínuas segue que $p^*(t) := \max_{|x|=t} p(|x|),\ t \geq 0$ e $q^*(t) := \max_{|x|=t} q(|x|),\ t \geq 0$ são contínuas. Além disso, para cada n, segue da radialidade de v que $v(x) = \tilde{v}(|x|) = \tilde{v}(n),\ x \in \partial B_n(0)$. Então pelo Lema 1.25 , para cada inteiro positivo n existe $\tilde{w}_n \in C^2[0,\infty)$ tal que $w_n(x) = \tilde{w}_n(|x|)$, é solução de

$$(P^*_{B_n})_{f,g} \qquad \begin{cases} \triangle u = p^*(|x|)f(u) + q^*(|x|)g(u),\ B_n(0) \\ \\ u \geq 0,\ u(x) = \tilde{v}(n),\ \partial B_n(0). \end{cases}$$

Temos que

Afirmação 2.3. *$w_n \leq v$ para todo n.*

Suponha, por absurdo, que existam n_0 inteiro positivo e $x_0 \in B_{n_0}$ tal que

$$w_{n_0}(x_0) > v(x_0).$$

Considere o seguinte conjunto

$$A = \{x \in B_{n_0} / w_{n_0}(x) > v(x)\}.$$

Temos $A \neq \emptyset$, pois $x_0 \in A$ e

$$\partial A = \{x \in B_{n_0} / w_{n_0}(x) = v(x)\}.$$

Logo para todo $x \in A$, obtemos

$$\begin{aligned} \triangle w_{n_0}(x) &= p^*(|x|)f(w_{n_0}) + q^*(|x|)g(w_{n_0}) \\ &\geq p^*(|x|)f(v) + q^*(|x|)g(v) \\ &\geq p_*(|x|)f(v) + q_*(|x|)g(v) \\ &= \triangle v(x), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\triangle(w_{n_0} - v) \geq 0,\ \text{em } A.$$

Assim, pelo Princípio de Comparação (Teorema 1.6) temos que

$$u_{n_0} - v \leq 0 \text{ em } A,$$

o que é um absurdo. Isto prova a nossa afirmação.

Afirmação 2.4. *$w_{n+1} \leq w_n$ para todo n.*

Note que provar a afirmação 2.4 é equivalente provar que

$$\tilde{w}_{n+1} \leq \tilde{w}_n, \text{ onde } w_n(x) = \tilde{w}_n(|x|).$$

Para demonstrar essa afirmação primeiro mostraremos que $\tilde{w}_n(0) \geq \tilde{w}_{n+1}(0)$.

Suponha por contradição que $\tilde{w}_n(0) < \tilde{w}_{n+1}(0)$.
Desde que $\tilde{w}_n$ e $\tilde{w}_{n+1}$ satisfazem

$$(P^*_{rad})_{f,g} \qquad \begin{cases} (r^{N-1}v')' = r^{N-1}(p^*(r)f(v) + q^*(r)g(v)), \ r \in (0,n) \\ \\ v \geq 0, \ v(0) = \gamma, \ v'(0) = 0, \end{cases}$$

para $\tilde{w}_n(0) < \gamma < \tilde{w}_{n+1}(0)$, temos que $\tilde{w}_n$ é uma supersolução e $\tilde{w}_{n+1}$ é uma subsolução de $(P^*_{rad})_{f,g}$ em $[0,n]$. Logo pelo Lema 1.21 segue que

$$\tilde{w}_n(r) \leq \tilde{w}_{n+1}(r), \text{ para todo } r \in [0,n]. \tag{2.1}$$

Além disso, segue da afirmação 2.3 que

$$\tilde{v}(n) = \tilde{w}_n(n) \leq \tilde{w}_{n+1}(n) \leq \tilde{v}(n),$$

o que implica que

$$\tilde{w}_{n+1}(n) = \tilde{v}(n).$$

Agora lembrando que $\tilde{w}_{n+1}$ e $\tilde{v}$ satisfazem as seguintes equações

$$s^{N-1}\tilde{w}'_{n+1}(s) = \int_0^s r^{N-1}[p^*(r)f(\tilde{w}_{n+1}(r)) + q^*(r)g(\tilde{w}_{n+1}(r))]dr, \ s \in (0, n+1)$$

$$s^{N-1}v'(s) = \int_0^s r^{N-1}p_*(r)f(v(r)dr, \ s > 0.$$

Logo, para $s = n$, temos

$$\begin{aligned} n^{N-1}\tilde{w}'_{n+1}(n) &= \int_0^n r^{N-1}[p^*(r)f(\tilde{w}_{n+1}(r)) + q^*(r)g(\tilde{w}_{n_1}(r))]dr \\ &\geq \int_0^n r^{N-1}[p_*(r)f(\tilde{w}_{n+1}(r)) + q_*(r)g(\tilde{w}_{n+1}(r))]dr \\ &\geq \int_0^n r^{N-1}p_*(r)f(\tilde{v}(r) \\ &= n^{N-1}\tilde{v}'(n). \end{aligned}$$

Logo da expressão acima segue que

$$\tilde{w}'_{n+1}(n) \geq \tilde{v}'(n), \text{ para todo } n.$$

Se

$$\tilde{w}'_{n+1}(n) > \tilde{v}'(n), \text{ para todo } n,$$

então,

$$\tilde{w}'_{n+1} - \tilde{v}'(n) > 0, \text{ para todo } n$$

ou seja, para ϵ suficientemente pequeno $(\tilde{w}_{n+1} - \tilde{v})$ é crescente em $[n, n+\epsilon]$, pois $\tilde{w}_{n+1}$ e v são contínuas. Logo

$$\tilde{w}_{n+1}(n+\epsilon) - \tilde{v}(n+\epsilon) > \tilde{w}_{n+1}(n) - \tilde{v}(n) = 0.$$

Portanto $\tilde{w}_{n+1}(n+\epsilon) > \tilde{v}(n+\epsilon)$, o que é uma contradiçao pela Afirmação 2.3.

Caso

$$\tilde{w}'_{n+1}(n) = \tilde{v}'(n), \text{ para todo } n,$$

usando a Afirmação 2.3, ou seja que $\tilde{w}_n(r) \leq \tilde{v}(r),\ r > 0$; $\tilde{w}_n(r) \leq \tilde{w}_n(r),\ r > 0$ (veja (2.1)) e $\tilde{w}_{n+1}(n) = \tilde{w}_{n+1}(n)$, temos para $t < 0$

$$\frac{\tilde{v}(n+t) - \tilde{v}(n)}{t} \leq \frac{\tilde{w}_n(n+t) - \tilde{w}_n(n)}{t} \leq \frac{\tilde{w}_{n+1}(n+t) - \tilde{w}_{n+1}(n)}{t},$$

fazendo $t \to 0$ na expressão acima, segue que

$$\tilde{v}'(n) \leq \tilde{w}'_n(n) \leq \tilde{w}'_{n+1}(n) = v'(n), \text{ para todo } n,$$

ou seja,

$$\tilde{w}'_{n+1}(n) = \tilde{v}'(n) = \tilde{w}'_n(n) \text{ para todo } n.$$

Então $\tilde{w}'_{n+1}$ e $\tilde{w}'_n$ são soluções do seguinte problema

$$(P^*_{rad})_{f,g} \qquad \begin{cases} (r^{N-1}u')' = r^{N-1}(p^*(r)f(u) + q^*(r)g(u)), \\ \\ u(n) = \tilde{v}(n) \text{ e } u'(n) = \tilde{v}(n) \end{cases}$$

em $(n-\delta, n)$, o que é um absurdo, pois pelo Teorema de Existência e unicidade de E.D.O existe uma única solução para o problema acima em $(n-\delta, n)$. Então teremos finalmente que,

$$\tilde{w}_{n+1}(0) \leq \tilde{w}_n(0).$$

Logo,

(i) se $\tilde{w}_{n+1}(0) < \tilde{w}_n(0)$,segue pelo Lema 1.21 que

$$\tilde{w}_{n+1}(r) \leq \tilde{w}_n(r), \text{ para todo } r \in [0, n], \text{ ou,}$$

(ii) $\tilde{w}_{n+1}(0) = \tilde{w}_n(0)$ e $\tilde{w}'_{n+1}(0) = \tilde{w}'_n(0) = 0$, então temos pelo Teorema de Existência e Unicidade de EDO que

$$\tilde{w}_{n+1}(r) = \tilde{w}_n(r), \text{ para todo } r \in [0, n.$$

Ou seja, nos dois casos obtemos que

$$0 < \tilde{w}_{n+1}(r) \leq \tilde{w}_n(r), \text{ para todo } r \in [0, n].$$

As Afirmações 2.3 e 2.4 implicam que

$$0 < \tilde{w}_{n+1}(r) \leq \tilde{w}_n(r) \leq \tilde{v}(r), \ r \in [0, n].$$

Então $\{\tilde{w}_n\}$ é monótona e limitada para todo n, logo existe

$$\tilde{w}(r) = \lim_{n\to\infty} \tilde{w}_n(r), \ r \geq 0. \tag{2.2}$$

Além disso ainda temos que $\tilde{w}(r) \leq \tilde{v}(r), \ r \in [0, \infty)$.

Afirmação 2.5. *$\tilde{w}$ satisfaz*

$$\tilde{w}(r) = w(0) + \int_0^r s^{1-N} \int_0^s t^{N-1}[p^*(t)f(\tilde{w}(t)) + q^*(t)g(\tilde{w}(t))]dsdt \tag{2.3}$$

e $\tilde{w} \in C^2[0, \infty)$.

De f, g contínuas temos que

$$p^*(t)f(\tilde{w}_n(t)) + q^*(t)g(\tilde{w}_n(t)) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} p^*(t)f(\tilde{w}(t)) + q^*(t)g(\tilde{w}(t)). \tag{2.4}$$

Usando que $\tilde{w}_n \leq \tilde{v}$ e f, g não decrescentes obtemos

$$t^{N-1}[p^*(t)f(\tilde{w}_n(t)) + q^*(t)g(\tilde{w}_n(t))] \leq t^{N-1}[p^*(t)f(\tilde{v}(t)) + q^*(t)g(\tilde{v}(t))]. \tag{2.5}$$

De (2.4), (2.5) e de $v \in L^1(0, \infty)$ podemos aplicar o Teorema da Convergência dominada de Lebesgue e concluir que

$$\int_0^s t^{N-1}[p^*(t)f(\tilde{w}_n) + q^*(t)g(\tilde{w}_n)]dsdt \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^s t^{N-1}[p^*(t)f(\tilde{w}) + q^*(t)g(\tilde{w})]dsdt.$$

Segue de maneira análoga que

$$\int_0^r s^{1-N}\int_0^s t^{N-1}[p^*(t)f(\tilde{w}_n)+q^*(t)g(\tilde{w}_n)]dsdt \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^r s^{1-N}\int_0^s t^{N-1}[p^*(t)f(\tilde{w})+q^*(t)g(\tilde{w})]dsdt.$$

De

$$\tilde{w}_n(0) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{w}(0)$$

obtemos

$$\tilde{w}_n(r) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{w}(0) + \int_0^r s^{1-N} \int_0^s t^{N-1}[p^*(t)f(\tilde{w}(t)) + q^*(t)g(\tilde{w}(t))]dsdt, \ r > 0.$$

Agora derivando a equação (2.3) obtemos

$$\tilde{w}'(r) = r^{1-N} \int_0^r t^{N-1}[p^*(t)f(\tilde{w}(t)) + q^*(t)g(\tilde{w}(t))]dt, \ s > 0, \tag{2.6}$$

logo $\tilde{w} \in C^1(0,\infty)$. Note que

$$\lim_{r\to 0} \tilde{w}'(r) = \lim_{r\to 0} \frac{\int_0^r t^{N-1}[p^*(t)f(\tilde{w}(t)) + q^*(t)g(\tilde{w}(t))]dt}{r^{N-1}} \tag{2.7}$$

aplicando a regra de L'Hopital temos

$$\begin{aligned} \lim_{r\to 0} \tilde{w}'(r) &= \lim_{r\to 0} \frac{r^{N-1}[p^*(r)f(\tilde{w}(r)) + q^*(r)g(\tilde{w}(r))]}{(N-1)r^{N-2}} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{r}{(N-1)}[p^*(r)f(\tilde{w}(r)) + q^*(r)g(\tilde{w}(r))]. \end{aligned}$$

Desde que $p^*(r)f(\tilde{w}(r)) + q^*(r)g(\tilde{w}(r)) \stackrel{r\to 0}{\longrightarrow} p^*(0)f(\tilde{w}(0)) + q^*(0)g(\tilde{w}(0))$ segue que

$$\lim_{r\to 0} \tilde{w}'(r) = 0. \tag{2.8}$$

Por outro lado,

$$\tilde{w}'(0) = \lim_{r\to 0^+} \frac{\tilde{w}(r) - \tilde{w}(0)}{r - 0} = \lim_{r\to 0} \frac{\int_0^r s^{1-N} \int_0^s t^{N-1}[p^*(t)f(\tilde{w}(t)) + q^*(t)g(\tilde{w}(t))]dsdt}{r}.$$

Novamente pela regra de L'Hopital, obtemos

$$\tilde{w}'(0) = \lim_{r\to 0} r^{1-N} \int_0^r t^{N-1}[p^*(t)f(\tilde{w}(t)) + q^*(t)g(\tilde{w}(t))]dt.$$

Reescrevendo e aplicando novamente L'Hopital, temos

$$\begin{aligned} \lim_{r\to 0} \frac{\int_0^r t^{N-1}[p^*(t)f(\tilde{w}(t)) + q^*(t)g(\tilde{w}(t))]dt}{r^{N-1}} &= \lim_{r\to 0} \frac{r^{N-1}}{(N-1)r^{-N}}[p^*(r)f(\tilde{w}(r)) + q^*(r)g(\tilde{w}(r))] \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{r}{(N-1)}[p^*(r)f(\tilde{w}(r)) + q^*(r)g(\tilde{w}(r))]. \end{aligned}$$

Pelo mesmo argumento anterior,

$$\tilde{w}'(0) = 0. \tag{2.9}$$

Então as equações (2.8) e (2.9) implicam que $\tilde{w} \in C^1[0,\infty)$.

