Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Distribuição Assintótica do Máximo Estabilizado em Modelos de Mistura Finita

por

Wembesom Mendes Soares

Brasília, 2010.

À minha família.

Nada escapa à perfeição das coisas,
é esta a história de tudo.

Clarice Lispector

Agradecimentos

Desconheço qualquer agradecimento que seja de fato justo e impecável, de forma que estou assumindo nas linhas dessa página a certeza de que essas palavras deixarão muitas lacunas a preencher. Mas como a esperança é mesmo bem persistente tentarei fazer justiça a todos que tenham alguma ligação com a realização desse trabalho.

Assim, começo agradecendo a Deus por mais essa vitória.

Agradeço à minha família pelo apoio incondicional em cada etapa desse mestrado; Aos professores José Alfredo, Tânia Schmidt e Marcos Vinicius, por terem acreditado na minha capacidade me fornecendo as cartas de recomendação; Aos professores do Mestrado, Ary e Danielle, pela apresentação do mundo da Probabilidade.

Agradeço a todo pessoal do mestrado, amigos e amigas dessa jornada. Não passamos ilesos pela vida de ninguém, então cada um de vocês tem sua cota de participação nessa conquista. Como são muitos os nomes citarei dois representantes das algumas classes de equivalência: Pessoas que me ajudaram sempre e em toda dúvida como numa longa monitoria (Luciana e João Paulo), pessoas com quem dividi os calvários de exames (Weslley e Taynara), pessoas com quem estou desde a graduação (Simone e Laura), pessoas do meu estado de origem (essa classe só tem o Bruno e a Mariana...).

Agradeço ainda à professora Cátia, minha orientadora, por toda a paciência e suporte. O seu modelo de competência e eficiência é, por si só, uma grande motivação; À banca examinadora, professora Chang e professora Débora, por terem enriquecido esse trabalho com correções e sugestões.

Para representar todos os amigos de outras áreas que me deram força, agradeço a Müller e Érica, pela inestimável amizade.

Por fim, quero dar meus agradecimentos para Mônica, a pessoa mais presente em minha vida nestes dois anos, sem a qual essa história teria menos cor e pouca graça, e através de quem eu entendi que o aprendizado da vida é contínuo e frutífero, que os sonhos não envelhecem, e que nada escapa à perfeição das coisas.

Muito Obrigado.

Resumo

Neste trabalho estudamos o comportamento assintótico do máximo de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas estabilizado por transformações gerais contínuas estritamente monótonas. Apresentamos os principais resultados desenvolvidos por E. Pantcheva (1984), que estendem resultados amplamente conhecidos da teoria assintótica extremal clássica. Abordamos o estudo do máximo em modelos de mistura finita, e baseados nos trabalhos de E. K. Al-Hussaini e M. E. El-Adll (2004) e S. Ravi e M. Sreehari (2009), analisamos as relações entre os domínios de atração de uma mistura de distribuições e os domínios de atração de suas respectivas componentes.

Palavras-chave: Distribuição assintótica, Domínios de atração, Máximo estabilizado, Leis max-estáveis, Estabilização linear, Estabilização potência, Mistura finita.

Abstract

In this paper, we study the asymptotic behavior of the maximum of independent random variables and identically distributed stabilized by strictly monotone continuous transformations. We present the main results developed by E. Pantcheva (1984), which extend the widely known results of asymptotic extremal classical theory. The study of the maximum under finite mixture models is discussed and based on E. K. Al-Hussaini and M. E. El-Adll's (2004) and S. Ravi and M. Sreehari's (2009) papers, we analyzed the relationships between the domains of attraction of a mixture of distributions and the domains of attraction of their respective components.

Keywords: Asymptotic distribution, Domains of attraction, Maximum stabilized, Max-stable laws, Linear stabilization, Power stabilization, Finite Mixture.

Sumário

Introdução **i**

1 A Teoria Assintótica Extremal Clássica **1**
1.1 Introdução 1
1.2 Possíveis Distribuições Limite 2
1.3 Condições necessárias e suficientes para as distribuições limites clássicas 8

2 Estabilizações gerais **17**
2.1 Introdução 17
2.2 Caracterização das distribuições limite extremais 19
2.3 Estabilização Linear - Distribuições Clássicas 25
2.4 Leis max-estáveis sob estabilização potência 28
2.5 Um critério generalizado 33

3 Resultados para modelos de misturas finitas **37**
3.1 Introdução 37
3.2 Convergências - exemplos 38
3.3 Estabilizações idênticas 41
3.4 Estabilizações distintas 49

Referências Bibliográficas **53**

Introdução

Problemas envolvendo valores extremos aparecem em uma grande variedade de aplicações. Na ocorrência de desastres naturais como inundações, por exemplo, ações preventivas para amenizar seus efeitos dependem da previsão do nível máximo de água. Na manutenção de equipamentos (em uma linha de montagem) constituídos por componentes que funcionem em paralelo, o tempo de falha é determinado pelo tempo máximo de vida dos componentes. Outros exemplos de situações em que o valor de interesse é o valor máximo ou mínimo dos dados observados podem ser encontrados, por exemplo, em Galambos (1978) e Dorea (1995).

Uma modelagem matemática de problemas dessa natureza consiste em considerar variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ independentes e identicamente distribuídas (i.i.d), com função de distribuição comum F, e analisar o comportamento de

$$Z_n = max\{X_1, \ldots, X_n\}$$

ou $W_n = min\{X_1, \ldots, X_n\}$. Como $W_n = -max\{-X_1, \ldots, -X_n\}$, restringi-se o estudo ao comportamento de Z_n.

Nesse sentido, uma questão básica de interesse é a análise do comportamento assintótico de Z_n, quando $n \to \infty$. Em situações de inundações, por exemplo, seria de grande valia estimar a distribuição do nível máximo de água até o final do século.

A teoria assintótica clássica dos valores extremos estuda principalmente o comportamento assintótico do máximo Z_n estabilizado linearmente, ou seja, o comportamento limite quando $n \to \infty$ de

$$P\left(\frac{Z_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = F^n(a_n x + b_n), \tag{1}$$

onde $a_n > 0$ e b_n são sequências de números reais.

Dentre os trabalhos pioneiros no desenvolvimento desse estudo merecem destaque Fréchet (1927), Fisher e Tippet (1928), Gnedenko (1943), de Haan (1970) entre outros.

Os principais resultados da teoria clássica determinam condições sobre a função de distribuição F para a existência de constantes estabilizantes $a_n > 0$ e b_n para as quais a distribuição (1) possui um limite fraco não-degenerado e estabelecem a existência de apenas três tipos possíveis de distribuição limites, nesse caso.

Uma extensão dos resultados da teoria clássica foi apresentada por Pantcheva (1984), que considerou o estudo do comportamento assintótico da distribuição de Z_n estabilizada por transformações não-necessariamente lineares. Especificamente, o problema considerado consiste em determinar condições sobre a função de distribuição F sob as quais existe uma sequência de transformações contínuas estritamente monótonas $G_n(x)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq G_n(x)) = \lim_{n\to\infty} F^n(G_n(x)) = H(x), \quad \forall x \in C(H), \tag{2}$$

onde H é uma função de distribuição não-degenerada e $C(H) = \{x : H(x) \text{ é contínua}\}$. Neste caso, em analogia ao caso clássico, dizemos que F pertence ao domínio de atração de H, e denotamos por $F \in D(H)$. Notemos que para $G_n(x) = a_n x + b_n$ o problema reduz-se ao caso clássico.

Pantcheva mostrou que todas as possíveis distribuições limites de (2) podem ser unificadas em uma classe de funções e, com o objetivo de melhorar a precisão da aproximação da distribuição do máximo para valores grandes de n, introduziu uma estabilização não-linear, chamada estabilização potência

$$G_n(x) = a_n \left|x\right|^{b_n} sign(x), \tag{3}$$

onde $a_n > 0$, $b_n > 0$, e $sign(x)$ é -1 se $x < 0$, 0 se $x = 0$, ou 1 se $x > 0$. Para este caso, Pantcheva mostrou que existem seis tipos possíveis de distribuições limites não-degeneradas H.