Em seguida, mostraremos que $\tilde{w} \in C^2[0,\infty)$. Derivando (2.6) obtemos

$$\begin{aligned}\tilde{w}''(r) &= (1-N)r^{-N}\int_0^r t^{N-1}[p^*(t)f(\tilde{w}(t))+q^*(t)g(\tilde{w}(t))]dt \\ &+ p^*(r)f(\tilde{w}(r))+q^*(r)g(\tilde{w}(r)),\ r>0.\end{aligned}$$

Logo $\tilde{w} \in C^2(0,\infty)$. Além disso, temos

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0}\tilde{w}''(r) &= \lim_{r\to 0}\frac{(1-N)\int_0^r t^{N-1}[p^*(t)f(\tilde{w}(t))+q^*(t)g(\tilde{w}(t))]dt}{r^N} \\ &+ \lim_{r\to 0}p^*(r)f(\tilde{w}(r))+q^*(r)g(\tilde{w}(r)).\end{aligned}$$

Fazendo

$$A(r)=\frac{(1-N)\int_0^r t^{N-1}[p^*(t)f(\tilde{w}(t))+q^*(t)g(\tilde{w}(t))]dt}{r^N},\ r\geq 0$$
$$B(r)=p^*(r)f(\tilde{w}(r))+q^*(r)g(\tilde{w}(r)),\ r\geq 0,$$

segue aplicando a regra de L'Hopital que

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0}A(r) &= \lim_{r\to 0}\frac{(1-N)r^{N-1}[p^*(r)f(\tilde{w}(r))+q^*(r)g(\tilde{w}(r))]}{Nr^{N-1}} \\ &= \lim_{r\to 0}\left[\frac{p^*(r)f(\tilde{w}(r))+q^*(r)g(\tilde{w}(r))}{N}-p^*(r)f(\tilde{w}(r))+q^*(r)g(\tilde{w}(r))\right] \\ &= \left[\frac{(p^*(0)f(\tilde{w}(0))+q^*(0)g(\tilde{w}(0)))}{N}-p^*(0)f(\tilde{w}(0))+q^*(0)g(\tilde{w}(0))\right]\end{aligned}$$

e

$$\lim_{r\to 0}B(r)=\lim_{r\to 0}p^*(r)f(\tilde{w}(r))+q^*(r)g(\tilde{w}(r))=p^*(0)f(\tilde{w}(0))+q^*(0)g(\tilde{w}(0)).$$

Desde que

$$\lim_{r\to 0}\tilde{w}''(r)=\lim_{r\to 0}A(r)+\lim_{r\to 0}B(r),$$

obtemos que

$$\lim_{r\to 0}\tilde{w}''(r)=\frac{p^*(0)f(\tilde{w}(0))+q^*(0)g(\tilde{w}(0))}{N}. \tag{2.10}$$

De,

$$\tilde{w}''(0)=\lim_{r\to 0}\frac{\tilde{w}'(r)-\tilde{w}'(0)}{r-0}=\lim_{r\to 0}\frac{r^{1-N}\int_0^r t^{N-1}[p^*(t)f(\tilde{w}(t))+q^*(t)g(\tilde{w}(t))]dt}{r},$$

lembrando que na equação acima, usamos que $\tilde{w}'(0)=0$. Novamente, por L'Hopital

$$\begin{aligned}\tilde{w}''(0) &= \lim_{r\to 0}(1-N)r^{-N}\int_0^r t^{N-1}[p^*(t)f(\tilde{w}(t))+q^*(t)g(\tilde{w}(t))]dt \\ &+ \lim_{r\to 0}p^*(r)f(\tilde{w}(r))+q^*(r)g(\tilde{w}(r)).\end{aligned}$$

Reescrevendo, obtemos

$$\tilde{w}''(0) = \lim_{r\to 0}(A(r) + B(r)).$$

Pelos cálculos anteriores, temos que

$$\tilde{w}''(0) = \frac{p^*(0)f(\tilde{w}(0)) + q^*(0)g(\tilde{w}(0))}{N}. \tag{2.11}$$

Logo as equações (2.10) e (2.11) implicam que $u \in C^2[0,\infty)$.

Definindo $w(x) = \tilde{w}(|x|),\ x \in \mathbb{R}^N$, segue do Lema 1.18 que

$$\triangle w = p^*(|x|)f(w) + q^*(|x|)g(w),\ \mathbb{R}^N.$$

Como uma consequêcia, w satisfaz

$$\triangle w \geq p(x)f(w) + q(x)g(w),\ \mathbb{R}^N.$$

Logo w é uma subsolução de $(P)_{f,g}$.

Agora provaremos que $w > 0$. Temos por construção que w_n e v são radialmente simétricas, isto é, $w_n(x) = \tilde{w}_n(|x|)$ e $v(x) = \tilde{v}(|x|)$. Então usando a equação integral para $\tilde{w}_n$ e $\tilde{v}$, fazendo $r = n$ e da condição de fronteira $\tilde{w}(n) = \tilde{v}(n)$ obtemos

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_n(n) &= \tilde{w}_n(0) + \int_0^n t^{1-N}\int_0^t s^{N-1}[p^*(s)f(\tilde{w}_n) + q^*(s)g(\tilde{w}_n)]dsdt \\
&= \tilde{v}(n) \\
&= \tilde{v}(0) + \int_0^n t^{1-N}\int_0^t s^{N-1}p_*(s)f(\tilde{v})dsdt \\
&\geq \tilde{v}(0) + \int_0^n t^{1-N}\int_0^t s^{N-1}p_*(s)f(\tilde{w}_n)dt,
\end{aligned}$$

onde na desigualdade acima usamos a afirmação 2.3, ou seja, $\tilde{w}_n \leq \tilde{v}$ e f não decrescente. Daí

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_n(0) &+ \int_0^n t^{1-N}\int_0^t s^{N-1}(p^*(s) - p_*(s))f(\tilde{w}_n)dsdt \\
&- \int_0^n t^{1-N}\int_0^t s^{N-1}q^*(s)g(\tilde{w}_n)dsdt \geq \tilde{v}(0).
\end{aligned}$$

Da definição de $p_{osc}(s) := p^*(s) - p_*(s)$,$s > 0$, segue da desigualdade acima que

$$\tilde{w}_n(0)+\int_0^n t^{1-N}\int_0^t s^{N-1}p_{osc}(s)f(\tilde{w}_n)dsdt+\int_0^n t^{1-N}\int_0^t s^{N-1}q^*(s)g(\tilde{w}_n)dsdt \geq \tilde{v}(0). \tag{2.12}$$

Fazendo a seguinte integração

$$y = \int_0^t s^{N-1} p_{osc}(s) f(\tilde{w}_n) ds,$$

$$dz = \frac{d}{dt}\left(\frac{t^{2-N}}{2-N}\right),$$

obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^n t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} p_{osc}(s) f(\tilde{w}_n) ds dt \\
= \ & \frac{t^{2-N}}{2-N}\int_0^n s^{N-1} p_{osc}(s) f(\tilde{w}_n) ds - \int_0^n \frac{t}{2-N} p_{osc}(t) f(\tilde{w}_n) dt \\
= \ & -\frac{t^{2-N}}{N-2}\int_0^n s^{N-1} p_{osc}(s) f(\tilde{w}_n) ds + \int_0^n \frac{t}{N-2} p_{osc}(t) f(\tilde{w}_n) dt \\
\leq \ & \frac{1}{N-2}\int_0^n t p_{osc}(s) f(\tilde{w}_n) ds.
\end{aligned}$$

Então segue que

$$\int_0^n t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} p_{osc}(s) f(\tilde{w}_n) ds dt \leq \frac{1}{N-2} \int_0^n t p_{osc}(t) f(\tilde{w}_n) dt, \tag{2.13}$$

e de maneira análoga obtemos

$$\int_0^n t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} q^*(t) g(\tilde{w}_n) ds dt \leq \frac{1}{N-2} \int_0^n t q^*(t) g(\tilde{w}_n) dt. \tag{2.14}$$

Substituindo as desigualdades (2.13) e (2.14) em (2.12), obtemos

$$\tilde{w}_n(0) + \frac{1}{N-2} \int_0^n t p_{osc}(s) f(\tilde{w}_n) dt + \frac{1}{N-2} \int_0^n t q^*(t) g(\tilde{w}_n) dt \geq \tilde{v}(0). \tag{2.15}$$

Guardemos essa informação.

Agora seja $\hat{w}$ uma solução radial de

$$\triangle \hat{w} = p_*(|x|), \ \hat{w}'(0) = 0 = \hat{w}(0). \tag{2.16}$$

A existência dessa solução é garantida pelo Lema 1.22 tomando $f(s) = 1, \ s \geq 0.$ Definindo

$$z(x) = \psi^{-1}(\overline{w}(|x|)), \ x \in \mathbb{R}^N \text{ onde } \hat{w}(x) = \overline{w}(|x|), \ x \in \mathbb{R}^N,$$

e ψ^{-1} é a inversa da função crescente

$$\psi(t) = \int_1^t \frac{1}{f(s)} ds, \ t > 0,$$

temos que $\psi^{-1}(t) \geq 1$ pata todo $t > 0$, e

$$(\psi^{-1})'(t) = \frac{1}{[\psi(\psi^{-1}(t))]'}.$$

Logo $(\psi^{-1})'(t) = f(\psi^{-1}(t))$. Derivando novamente obtemos

$$(\psi^{-1})''(t) = f'(\psi^{-1}(t))(\psi^{-1})'(t) = f'(\psi^{-1}(t))f(\psi^{-1}(t)).$$

E por alguns cálculos obtemos,

$$\triangle z = (\psi^{-1})''(\overline{w})|\hat{w}|^2 + (\psi^{-1})'(\hat{w})\triangle\overline{w} \geq f(z)\triangle\overline{w} = p_*(|x|)f(z),$$

onde na última desigualdade usamos que

$$(\psi^{-1})''(\overline{w}) \geq 0 \text{ e } (\psi^{-1})'(\overline{w}) = f(\psi^{-1}(\overline{w})) = f(z).$$

Agora observe que

$$z(0) = (\psi^{-1})'(\overline{w}(0)) \geq 1 > \eta = \tilde{v}(0) > 0.$$

Então usando o Lema de Comparação (1.21) podemos concluir que $v(x) \leq z(x),\ x \in \mathbb{R}^N$. Temos de (2.16), e de $\hat{w}(x) = \overline{w}(|x|),\ x \in \mathbb{R}^N$ que

$$(r^{N-1}\overline{w}')'(r) = r^{N-1}p_*(r),\ r > 0,$$

e integrando, obtemos

$$r^{N-1}\overline{w}'(r) - \overline{w}(0) = \int_0^r t^{N-1}p_*(t)dt,\ r > 0.$$

Mas por construção $\overline{w}(0) = 0$, e portanto

$$\overline{w}'(r) = r^{1-N}\int_0^r t^{N-1}p_*(t)dt,\ r > 0.$$

Integrando novamente, e lembrando que $\overline{w}'(0) = 0$, segue

$$\overline{w}(r) = \int_0^r s^{1-N}\int_0^s t^{N-1}p_*(t)dtds,\ r > 0$$

usando a desigualdade (2.14) com $g = 1$ obtemos

$$\overline{w}(r) \leq \frac{1}{N-2}\int_0^r tp_*(t)dt \leq \int_0^r tp_*(t)dt.$$

Definindo

$$\hat{p}(r) = \int_0^r tp_*(t)dt$$

e relembrando que ψ^{-1} é crescente temos que

$$\tilde{v}(x) \leq \tilde{z}(x) = \psi^{-1}(\overline{w}(x)) \leq \psi^{-1}(\hat{p}(|x|)),\ x \in \mathbb{R}^N.$$

Usando que $\tilde{w}_n \leq \tilde{v}$ para todo n inteiro positivo e que f e g são monótonas não decrescente, vemos que

$$tq^*(t)g(\tilde{w}_n(t)) \leq tq^*(t)g(\tilde{v}(t)) \leq tq^*(t)g(\psi^{-1}(\hat{p}(t)),\ t > 0,$$

e

$$tp_{osc}f(u_n(t)) \leq tp_{osc}f(g(t)) \leq tp_{osc}f(\psi^{-1}\hat{p}(t)),\ t > 0.$$

Assim segue das desigualdades acima, das hipóteses (q_1) e (p_3) e do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue aplicado na desigualdade (2.12) que

$$\tilde{w}(0)+\int_0^n t^{1-N}\int_0^t s^{N-1}p_{osc}(s)f(\tilde{w})dsdt+\int_0^n t^{1-N}\int_0^t s^{N-1}q^*(s)g(\tilde{w})dsdt \geq \tilde{v}(0) = \eta > 0.$$

Isto mostra que $\tilde{w}$ é positiva. Uma vez que $\tilde{w}$ é crescente segue que $w(x) \geq \eta > 0,\ x \in \mathbb{R}^N$. Finalmente mostraremos que

$$w(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Primeiro lembremos que para todo $r > 0$,

$$\tilde{w}(r)=\tilde{w}(0)+\int_0^r t^{1-N}\int_0^t s^{N-1}[p^*(s)f(\tilde{w})+q^*(s)g(\tilde{w})]dsdt \geq \int_0^r t^{1-N}\int_0^t s^{N-1}p^*(s)f(\tilde{w})dsdt.$$

Desde que $\tilde{w}$ é não trivial e $\tilde{w}$ é não decrescente, temos que $\tilde{w}(r) \geq \tilde{w}(0) = \eta > 0,\ r > 0$. Consequentemente

$$\begin{aligned}
\tilde{w}(r) &= \int_0^r t^{1-N}\int_0^t s^{N-1}p^*(s)f(\tilde{w})dsdt,\ r > 0\\
&\geq \int_0^r t^{1-N}\int_{\frac{t}{2}}^t s^{N-1}p^*(s)f(\tilde{w}(0))dsdt,\ r > 0\\
&= f(\tilde{w}(0))\int_0^r t^{1-N}\int_{\frac{t}{2}}^t s^{N-1}p^*(s)dsdt,\ r > 0\\
&\geq 2^{N-1}f(\tilde{w}(0))\int_0^r\int_{\frac{t}{2}}^t p^*(s)dsdt,\ r > 0
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade é válida pois $s \geq t/2$.

Pela seguinte integração

$$y = \int_{\frac{t}{2}}^t p^*(s)ds,$$
$$dz = dt,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^r\int_{\frac{t}{2}}^t p^*(s)dsdt &= r\int_{\frac{r}{2}}^r p^*(s)ds - \int_0^r t\left(p^*(t) - \frac{1}{2}p^*\left(\frac{t}{2}\right)\right)dt\\
&= \int_{\frac{r}{2}}^r (r-t)p^*(t)dt + 2\int_0^{\frac{r}{2}} tp^*(t)dt.
\end{aligned}$$

De $t \leq r$, segue que

$$\int_{\frac{r}{2}}^{r} (r-t)p^*(t)dt \geq 0,$$

logo

$$\int_0^r \int_{\frac{t}{2}}^{t} p^*(s)dsdt \geq 2\int_0^{\frac{r}{2}} tp^*(t)dt$$

Agora fazendo $r \to \infty$ e usando que p satisfaz (p_2) temos que $\tilde{w}(r) \to \infty$ quando $r \to \infty$. Em outras palavras

$$w(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Logo w é subsolução de $(P)_{f,g}$ e por construção v é supersolução de $(P)_{f,g}$. Então temos pelo Princípio de sub e supersolução (Teorema 1.17), que existe u tal que $w \leq u \leq v$ e

$$\triangle u = p(x)f(u) + q(x)g(u),\ \mathbb{R}^N.$$

Além disso de $w \leq u \leq v$, segue que

$$u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Logo u é solução de $(P)_{f,g}$. ■

Agora provaremos o Teorema LM_2.

2.2 Demonstração do Teorema LM_2

Este teorema relaciona a existência de solução para a classe de problemas $(P)_{p,f}$, quando $(P)_{f,g}$ admite uma solução.

Demonstração. Seja Ω_n uma sequência de domínios regulares e limitados em $\mathbb{R}^N$ tal que p é c-positiva. Suponha que $(P)_{f,g}$ tenha uma solução v. Em particular, temos que p, f contínuas, f satisfazendo (f_1) logo temos pelo Lema 1.27 que o problema

$$(P_{\Omega_n})_{f,g} \qquad \begin{cases} \triangle u_n = p(x)f(u_n),\ \Omega_n \\ \\ u_n \geq 0,\ u_n(x) \overset{|x|\to\partial\Omega_n}{\longrightarrow} \infty, \end{cases}$$

possui uma solução u_n para cada n. Como fizemos no Teorema LM_1, prova-se que

(i) $v(x) \leq u_n(x)$, para todo $x \in \Omega_n$ (análogo a afirmação 2.3) e

(ii)$u_{n+1}(x) \leq u_n(x)$ para todo $x \in \Omega_n$ (análogo a afirmação 2.4).

Logo existe

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x),\ x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.17}$$

Note que dado $x \in \mathbb{R}^N$ existe n_0 tal que $x \in \Omega_n$, para todo $n \geq n_0$. Além disso, de f contínua e (2.17) obtemos

$$p(x)f(u_n(x)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p(x)f(u(x)),\ x \in \mathbb{R}^N.$$

Assim temos que

Afirmação 2.6. $\triangle u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \triangle u,\ u \geq 0$ *e* $u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$

Demonstração. Confira (A.7) no Apêndice B. ■

Logo u satisfaz

$$\begin{cases} \triangle u = p(x)f(u),\ x \in \mathbb{R}^N \\ \\ u \geq 0,\ u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \end{cases}$$

ou seja, $(P)_{p,f}$ possui solução.

Para provar a segunda parte, temos de f, g contínuas e $(f+g)$ admitindo (f_1) segue pelo Lema 1.27 que para todo n, o problema

$$\begin{cases} \triangle u_n = p(x)f(u_n) + q(x)g(u_n),\ \Omega_n \\ \\ u_n \geq 0,\ u_n(x) \overset{x\to\partial\Omega_n}{\longrightarrow} \infty, \end{cases}$$

possui uma solução u_n. Novamente usando o Princípio de Comparação (Teorema 1.6), prova-se que (u_n) é não crescente.

Por hipótese temos que existe w uma solução de

$$(P)_{p,q} \qquad \begin{cases} -\triangle w = p(x) + q(x),\ \mathbb{R}^N \\ \\ w(x) \geq 0,\ w(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

Por argumentos já utilizados, prova-se que $w(x) \leq u_n(x)$, para todo $x \in \Omega_n$. Portanto $w(x) \leq u_{n+1}(x) \leq u_n(x)$ para todo $x \in \Omega_n$. Logo existe

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x),\ x \in\ R^N. \tag{2.18}$$

Agora devemos mostrar que u é positva e que $u(x) \to \infty$ quando $|x| \to \infty$. Para isto considere a seguinte definição

$$\psi(t) = \int_t^\infty \frac{1}{h(s)} ds,\ \text{onde } h(s) = f(s) + g(s),\ s > 0.$$

Note que ψ está bem definida pois $f(s), g(s) > 0$, para todo $s > 0$ e que h satisfaz a condição de Keller-Osserman, isto é, satisfaz (f_1), pois f e g satisfaz (f_1) . Além disso, temos

$$\psi'(t) = \frac{-1}{h(t)} \leq 0,\ t > 0,$$

ou seja ψ é não crescente, e

$$\psi''(t) = \frac{h'(t)}{h^2(t)}, \ t > 0.$$

Note também que da definição de ψ,

$$\lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0.$$

Agora fixe $\epsilon > 0$ e considere

$$v_n(x) = \psi(u_n(x) + \epsilon), \text{ para } x \in \Omega_n.$$

Note que acrescentamos ϵ para que v_n fique bem definida nos possíveis pontos de $\mathbb{R}^N$ onde $u_n(x) = 0$. Temos ainda que v_n é não decrescente, pois ψ é não crescente e u_n não decrescente. Segue da definição que

$$-\triangle v_n(x) = \frac{\triangle u_n}{h(u_n(x)+\epsilon)} - \frac{h'(u_n(x)+\epsilon)|\nabla u_n|^2}{h^2(u_n(x)+\epsilon)}$$

De fato,

$$\triangle v_n = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2}(u_n(x)+\epsilon)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2}(u_n(x)+\epsilon) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\psi'(u_n(x)+\epsilon)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right) \\
&= \psi''(u_n(x)+\epsilon)\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right)^2 + \psi'(u_n(x)+\epsilon)\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_i^2}
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
\triangle v_n &= \sum_{i=1}^{N}\left[\psi''(u_n(x)+\epsilon)\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right)^2 + \psi'(u_n(x)+\epsilon)\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_i^2}\right] \\
&= \psi''(u_n(x)+\epsilon)\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right)^2 + \psi'(u_n(x)+\epsilon)\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_i^2} \\
&= -\frac{h'(u_n(x)+\epsilon)}{h^2(u_n(x)+\epsilon)}|\nabla u_n|^2 + \frac{1}{h(u_n(x)+\epsilon)}\triangle u_n
\end{aligned}$$

Portanto

$$-\triangle v_n = \frac{h'(u_n(x)+\epsilon)}{h^2(u_n(x)+\epsilon)}|\nabla u_n|^2 - \frac{1}{h(u_n(x)+\epsilon)}\triangle u_n.$$

Usando os cálculos acima, a definição de h e que f e g são monótonas não decrescente obtemos

$$
\begin{aligned}
-\triangle v_n &= \frac{\triangle u_n}{h(u_n(x)+\epsilon)} - \frac{h'(u_n(x)+\epsilon)|\nabla u_n|^2}{h^2(u_n(x)+\epsilon)} \leq \frac{\triangle u_n}{h(u_n(x)+\epsilon)} \\
&= \frac{p(x)f(u_n)+q(x)g(u_n))}{h(u_n(x)+\epsilon)} = \frac{p(x)f(u_n)+q(x)g(u_n)}{f(u_n(x)+\epsilon)+g(u_n(x)+\epsilon)} \\
&\leq \frac{(p(x)+q(x))(f(u_n(x))+g(u_n(x)))}{f(u_n(x)+\epsilon)+g(u_n(x)+\epsilon)} = p(x)+q(x) = -\triangle w.
\end{aligned}
$$

ou seja

$$\triangle v_n \geq \triangle w, \text{ em } \Omega_n$$

logo $\triangle(v_n - w) \geq 0$ para todo $x \in \Omega_n$.
Note que $v_n(x) = 0$ para $x \in \partial\Omega_n$, pois $u_n(x) \overset{x \to \partial\Omega_n}{\longrightarrow} \infty$ para $x \in \partial\Omega$, ψ é não crescente e

$$v_n(x) = \psi(u_n(x)+\epsilon) = \int_{u_n(x)+\epsilon}^{\infty} \frac{1}{f(u_n(x)+\epsilon)+g(u_n(x)+\epsilon)} dx \overset{x \to \partial\Omega_n}{\longrightarrow} 0.$$

Aplicando o Princípio de Comparação (Teorema 1.6) temos que

$$v_n(x) \leq w(x) \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}_n.$$

Da definiçao de v_n, a desigualdade anterior é equivalente à

$$\psi(u_n(x)+\epsilon) \leq w(x), \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}_n.$$

Da monotonocidade da inversa de ψ segue que

$$u_n(x)+\epsilon \geq \psi^{-1}(w(x)), \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}_n.$$

Fazendo $n \to \infty$ temos que

$$u(x)+\epsilon \geq \psi^{-1}(w(x)), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N,$$

e $\epsilon \to 0$ obtemos

$$u(x) \geq \psi^{-1}(w(x)) > 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

Logo u é positiva. Como ψ^{-1} é monótona, não crescente e $w(x) \overset{|x| \to \infty}{\longrightarrow} 0$ temos que

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) \geq \lim_{|x|\to\infty} \psi^{-1}(w(x)) \to \infty.$$

Portanto,

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) \to \infty.$$

Ou seja $(P)_{f,g}$ admite uma solução. ∎

2.3 Aplicações dos Teoremas LM_1 e LM_2

A partir dos Teoremas LM_1 e LM_2 provaremos aqui alguns critérios para existência e não existência de solução para o nosso problema $(P)_{f,g}$.
Antes provaremos um lema auxiliar que nos fornecerá alguns critérios.

Lema 2.7. *Sejam f e g contínuas não decrescentes tal que $f+g$ satisfazem (f_2) e $p+q$ é não-trivial. Se existe uma solução para*

$$\begin{cases} \triangle u \leq p(x)f(u) + q(x)g(u), \ \mathbb{R}^N \\ \\ u \geq 0, \ u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \infty. \end{cases}$$

Então $p+q$ satisfaz (p_2).

Demonstração. Seja u solução do problema acima. Pelo Lema 1.22 temos que existe $\tilde{v}$ solução de

$$(P_{rad})_{(p+q)^*,(f+g)} \qquad \begin{cases} (r^{N-1}v')' = r^{N-1}(p+q)^*(r)(f+g)(v), \ r > 0 \\ \\ v(0) = \gamma > u(0), \ v'(0) = 0 \end{cases}$$

pois $(f+g)$ satisfaz (f_3) e pelo Lema 1.23 segue que $(f+g)$ também satisfaz (f_2), e assim as hipóteses do Lema 1.22 que garantem a existência de solução estão satisfeitas. Adicionalmente temos pelo mesmo lema que $\tilde{v}$ está definida em $[0,\infty)$. Então pelo Lema 1.18 obtemos que $v(x) = \tilde{v}(|x|)$ é solução de

$$(P)_{(p+q)^*,f+g} \qquad \begin{cases} \triangle v = (p+q)^*(x)(f(v)+g(v)), \ \mathbb{R}^N \\ \\ v \geq 0, \ v(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} B > 0. \end{cases}$$

Além disso v satisfaz

$$\triangle v \geq p(x)f(v) + q(x)g(v), \ \text{em } \mathbb{R}^N.$$

Agora provaremos que $B = \infty$.

Suponha que $B < \infty$. De $\tilde{v}$ não decrescente, segue que $v(x) \leq B, \ x \in \mathbb{R}^N$. Desde que

$$u(x) \to \infty, \ \text{quando } |x| \to \infty,$$

temos que para algum R, $v(x) \leq B \leq u(x)$, para $|x| \geq R$, então $v(x) \leq u(x)$ em $|x| = R$. Usando o Princípio de Máximo obtemos que $v(x) \leq u(x)$ em $B(0,R)$, o que é uma contradição desde que $v(0) > u(0)$. Então $B = \infty$ e $v(x) \to \infty$ quando $|x| \to \infty$.

Pela equação do problema $(P_{rad})_{(p+q)^*,(f+g)}$ nós encontramos que

$$\begin{aligned}\tilde{v}'(r) &= r^{N-1}\int_0^r t^{N-1}(p+q)^*(t)(f+g)(\tilde{v}(t))dt \\ &\leq r^{N-1}(f+g)(\tilde{v}(r))\int_0^r t^{N-1}(p+q)^*(t)dt,\end{aligned}$$

dividindo a desigualdade acima por $(f+g)(\tilde{v}(r))$ temos que

$$\frac{\tilde{v}'(r)}{(f+g)(\tilde{v}(r))} \leq r^{N-1}\int_0^r t^{N-1}(p+q)^*(t)dt.$$

Integrando e calculando em $(0,r)$

$$\int_{\tilde{v}(0)}^{\tilde{v}(r)} \frac{1}{f(t)+g(t)}dt \leq \int_0^r t^{N-1}\int_0^t s^{N-1}(p+q)^*(s)dsdt.$$

Temos de maneira análoga à desiguladade (2.13) que a expressão acima é equivalente a

$$\int_{\tilde{v}(0)}^{\tilde{v}(r)} \frac{1}{f(t)+g(t)}dt \leq \frac{1}{N-2}\int_0^r t(p+q)^*(t)dt.$$

Fazendo $r \to \infty$ e usando a hipótese de que $(f+g)$ satisfaz (f_3) temos que

$$\frac{1}{N-2}\int_0^\infty t(p+q)^*(t)dt = \infty$$

Ou seja,

$$\int_0^\infty t(p+q)^*(t)dt = \infty$$

logo $(p+q)$ satisfaz (p_2). ∎

Como consequência dos Teorema LM_2 e Lema 2.7 provaremos os teoremas abaixo, que exibem condições de existência para $(P)_{f,g}$ e $(P)_{p,f}$, os quais generalizam os resultados obtidos em [21] e [16], onde f devia satisfazer uma condição linear de crescimento, isto é, $f(t) \leq C(t+1)$, para todo $t > 0$ e algum $C > 0$.

2.3.1 Demonstração do Corolário 2.1.

Provaremos aqui algumas condições necessárias e suficientes para a existência e não existência de solução para o problema $(P)_{p,f}$.

Demonstração.

$(\Rightarrow)$ Suponha que p satisfaz (p_2). Tome $q(x) = 0$, logo temos pelo Teorema LM_1 que $(P)_{f,g}$ possui solução. Em outras palavras $(P)_{p,f}$ admite solução.

($\Leftarrow$) Suponha que $(P)_{p,f}$ possui uma solução, então em paticular existe solução para

$$\begin{cases} \triangle u \leq p(x)f(u), \ \mathbb{R}^N \\ \\ u \geq 0, \ u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \infty. \end{cases}$$

Então temos pelo Lema 2.7 que $(p+q) = p$ satisfaz (p_2).

■

2.3.2 Demonstração do Corolário 2.2

O Teorema 2.2 provado abaixo, exibirá condições necessárias e suficientes para a existência e não existência de soluções para $(P)_{f,g}$ quando p e q satisfazem (p_1).

Demonstração.
($\Rightarrow$) Suponha que $(P)_{f,g}$ possui uma solução, então pelo Lema 2.7 obtemos que $(p+q)$ satisfaz (p_2), o que é uma contradição.
($\Leftarrow$) Desde que p e q satisfaçam (p_1), $p+q$ também a satisfaz. Temos pelo Lema A.5 do Apêndide A, que existe uma solução u para

$$\begin{cases} \triangle u = p(x) + q(x), \ \mathbb{R}^N \\ \\ u \geq 0, \ u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{cases}$$

e então pela segunda parte do Teorema LM_2, segue que $(P)_{f,g}$ possui uma solução. ■

2.4 Exemplos

Nesta seção daremos alguns exemplos a fim de ilustrar alguns de nossos teoremas.

Relembremos o exemplo que exibimos na introdução deste trabalho:

Exemplo 1: O problema

$$(P)_{u^\alpha,u^\beta} \qquad \begin{cases} \triangle u = p(x)u^\alpha + q(x)u^\beta, \quad \mathbb{R}^N \\ \\ u \geq 0 \quad u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \infty \end{cases}$$

com:

(i) p e q são positivas, não nulas e localmente Hölder contínuas para $\theta \in (0,1)$ e p satisfaz (p_2);

(ii) $0 < \alpha \leq 1 < \beta$;

(iii) $\displaystyle\int_0^\infty tq^*(t)e^{\beta\hat{p}(t)}dt < \infty$; onde $q^*(t) = \max_{|x|=t} q(|x|),\ t \geq 0,\ \hat{p}(t) = \displaystyle\int_0^s p_*(s)ds$ e

(iv)

$$\int_0^\infty tp_{osc}(t)e^{\beta\hat{p}(t)}dt < \infty$$

admite uma solução pelo Teorema (LM_1).