Posteriormente, Mohan e Ravi (1992), Christoph e Falk (1996), Barakat et al (2004) e Sreehari (2008) apresentaram novas contribuições e aprimoramentos do trabalho de Pantcheva.

Um desdobramento natural desse estudo é a análise do comportamento assintótico do máximo estabilizado de variáveis aleatórias i.i.d $X_1, X_2, \ldots, X_n$, cuja função de distribuição F é uma mistura finita de funções de distribuição, ou seja, F pode ser decomposta como

$$F = p_1F_1 + \ldots + p_kF_k, \tag{4}$$

onde $F_1, \ldots, F_k$ são funções de distribuição, chamadas componentes da mistura, e $p_1, \ldots, p_k$ são números reais, chamados pesos da mistura, tais que $0 < p_j < 1$, $j = 1, \ldots, k$ e $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} p_j = 1$.

O uso de uma mistura de distribuições em uma modelagem ocorre quando se leva em conta que as observações do processo provêm de duas ou mais populações de eventos independentes não-observáveis. Os trabalhos pioneiros no estudo e aplicações de misturas remontam à primeira metade do século dezenove e basicamente referem-se direta ou indiretamente a modelos de mistura de normais. Dentre eles merecem destaque o trabalho de Pearson (1894) sobre decomposição de misturas de normais pelo método de momentos.

Desde então, os modelos de mistura têm sido utilizados em uma ampla variedade de aplicações, nas mais diferentes áreas, as quais têm como característica comum o fato de que é conhecido que a variável observável do modelo pertence a uma ou mais classes de componentes não-observáveis. Por exemplo, em diagnósticos médicos, as informações clínicas estão disponíveis para um conjunto de pacientes cujas classificações da doença, no entanto, não estão. Titterington et al (1985) apresenta uma lista de aplicações de modelos de mistura em economia, pesca, medicina, psicologia, paleontologia, botânica, confiabilidade, entre outros.

Como exemplos recentes da utilização de modelos de mistura podemos citar: Walshaw (2000), que estudou o comportamento da velocidade dos ventos de duas cidades norte-americanas; Tartaglia et al (2006) que ajustaram uma mistura de duas distribuições Gumbell para os dados de precipitação em Toscana (Itália), e Silva (2008) que apresentou modelos de mistura para estudar a velocidade de ventos e a vazão do curso d'água dos rios em Piracicaba (Brasil).

Como referência para o estudo das propriedades teóricas e aplicações de modelos de mistura citamos Everitt et al (1981), Titterington et al (1985), Lindsay (1995) e Maclachlan e Peel (2000).

Neste trabalho, baseados em Al-Hussaini e El-Adll (2004) e Ravi e Sreehari (2009), estudamos o comportamento assintótico do máximo estabilizado por transformações gerais em modelos de mistura finita utilizando como ferramenta básica a teoria geral apresentada por Pantcheva.

Assim, no Capítulo 1 apresentamos uma síntese dos resultados mais importantes da Teoria Assintótica Extremal Clássica. As principais referências deste capítulo são Galambos (1978) e Resnick (1987).

No Capítulo 2 apresentamos em detalhes os principais resultados da teoria introduzida por Pantcheva (1984), caracterizando as distribuições limites não-degeneradas para o máximo de variáveis aleatórias i.i.d estabilizado por transformações gerais contínuas e estritamente monótonas e que serão úteis para o desenvolvimento do Capítulo 3. Além disso, os resultados do caso geral são aplicados primeiramente no caso particular de estabilizações lineares (Seção 2.3) reobtendo os resultados já conhecidos da teoria clássica e também no caso da estabilização potência, apresentada por Pantcheva, mostrando que neste caso existem seis tipos de distribuições limites possíveis (Seção 2.4). Finalizamos o capítulo apresentando um critério generalizado proposto por Sreehari (2008), que fornece condições necessárias e suficientes para que uma função de distribuição esteja no domínio geral de atração de uma distribuição limite extremal.

Finalmente, no Capítulo 3 estudamos o comportamento limite da distribuição do máximo estabilizado de variáveis aleatórias i.i.d cuja função de distribuição comum é uma mistura finita descrita por (4). Dividimos o estudo em dois casos. Primeiramente, analisamos as relações entre os domínios de atração da mistura e de suas componentes, assumindo a mesma transformação estabilizante para todas as componentes (Seção 3.3). Posteriormente, consideramos a situação em que as estabilizações das componentes da mistura são possivelmente distintas (Seção 3.4). Os resultados apresentados neste capítulo são devidos a Al-Hussaini e El-Adll (2004) e Ravi e Sreehari (2009).

Capítulo 1

A Teoria Assintótica Extremal Clássica

1.1 Introdução

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função de distribuição F, e $Z_n = max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. Estamos interessados no comportamento limite de Z_n quando $n \to \infty$. Sabemos que

$$P(Z_n \leq x) = F^n(x)$$

e que

$$P(Z_n \leq x) \xrightarrow{n} \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x : F(x) < 1, \\ 1 & \text{se} \quad x : F(x) = 1. \end{cases} \tag{1.1}$$

Se considerarmos o ponto extremo superior de F

$$\omega(F) = \sup\{x : F(x) < 1\} \leq +\infty, \tag{1.2}$$

então de (1.1) temos que $Z_n \xrightarrow{p} \omega(F)$ quando $n \to \infty$, e como $\{Z_n\}$ é uma sequência não-decrescente segue que $Z_n \uparrow \omega(F)$ quase certamente. Desta forma, para obtermos uma distribuição limite não-degenerada é necessário normalizarmos Z_n.

O principal interesse da teoria assintótica extremal clássica é analisar as possíveis distribuições limite para o máximo sob normalização linear

$$\frac{Z_n - b_n}{a_n},$$

ou seja, analisar o comportamento limite de

$$P(Z_n \leq a_n x + b_n) = F^n(a_n x + b_n), \tag{1.3}$$

onde $\{a_n\}_{n\geq 1}$ e $\{b_n\}_{n\geq 1}$ são sequências de números reais, com $a_n > 0$.

Mais especificamente, estabelecer as condições sobre a função de distribuição comum F, para que (1.3) convirja para uma função de distribuição não-degenerada, ou seja,

$$P(Z_n \leq a_n x + b_n) = F^n(a_n x + b_n) \xrightarrow{n} H(x), x \in C(H), \tag{1.4}$$

onde H é não-degenerada, e $C(H)$ é o conjunto dos pontos de continuidade de H.

Na primeira metade do século vinte, muitas publicações foram feitas neste assunto por pesquisadores como Emil J. Gumbell (1891 - 1966), Richard Von Mises (1883 - 1953), Maurice R. Fréchet (1878 - 1973), Ronald Fisher (1890 - 1962), Leonard H. C. Tippet(1902 - 1985), e Ernst H. W. Weibull (1887 - 1979).

Fisher e Tippet (1928) mostraram que só existem 3 tipos de distribuição que atendem ao limite em (1.4). Boris V. Gnedenko (1943) apresentou, com rigor e precisão, as condições necessárias e suficientes acerca da distribuição F para cada um dos 3 tipos de limites em (1.4); este trabalho passou a ser citado como primeira grande contribuição ao problema desde então.

Neste capítulo, serão apresentados os principais resultados da Teoria Clássica. Na Seção 1.2 apresentaremos as possibilidades para o limite não-degenerado em (1.4). Na Seção 1.3 mostraremos condições sobre a função de distribuição F para cada uma dessas possibilidades. As principais referências deste capítulo são Galambos (1978) e Resnick (1985).