Demonstração. Neste caso temos que $f(s) = s^\alpha,\ \ g(s) = s^\beta\ \forall s \geq 0$. Temos

$$f(0) = g(0) = 0,\ \text{e}\ , f(s), g(s) > 0;\ f'(s), g'(s) \geq 0,\ \forall s > 0.$$

Logo (f_0) é satisfeita

Verifiquemos que $f(s) = s^\alpha$ satisfaz (f_3).

$$\int_1^\infty \frac{1}{f(s)}ds = \int_1^\infty s^{-\alpha}ds.$$

Se $\alpha = 1$, então

$$\int_1^\infty s^{-\alpha}ds = \lim_{t\to\infty} \ln t = \infty.$$

Para $0 < \alpha < 1$, obtemos

$$\int_1^\infty s^{-\alpha}ds = \lim_{t\to\infty} \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} = \infty.$$

Então (f_3) está satisfeita.

Verifcaremos agora que (q_1) é satisfeita, ou seja

$$\int_0^\infty tq^*(t)g(\psi^{-1}\hat{p}(t))dt < \infty.$$

Relembrando que ψ^{-1} denota a inversa da função crecente ψ, definida por

$$\psi(t) := \int_1^t \frac{1}{f(s)}ds,\ t > 0.$$

Neste caso teremos

$$\psi^{-1}(t) = e^t, t > 0,\ \text{para}\ \alpha = 1\ \text{e}$$

$$\psi^{-1}(t) = \left[\frac{1}{(1-\alpha)(t+1)}\right]^{(1-\alpha)}, t > 0,\ \text{e}\ 0 < \alpha < 1.$$

Para $\beta > 1$ temos:

- se $0 < \alpha < 1$, temos

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty tq^*(t)\left[\frac{1}{(1-\alpha)(\hat{p}(t)+1)}\right]^{\beta(1-\alpha)} dt &\leq C\int_0^\infty tq^*(t)\left[\hat{p}(t)\right]^{-\beta(1-\alpha)} dt \\
&\leq C\int_0^\infty tq^*(t)e^{\beta(1-\alpha)\hat{p}(t)} \\
&\leq C\int_0^\infty tq^*(t)e^{\beta\hat{p}(t)}dt < \infty,
\end{aligned}
$$

- se $\alpha = 1$, para que (q_1) seja satisfeita basta que

$$\int_0^\infty tq^*(t)e^{\beta\hat{p}(t)}dt < \infty.$$

Ou seja, (q_1) é satisfeita. Agora mostraremos que (p_3) é assumida. Das definições de f e g obtemos $f \leq g$ e então

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty tp_{osc}(t)f[\psi^{-1}(\hat{p}(t))]dt &\leq \int_0^\infty tp_{osc}(t)g[\psi^{-1}(\hat{p}(t))]dt \\
&\leq C\int_0^\infty tp_{osc}(t)e^{\beta\hat{p}(t)}dt \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

Portanto provamos que (p_3) também é satisfeita. Concluindo assim a verificação de todas as hipóteses do Teorema LM_1. ■

Agora exibiremos um exemplo de solução para o problema $(P)_{p,f}$

Exemplo 2: Para o problema $(P)_{p,f}$, considere $p(x,y,z) = \dfrac{8}{\sqrt{2x^2+y^2+z^2+1}}$ e $f(s) = \sqrt{s},\ s \geq 0$. Claramente temos que p e f satisfazem as condições de existência para $(P)_{p,g}$. Além disso é fácil ver que $u(x,y,z) = 2x^2+y^2+z^2+1$ é uma solução positiva para $(P)_{p,f}$.

No próximo capítulo daremos algumas relações de existência e não existência entre os problemas $(P)_{p,f}$ e $(P)_{f,g}$, no sentido de que, não existência de $(P)_{p,f}$ significa em alguns casos, não existência para $(P)_{f,g}$ e existência para $(P)_{p,f}$ e $(P)_{g,g}$ nem sempre é verdade a existência de solução para $(P)_{f,g}$.

Capítulo 3

Relações de existência e não existência entre $(P)_{f,g}$ e $(P)_{p,f}$

Nesste capítulo provaremos Teoremas M_1 e M_2, que relacionam a existência e não existência de soluções para as classe de problemas $(P)_{p,f}$ e $(P)_{f,g}$ sob algumas condições nos termos p, q, f e g. Antes de demonstrá-los, enunciaremos e provaremos alguns resultados adicionais que serão usados em suas demonstrações.

3.1 Resultados de existência para a classe $(P)_{p,f}$

Primeiro enunciaremos um teorema de existência para $(P_\Omega)_{p,f}$.

Lema 3.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, limitado, conexo, regular e com fronteira compacta. Assuma que $p \in C^{0,\theta}(\overline{\Omega})$ $(0 < \theta < 1)$ é c-positiva em Ω e f satisfaz (f_0). Então o problema $(P_\Omega)_{p,f}$ admite uma solução se f satisfizer (f_1).*

Demonstração. Confira Cîrstea e Radulescu [8]. ∎

O lema abaixo, exibe condições suficientes para que o problema $(P)_{p,f}$ admita solução.

Lema 3.2. *Suponha que exista uma sequência de domínios limitados, regulares e conexos $(\Omega_n)_{n\geq 1}$ tal que $\overline{\Omega_n} \subset \Omega_{n+1}$ e $p \in C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ $(0 < \theta < 1)$ é c-positiva em Ω_n para todo $n \geq 1$ e $\mathbb{R}^N = \cup_{n=1}^{\infty}\Omega_n$. Adicionalmente, suponha que p satisfaz (p_1) e f satisfaz (f_0) e (f_1). Então o problema $(P)_{p,f}$ possui uma solução.*

Demonstração. Confira Cîrstea e Radulescu [8]. ∎

À seguir enunciaremos um teorema de existência para o problema $(P)_{p,f}$ para um caso particular de f, o qual foi provado por Lair e Wood em [15].

Lema 3.3. *Suponha* $f(s) = s^\beta$, $s \geq 0$, *com* $0 < \beta \leq 1$*;* $p(x) = p(|x|) \in C(\mathbb{R}^N)$ *não negativa e não trivial . Então o problema* $(P)_{p,f}$ *admite solução se, e somente se,* p *satisfaz* (p_2).

Demonstração. Veja Lair [15]. ∎

Para um caso mais geral para f e particularizando p, mais especificamente $p(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}^N$, temos o lema abaixo, que explicita uma condição necessária e suficiente para que $(P)_{p,f}$ admita uma solução.

Lema 3.4. *Seja* $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *satisfazendo* $f(t) > 0$, $t > 0$*;* f *de classe* C^1 *e* $f'(t) \geq 0$, $t \geq 0$. *Então o problema*

$$(P)_{1,f} \qquad \begin{cases} \triangle u = f(u), \ \mathbb{R}^N \\ \\ u \geq 0, \ u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \end{cases}$$

possui solução se, e somente se, f *satisfaz* (f_3).

Demonstração. Confira Osserman [23]. ∎

Para um caso mais geral que os problemas acima tratados, Magdalena [5] demonstrou o seguinte:

Lema 3.5. *Assuma que* $\alpha > 1$*;* $q \in C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ *satisfaz* (p_1). *Suponha que exista uma sequência de domínios limitados, conexos, regulares* $(\Omega_n)_{n\geq 1}$ *tal que* $\overline{\Omega_n} \subset \Omega_{n+1}$, $\mathbb{R}^N = \bigcup_{n=1}^\infty \Omega_n$*;* q *é c-positiva em* Ω_n, *para todo* $n \geq 1$ *e* $h : [0,\infty) \overset{C^1}{\to} [1,\infty)$ *com* $h' \geq 0$. *Então o problema*

$$(P)_{q,g} \qquad \begin{cases} \triangle u = q(x)h(u)u^\alpha, \ \mathbb{R}^N \\ \\ u \geq 0, \ u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \end{cases}$$

possui uma solução.

Demonstração. Mostraremos que estamos nas condições do Lema 3.2. Primeiramente mostraremos que a função $g(s) = h(s)s^\alpha$, $s \geq 0$ satisfaz (f_0). De fato, $g(0) = 0$ e $g \in C^1([0,\infty))$, pois $h \in C^1([0,\infty))$ e $\alpha > 1$.
De $\alpha > 1$; obtemos $g'(s) = h'(s)s^\alpha + \alpha h(s)s^{\alpha-1} \geq 0$, $s \geq 0$. Logo g satisfaz (f_0).

Verifiquemos que (f_1) também é satisfeita. Como $h \geq 1$, temos que

$$G(t) = \int_0^t g(s)ds = \int_0^t s^\alpha h(s)ds \geq \int_0^t s^\alpha = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \ t \geq 0.$$

Tome $t_0 = \alpha + 1$. Então temos que para todo $t > t_0 > 1$

$$G(t) \geq \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} \geq 1.$$

Daí, elevando ao expoente $-1/2$ e integrando em (t_0, ∞) obtemos

$$\int_{t_0}^{\infty} (G(t))^{-\frac{1}{2}} dt \leq \int_{t_0}^{\infty} \left(\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)^{-\frac{1}{2}} dt.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{\infty} G(t)^{-\frac{1}{2}} dt &= \int_{1}^{t_0} (G(t))^{-\frac{1}{2}}\, dt + \int_{t_0}^{\infty} (G(t))^{-\frac{1}{2}}\, dt \\
&\leq c_1 + \int_{t_0}^{\infty} \left(\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)^{-\frac{1}{2}} dt \\
&= c_1 + c_2 \lim_{t\to\infty} t^{\frac{-\alpha+1}{2}} - 2t_0^{\frac{-\alpha+1}{2}}.
\end{aligned}$$

Usando $\alpha > 1$ temos que

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{-\alpha+1}{2}} = 0.$$

Consequentemente,

$$\int_{1}^{\infty} 2G(t) dt < \infty.$$

Portanto pelo Lema 3.2, $(P)_{q,g}$ admite uma solução. ∎

3.2 Demonstração do Teorema M_1

O próximo teorema abaixo, demonstrado em [5], mostra que sob algumas hipóteses, a não existência de solução para $(P)_{p,f}$ implica na não existência de solução para$(P)_{f,g}$. Relembrando temos

Teorema M_1: *Suponha que $p \in C^{0,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ $(0 < \theta < 1)$ é positiva em $\Omega_n = B_n(0)$ e que são válidas as hipóteses abaixo:*

(f_4) $$f(s) = s^{\beta}, s \geq 0,$$

e

(g_1) $$g(s) = s^{\alpha} h(s),\ \ s \geq 0; h : [0, \infty) \xrightarrow{C^1} [1, \infty);\ \ h' \geq 0.$$

Se $\beta > 1$, então o problema $(P)_{f,g}$ não possui solução se $(P)_{p,f}$ não possuir.

Demonstração. A demonstração será por redução ao absurdo, ou seja, admitiremos que existe u solução de $(P)_{f,g}$. Observe que f satisfaz (f_0) e (f_1). Então podemos aplicar o Lema 3.1 e garantir que para todo n, existe v_n solução de

$$\begin{cases} \triangle u = p(x)u^{\beta}, \ \Omega_n \\ u \geq 0, \ u(x) \overset{x \to \partial\Omega_n}{\longrightarrow} \infty. \end{cases}$$

Desde que $\overline{\Omega_n} \subset \Omega_{n+1}$, podemos aplicar o princípio do máximo e mostrar que

$$v_n \geq v_{n+1}, \text{ em } \Omega_n, \text{ e } v_n \geq u \text{ em } \Omega_n. \tag{3.1}$$

Logo v_n é monótona e limitada. Daí, existe

$$v(x) = \lim_{n\to\infty} v_n(x), x \in \mathbb{R}^N.$$

Analogamente à Afirmação 2.6 obtemos que v também satisfaz

$$\triangle v(x) = p(x)v^{\beta}.$$

De (3.1) temos que $u \leq v$ em $\mathbb{R}^N$. Desde que u é positiva e que

$$u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

obtemos

$$v(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Logo v satisfaz

$$\begin{cases} \triangle v = p(x)v^{\beta}, & \mathbb{R}^N \\ \\ v > 0 \quad v(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \end{cases}$$

ou seja, v é solução de $(P)_{p,f}$ o que contraria nossa hipótese. Logo $(P)_{f,g}$ não possui solução. ∎

Observação 3.5.1. *Para que $(P)_{f,g}$ não possua solução sob as hipóteses do Teorema M_1, basta que p não satisfaça (p_1), isto é, satisfaz (p_2), desde que a função $f(s) = s^{\beta}$ satisfaz (f_0) e (f_1), para $\beta > 1$.*

3.3 Demonstração do Teorema M_2

Abaixo relembraremos e demonstraremos o teorema principal deste capítulo, o qual mostra uma relação intrigante entre os problemas $(P)_{p,f}, (P)_{q,g}$ e $(P)_{p,f}$.

Teorema M_2: *Suponha* (f_4) *e* (g_1) . *Além disso, admita que* $p \in C(\mathbb{R}^N)$ *seja radial e satisfaça* (p_2)*;* q *localmente Hölder contínua para* $0 < \theta \leq 1$*; satisfaz*

$$(q_2) \qquad \int_0^\infty tq^*(t)dt < \infty$$

e $q(x) \geq e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}^N$. *Então para* $\beta = 1$ *e* $\alpha > 2$ *os problemas* $(P)_{p,f}$ *e* $(P)_{q,g}$ *admitem soluções, mas* $(P)_{f,g}$ *não admite.*

Demonstração.

O Lema 3.3 e Lema 3.5 garantem a existência de solução para os problemas $(P)_{p,f}$ e $(P)_{q,g}$, respectivamente. Agora devemos mostrar que $(P)_{f,g}$ naõ possui solução. A prova se baseia nas mesmas idéias de [18] e [4]. Suponha por contradição que exista w solução de $(P)_{f,g}$. Pelo Lema A.1, no Apêndice A, existe uma solução $\tilde{u}$ da equação integral em $[0, R)$

$$\tilde{u}(r) = \tilde{u}_0 + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1}[p(s)\tilde{u}(s) + q_*(s)u^\alpha(s)h(\tilde{u}(s))]dsdt, \tag{3.2}$$

onde $0 < \tilde{u}_0 = \tilde{u}(0) < w(0)$ e R é o extremo maximal à direita.
Afirmamos que $R = \infty$. Caso contrário, temos pelo Lema A.1 no Apêndice A, que

$$\tilde{u}(r) \stackrel{r \to R^-}{\longrightarrow} \infty$$

Então definindo $u(x) = \tilde{u}(|x|)$, $x \in B_R(0)$, temos que u satisfaz

$$\begin{cases} \triangle u = p(|x|)u + q_*(|x|)u^\alpha f(u), \ B_R(0) \\ \\ u > 0, \ B_R(0); \ u(x) \stackrel{|x| \to R}{\longrightarrow} \infty. \end{cases}$$

Afirmamos que $u \geq w$, em $B_R(0)$. Caso contrário, definininindo

$$\tilde{\Omega} = \{x \in B_R(0) \ / \ u(x) < w(x)\}.$$

Temos

$$\partial\tilde{\Omega} = \{x \in B_R(0) \ / \ u(x) = w(x)\}.$$

Então,

$$\triangle u = p(|x|)u + q_*(|x|)u^\alpha h(u) \leq p(|x|)w + q(x)w^\alpha h(w) = \triangle w, \ x \in \tilde{\Omega}.$$

Daí, aplicando o Princípio de Comparação (Teorema 1.6), segue que

$$u \leq w, \text{ em } \tilde{\Omega},$$

o que é uma contradição. Portanto, $u \geq w$ em $B_R(0)$, e em particular, $u_0 = u(0) \geq w(0)$. Novamente um absurdo. Logo $R = \infty$.

Desde que $\tilde{u}$ é crescente, ou seja $\tilde{u}(r) \geq \tilde{u}(0)$ e que satisfaça (3.2), temos de $p(|x|) \geq 1$ e $q_*(x)u^\alpha h(u) \geq 0$, que

$$\tilde{u}(r) \geq \tilde{u}_0 + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1}\tilde{u}(s)dsdt \geq \tilde{u}_0 + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1}\tilde{u}(0)dsdt, \ r > 0. \tag{3.3}$$

Ou seja,

$$\tilde{u}(r) \geq \tilde{u}_0 \left(1 + \frac{r^2}{1!2^1N}\right), \ r > 0. \tag{3.4}$$

Substituindo (3.4) novamente no lado direito de (3.3) e integrando

$$\tilde{u}(r) \geq \tilde{u}_0 \left(1 + \frac{r^2}{1!2^1N} + \frac{r^4}{2!2^2N(N+2)}\right), \ r > 0,$$

continuando esse raciocínio obtemos

$$\tilde{u}(r) \geq \tilde{u}_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{2k}}{k!2^kN(N+2)\cdots(N+2k-2)}, \ r > 0. \tag{3.5}$$

De $(\Gamma.3)$, segue que

$$\tilde{u}(r) \geq \tilde{u}_0\Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{r}{2})^{2k}}{k!\Gamma\left(\frac{N}{2}+k\right)}, \ r > 0. \tag{3.6}$$

Multiplicando e dividindo (3.6) por $(r/2)^{1-\frac{N}{2}}$ e ultilizando a propriedade

$$(\Gamma.2) \qquad \Gamma(k+1) = k!, \ k \text{ natural},$$

obtemos

$$\tilde{u}(r) \geq \tilde{u}_0\Gamma\left(\frac{N}{2}\right) r^{1-\frac{N}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{2k+\frac{N}{2}-1}}{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{N}{2}+k)}, \ r > 0. \tag{3.7}$$

De $(I.1)$, segue que (3.7) se reduz a

$$\tilde{u}(r) \geq \tilde{u}_0\Gamma\left(\frac{N}{2}\right) r^{1-\frac{N}{2}} I_{\frac{N}{2}-1}(r), \ r > 0. \tag{3.8}$$

Mas para todo r suficientemente grande segue de $(I.2)$ e de (3.8) que

$$\tilde{u}(r) \geq C_1 e^r r^{\frac{1-N}{2}}, \ r \text{ grande}$$

onde $C_1 = u_0\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)$.

Afirmação 3.6. *$u(r) \geq \epsilon[1 + e^{(1-\epsilon)r}]$, para $r > 0$ e algum $\epsilon > 0$ pequeno.*

De fato para cada $\epsilon \in (0,1)$, usando L'Hopital

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty} C_1 \frac{1+e^{(1-\epsilon)r}}{r^{\frac{1-N}{2}}e^r} &= \lim_{r\to\infty} C_1 \frac{(1-\epsilon)e^{(1-\epsilon)r}}{e^r(\frac{1-N}{2})r^{\frac{3-N}{2}}+r^{\frac{1-N}{2}}e^r} \\
&= \lim_{r\to\infty} \frac{C_1(1-\epsilon)}{e^{\epsilon r}[(\frac{1-N}{2})r^{\frac{3-N}{2}}+r^{\frac{1-N}{2}}]} \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Ou seja, existe R_ϵ tal que

$$\frac{(1+e^{(1-\epsilon)r})}{r^{\frac{1-N}{2}}e^r} \le \epsilon,\ r > R_\epsilon,$$

reescrevendo temos

$$e^r r^{\frac{1-N}{2}} \ge \epsilon[1+e^{(1-\epsilon)r}],\ r > R_\epsilon.$$

Agora para provaremos que a desigualdade acima também é válida se $r \le R_\epsilon$. Sem perda de generalidade escolha $\epsilon \in (0,1)$ tal que

$$\max_{r\in[0,1/2]} \epsilon(1+e^{(1-\epsilon)r}) \le \tilde{u}_0,\ \text{para todo } r \in [0,1/2].$$

Então

$$\tilde{u}(r) \ge \tilde{u}_0 \ge \epsilon(1+e^{(1-\epsilon)r}),\ r \in [0,1/2].$$

Agora para $r \in (1/2, R_\epsilon)$, temos que

$$e^r r^{\frac{1-N}{2}} \ge 1 + e^{(1-1/2)r} > \epsilon(1+e^{(1-\epsilon)r}),\ r \in (1/2, R_{1/2}).$$

logo temos que

$$\tilde{u}(r) \ge 1 + e^{(1-\epsilon)r} \ge \epsilon(1+e^{(1-\epsilon)r}),\ r \in (1/2, R_{1/2}),$$

o que prova nossa afirmação, ou seja

$$\tilde{u}(r) \ge \epsilon[1+e^{(1-\epsilon)r}],\ \text{para } r \ge 0 \text{ e algum } \epsilon > 0 \text{ pequeno }.$$

Escolha ϵ tal que

$$\beta - \frac{1}{1-\epsilon} > 1$$

e tome $c_0 = \epsilon^{\frac{1}{(1-\epsilon)}}$ e $\gamma = \beta - \frac{1}{1-\epsilon}$. Então temos pelo Lema 3.1 que existe v_n solução do problema

$$\begin{cases} \triangle v_n = c_0 v_n^\gamma,\ \Omega_n \\ \\ v_n > 0,\ v_n(x) \overset{x\to\partial\Omega_n}{\longrightarrow} \infty. \end{cases}$$

Relembrando que $\Omega_n = B_n(0)$, podemos aplicar o Princípio de comparação (Teorema 1.6) para concluir que $v_n \ge v_{n+1}$ em Ω_n. Como (v_n) é monótona não crescente, existe

$$v(x) = \lim_{n\to\infty} v(x),\ x \in \mathbb{R}^N.$$

Por um argumento padrão já ultilizado temos que v satisfaz

$$\triangle v = c_0 v^{\gamma},\ \mathbb{R}^N.$$

Se mostrarmos que $u \leq v$, então v satisfaz

$$\begin{cases} \triangle v = c_0 v^{\gamma},\ \mathbb{R}^N \\ \\ v > 0,\ v(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \end{cases}$$

e obteremos uma contradição, pois pelo Lema 3.4 esse problema com $\gamma > 1$ não possui solução. No que segue, mostraremos primeiro que $v_n \geq u$, em Ω_n. Suponha, por absurdo, que isso não ocorresse, ou seja, existe n_0 tal que $\max_{\overline{\Omega}_{n_0}}(u - v_{n_0}) > 0$. Mas sabemos que o máximo não pode ocorrer em $\partial\Omega_{n_0}$, pois $v_n(x) \overset{x\to\partial\Omega_n}{\longrightarrow} \infty$, então concluímos que existe $x_0 \in \Omega_{n_0}$ onde o máximo ocorre. Usando a que $q(x) \geq e^{-|x|}$ e $p(|x|), h \geq 1$, temos no ponto x_0 que

$$\begin{aligned} 0 \geq \triangle(u - v_{n_0})(x_0) &= p(|x_0|)u(x_0) + q(|x_0|)u^{\beta}(x_0)h(u(x_0)) - c_0 v_{n_0}^{\gamma}(x_0) \\ \\ &\geq u(x_0) + e^{-|x_0|}u^{\beta}(x_0) - c_0 v_{n_0}^{\gamma}(x_0). \end{aligned}$$

lembrando que $\gamma = \beta - \frac{1}{1-\epsilon}$ obtemos

$$0 \geq u(x_0) + e^{-|x_0|}u^{\frac{1}{1-\epsilon}}(x_0)u^{\gamma}(x_0) - c_0 v_{n_0}^{\gamma}(x_0).$$

Da afirmação (3.6) e de $u(x_0) - v_{n_0}(x_0) > 0$ segue que

$$\begin{aligned} 0 &\geq u(x_0) + e^{-|x_0|}[\epsilon(1 + e^{(1-\epsilon)|x_0|})]^{\frac{1}{1-\epsilon}}u^{\gamma}(x_0) - c_0 v_{n_0}^{\gamma}(x_0) \\ \\ &\geq u(x_0) + \epsilon^{\frac{1}{1-\epsilon}}u^{\gamma}(x_0) - c_0 v_{n_0}^{\gamma}(x_0) \\ \\ &\geq u(x_0) + c_0 u^{\gamma}(x_0) - c_0 v_{n_0}^{\gamma}(x_0) > 0, \end{aligned}$$

o que é uma contradição. Logo $v_n \geq u$, conseguentemente $v \geq u$, o que conclui nossa demonstração. ∎

Segue que o Teorema M_2 generaliza o caso estudado por Lair [18], mostrado abaixo.

Corolário L_1: *Suponha $\alpha > 2$. Então os problemas $(P)_{1,u}$ e $(P)_{e^{-|\cdot|},u^{\alpha}}$ admitem solução, entretanto o problema $(P)_{u,u^{\alpha}}$ não admite.*

Demonstração.

Note que nesse caso, temos $p(x) = 1$ e $q(x) = e^{-|x|}$ satisfaz (q_2). Logo estamos na hipótese do teorema anterior, e segue o resultado. ■

O corolário a seguir, demonstrado por Magdalena [4] é análogo ao Teorema M_2.

Corolário L_2: *Suponha* $h : [0,\infty) \xrightarrow{C^1} [1,\infty)$ *com* $h' \geq 0$*;* $a \geq 1$ $\alpha > 2$*;* $g(s) = s^\alpha h(s)$*. Então os problemas* $(P)_{1,u}$ *e* $(P)_{e^{-|\cdot|^a},h}$ *possuem solução, entretanto* $(P)_{u,h}$ *não possui solução.*

Demonstração.

Neste caso temos $p(x) = 1$ e além disso, $q \in C^{loc}_{0,\theta}(\mathbb{R}^N)$ para $0 < \theta < 1$ e para $a \geq 1$ segue que $q(x) = e^{-|x|^a} \leq e^{-|x|}$, $|x| \geq 1$, então por $e^{-|x|}$ satisfazer (q_2) segue que q também satisfaz. A demonstração segue análoga à demonstração do Teorema M_2, trocando $e^{-|x_0|}$ por $e^{-|x_0|^a}$. ■

Assim temos que o Torema M_2 é um melhoramento de alguns resultados já obtidos.

Apêndice A

Demonstração de resultados auxiliares

Agora apresentaremos alguns resultados apenas citados ao longo deste trabalho e que estão ligados à classe de problemas $(P)_{f,g}$, os quais foram necessários para a demostração dos nossos teoremas principais.

A.1 Demonstração do Lema 1.21

Demonstração. Seja $\sigma = \sup\{r \in [0, R]/\ v(r) \leq u(r)\}$. Mostraremos que $\sigma = R$, ou seja $v(r) \leq u(r)$ para todo $r \in [0, R]$.
Suponha, por absurdo, que $\sigma < R$. De v supersolução temos

$$v(\sigma) \leq v(0) + \int_0^{\sigma} t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} p(s) f(v(s)) ds dt,$$

de f não decrescente; $v(0) < u(0)$; $v(s) \leq u(s)$, $s \in [0, \sigma]$ e u subsolução temos

$$\begin{aligned} v(\sigma) &\leq v(0) + \int_0^{\sigma} t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} p(s) f(u(s)) ds dt \\ &< u(0) + \int_0^{\sigma} t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} p(s) f(u(s)) ds dt \\ &< u(\sigma). \end{aligned}$$

Isto é $v(\sigma) < u(\sigma)$. Usando a continuidade de u e v, temos que existe $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $v(\sigma + \epsilon) \leq u(\sigma + \epsilon)$, contradizendo a definiçao de σ. Portanto $\sigma = R$. ■

A.2 Demonstração do Lema 1.22

Antes de demonstrar o Lema 1.22, demonstraremos um lema de existência para $(P_{rad})_{p,f}$ com condições mais fracas em f. A prova se baseia nas mesmas idéias de Santos [26]. Ou seja

Lema A.1. *Suponha $p : [0, \infty) \to [0, \infty)$ contínua e $f : [0, \infty) \to [0, \infty) \in Lip_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Então, para cada $\gamma \geq 0$ dado, existem $R_\gamma \in (0, \infty]$ o extremo maximal à direita onde o problema abaixo admite solução e $u = u(., \gamma) \in C^2[0, R_\gamma]$ solução de*

$$\begin{cases} (r^{N-1}u')' = r^{N-1}p(r)f(u), \ r \in (0, R_\gamma) \\ \\ u > 0, \ u(0) = \gamma, \ u'(0) = 0. \end{cases}$$

Além disso, u satisfaz

$$u(r) = \gamma + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1}p(s)f(u(s))dsdt, \ r \in [0, R_\gamma] > 0,$$

e $u(r) \overset{r \to R_\gamma^-}{\longrightarrow} \infty$, se $R_\gamma < \infty$.

Demonstração. Note que encontrar umas solução para $(P_{rad})_{p,f}$ é equivalente a resolver a seguinte equação integral

$$u(r) = \gamma + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1}p(s)f(u(s))dsdt, \ r \geq 0, \ \gamma = u(0). \tag{A.1}$$

Definindo

$$\mathbf{F}u(r) = \gamma + \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1}p(s)f(u(s))dsdt, \ r > 0,$$

segue que as eventuais soluções de $(P_{rad})_{p,f}$ são os pontos fixos de $\mathbf{F}$ em um espaço de funções apropriados. Primeiro seja $\gamma \geq 0$. Das hipóteses em f, temos que para $K_\gamma > 1$, $f(r, .)$ é Lipschitz em $[\gamma, K_\gamma \gamma]$. Agora considere

$$X_{\gamma,\epsilon} := \{u \in C([0, \epsilon]) \text{ tal que } u(0) = \gamma, \ \gamma \leq u(r) \leq K_\gamma \gamma\}$$

onde K_γ é a constante de Lipschitz de $f(r, .)$ em $[\gamma, K_\gamma \gamma]$. Logo

Afirmação A.2. $(X_{\gamma,\epsilon}, ||.||_\infty)$ *é um espaço métrico completo*

De fato $(X_{\gamma,\epsilon}, ||.||_\infty)$ é um conjunto fechado de $C([0, \epsilon])$. Sendo $(C([0, \epsilon], ||.||_\infty)$ completo, temos $(X_{\gamma,\epsilon}, ||.||_\infty)$ espaço métrico completo.

A partir dessas definições e observações nós usaremos o teorema do Ponto-fixo de Banach para garantir a existência de solução para$(P_{rad})_{p,f}$. Para isso devemos mostrar que $\mathbf{F}$ satisfaz as hipóteses do Teorema do Ponto-fixo de Banach, ou seja que valem:

(i) $\mathbf{F}(X_{\gamma,\epsilon}) \subset X_{\gamma,\epsilon}$;

(ii) $||\mathbf{F}(u_1) - \mathbf{F}(u_2)||_\infty \leq K||u_1 - u_2||_\infty$ para algum $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, $u_1, u_2 \in X_{\gamma,\epsilon}$ e $K \in (0,1)$.