1.2 Possíveis Distribuições Limite

Nesta seção, apresentaremos no Teorema 1.2 as possíveis distribuições limites não-degeneradas que satisfazem (1.4). Ressalta-se desde já, que as sequências de constantes que estabilizam o limite de $F^n(a_nx + b_n)$ não são únicas, conforme pode-se verificar em detalhes nos Lemas 2.2.1 e 2.2.2 de Galambos (1978).

Para a apresentação do principal teorema desta seção, necessitaremos de alguns resultados e conceito preliminares.

Lema 1.1. *Sejam $\{F_n(x)\}_{n\geq 1}$ uma sequência de funções de distribuição; $\{C_n\}_{n\geq 1}$, $\{\rho_n\}_{n\geq 1}$, $\{D_n\}_{n\geq 1} > 0$, e $\{\tau_n\}_{n\geq 1} > 0$ sequências de números reais; $G(x)$ e $T(x)$ funções de distribuição não-degeneradas. Se*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(C_n + D_nx) = G(x) \quad , \quad \lim_{n\to\infty} F_n(\rho_n + \tau_nx) = T(x) \tag{1.5}$$

$\forall x \in C(G)$ e $x \in C(T)$. Então, os limites

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tau_n}{D_n} = B \neq 0 \quad e \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\rho_n - C_n}{D_n} = A \tag{1.6}$$

existem, são finitos, e satisfazem

$$T(x) = G(A + Bx) \tag{1.7}$$

Demonstração:
Considere dois pontos de continuidade de G, x_1 e x_2, e dois pontos de continuidade de T, y_1 e y_2, tais que

$$T(y_1) < G(x_1), \quad 0 < G(x_1) \leq G(x_2) \quad e \quad T(y_2) > G(x_2).$$

Pelas relações em (1.5), temos que para n suficientemente grande

$$\rho_n + \tau_ny_1 \leq C_n + D_nx_1 \leq C_n + D_nx_2 \leq \rho_n + \tau_ny_2 \tag{1.8}$$

Fazendo a diferença dos termos do meio e dos termos externos, obtemos

$$D_n(x_2 - x_1) \leq \tau_n(y_2 - y_1)$$

e daí

$$\frac{D_n}{\tau_n} \leq \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{1.9}$$

Também dividindo os dois primeiros termos de (1.8) por D_n podemos obter

$$\frac{\rho_n}{D_n} + y_1\frac{\tau_n}{D_n} \leq \frac{C_n}{D_n} + x_1$$

e assim

$$\frac{\rho_n - C_n}{D_n} \leq x_1 - \left(\frac{\tau_n}{D_n}\right) y_1. \tag{1.10}$$

Como x_1, x_2, y_1 e y_2 são fixos, (1.9) implica que $\dfrac{D_n}{\tau_n}$ permanece limitado quando $n \to \infty$. Alterando os papéis de G e T no argumento que leva a (1.9), podemos ver semelhantemente que $\dfrac{\tau_n}{D_n}$ também é limitado. Segue daí que (1.10) implica na limitação de $\dfrac{\rho_n - C_n}{D_n}$, e novamente uma mudança nos papéis de T e G na argumentação nos leva à limitação de $\dfrac{C_n - \rho_n}{D_n}$.

Agora, seja n_t uma subsequência de n para a qual vale (1.6). O limite B é de fato não nulo, já que em vista do argumento precedente, o limite de $\dfrac{D_n}{\tau_n}$ é finito. Considere $\epsilon > 0$ arbitrário e n_t suficientemente grande, de forma que por essa escolha de n_t

$$(B - \epsilon)D_{n_t} \leq \tau_{n_t} \leq D_{n_t}(B + \epsilon)$$

e

$$C_{n_t} + D_{n_t}(A - \epsilon) \leq \rho_{n_t} \leq Cn_t + D_{n_t}(A + \epsilon).$$

Daí, para $x > 0$ temos

$$\begin{aligned} F_{n_t}(C_{n_t} + D_{n_t}(A - \epsilon) + (B - \epsilon)D_{n_t}x) &\leq F_{n_t}(\rho_{n_t} + \tau_{n_t}x) \\ &\leq F_{n_t}(C_{n_t} + D_{n_t}(A + \epsilon) + D_{n_t}(B + \epsilon)x), \end{aligned}$$

o que implica que

$$\begin{aligned} F_{n_t}(C_{n_t} + (A + Bx - \epsilon(x + 1))D_{n_t}) &\leq F_{n_t}(\rho_{n_t} + \tau_{n_t}x) \\ &\leq F_{n_t}(C_{n_t} + (A + Bx + \epsilon(x + 1))D_{n_t}). \end{aligned}$$

Portanto, se x e ϵ são tais que $A + Bx - \epsilon(x + 1)$ e $A + Bx + \epsilon(x + 1)$ são pontos de continuidade de G, (1.5) aplicado na desigualdade acima implica que, quando $n_t \to \infty$,

$$\begin{aligned} G(A + Bx - \epsilon(x + 1)) &\leq \liminf F_{n_t}(\rho_{n_t} + \tau_{n_t}x) \\ &\leq \limsup F_{n_t}(\rho_{n_t} + \tau_{n_t}x) \\ &\leq G(A + Bx + \epsilon(x + 1). \end{aligned}$$

Finalmente, se x e $(A + Bx)$ são pontos de continuidade de T e G respectivamente, (1.7) segue para $x > 0$ quando fazemos $\epsilon \to 0$. Para $x < 0$, a mesma conclusão pode ser obtida na argumentação acima trocando ϵx por $-\epsilon x$.

Agora, (1.7) determina unicamente A e B. Consequentemente, para toda subsequência n_t para a qual (1.6) vale, os limites A e B são os mesmos; Assim (1.6) é válida e a prova está completa

□

Exemplo 1.1. Considere

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad c.c. \end{cases}.$$

Se tomarmos $D_n = 1$ e $C_n = \log(n)$, então temos para $x > 0$

$$F^n(D_n x + C_n) = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n \xrightarrow{n} exp\{-e^{-x}\} = G(x).$$

Por outro lado, se considerarmos $\rho_n = 3 + \log(n)$ e $\tau_n = 2$, podemos também obter

$$F^n(\tau_n x + \rho_n) = \left(1 - \frac{e^{-(2x+3)}}{n}\right)^n \xrightarrow{n} exp\left\{-e^{-(2x+3)}\right\} = T(x).$$

Em ambos os casos, para $x < 0$, temos que para n suficientemente grande, $D_n x + C_n > 0$ e $\tau_n x + \rho_n > 0$ e o resultado segue analogamente.
Note que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tau_n}{D_n} = 2, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\rho_n - C_n}{D_n} = 3$$

e, de fato temos

$$T(x) = G(2x + 3).$$

Teorema 1.1. *Sejam $\{a_n\}_{n\geq 1} > 0$ e $\{b_n\}_{n\geq 1}$ sequências de números reais para as quais vale* (1.4)*. Então, para $m \geq 1$ inteiro arbitrário, existem e são finitos os limites*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{nm} - b_n}{a_n} = A_m \tag{1.11}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{nm}}{a_n} = B_m > 0. \tag{1.12}$$

Além disso, temos

$$H^m(A_m + B_m x) = H(x). \tag{1.13}$$

Demonstração: Seja $F(x)$ uma função de distribuição satisfazendo (1.4). Seja $m > 1$ um inteiro fixo. Então

$$\lim_{n\to\infty} F^{nm}(b_{nm} + a_{nm}x) = H(x)$$

ou

$$\lim_{n\to\infty} F^n(b_{nm} + a_{nm}x) = H^{\frac{1}{m}}(x).$$

Observe que temos aqui a situação do Lema 1.1 com $F_n = F^n$, $C_n = b_n$, $D_n = a_n$, $\rho_n = b_{nm}$, $\tau_n = a_{nm}$, $G(x) = H(x)$ e $T(x) = H^{\frac{1}{m}}(x)$. A conclusão do lema é exatamente o resultado estabelecido em (1.13)

□

Definição 1.1. *Duas funções $H(x)$ e $H^*(x)$ são ditas do Mesmo Tipo, se existem números reais $B > 0$ e A tais que*

$$H^*(x) = H(A + Bx)$$

Do Teorema 1.1 podemos concluir que, *se duas funções de distribuição atendem ao limite* (1.4), *então elas são do mesmo tipo.* O próximo teorema, estabelece que só existem três tipos de distribuição limite que satisfazem (1.4).

Teorema 1.2. *Seja F uma função de distribuição, $\{a_n\}_{n\geq 1}$ e $\{b_n\}_{n\geq 1}$ sequências de números reais com $a_n > 0$ e $H(x)$ uma função não-degenerada. Se*

$$F^n(a_n x + b_n) \xrightarrow{n} H(x),$$

então H é do mesmo tipo de uma das distribuições abaixo

$$\begin{aligned} H_{1,\gamma}(x) &= \begin{cases} e^{-x^{-\gamma}} & ,se\ x > 0 \\ 0 & ,c.c. \end{cases} \\ H_{2,\gamma}(x) &= \begin{cases} 1 & ,se\ x \geq 0 \\ e^{-(-x)^{\gamma}} & ,c.c. \end{cases} \qquad (1.14) \\ H_{3,0}(x) &= exp\{-e^{-x}\}, x \in R \end{aligned}$$

onde $\gamma > 0$.

Demonstração:
Segundo o Teorema 1.1, se a distribuição H é um limite não-degenerado como em (1.4), então ela satisfaz a equação (1.13) com A_m e B_m convenientes. Assim, basta verificar que toda H solução de (1.13) é do mesmo tipo que $H_{1,\gamma}$ ou $H_{2,\gamma}$ ou $H_{3,0}$. Para isto, considera-se três casos possíveis para a equação (1.13):

Caso 1. $B_m = 1, \forall m \geq 1$
Caso 2. $\exists M \geq 1 : B_M < 1$
Caso 3. $\exists M \geq 1 : B_M > 1$

As provas são bastante técnicas e apresentaremos, a título de ilustração, apenas o caso 1. Uma demonstração detalhada dos outros dois casos pode ser encontrada em Galambos (1978).

Caso 1. Suponha que

$$H^m(x + A_m) = H(x), \quad m \geq 1 \qquad (1.15)$$

De $H(x + A_1) = H(x)$, podemos obter que $H(nA_1) = H(0), \forall n \in \mathbb{Z}$. E como H é não-descrescente, por ser função de distribuição, segue que $A_1 = 0$.

Agora, como $H^2(x+A_2) = H(x)\ \forall x$, então temos $H^2(A_2) = H(0) = H(A_1)$ e como $0 \leq H(x) \leq 1$ segue $H(A_1) \leq H(A_2)$. Como H é não-decrescente obtemos $A_1 \leq A_2$. Assim, por indução sobre n podemos concluir que

$$0 = A_1 \leq A_2 \leq A_3 \ldots$$

Suponha que $A_m = 0\ \forall m \geq 1$. Então $H^m(x) = H(x)\ \forall m \geq 1$, o que nos leva a $H(x) = 0\ \forall x$ ou $H(x) = 1$, contrariando o fato de que H é não-degenerada. Por isso, existe $m_0 > 1$ tal que $A_m > 0\ \forall\ m \geq m_0$.

Suponha que $\exists q$ tal que $A_m \leq q < \omega(H)\ \forall m \geq 1$, então se $x < \omega(H) - q$, temos $A_m + x \leq q + x < \omega(H), \forall m \geq 1$ e

$$0 \leq H(A_m + x) \leq H(q + x) < H(\omega(H)) = 1$$

Logo, para $x < \omega(H) - q$, $\lim\limits_{m\to\infty} H^m(A_m + x) = 0$ e por (1.15), $H(x) = 0$. Agora, se $H(x^*) = 0$ para algum x^* então, como H é não-decrescente, $H(x) = 0\ \forall x < x^*$ e para $x_1 = x^* + A_m, m \geq 1$, de (1.15) segue que $H(x_1) = 0$.Fazendo $x_1 = x^*$ teremos $H(x_2)$ nula para $x_2 = x^* \pm 2A_m, m \geq 1$ e por indução, $H(x_k) = 0$ para $x_k = x^* \pm kA_m, k \geq 1$. Como existe um m para o qual $A_m > 0$ e H é monótona, podemos facilmente concluir de (1.15) que $H(x) \equiv 0$, o que é um absurdo. Assim, não existe q tal que

$$A_m \leq q < \omega(H), \forall m \geq 1.$$

Temos também que $H(x) > 0$.

Mostremos que $A_m \leq \omega(H)$. Suponhamos que $A_m > \omega(H)$. Então, como H é não-decrescente teríamos $H(A_m) \geq H(\omega(H)) = 1$. Assim, para $x \geq 0$,

$$H(A_m + x) \geq H(A_m) = 1,$$

logo $H^m(A_m + x) = 1, x \geq 0$, e por (1.15) seguiria que $H(x) = 1$ para $x \geq 0$.
Por outro lado, para m tal que $A_m > 0$ temos por (1.15)

$$1 = H(0) = H(A_m - A_m) = H(-A_m)$$

e assim sucessivamente, podemos obter $H(-kA_m) = 1, k \in \mathbb{N}$. Daí concluímos que $H(x) = 1, \forall x < 0$, pois H é não-decrescente. Logo, teríamos $H(x) = 1, \forall x$, o que é absurdo.

Portanto, das considerações anteriores temos que $\{A_m\}_{m\geq 1}$ é uma sequência não-decrescente de termos não-negativos e que $\sup\{A_m\} = \omega(H)$, e assim

$$\lim_{m\to\infty} A_m = \omega(H).$$

Agora, usando logaritmos em (1.15)

$$m \log H(x + A_m) = \log H(x), m \geq 1, -\infty < x < \infty \tag{1.16}$$

com

$$0 = A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq \ldots, A_m \xrightarrow{m} \infty \tag{1.17}$$

Defina $G(x) = \log H(x)$.
Considere um número arbitrário $z > 0$. Por (1.17), podemos encontrar um m tal que $A_m \leq z \leq A_{m+1}$. Temos então

$$G(x + A_m) \leq G(x + z) \leq G(x + A_{m+1}). \tag{1.18}$$

Aplicando (1.18) com um x arbitrário e com $x = 0$, e levando em conta que $G(x) < 0$, teremos

$$\frac{G(x + A_m)}{G(A_m)} \geq \frac{G(x + z)}{G(z)} \geq \frac{G(x + A_{m+1})}{G(A_m)},$$

que devido a (1.16) se torna

$$\frac{(m + 1)G(x)}{mG(0)} \geq \frac{G(x + z)}{G(z)} \geq \frac{mG(x)}{(m + 1)G(0)}.$$

Se fizermos $z \to \infty$, $m \to \infty$, de modo que

$$\lim_{z\to\infty} \frac{G(x + z)}{G(z)} = \frac{G(x)}{G(0)} = G^*(x),$$

e tomarmos arbitrários x e y, temos:

$$G^*(x + y) = \lim_{z\to\infty} \frac{G(z + x + y)}{G(z)}.\frac{G(x + z)}{G(x + z)}$$

$$G^*(x + y) = \lim_{z\to\infty} \frac{G(z + x + y)}{G(z + x)}.\frac{G(z + x)}{G(x)},$$

assim,

$$G^*(x + y) = G^*(y).G^*(x), \forall x, y \tag{1.19}$$

Como $G^*(x) > 0$ é não-decrescente, é conhecido que a solução de (1.19) é, $G^*(x) = e^{-ax}$, para algum $a > 0$. Assim,

$$G(x) = G^*(x)G(0) = e^{-ax}G(0).$$

Se considerarmos $G(0) = -e^{-c}$, para algum $c > 0$, teremos

$$\log H(x) = G(x) = -e^{-ax-c},$$

ou seja

$$H(x) = exp\{-e^{-ax-c}\}, a > 0,$$

que é do mesmo tipo de $H_{3,0}(x)$, como queríamos demonstrar.