Prova de (i)

Temos que

$$\int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} p(s) f(u(s)) ds dt \leq \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} p(s) M ds dt,$$

onde $M := \max_{s\in[0,\epsilon]} f(s)$, logo

$$\int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} p(s) f(u(s)) ds dt \leq M \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} p(s) ds dt,$$

tomando $\epsilon > 0$ tal que

$$\int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} p(s) ds dt < \frac{K_\gamma \gamma}{M}$$

temos $\mathbf{F}(u(r)) \leq K_\gamma \gamma$. A desigualdade $\gamma \leq \mathbf{F}(u(r))$é trivial.

Prova de (ii)

Sejam u_1 e $u_2 \in X_{\gamma,\epsilon}$ então

$$\begin{aligned}
|\mathbf{F}(u_1(r)) - \mathbf{F}(u_2(r))| &\leq \int_0^r |t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} p(s) f(u_1(s)) ds - t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} p(s) f(u_2(s)) ds| dt \\
&= \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} p(s) |f(u_1(s)) - f(u_2(s))| ds dt \\
&\leq \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} p(s) K_\gamma u_1(s)) - u_2(s)| ds dt \\
&\leq \int_0^r |t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} p(s) K_\gamma \max_{s\in[0,\epsilon]} |u_1(s)) - u_2(s)|| ds dt \\
&\leq K_\gamma ||u_1 - u_2||_{C([0,\epsilon])} \int_0^\epsilon |t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} p(s)| ds dt.
\end{aligned}$$

Tomando ϵ tal que

$$\int_0^\epsilon |t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} p(s)| ds dt < \frac{1}{K_\gamma}.$$

Aplicando o Teorema do ponto fixo de Banach, temos que $\mathbf{F}$ possui um ponto fixo $v \in X_{\gamma,\epsilon}$. Em outras palavras $(P_{rad})_{p,f}$ possui solução em $[0,\epsilon]$.

Considere $R_\gamma = \sup\{r > 0$ tal que $(P_{rad})_{p,f}$ possui solução em $(0,r)\} \geq \epsilon > 0$.
Suponha que $R_\gamma < \infty$, e que $v(r) \overset{r\to R_\gamma -}{\longrightarrow} a < \infty$. Então

$$v(r) \overset{r\to R^-}{\longrightarrow} a < \infty \text{ e } v'(r) \overset{r\to R^-}{\longrightarrow} b < \infty.$$

Logo podemos formular o seguinte problema

$$(P'_{rad})_{p,f} \qquad \begin{cases} (r^{N-1}v')' = r^{N-1}p(r)f(v), \ r > R_\gamma \\ v(r) = a > 0, v'(R) = b. \end{cases}$$

Fazendo um argumento análogo ao anterior, mostramos que existe uma solução de $(P'_{rad})_{p,f}$ em $(R, R+\epsilon)$, para $\epsilon > 0$. Ou seja, existe solução para $(P_{rad})_{p,f}$ em $(0, R_\gamma + \epsilon)$, o que contraria a definição de R_γ ser o extremo maximal. Isto demonstra o lema.

■

Usando este lema podemos provar agora o **Lema 1.22.**

Demonstração. Como f é de classe C^1, temos em particular que f é localmente Lipschitiziana. Portanto pelo lema anterior temos que o problema $(P_{rad})_{p,f}$ admimte uma solução em $[0, R_\gamma]$. Usando a hipótese (f_2) mostraremos agora que $R_\gamma = \infty$.
Pelo lema anterior temos que para $R_\gamma < \infty$, v satisfaz

$$v(r) \overset{r\to R^-}{\longrightarrow} \infty. \tag{A.2}$$

Multiplicando ambos lados da equação $(r^{N-1}v')' = r^{N-1}p(r)f(v)$ por $r^{N-1}v'$, $r > 0$ obtemos

$$r^{N-1}v'(r^{N-1}v')' = r^{N-1}r^{N-1}v'p(r)f(v), \ r > 0,$$

que podemos reescrever como

$$\frac{1}{2}[(r^{N-1}v')^2]' = r^{2N-2}p(r)f(v)v', \ r > 0.$$

Integrando em $(0, r)$,

$$\frac{1}{2}\int_0^r [(t^{N-1}v')^2]'dt = \int_0^r t^{2N-2}p(t)f(v)v'dt. \tag{A.3}$$

Definindo

$$\varphi(t) := \sup\{p(s); 0 < s \leq t\}, \ t \in (0, r],$$

temos que $p(t) \leq \varphi(t)$, $t \in (0, r]$ e de $(A.3)$ segue

$$\frac{1}{2}(r^{N-1}v')^2 \leq r^{2N-2}\varphi(r)\int_0^r f(v)v'dt.$$

Observe que $\int_0^r f(v)v'dt = F(v(r)),\ r>0$, então

$$v'(r) \leq \sqrt{2\varphi(r)F(v(r))},\ r>0.$$

Logo,

$$\frac{v'(r)}{\sqrt{F(u(r))}} \leq \sqrt{2\varphi(r)},\ r>0.$$

Integrando em $(0,r)$ e calculando,

$$\int_\gamma^{v(r)} \frac{1}{\sqrt{F(t)}}dt \leq \int_0^r \sqrt{2\varphi(r)}dt,$$

fazendo $r \to R^-$ e usando $(A.2)$, segue de (f_2)

$$\infty = \int_\gamma^\infty \frac{1}{\sqrt{F(t)}}dt \leq \int_0^R \sqrt{2\varphi(t)}dt,$$

o que é uma contradição. Portanto v está definida em $(0,\infty)$.

Agora mostraremos que $v(r) \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Para isso usaremos o fato de p satisfazer (p_2). Usando a equação integral de $(P_{rad})_{p,f}$, temos que

$$v(r) = \gamma + \int_0^r t^{1-N}\int_0^t s^{N-1}p(s)f(v(s))dsdt,\ r>0.$$

De f não decrescente, obtemos

$$v(r) \geq f(\gamma)\int_0^r t^{1-N}\int_{\frac{t}{2}}^t s^{N-1}p(s)dsdt,\ r>0.$$

De $s \geq t/2$, temos $s^{N-1} \geq t^{N-1}/2^{N-1}$, consequentemente

$$v(r) \geq f(\gamma)2^{1-N}\int_0^r\int_0^t p(s)dsdt,\ r>0. \tag{A.4}$$

Pela seguinte integração

$$u = \int_{\frac{t}{2}}^t p(s)ds,\ t>0$$
$$dv = dt,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^r\int_{\frac{t}{2}}^t p(s)dsdt &= \int_0^r dt\int_{\frac{t}{2}}^t p(s)dsdt,\\
&= r\int_{\frac{r}{2}}^r p(s)ds - \int_0^r t\left(p(t) - \frac{1}{2}p\left(\frac{t}{2}\right)\right)dt,\\
&= \int_{\frac{r}{2}}^r (r-t)p(s)dt + \int_0^{\frac{r}{2}} tp(t)dt,\\
&\geq \int_0^{\frac{r}{2}} tp(t)dt.
\end{aligned}$$

Substituindo a desigualdade acima em (A.4) temos

$$v(r) \geq C(N,\gamma)\int_0^{\frac{r}{2}} tp(t)dt,\ r > 0, \tag{A.5}$$

onde $C(N,\gamma) = 2^{N-1}f(\gamma)$.

Lembrando que p satisfaz (p_2), e fazendo $r \to \infty$ em $(A.5)$, temos que

$$v(r) \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

■

Observação A.2.1. *Temos que o Lema A.1 e o Lema 1.22, também são válidos para* $u'(0) = \eta > 0$.

A.3 Demonstração do Lema 1.23

Para provar esse lema, usaremos as mesmas idéia de Lair [18].

Demonstração. Provar essa afirmação é equivalente provar que

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{F(t)}}dt < \infty$$

implica

$$\int_1^\infty \frac{1}{f(t)}dt < \infty.$$

Para provar esse fato mostraremos que existem constante positivas δ e M tal que

$$\frac{f(s)}{s} \geq \delta^2 \text{ para todo } s \geq M. \tag{A.6}$$

Então teremos que

$$F(s) = \int_0^s f(t)dt \leq \int_0^s f(s)dt = sf(s) \leq \frac{f^2(s)}{\delta^2},\ \text{para } s \geq M.$$

Elevando a $-1/2$

$$F(s)^{-\frac{1}{2}} \geq \frac{\delta}{f(s)},\ \text{para todo } s \geq M,$$

o que implica que

$$\int_M^\infty \frac{\delta}{f(s)}ds \leq \int_M^\infty \frac{1}{\sqrt{F(s)}}ds < \infty.$$

Portanto

$$\int_1^\infty \frac{\delta}{f(s)}ds \leq \int_1^M \frac{\delta}{f(s)}ds + \int_M^\infty \frac{1}{\sqrt{F(s)}}ds < \infty.$$

Agora demonstraremos (A.6).

Suponha por absurdo que (A.6) seja falsa. Isto é, existe uma sequência $\{s_j\}$ de números reais tal que

$$\lim_{j\to\infty} s_j = \infty, \text{ e } \frac{f(s_j)}{s_j} < \frac{1}{j} \text{ para todo } j.$$

Desde que f é não decrescente, nós temos que

$$f(s) \leq f(s_j) \text{ para todo } s \in [0, s_j],$$

logo,

$$F(s) \leq sf(s) \leq sf(s_j) \text{ para todo } s \in [0, s_j].$$

Portanto

$$\begin{aligned}\int_{s_1}^{s_j} \frac{1}{\sqrt{F(s)}}ds &\geq \int_{s_1}^{s_j} \frac{1}{\sqrt{sf(s_j)}}ds \\ &\geq (j/s_j)^{1/2} \int_{s_1}^{s_j} s^{-1/2}ds = 2j^{1/2}[1-(s_1/s_j)^{1/2}] \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty,\end{aligned}$$

contradizendo nossa hipótese. Então (A.6) é verdadeira, e isto completa nossa prova. ∎

A.4 Demonstração do Lema 1.24

Demonstração. Seja

$$\gamma := \min_{x\in\partial\Omega} \phi,$$

então por hipótese $\gamma > 0$. Defina

$$\varphi(t) := \int_0^t h(s)ds, \text{ onde } h(s) = f(s) + g(s), \text{ para } t > 0.$$

De

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi'(t)}{1} = \lim_{t\to 0} \frac{h(t)}{1} = 0 < 1,$$

segue que $\varphi(t) \leq t$, para $0 < t < \delta$, e algum $\delta > 0$. Sem perda de generalidade podemos supor que $0 < \varphi(\delta) < \gamma$. De p e q localmente Hölder contínuas temos pelo Teorema 1.2 que existe z solução do problema de Dirichilet

$$(D) \qquad \begin{cases} \triangle z = p(x) + q(x), \ \Omega \\ \\ z(x) = \delta, \ \partial\Omega \end{cases}$$

De p, q positivas e Ω regular, podemos aplicar o Princípio de Comparação (Teorema 1.6) e encontrar que $0 < z(x) \leq \delta$, em Ω. Agora considere

$$w(x) := \varphi(z(x)), \text{ logo } w(x) \leq z(x) \text{ para todo } x \in \bar{\Omega}.$$

Da definição de w, de $\varphi''(z) \geq 0$ e de $\varphi'(z) = f(z) + g(z)$ segue que

$$\begin{aligned}
\triangle w &= \varphi''(z)|\nabla z|^2 + \varphi'(z)\triangle z \\
&= \varphi''(z)|\nabla z|^2 + (f(z) + g(z))(p(x) + g(x)) \\
&\geq (f(z) + g(z))(p(x) + g(x)) \\
&\geq (f(w) + g(w))(p(x) + g(x)) \\
&\geq p(x)f(w) + q(x)g(w), \ x \in \Omega.
\end{aligned}$$

Além disso, temos que

$$w(x) \leq z(x) \leq \varphi(\delta), \ x \in \Omega,$$

isto, é

$$w(x) \leq \varphi(\delta) \leq \gamma \leq \phi(x), \ x \in \partial\Omega.$$

Isto mostra que w é uma subsolução de $(P_\phi)_{f,g}$.
Lembrando que v é uma supersolução de $(P_\phi)_{f,g}$, temos que

$$w \leq \phi \leq v \text{ em } \partial\Omega.$$

Agora mostraremos que $w \leq v$ em $\overline{\Omega}$.
De fato, seja

$$A = \{x \in \Omega / w(x) > v(x)\},$$

e suponha $A \neq \emptyset$então

$$\partial A = \{x \in \Omega / w(x) = v(x)\},$$

e para $x \in A$ temos

$$\triangle w \geq p(x)f(w) + q(x)g(w) \geq p(x)f(v) + q(x)g(v) = \triangle v,$$

logo $\triangle(w - v) \geq 0$. Pelo princípio do Máximo temos

$$w \leq v \text{ em } A,$$

o que é uma contradição. Logo $A = \emptyset$ e $w \leq v$, em $\overline{\Omega}$. De $w \leq v$ em $\bar{\Omega}$, temos pelo Teorema de Sub e Supersolução (veja Teorema 1.16) que existe u solução de $(P_\phi)_{f,g}$ tal que $0 < w \leq u \leq v$ em $\bar{\Omega}$. ■

A.5 Demonstração do Lema 1.25

Demonstração. Sejam $\{p_k\}, \{q_k\} \subset C^{\theta}_{loc}(\overline{B_R(0)})$, (para algum $0 < \theta < 1$) decrescentes com $p_k \rightarrow p$ e $q_k \rightarrow q$. Pelo Lema 1.24, para cada inteiro positivo k, existe uma solução não negativa u_k de

$$\begin{cases} \triangle u_k = p_k(|x|)f(u_k) + q_k(|x|)g(u_k), \ B_R(0) \\ \\ u_k(x) = \phi_0, \ \partial B_R(0) \end{cases}$$

Afirmação A.3. *$u_k \leq u_{k+1}$ em $B_R(0)$, $k = 1, 2, 3, ...$*

De fato, suponha por contradição que existem $x_0 \in B_R(0)$ e k_0 tal que $u_{k_0}(x_0) > u_{k_0+1}(x_0)$. Definindo

$$A_0 = \{x \in B / u_k(x) > u_{k+1}(x)\},$$

temos$A_0 \neq \emptyset$, pois $x_0 \in A_0$ e

$$\partial A_0 = \{x \in B / u_k(x) = u_{k+1}(x)\}.$$

Logo em A_0 temos

$$\begin{aligned} \triangle u_{k_0+1} &= p_{k_0+1}(|x|)f(u_{k_0+1}) + q_{k_0+1}(|x|)g(u_{k_0+1}) \\ \\ &\leq p_{k_0}(|x|)f(u_{k_0+1}) + q_{k_0}(|x|)g(u_{k_0+1}) \\ \\ &< p_{k_0}(|x|)f(u_{k_0}) + q_{k_0}(|x|)g(u_{k_0}0) \\ \\ &= \triangle u_{k_0}. \end{aligned}$$