$\square$

Observação 1.1.
As funções apresentadas neste teorema têm nomes específicos, ligados direta ou indiretamente aos estudiosos que foram pioneiros na descoberta das soluções de (1.13).

$H_{1,\gamma}(x)$ é a distribuição (de) Fréchet e pode ser denotada por $Frechet(\gamma)$
$H_{2,\gamma}(x)$ é a distribuição (de) Weibull reversa e pode ser denotada por $Weibull(\gamma)$
$H_{3,0}(x)$ é a distribuição (de) Gumbell e pode ser denotada por *Gumbell*

Devido à influência de Gnedenko (1943), a partir da segunda metade do século vinte muitas publicações passaram a denominá-las também de *distribuições de Gnedenko* ou *distribuições clássicas*.

1.3 Condições necessárias e suficientes para as distribuições limites clássicas

Nesta seção, o principal interesse é estabelecer condições necessárias e suficientes sobre uma função de distribuição $F(x)$ (comum a n cópias de uma variável aleatória) que garantam a existência do limite (1.4) para cada um dos três tipos de distribuições limites apresentados na Seção 1.2.

Apresentaremos, para cada um dos três tipos de distribuições limites, somente a demonstração da suficiência dessas condições. As provas da necessidade das respectivas condições são bastante longas e podem ser encontradas em Galambos (1978) e Resnick (1985). Para a prova da suficiência necessitaremos de alguns resultados e definições preliminares.

Definição 1.2. *Uma função F:* $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *é dita* Regularmente Variante *(no infinito) com índice* $\gamma \in \mathbb{R}$ *(ou* γ*-variante no infinito), e escrevemos* $F \in RV_\gamma$*, se*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{F(tx)}{F(t)} = x^\gamma, \forall x > 0. \tag{1.20}$$

Se $\gamma = 0$*, dizemos que F é lentamente variante (no infinito).*

Definição 1.3. *Se F é uma função de distribuição, os números*

$$\alpha(F) = \inf\{x : F(x) > 0\} \qquad e \qquad \omega(F) = \sup\{x : F(x) < 1\}$$

são chamados respectivamente de Ponto extremo inferior de F e Ponto extremo superior de F.

Lema 1.2. *Sejam* $X_1, \ldots, X_n$ *variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função de distribuição* $F(x)$*. Se x é tal que*

$$1 - F(x) < \frac{1}{2\sqrt{n}}, \tag{1.21}$$

então, para $n \geq 1$

$$T(x) - 4n[1 - F(x)]^2.F^n(x) < P(Z_n \leq x) < T(x),$$

com $T(x) = e^{-n[(1-F(x)]}$

Para provar este lema, vamos usar o seguinte resultado:

Lema 1.3. *Para todo* $z \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$*, vale a seguinte relação:*

$$e^{-nz} - (1-z)^n.(e^{2nz^2} - 1) < (1-z)^n \leq e^{-nz}, \qquad n \in \mathbb{N} \tag{1.22}$$

Esta inequação continua válida para $0 \leq z \leq 1$.

Demonstração: Primeiramente, podemos escrever $(1-z)^n = exp\{n\log(1-z)\}$. Agora, sabemos que a função $g(z) = \log(1-z)$ é côncava, e sua reta tangente em $z = 0$ é $y = -z$. Assim, das propriedades de funções côncavas, temos

$$\log(1-z) < -z, \forall z \in (0,1).$$

Logo obtemos

$$(1-z)^n \leq e^{-nz}, \tag{1.23}$$

e o lado direito da desigualdade (1.22) está provado para $z \in [0,1]$. Por outro lado, é fácil ver que

$$\frac{1}{1-z} < 1 + 2z, \quad \forall z \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Agora, integrando ambos os lados obtemos

$$\log(1-z) > -z - z^2.$$

Daí segue que para $z \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$,

$$(1-z)\log(1-z) > -z,$$

e assim,

$$(1-z)^{n(1-z)} > e^{-nz}. \tag{1.24}$$

Agora, de (1.23) e (1.24) temos

$$0 < e^{-nz} - (1-z)^n < (1-z)^n.(1-z)^{-nz} - 1, \tag{1.25}$$

mas

$$(1-z)^{-nz} = exp\{-nz\log(1-z)\},$$

e como $-\log(1-z) < 2z$ para $0 < z < \frac{1}{2}$, segue que

$$(1-z)^{-nz} < exp(2nz^2).$$

Usando está última desigualdade em (1.25), temos que o termo esquerdo da desigualdade (1.22) está provado para $0 < z < \frac{1}{2}$.

□

Demonstração do Lema 1.2

Primeiramente, aplicamos o Lema 1.3 com $z = 1 - F(x)$, e obtemos

$$e^{-n[1-F(x)]} - F^n(x).[e^{2n(1-F(x))} - 1] < P(Z_n \leq x) < e^{-n[1-F(x)]}.$$

Agora, usando a estimativa elementar

$$|e^{\omega} - 1| < 2\omega, 0 < \omega < \frac{1}{2},$$

segue que

$$T(x) - F^n(x)4n[1-F(x)]^2 < T(x) - F^n(x)[e^{2n(1-F(x))^2} - 1] < P(Z_n \leq x) < T(x).$$

Logo,

$$T(x) - 4n[1-F(x)]^2 F^n(x) < P(Z_n \leq x) < T(x).$$

□

O próximo lema é uma aplicação direta do lema anterior, e será a ferramenta básica para os 3 teoremas desta seção.

Lema 1.4. *Usando as notações do Lema* 1.2*, assuma que existam sequências* $\{b_n\}_{n\geq 1}$ *e* $\{a_n\}_{n\geq 1} > 0$ *de números reais tais que* $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} n[1 - F(b_n + a_n x)] = U(x) \qquad \textit{existe.} \tag{1.26}$$

Então,

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq b_n + a_n x) = e^{-U(x)}. \tag{1.27}$$

Demonstração: Podemos verificar o resultado em dois casos.
(i) Caso $U(x) = \infty$.
Usando $z = 1 - F(a_n x + b_n)$ na inequação (1.22), segue que

$$(1 - z)^n = P(Z_n \leq a_n x + b_n) < exp\{-n[1 - F(a_n x + b_n)]\} = e^{-nz}.$$

Assim, da hipótese (1.26) segue

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq a_n x + b_n) < exp\{-\lim_{n\to\infty} n[1 - F(a_n x + b_n)]\} = 0,$$

e (1.27) está provado

(ii) Caso $U(x) < \infty$.
De (1.26) segue que para $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} (1 - F(a_n x + b_n)) = 0,$$

e daí (1.21) é satisfeita para n suficientemente grande, ou seja,

$$1 - F(a_n x + b_n) < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Assim, pelo Lema 1.2 temos,

$$exp\{-n\bar{F}(a_n x+b_n)\} - 4n[\bar{F}(a_n x+b_n)]^2 F^n(a_n x+b_n) < P(Z_n \leq a_n x+b_n) < exp\{-n\bar{F}(a_n x+b_n)\}$$

onde $\bar{F} = 1 - F$. Como $F^n(x) < 1$, segue

$$exp\{-n\bar{F}(a_n x + b_n)\} - \frac{4}{n}[n\bar{F}(a_n x + b_n)]^2 < P(Z_n \leq a_n x + b_n) < exp\{-n\bar{F}(a_n x + b_n)\}.$$

Finalmente, de (1.26) obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}[n(1 - F(a_n x + b_n))]^2 = 0.$$

e segue o resultado.

□

Nos próximos três teoremas apresentamos respectivamente as condições necessárias e suficientes para que uma função de distribuição esteja no domínio de atração de cada uma das distribuições limites dadas em (1.14). Usaremos a notação $\bar{F} = 1 - F$.

Teorema 1.3. *Para que existam sequências de constantes* $\{a_n\}_{n\geq 1} > 0$ *e* $\{b_n\}_{n\geq 1}$ *satisfazendo* (1.4) *com* $H(x) = H_{1,\gamma}(x)$ *é necessário e suficiente que* $\omega(F) = \infty$, *e que* $\bar{F} \in RV_{-\gamma}$ *para alguma constante* $\gamma > 0$. *Neste caso, temos* $b_n = 0$ *e*

$$\lim_{n\to\infty} F^n(a_n x) = \lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq a_n x) = H_{1,\gamma}(x), \tag{1.28}$$

onde a_n *pode ser escolhida como*

$$a_n = \inf\left\{x : 1 - F(x) \leq \frac{1}{n}\right\}. \tag{1.29}$$

Demonstração:
Suficiência: Suponha que $\omega(F) = \infty$, e $\bar{F} \in RV_{-\gamma}$. Pelo Lema 1.4 basta provar que

$$\lim_{n\to\infty} n[1 - F(a_n x)] = \begin{cases} x^{-\gamma} & ,\text{se } x > 0 \\ \infty & ,\text{se } x < 0 \end{cases} \tag{1.30}$$

e a relação (1.28) estará provada.
Como $\omega(F) = \infty$, segue que $a_n = \inf\left\{x : F(x) \geq 1 - \frac{1}{n}\right\} \xrightarrow{n} \infty$.

- Se $x < 0$, temos que $a_n x \xrightarrow{n} -\infty$, e naturalmente, $1 - F(a_n x) \xrightarrow{n} 1$. Com isso,

  $$\lim_{n\to\infty} n[1 - F(a_n x)] = \infty,$$

  e a relação (1.28) está provada para $x < 0$.

- Se $x > 0$, podemos usar a condição $\bar{F} \in RV_{-\gamma}$ com $t = a_n$, para escrever

  $$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n[1 - F(a_n x)] &= \lim_{n\to\infty} n[1 - F(a_n x)] \frac{[1 - F(a_n)]}{[1 - F(a_n)]} \\ &= x^{-\gamma} \lim_{n\to\infty} n[1 - F(a_n)]. \end{aligned}$$

  Assim, para encerrarmos a demonstração, é suficiente mostrar que

  $$\lim_{n\to\infty} n[1 - F(a_n)] = 1.$$

  Para isso, considere $0 < \epsilon < 1$ arbitrário.
  Segue que $a_n(1 - \epsilon) < a_n$ e daí $1 - F(a_n(1 - \epsilon)) \geq 1 - F(a_n)$, pois $1 - F(x)$ é não-crescente. Mas também, pela definição de a_n, temos $1 - F(a_n(1 - \epsilon)) > \frac{1}{n}$, nos levando a

  $$1 - F(a_n) \leq \frac{1}{n} < 1 - F(a_n(1 - \epsilon)).$$

Manipulando a relação acima, obtemos

$$\frac{1 - F(a_n)}{1 - F(a_n(1-\epsilon))} < n[1 - F(a_n)] \leq 1.$$

Usando novamente que $\bar{F} \in RV_{-\gamma}$, segue que

$$(1-\epsilon)^\gamma \leq \liminf n[1 - F(a_n)] \leq \limsup n[1 - F(a_n)] \leq 1.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} n[1 - F(a_n)] = 1$$

e a suficiência das condições está demonstrada.
Necessidade. A prova será omitida e pode ser encontrada em detalhes em Galambos (1978) e Resnick (1985).

□

Agora, se $\omega(F) < \infty$, defina $F^*(x) = F\left(\omega(F) - \dfrac{1}{x}\right)$, para $x > 0$.

Teorema 1.4. *Dada uma função de distribuição F, existem sequências $\{b_n\}_{n\geq 1}$ e $\{a_n\}_{n\geq 1} > 0$ de números reais, tais que*

$$\lim_{n\to\infty} F^n(a_n x + b_n) = \lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq a_n x + b_n) = H_{2,\gamma}(x) \tag{1.31}$$

se e somente se, $\omega(F) < \infty$ e $\bar{F}^* \in RV_{-\gamma}$ para alguma constante $\gamma > 0$. Neste caso as sequências a_n e b_n podem ser escolhidas como

$$a_n = \omega(F) - \inf\left\{x : 1 - F(x) \leq \frac{1}{n}\right\} \quad e \quad b_n = \omega(F).$$

Demonstração:
Suficiência: Suponha que $\omega(F) < \infty$ e $\bar{F}^* \in RV_{-\gamma}$ para alguma constante $\gamma > 0$. Temos que

$$\omega(F^*) = \sup\{x : F^*(x) < 1\} = \sup\left\{x : F\left(\omega(F) - \frac{1}{x}\right) < 1\right\} = \infty,$$

pois $F\left(\omega(F) - \dfrac{1}{x}\right) < 1, \forall x > 0$ pela definição de $\omega(F)$.
Então, como por hipótese $\bar{F} \in RV_{-\gamma}$, podemos aplicar o Teorema 1.3 para $F^*(x)$, e obter que

$$\lim_{n\to\infty} F^{*n}(a_n^* x) = \lim_{n\to\infty} F^n\left(\omega(F) - \frac{1}{a_n^* x}\right) = H_{1,\gamma}(x), x > 0$$

com,

$$\begin{aligned}
a_n^* &= \inf\left\{x : 1 - F^*(x) \leq \frac{1}{n}\right\} \\
&= \inf\left\{x : 1 - F\left(\omega(F) - \frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{n}\right\} \\
&= \inf\left\{\frac{1}{\omega(F) - \frac{1}{s}} : 1 - F(s) \leq \frac{1}{n}\right\} \\
&= \frac{1}{\omega(F) - \inf\left\{x : 1 - F(x) \leq \frac{1}{n}\right\}}.
\end{aligned}$$

Se tomarmos $a_n = \dfrac{1}{a_n^*}$ e ainda $b_n = \omega(F)$, podemos escrever para $x > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} F^n\left(b_n - \frac{a_n}{x}\right) = H_{1,\gamma}(x),$$

ou ainda, para $y < 0$ temos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} F^n(b_n + a_n y) &= H_{1,\gamma}\left(-\frac{1}{y}\right), \\
&= e^{(-y)^\gamma}, \qquad y < 0.
\end{aligned}$$

Como $a_n > 0$ e $b_n = \omega(F)$, a definição de ponto extremo superior nos garante que $F^n(a_n y + b_n) \equiv 1, \forall y > 0$, de maneira que segue (1.31).
Necessidade: A prova será omitida. Para detalhes, veja Galambos (1978) ou Resnick (1985).