Daí, Pelo Princípio de Comparação (Teorema 1.6) , segue que

$$u_{k_0+1}(x) \geq u_{k_0}(x), \ x \in A_0,$$

o que é um absurdo. Logo $\{u_k\}$ é monótona não decrescente.
Note que

$$u_k(x) \leq \phi_0, \ \text{para todo } x \in \overline{B_R(0)} \text{ e } k > 0. \tag{A.7}$$

Da afirmação A.3 e de $(A.7)$, segue que existe

$$u(x) = \lim_{k \to \infty} u_k(x), \ x \in B_R(0).$$

Fazendo $u_k(x) = \tilde{u}_k(|x|)$, $x \in B_R(0)$ temos que

$$\tilde{u}_k(r) = \tilde{u}_k(0) + \int_0^r t^{1-N} \int_0^r s^{N-1}(p_k(s)f(\tilde{u}_k(s)) + q_k(s)g(\tilde{u}_k(s)))dsdt, \ r \in (0, R). \quad \text{(A.8)}$$

Passando o limite de maneira análoga à Afirmação 2.5 , obtemos

$$\tilde{u}(r) = \tilde{u}(0) + \int_0^r t^{1-N} \int_0^r s^{N-1}(p(s)f(\tilde{u}(s)) + q(s)g(\tilde{u}(s)))dsdt, \ r \in (0, R).$$

Desde que $\tilde{u}_k(R) = \phi_0$ para todo k, segue que $\tilde{u}(R) = \phi_0$. Logo provamos que u é solução não negativa de $(P_{\phi_0})_{f,g}$ em $B_R(0)$. ■

A.6 Demonstração do Lema 1.27

Demonstração. Desde que p é c-positiva e f satisfaz (f_1), temos que pelo Lema 1.26 que existe v solução de

$$\begin{cases} \triangle v = p(x)f(v), \ \Omega \\ \\ v \geq 0, \ v(x) \overset{x \to \partial\Omega}{\longrightarrow} \infty, \end{cases}$$

Agora para cada inteiro positivo k, temos pelo Lema 1.24 que existe w_k uma solução de

$$\begin{cases} \triangle w_k = (p(x) + q(x))(g(w_k) + f(w_k)), \ \Omega \\ \\ w_k \geq 0, \ w_k(x) \overset{x \to \partial\Omega}{\longrightarrow} k. \end{cases}$$

Como na demonstração do Lema 1.25, prova-se que

$$w_k(x) \leq w_{k+1}(x) \leq v(x), \ x \in \Omega. \quad \text{(A.9)}$$

Então existe

$$w(x) = \lim_{k \to} w_k(x), x \in \Omega.$$

Além disso, por argumentos já ultilizados, prova-se que

$$\triangle w = (p(x) + q(x))(f(w) + g(w)), \ x \in \Omega.$$

Segue da definição de $w_k(x)$, $x \in \partial\Omega$ que

$$w(x) \overset{x \to \partial\Omega}{\longrightarrow} \infty.$$

Observe que

$$\triangle w = (p(x) + q(x))(f(w) + g(w)) \geq p(x)f(w) + q(x)g(w), x \in \Omega$$

e

$$\triangle v = p(x)f(v) \leq p(x)f(v) + q(x)g(v),\ x \in \Omega$$

Então temos que w é uma subsolução de $(P_\Omega)_{f,g}$ e v é uma supersolução de $(P_\Omega)_{f,g}$. De $w \leq v$ em Ω podemos aplicar o Teorema de Sub e Supersolução (Teorema 1.16) e então o problema $(P_\Omega)_{f,g}$ possui uma solução u com $w \leq u \leq v$.

Para provar a segunda parte, podemos aplicar novamente o Teorema 1.26 e então teremos que existe v solução de

$$\begin{cases} \triangle v = \xi(x)(f(v) + g(v)),\ \Omega \\ \\ v \geq 0,\ v(x) \overset{x \to \partial\Omega}{\longrightarrow} \infty. \end{cases}$$

De

$$\triangle v = \xi(x)(f(v) + g(v)) \leq p(x)f(v) + q(x)g(v),\ x \in \Omega,$$

temos que v é uma supersoluçao de $(P_\Omega)_{f,g}$.

Agora para cada inteiro positivo k, seja w_k solução de

$$\begin{cases} \triangle w_k = (p(x) + q(x))(f(w_k) + g(w_k)),\ \Omega \\ \\ w_k \geq 0,\ w_k(x) = k,\ x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

A existência é garantida pelo Lema 1.24. Analogamente ao Lema 1.25, usando o princípio de máximo temos que

$$w_k(x) \leq w_{k+1}(x) \leq v(x),\ x \in \Omega.$$

Logo existe

$$w(x) = \lim_{k \to} w_k(x),\ x \in \Omega,$$

além disso

$$\triangle w = (p(x) + q(x))(f(w) + g(w)) \geq p(x)f(w) + q(x)g(w),\ w(x) \leq v(x),\ x \in \Omega.$$

e

$$w(x) \overset{x \to \partial\Omega}{\longrightarrow} \infty.$$

Portanto w é uma subsolução de $(P_\Omega)_{f,g}$. De $w \leq v$, em Ω e v é uma supersolução de $(P_\Omega)_{f,g}$ temos pelo Princípio de Sub e Supersolução que $(P_\Omega)_{f,g}$ (Teorema 1.17) possui uma solução u tal que $w \leq u \leq v$, em Ω. ∎

A.7 Demonstração da Afirmação 2.6

Demonstração. Temos que

$$v(x) \leq u_k(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N, \quad k = 1, 2, 3, ... \tag{A.10}$$

e

$$u_k(x) \leq u_{k_1}(x), \text{para todo } x \in \Omega_{k_1};\text{ com } k \geq k_1 \tag{A.11}$$

Após obtermos as limitações (A.10) e (A.11) precisamos obter a convergência da sequência $\{u_k\}$ em $C^{2,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, para algum $0 < \theta < 1$. Para isso considere $\Omega', \Omega_A, \Omega_B \subset \mathbb{R}^N$ domínios regulares de classe $C^{2,\theta}$ tal que

$$\Omega' \subset\subset \Omega_A \subset\subset \Omega_B \subset\subset \Omega_{k_1} \subset\subset \Omega_k, \text{ onde } k \geq k_1. \tag{A.12}$$

Denotemos por

$$p_\infty = \max_{x \in \overline{\Omega_B}} p(x); \tag{A.13}$$

$$v_0 = \min_{x \in \overline{\Omega_B}} v(x) \text{ e} \tag{A.14}$$

$$M_0 = \max_{x \in \overline{\Omega_B}} u_{k_1}(x). \tag{A.15}$$

Segue da positividade de p, da continuidade de v em $\overline{\Omega_B}$, respectivamente e e de $(A.10)$ que

$$0 < p_\infty < \infty, \quad v_0 < M_0, \text{ em } \overline{\Omega_B}.$$

Para $k \geq k_1$ definindo

$$h_k(x) = p(x) f(u_k(x)), x \in \overline{\Omega_B}.$$

Da positividade de u_k em $\overline{\Omega_B}$, para todo k, temos

$$|h_k(x)| = |p(x)||f(u_k(x))| \leq p_\infty \frac{f(u_k(x))}{u_k(x)} u_k(x) \leq p_\infty c_\infty M_0 = M_1, x \in \overline{\Omega_B},$$

onde

$$c_\infty = \max_{s \in [v_0, M_0]} \frac{f(s)}{s}.$$

Isto é a sequência

$$\{h_k\}_{k_1}^{\infty} \text{ é uniformemente limitada em } \overline{\Omega_B}. \tag{A.16}$$

Em particular para cada k, $h_k \in L^p(\overline{\Omega_B})$, $p > 1$. Então tomando p suficientemente grande tal que

$$\theta < 1 - \frac{N}{p} = \nu \in (0, 1),$$

temos que desde de $\triangle u_k(x) = h_k(x),\ x \in \overline{\Omega_B}$, segue de (A.16) e do Teorema 1.14 que

$$||u_k||_{W^{2,p}(\Omega_A)} \leq C_1(||h_k||_{L^p(\Omega_B)} + ||u_k||_{L^p(\Omega_B)}) \leq C_1(M_1|\Omega_B|^{\frac{1}{p}} + M_0|\Omega_B|^{\frac{1}{p}}) := M_2$$

ou seja, a sequência

$$\{||u_k||_{W^{2,p}(\Omega_A)}\}_{k_1}^{\infty} \text{ é limitada .}$$

Portanto segue do Teorema 1.10 que

$$||u_k||_{C^{\nu}(\Omega_A)} \leq M_3. \tag{A.17}$$

Desde que $C^{\nu}(\overline{\Omega_A}) \hookrightarrow C^{\theta}(\overline{\Omega_A})$ segue do Teorema 1.12 que $h_k(x) = p(x)f(u_k(x)) \in C^{\theta}(\overline{\Omega_A})$ e $||h_k||_{C^{\theta}(\overline{\Omega_A})} \leq C_k = C(k)$, para todo $k \geq k_1$.

Afirmação A.4. *C_k não depende de k, ou seja, a constante é uniforme.*

De fato, para $x, y \in \overline{\Omega_A}$, $x \neq y$, temos

$$\frac{|h_k(x) - h_k(x)|}{|x-y|^{\theta}} = \frac{|p(x)f(u_k(x)) - p(y)f(u_k(y))|}{|x-y|^{\theta}}$$

somando e subtraindo $p(x)f(u_k(y))$ no lado direito da expressão acima, obtemos

$$\frac{|h_k(x) - h_k(x)|}{|x-y|^{\theta}} \leq \frac{|p(x)f(u_k(x)) - p(x)f(u_k(y))|}{|x-y|^{\theta}} + \frac{|p(x)f(u_k(y)) - p(y)f(u_k(y))|}{|x-y|^{\theta}} \tag{A.18}$$

multiplicando e dividindo a segunda parcela da soma $(A.18)$ por $(u_k(y))$ e lembrando que p é não negativa, temos para $x, y \in \overline{\Omega_A},\ x \neq y$

$$\frac{|h_k(x) - h_k(y)|}{|x-y|^{\theta}} \leq \frac{p(x)|f(u_k(x)) - f(u_k(y))|}{|x-y|^{\theta}} + \frac{f(u_k(y))|p(x) - p(y)|u_k(y)}{u_k(y)|x-y|^{\theta}}. \tag{A.19}$$

De $f \in C^1(0, \infty)$, segue do Teorema do Valor Médio que

$$|f(s) - f(t)| \leq \tilde{M}|s-t|,\ \text{para todo } s, t \in [v_0, M_0],\ \text{onde } \tilde{M} = \sup_{s \in [v_0, M_0]} |f'(s)|, \tag{A.20}$$

em particular,

$$|f(u_k(x)) - f(u_k(y))| \leq \tilde{M}|u_k(x) - u_k(y)|,\ \text{para todo } x, y \in \overline{\Omega_A},$$

daí,

$$\frac{|f(u_k(x)) - f(u_k(y))|}{|x-y|^{\theta}} \leq \tilde{M}\frac{|u_k(x) - u_k(y)|}{|x-y|^{\theta}},\ x \neq y, x, y \in \overline{\Omega_A}$$

Como $u_k \in C^{\theta}(\overline{\Omega_A})$ temos

$$\frac{|u_k(x) - u_k(y)|}{|x-y|^{\theta}} \leq M_3,\ x \neq y,\ x, y \in \overline{\Omega_A}$$

e portanto

$$\frac{|f(u_k(x)) - f(u_k(y))|}{|x-y|^\theta} \leq \tilde{M}M_3 = M_4,\ x \neq y, x, y \in \overline{\Omega_A} \tag{A.21}$$

Logo de (A.19), $(A.21)$, $(A.13)$, $(A.15)$ e (A.20), obtemos

$$\begin{aligned}
||h_k||_{C^\theta(\overline{\Omega_A})} &= ||h_k||_{C^0(\overline{\Omega_A})} + H_\theta[h_k] \\
&= \max_{x\in\overline{\Omega}_A} |h_k(x)| + \sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega}_A \\ x\neq y}} \frac{|h_k(x) - h_k(y)|}{|x-y|^\alpha} \\
&\leq p_\infty \max_{s\in[v_0,M_0]} f(s) + \sup_{x,y\in\overline{\Omega_A}} \frac{p(x)f(u_k(x)) - p(x)f(u_k(y))}{|x-y|^\alpha} \\
&\leq p_\infty \max_{s\in[v_0,M_0]} f(s) + p_\infty M_4 + \max_{y\in\overline{\Omega_A}} |f(u_k(y))|\tilde{M}M_0 \\
&:= M_5.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$||h_k||_{C^\alpha(\overline{\Omega_A})} \leq M_5. \tag{A.22}$$

Portanto, provamos que $\{||h_k||_{C^\theta}(\overline{\Omega_A})\}_{k_1}^\infty$ é uniformemente limitada .

Segue pelo Teorema 1.14 que

$$||u_k||_{C^{2,\theta}(\Omega')} \leq C(||h_k||_{C^\theta(\overline{\Omega}_A)} + ||u_k||_{C(\overline{\Omega}_A)}).$$

Substituindo $(A.17)$ e $(A.22)$ na expressão acima temos que

$$\{||u_k||_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega'})}\}_{k_1}^\infty \text{ é limitada}$$

isto é

$$||u_k||_{C^{2,\theta}(\overline{\Omega'})} \leq M_6. \tag{A.23}$$

Pelo Teorema 1.13 temos que

$$C^{2,\theta}(\overline{\Omega'}) \hookrightarrow C^2(\overline{\Omega'}).$$

Como consequência deste fato e de $(A.23)$, temos que, existe $\{u_{kj}\}_{j=1}^\infty \subset \{u_k\}_{k=1}^\infty$ tal que

$$u_{kj} \longrightarrow u \in C^2(\overline{\Omega'}). \tag{A.24}$$

Segue da definição de M_0 e de $u_k(x) \leq u_{k_1}(x)$ para todo $x \in \Omega_{k_1}$, que $u \leq M_0$, para todo

$x \in \overline{\Omega'}$. Além disso,

$$\begin{aligned} ||u_{kj} - u||_{C^2(\overline{\Omega'})} &= \sum_{|p|\leq 2} ||D^p(u_{kj} - u)||_0 \\ &= \sum_{|p|\leq 2} \max |D^p(u_{kj} - u)| \\ &\geq |\triangle(u_{kj} - u)| \\ &= |\triangle u_{kj} - \triangle u| \end{aligned}$$

Então, temos diretamente de (A.24) que

$$|\triangle u_{kj} - \triangle u| \longrightarrow 0, \; x \in \overline{\Omega'},$$

ou seja,

$$\triangle u_{kj} \longrightarrow \triangle u, \; x \in \overline{\Omega'}.$$

De

$$\triangle u_{kj} = p(x) f(u_{kj}), \forall \; x \in \overline{\Omega'}$$

segue da continuidade de f, fazendo $j \to \infty$ que

$$\triangle u = p(x) f(u), \; \forall \; x \in \overline{\Omega'}.$$

Definindo

$$h(x) = p(x) f(u), \; x \in \overline{\Omega'},$$

segue do Teorema 1.12 que $h \in C^\theta(\overline{\Omega'})$ e pelo Teorema 1.15 que $u \in C^{2,\theta}(\overline{\Omega'})$.