□

Teorema 1.5. *Existem sequências de números reais* $\{a_n\}_{n\geq 1} > 0$ *e* $\{b_n\}_{n\geq 1}$ *tais que*

$$\lim_{n\to\infty} F^n(a_n x + b_n) = \lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq a_n x + b_n) = H_{3,0}(x) \tag{1.32}$$

se e somente se, para algum $a \in \mathbb{R}$*, temos,*

$$\int_a^{\omega(F)} [1 - F(y)]dy < \infty, \tag{1.33}$$

e $\forall x \in \mathbb{R}$*,*

$$\lim_{t\to\omega(F)} \frac{\bar{F}(t + xR(t))}{\bar{F}(t)} = e^{-x}, \tag{1.34}$$

onde para $\alpha(F) < t < \omega(F)$*,*

$$R(t) = [1 - F(t)]^{-1} \int_t^{\omega(F)} [1 - F(y)]dy. \tag{1.35}$$

Neste caso, as sequências b_n e $a_n > 0$ podem ser escolhidas como

$$b_n = \inf\left\{x : 1 - F(x) \leq \frac{1}{n}\right\} \quad e \quad a_n = R(b_n).$$

Demonstração:
Suficiência: É imediato que

$$b_n = \inf\left\{x : F(x) \geq 1 - \frac{1}{n}\right\} \xrightarrow{n} \omega(F) = \sup\{x : F(x) < 1\}.$$

Pela relação (1.34), sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - F(b_n + xR(b_n))}{1 - F(b_n)} = \lim_{t\to\omega(F)} \frac{\bar{F}(t + xR(t))}{1 - F(t)} = e^{-x}. \tag{1.36}$$

Mais uma vez, utilizaremos o Lema 1.4 para provar (1.32). Considerando $a_n = R(b_n)$, de (1.36) segue

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n[1 - F(b_n + a_n x)] &= \lim_{n\to\infty} n[1 - F(b_n)] \frac{1 - F(b_n + a_n x)}{1 - F(b_n)} \\ &= e^{-x} \lim_{n\to\infty} n[1 - F(b_n)], \end{aligned}$$

e novamente basta mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} n[1 - F(b_n)] = 1.$$

Seja $\epsilon > 0$ arbitrário, então $(b_n - \epsilon.a_n) < b_n$ e $1 - F(b_n - \epsilon.a_n) > \dfrac{1}{n}$. Assim

$$1 - F(b_n) \leq \frac{1}{n} < 1 - F(b_n - \epsilon.a_n),$$

e daí,

$$\frac{1 - F(b_n)}{1 - F(b_n - \epsilon.a_n)} < n[1 - F(b_n)] \leq 1.$$

Agora, usando a relação (1.36), segue que

$$e^{\epsilon} \leq \liminf n[1 - F(b_n)] \leq \limsup n[1 - F(b_n)] \leq 1.$$

Fazendo $\epsilon \to 0$, segue $\lim\limits_{n\to\infty} n[1 - F(b_n)] = 1$ e a condição (1.26) do Lema 1.4 está verificada com $U(x) = e^{-x}$. Daí (1.32) segue de (1.27).
A necessidade pode ser verificada em detalhes em Galambos (1978) e Resnick (1987).

□

Exemplo 1.2.
Distribuição Uniforme $(0, 1)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0, \\ x & \text{se} \quad 0 \le x \le 1, \\ 1 & \text{se} \quad x > 1. \end{cases}$$

Claramente $\alpha(F) = 0$ e $\omega(F) = 1$.
Portanto devemos verificar as condições dos Teoremas 1.4 ou 1.5. No caso do Teorema 1.5, vale (1.31) mas

$$\frac{1 - (t + xR(t))}{1 - t} = 1 - \frac{xR(t)}{1 - t}$$

não pode convergir para e^{-x} quando $t \to 1$. Logo, não vale o Teorema 1.5, uma vez que não vale (1.34). Agora,

$$F^*(x) = F\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{x}, x > 1$$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\bar{F}^*(xt)}{\bar{F}^*(t)} = \lim_{t \to \infty} \frac{\left(\frac{1}{xt}\right)}{\left(\frac{1}{t}\right)} = x^{-1}$$

e por isso, $\bar{F}^* \in RV_{-1}$, atestando que para $a_n = 1 - \inf\left\{x : 1 - F(x) \le \frac{1}{n}\right\} = \frac{1}{n}$ e $b_n = 1$,

$$F^n\left(1 + \frac{x}{n}\right) = P\left(Z_n \le 1 + \frac{x}{n}\right) \xrightarrow{n} H_{2,1}(x).$$

Vale ressaltar que essa conclusão continua válida quando tomamos a uniforme no intervalo $(0, \theta)$, $\theta > 0$.

Exemplo 1.3.
Distribuição de Cauchy.

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{\arctan(x)}{\pi}, x \in \mathbb{R}.$$

Aqui sabemos que $\frac{-\pi}{2} < \arctan(x) < \frac{\pi}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$, e disso $\alpha(F) = -\infty$ e $\omega(F) = \infty$. Assim, é possível que sejam satisfeitos os Teoremas 1.3 ou 1.5. Mas usando integração por partes,

$$\int_0^\infty [1 - F(x)]dx = [x(1 - F(x))]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{x}{\pi(1 + x^2)}dx = \infty,$$

e não vale o Teorema 1.5, visto que não ocorre (1.33). Assim, devemos testar as hipóteses do Teorema 1.3:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\bar{F}^*(xt)}{\bar{F}(t)} = \lim_{t \to \infty} \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{\arctan(xt)}{\pi}\right)}{\left(\frac{1}{2} - \frac{\arctan(t)}{\pi}\right)} = A(x)$$

Aplicando a regra de L´Hospital:

$$A(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{(1+t^2)x}{1+(tx)^2} = x^{-1},$$

ou

$$F \in RV_{-1}$$

e

$$P(Z_n \le a_n x) \xrightarrow{n} H_{1,1}(x),$$

com $a_n = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right)$.

Exemplo 1.4.

$$F(x) = 1 - \frac{1}{\log(x)}, x \ge e.$$

Temos que $\omega(F) = \sup\{x : \log(x) > 1\} = \infty$.
Com isso nossas possibilidades são o Teorema 1.3 e o Teorema 1.5. O Teorema 1.3 não é atendido, pois $F \notin RV_{-\gamma}, \gamma > 0$, visto que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log(t)}{\log(tx)} = 1 = x^0.$$

O Teorema 1.5 também não é atendido, pois (1.33) não acontece, já que

$$\begin{aligned}
\int_e^\infty \frac{1}{\log x} dx &= \lim_{b\to\infty} \int_e^b \frac{1}{\log x} dx \\
&\ge \lim_{b\to\infty} \frac{1}{\log b}(b-e) \\
&= \lim_{b\to\infty} \frac{b}{\log b} - \lim_{b\to\infty} \frac{e}{\log b} \\
&= \lim_{b\to\infty} \frac{b}{\log b} = \infty.
\end{aligned}$$

Portanto, não existem sequências $a_n > 0$ e b_n tais que $F^n(a_n x + b_n)$ convirja para alguma distribuição não-degenerada.

Observação 1.2.
a) Fisher e Tippet descobriram que as funções que satisfazem a equação (1.4) podem ser unificadas na chamada **Distribuição Generalizada de Valor Extremo** (veja, por exemplo, Kotz e Nadarajah (2000)). Não apresentamos tal função aqui porque a unificação que apresentaremos no próximo capítulo é mais abrangente, uma vez que considera transformações estabilizantes não-necessariamente lineares.
b) Os critérios da Seção 1.3 são conhecidos desde Gnedenko, mas critérios mais refinados foram aparecendo ao longo do tempo (alguns destes critérios são considerados por muitos, mais simples e diretos). Podemos citar nesta linha os trabalhos De Haan em (1971) e em(1994), e Galambos (1994), por exemplo.

Capítulo 2

Estabilizações gerais

2.1 Introdução

Neste capítulo, investigaremos o comportamento limite do máximo de variáveis aleatórias estabilizado por uma sequência de transformações não-necessariamente lineares. Em outras palavras, sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com uma função de distribuição F, $Z_n = max\{X_1, \ldots, X_n\}$, e $\{G_n(x)\}_{n\geq 1}$ uma sequência de transformações contínuas estritamente monótonas, nosso interesse agora é estudar o comportamento limite de

$$P(Z_n \leq G_n(x)) = F^n(G_n(x)). \tag{2.1}$$

Essa abordagem foi proposta pela primeira vez por E. Pantcheva (1984). Neste trabalho, Pantcheva mostrou que todas as possíveis distribuições limite de (2.1) podem ser unificadas em uma classe de funções, e estudou, em particular uma nova estabilização, chamada estabilização potência, dada por

$$G_n(x) = a_n \,|x|^{b_n}\, sign(x), \tag{2.2}$$

onde $a_n > 0$ e $b_n > 0$, e

$$sign(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x < 0, \\ 0 & \text{se} \quad x = 0, \\ 1 & \text{se} \quad x > 0. \end{cases}$$

Na Seção 2.2 mostraremos a unificação, apresentada por Pantcheva, de todas as possíveis distribuições limites de (2). Na Seção 2.3 reobteremos as distribuições clássicas apresentadas na Seção 1.3 segundo a abordagem de Pantcheva. Na Seção 2.4 apresentaremos as distribuições limites de (2.1) para o caso da estabilização potência. A principal referência deste capítulo é Pantcheva (1984).