No que segue, tomaremos domínios apropriados em (A.12) e usaremos a estimativa obtida em (A.23) para construirmos, através de um processo diagonal uma solução para $(P)_{p,f}$..

Dado k_1 inteiro positivo em $(A.12)$ considere $\Omega' = \Omega_{k_1}$, $\Omega_1 = \Omega_{k_1+1}$, $\Omega_2 = \Omega_{k_1+2}...$, assim obtemos por (A.23) que

$$||u_k||_{C^{2,\theta}(\Omega_{k_1})} \leq N_{k_1}, k \geq k_1 + 3,$$

onde u_k satisfaz

$$\begin{cases} \triangle u_k = p(x) f(u_k), \; \Omega_{k_1} \\ v \leq u_k \leq \overline{u}_{k+1}, \; \overline{\Omega_{k_1}}. \end{cases} \tag{A.25}$$

Isto é para $k_1 = 1, 2, \cdots$ encontramos $N_1, N_2, \cdots$ tais que

$$\begin{aligned} ||u||_{C^{2,\theta}(\overline{\Omega_1})} &\leq N_1, \ k \geq 4; \\ ||u||_{C^{2,\theta}(\overline{\Omega_2})} &\leq N_2, \ k \geq 5; \\ ||u||_{C^{2,\theta}(\overline{\Omega_3})} &\leq N_3, \ k \geq 6 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{A.26}$$

Para cada inteiro $k_1 = i \geq 1$, defina $u_i^k := u_k|_{\Omega_i}$.

Então de (A.27) e do fato de $C^{2,\theta}(\overline{\Omega_i}) \overset{cpct}{\hookrightarrow} C^2(\overline{\Omega_i})$, $i = 1, 2, \ldots$, existem para cada $i = 1, 2, \ldots$, subsequências de $\{u_i^k\}_{k=i+3}^{\infty}$ e $u_i \in C^2(\overline{\Omega_i})$ tais que

$$u_i^{k_{ij}} \longrightarrow u_i \text{ em } C^2(\overline{\Omega_i}),$$

onde $k_{ij} \geq i + 3$, para todo j e $k_{i1} < k_{i2} < k_{i3}$.

Mais especificamente,

$$\begin{gathered} u_1^{k_{11}}, u_1^{k_{12}}, u_1^{k_{13}}, \cdots \overset{C^2(\overline{\Omega_1})}{\longrightarrow} u_1 (i = 1) \\ u_2^{k_{21}}, u_2^{k_{22}}, u_2^{k_{23}}, \cdots \overset{C^2(\overline{\Omega_2})}{\longrightarrow} u_2 (i = 1) \\ u_3^{k_{31}}, u_3^{k_{32}}, u_3^{k_{33}}, \cdots \overset{C^2(\overline{\Omega_3})}{\longrightarrow} u_3 (i = 1) \\ \vdots \end{gathered}$$

Note que $u_{i+1}|_{\Omega_i} = u_i$, pois a sequência $\{u_{i+1}^{k_{(i+1)j}}\}$ foi tomada como uma subsequência da sequência $\{u_i^{k_{ij}}\}$, onde cada $u_i^{k_{ij}}$ foi estendida à Ω_{i+1}.

Definindo $u : \mathbb{R}^N \longrightarrow [0, \infty)$, tal que

$$u(x)|_{\Omega_i} = u_i(x), \text{ para cada } i = 1, 2, \cdots.$$

De $u_i \geq 0$ que $u \geq 0$ e da regularidade das u_i, temos que $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$. Além disso, a sequência

$$u_n := u_n^{k_{nn}}, n = 1, 2, 3, \cdots.$$

é tal que $u_n \overset{C^2(\overline{\Omega_i})}{\longrightarrow} u$ para cada $i \geq 1$.

De fato, para cada $i \geq 1$ e para cada $n \geq i$, temos

$$u_n|_{\Omega_i} = u_n^{k_{nn}}|_{\Omega_i}.$$

Por sua vez, a sequência $\{u_n^{k_{nn}}\}_{n=1}^{\infty}$ restrita à Ω_i, é uma subsequência da sequência $\{u_i^{k_{in}}\}_{n=1}^{\infty}$ e

$$u_i^{k_{in}} \longrightarrow u_i := u, \ \forall \, x \in \Omega_i.$$

Observe que, de (A.25) temos

$$\begin{cases} \triangle w_n = p(x)f(u_n), \ \Omega_i \\ \\ v \leq u_n \leq \overline{u}, \ \overline{\Omega_i}. \end{cases}$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$\begin{cases} \triangle u = p(x)f(u), \ \Omega_i \\ \\ v \leq u \leq \overline{u}, \ \overline{\Omega_i}. \end{cases} \tag{A.27}$$

Finalmente fazendo $i \to \infty$ obtemos

$$\begin{cases} \triangle u = p(x)f(u), \ \mathbb{R}^N; \\ \\ \lim_{|x|\to\infty} v(x) \leq \lim_{|x|\to\infty} u. \end{cases} \tag{A.28}$$

De $v(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, segue que u satisfaz

$$\begin{cases} \triangle u = p(x)f(u), \ \mathbb{R}^N \\ \\ u(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \infty. \end{cases} \tag{A.29}$$

Em outras palavras u é solução para $(P)_{p,f}$. Além disso, segue de (A.27), do Teorema 1.15 e da arbitrariedade de Ω_i que $u \in C^{2,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^N)$. ■

A.8 Existência de solução para $(P)_{p+q}$

Lema A.5. *Sejam p e q Hölder contínuas para algum $0 < \theta < 1$ e não negativas em $\mathbb{R}^N$. Adicionalmente, suponha que $p+q$ satisfaça (p_1). Então existe uma solução para*

$$(P)_{p+q} \qquad \begin{cases} -\triangle w = p(x) + q(x), \quad \mathbb{R}^N \\ \\ w \geq 0, \ w(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases}$$

Demonstração. Para simplificar considere $b(x) = p(x) + q(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ Por hipótese temos que p e q são contínuas em $\mathbb{R}^N$, logo b também o é. Definindo

$$b^*(t) = \max\{b(x)/ \ |x| = t\}, \ t > 0,$$

temos que

$$\tilde{v}(|x|) = \int_{|x|}^{\infty} t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} b^*(s) ds dt,$$

é uma super solução de $(P)_{p+q}$. De fato, definindo $v(x) = \tilde{v}(|x|)$ temos

$$\triangle v \geq b(x) = p(x) + q(x) = \triangle w,$$

além disso, temos que que $v(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$. Note que, zero é uma subsolução de $(P)_{p+q}$. Logo pelo Teorema de Sub e Supersolução (Teorema 1.17) temos que existe w solução de $(P)_{p,q}$ tal que $0 < w \leq v$. ∎

Apêndice B

Demonstrações de resultados técnicos

Reservamos este apêndice à demonstração de alguns resultados técnicos, as quais foram omitidas para que o leitor tenha uma leitura mais compacta e menos cansativa.

B.1 Demonstração da Proposição 1.11

Demonstração. Considere um domínio $\Omega_0 \subset\subset \Omega$. Então existem s_0, s_1 tais que

$$s_0 < u(x) < s_1, \forall x \in \overline{\Omega_0}. \tag{B.1}$$

Desde que $g|_{[s_0,s_1]}$ é contínua, $g|_{(s_0,s_1)}$ é diferenciável e $|g'(s)| \leq M, \forall s \in (s_0, s_1)$, então, pelo Teorema do Valor Médio segue

$$|g(s) - g(t)| \leq M|s - t|, \text{ para todo } s, t \in (s_0, s_1). \tag{B.2}$$

Em particular de $(B.2)$,

$$|g(u(x)) - g(u(y))| \leq M|u(x) - u(y)|, \text{ para todo } x, y \in \overline{\Omega_0}.$$

Logo segue que,

$$\frac{|g(u(x)) - g(u(y))|}{|x - y|^\theta} \leq M\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\theta}, \text{ para todo } x, y \in \overline{\Omega_0},\ x \neq y. \tag{B.3}$$

De $u \in C^\theta_{loc}(\Omega)$, temos

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\theta} \leq \sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega_0}\\ x\neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\theta} = ||u||_{C^\theta(\overline{\Omega_0})} < \infty.$$

Passando o supremo em $(B.3)$, segue que

$$\sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega_0}\\ x\neq y}} \frac{|(g\circ u)(x)-(g\circ u)(y)|}{|x-y|^\theta} \leq M||u||_{C^\theta(\overline{\Omega_0})} < \infty,$$

isto é , $g\circ u \in C^\theta_{loc}(\overline{\Omega_0})$. Como Ω_0 é arbitrário temos que $g\circ u\in C^\theta_{loc}(\overline{\Omega})$. ∎

B.2 Demonstração da Proposição 1.12

Demonstração. Sejam $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ e $x,y\in\Omega_0$, com $x\neq y$. Então

$$\begin{aligned}
\frac{|h(x)-h(y)|}{|x-y|^\theta} &= \frac{|b(x)g(u(x))-b(y)g(u(y))|}{|x-y|^\theta}\\
&\leq \frac{|b(x)g(u(x))-b(x)g(u(y))|}{|x-y|^\theta} + \frac{|b(x)g(u(y))-b(y)g(u(y))|}{|x-y|^\theta}\\
&= b(x)\frac{|g(u(x))-g(u(x))|}{|x-y|^\theta} + g(u(y))\frac{|b(x)-b(y)|}{|x-y|^\theta}
\end{aligned}$$

da hipótese em b e da Proposição 1.11 segue que

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega_0}\\ x\neq y}} b(x)\frac{|g(u(x))-g(u(y))|}{|x-y|^\theta} &\leq ||b||_{L^\infty(\Omega_0)} \sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega_0}\\ x\neq y}} \frac{|g(u(x))-g(u(y))|}{|x-y|^\theta}\\
&= ||b||_{L^\infty(\Omega_0)}||(g\circ u)||_{C^\theta(\overline{\Omega_0})},\ \text{para todo } x,y\in\overline{\Omega_0}.
\end{aligned}$$

Além disso, da positividade e regularidade de u em $\overline{\Omega_0}$ e da regularidade da função g, segue que

$$\sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega_0}\\ x\neq y}} g(u(y))\frac{|b(x)-b(y)|}{|x-y|^\theta} \leq C||b||_{C^\theta\overline{\Omega_0}}.$$

Portanto, passando o supremo temos que

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega_0}\\ x\neq y}} \frac{|h(x)-h(y)|}{|x-y|^\theta} &\leq \sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega_0}\\ x\neq y}} \left(b(x)\frac{|g(u(x))-g(u(x))|}{|x-y|^\theta} + g(u(y))\frac{|b(x)-b(y)|}{|x-y|^\theta}\right)\\
&\leq ||b||_{L^\infty(\Omega_0)}||(g\circ u)||_{C^\theta(\overline{\Omega_0})} + C||b||_{C^\theta\overline{\Omega_0}}\\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Logo $h\in C^\theta_{loc}(\overline{\Omega_0})$. Como Ω_0 é arbitrário, temos que $h\in C^\theta_{loc}(\Omega)$. ∎

Referências Bibliográficas

[1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces, Academic Press, New york*, (1975) 2. ed.

[2] A. Ambrosetti and G. Prodi, A primer of nonlinear analysis *Cambridge University Press, New york*, 1993.

[3] L. Bieberbach, $\triangle u = e^u$ *und die automorphen funktionen*, Math. Ann, 77 (1916) , 173-212.

[4] M. M. Boureanu, Entire large solutions for logistic-type equations, *Annals of the Universty of Craiova*, 35(2008) to appear.

[5] M. M. Boureanu, On the existence and nonexistende of positive entire solutions for semilinear elliptic equations, *An. St. Univ. Ovidius Constanta*Vol.17(1), (2009), 23-36.

[6] K. S. Cheng and W.M.Ni, On the struture of the conformal scalar curvature equation on $\mathbb{R}^n$, *Indiana Univ. Math. J.,*41(1) (1992), 261-278.

[7] F. Cirstea and V. D Radulescu, Existence and nonexistence of positive solutions for singular semilinear elliptic boundary value problems, *Nonlinear Anal.*, 41(2000), 149-176.

[8] F. Cirstea and V. D Radulescu, Blow-up boundary solutions of semilenear elliptic problems, *Nonlinear Anal.,* 48 (2002), 521-534.

[9] W. Feller, *An Introductionn to Probability Theory and Its Applications*,Inc., New York, N.Y. Vol. 1 (1950).

[10] D. G. Figueiredo, *Equações elípticas não-lineares, IMPA, Rio de Janeiro* , 1977.

[11] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag,Berlin, Heidelberg (1998).

[12] J. B. Keller, On solutions of $\triangle u = f(u)$, *Comm, Pure Appl. Math.,* 10 (1957), 503-510.

[13] E. Kreyszig, Introductory Functional Analysis With Applications, *Wiley, United States of America*, (1978).

[14] A. V. Lair, A necessary an sufficient condition for existence of large solutions to semilinear elliptic equations, *J. Math.Anal. Appl.*, 240 (1999), 205-218.

[15] A. V. Lair and A. W. Wood, Large solutions of sublinear elliptic equations, *Nonlinear Anal.,* 39 (2000), 745-753.

[16] A. V. Lair, Nonradial large solutions of sublinear elliptic equations, *Apll.Anal* 82 (2003), 431-437.

[17] A. V. Lair, Large solutions of semilinear elliptic equations under the Keller-Osserman condition, *J. Math.Anal.Apll.*,328 (2007), 1247-1254.

[18] A. V. Lair, Large solutions of mixed sublinear/superlinear elliptic equations, *J. Math. Anal. Appl.,* 346(2008), 99-106.

[19] A.V. Lair, Entire large solutions of semilinear elliptic equations of mixed type, *Communications on pure and applied analysis* Vol. 8(5), (2009), 1607-1618.

[20] E. C. Lawrence. *Partial Differentia Equations*, Vol.19.

[21] K. Marbrouk and W. Hansen, nonradial large solutions of sublinear elliptic problem, *J. Math. Anal. Appl.*, 330(2007), 1025-1041.

[22] W. M. Ni, On the elliptic equation, its generalizations, and applications in geometry. *Indiana University Mathematics Journal*, 31(4): 493-529, 1982.

[23] R. Osserman, On the inequality $\triangle u \geq f(u)$, *Pacific J. Math.*, 7 (1957), 1641- 1647.

[24] H. Rademacher, Einige besondere probleme partieller differentialgleichungen,in: Die diferential und integralgleichungen der mechanik und physik I, *2end Ed., Rosenberg, Nem York,* 1943, 838-845.

[25] J. Rey Pastor, *Funciones de Bessel* and A. C. Brzezick (1958).

[26] C. A. Santos, Soluções Radialmente Simétricas de Problemas Quasilineares Singulares, *Doctoral dissertation*,UnB, (2003).

[27] D. Sattinger, Topics an stability and bifurcation theory. In Springer- Verlag, editor, *Lecture Notes in Mathematics 309*, Berlin/ Heildelberg/ New York, 1973.

[28] H. T. Yang, On the exixtence an assymptotic behavior of large solutions for semilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$, *Comm. Pure Appl. Anal.*, 4 (2005), 187-198.