Começamos com as definições de max-estabilidade e domínio de atração.

Definição 2.1. *Dizemos que F é max-estável (ou estável para o máximo) se para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma transformação contínua estritamente monótona $G_n(x)$ tal que*

$$F(x) = F^n(G_n(x)), \tag{2.3}$$

isto é, para cada n,

$$G_n^{-1}(Z_n) \overset{D}{=} X,$$

onde X é uma variável aleatória que tem F como função de distribuição.

Observação 2.1. Conforme os Teoremas 1.1 e 1.2, sabemos que $H_{1,\gamma}(x)$, $H_{2,\gamma}(x)$ e $H_{3,0}(x)$ são distribuições max-estáveis para alguma $G_n(x) = a_n x + b_n$, $a_n > 0$. Como ilustração, é fácil ver que, para $G_n(x) = x + \log n$, a distribuição *Gumbell* -$H_{3,0}(x)$- é max-estável.

Definição 2.2. *Se Y é uma variável aleatória não-degenerada com distribuição H, e se existe uma sequência de transformações contínuas estritamente monótonas $\{G_n(x)\}_{n\geq 1}$ tal que*

$$G_n^{-1}(Z_n) \xrightarrow{D} Y,$$

ou seja,

$$F^n(G_n(x)) \xrightarrow{n} H(x), \tag{2.4}$$

dizemos que F pertence ao domínio de atração de H, e escrevemos

$$F \in D(H).$$

Neste caso, H será chamada *distribuição limite extremal* (ou maximal).

Observação 2.2. Desta definição, decorre que as distribuições clássicas são todas distribuições limite extremais, pois neste caso (2.4) ocorre com $G_n(x)$ linear. Assim os teoremas da Seção 1.3 apresentam condições para que uma função de distribuição F esteja no domínio de atração de uma das distribuições limites clássicas.

Exemplo 2.1.
a) Pelo Exemplo 1.2, temos que a função de distribuição de uma variável aleatória uniforme está no domínio de atração de $H_{2,1}(x)$ com a estabilização

$$G_n(x) = \frac{x}{n} + 1.$$

Temos ainda, pelo Exemplo 1.3 que a distribuição de Cauchy está no domínio de atração de $H_{1,1}(x)$ com a estabilização

$$G_n(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right)$$

b) Toda distribuição máx-estável está no próprio domínio de atração, como consequência da definição de max-estabilidade.
c) Considere a distribuição de Pareto parâmetro k

$$F(x) = 1 - x^{-k}$$

onde $k > 0, x \geq 1$. Se considerarmos $G_n(x) = n^{\frac{1}{k}}x$, $k > 0$, notamos que $F \in D(H_{1,k})$
d) Se $F(x) = 1 - exp\{-e^{-x}\}, x \in \mathbb{R}$, então $F \in D(H_{3,0})$ com

$$G_n(x) = \frac{x}{\log n} + \log(\log n).$$

Note que, se $F \in D(H)$, H é uma distribuição limite extremal por definição, e reciprocamente, se H é extremal, há pelo menos uma distribuição em seu domínio de atração. Veja ainda que toda distribuição max-estável é uma distribuição extremal máxima, pois ela é o limite de algum máximo estabilizado.

Finalizamos esta seção apresentando uma definição geral de distribuições de mesmo tipo, que estende a Definição 1.1 do caso clássico.

Definição 2.3. *Duas distribuições H e H^* são do mesmo tipo se existe uma transformação contínua estritamente monótona $G(x)$ tal que*

$$H^*(x) = H(G(x))$$

Note que se $G(x) = Ax + B$, $A > 0$, a definição acima reduz-se à Definição 1.1.

2.2 Caracterização das distribuições limite extremais

Nesta seção, esboçaremos todas as distribuições limite extremais como uma só classe de funções. Para isso, usaremos a sequência de lemas que se segue, dos quais demonstraremos apenas o primeiro, visto que as outras demonstrações são muito técnicas e estão detalhadas em Pantcheva (1984) e Small (2007).

O primeiro lema é uma extensão do Lema 1.4. Antes, vale notar que usaremos a conhecida notação $A_n = o(E_n)$ para indicar que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{A_n}{E_n} \right| = 0.$$

Lema 2.1. *(Pantcheva, 1984) Seja uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, $\{X_n\}_{n\geq 1}$, com função de distribuição F. Então,*

$$n[1 - F(G_n(x))] \xrightarrow{n} U(x) < \infty, \tag{2.5}$$

se, e somente se,

$$P(Z_n \leq G_n(x)) = F^n(G_n(x)) \xrightarrow{n} H(x) = e^{-U(x)}. \tag{2.6}$$

Demonstração:
Primeiro notemos que se (2.5) é satisfeita, então é imediato que

$$\lim_{n\to\infty} (1 - F(G_n(x))) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.[n(1 - F(G_n(x)))] = 0.$$

Da mesma forma, se (2.6) é satisfeita, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} F(G_n(x)) &= exp\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.[n \log F(G_n(x))]\right\} \\
&= exp\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.[\log F^n(G_n(x))]\right\} \\
&= e^0 = 1,
\end{aligned}$$

e assim também temos $\lim_{n\to\infty}(1 - F(G_n(x))) = 0$.

Agora, $P(Z_n \leq x) = F^n(x)$, e podemos escrever

$$\log P(Z_n \leq G_n(x)) = n\log\{1 - [1 - F(G_n(x))]\}$$

$$\log P(Z_n \leq G_n(x)) = n\log[1 - B_n(x)],$$

onde $B_n(x) = 1 - F(G_n(x))$, e podemos assumir que $B_n(x) \xrightarrow{n} 0$.
Para $0 \leq y < 1$, o desenvolvimento de Taylor de $\log(1-y)$ é:

$$\log(1-y) = -\left(y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \dots\right) = -\left(y + y\left[\frac{y}{2} + \frac{y^2}{3} + \dots\right]\right).$$

Assim,

$$\log P(Z_n \leq G_n(x)) = -nB_n(x)\left\{1 + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{B_n^j(x)}{j+1}\right\}. \tag{2.7}$$

Como $\lim_{n\to\infty} B_n(x) = 0$, se tomarmos $0 < \delta < 1$, existe n_0 tal que $n > n_0$ implica em $B_n(x) < \delta < 1$. Pelo Teste da Razão, a série

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\delta^j}{j+1}$$

é convergente. Assim, para $n > n_0$ a série

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{B_n^j(x)}{j+1}$$

é também convergente. Logo, para $n > n_0$, temos

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{B_n^j(x)}{j+1} = 0,$$

ou seja, dado $\eta > 0$, $\exists k_0$ tal que

$$\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{B_n^j(x)}{j+1} < \eta, \forall k \geq k_0.$$

Escrevendo

$$S_n(x) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{B_n^j(x)}{j+1},$$

então

$$0 \leq S_n(x) - \sum_{j=1}^{k}\frac{B_n^j(x)}{j+1} < \eta$$

$\forall n > n_0$, $\forall k > k_0$.Assim, como $B_n(x) \xrightarrow{n} 0$, segue que

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = 0.$$

Agora, voltando em (2.7), podemos escrever

$$\log P(Z_n \leq G_n(x)) = -nB_n(x)[1 + S_n(x)],$$

e daí segue

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log P(Z_n \leq G_n(x))}{nB_n(x)} = -1,$$

ou seja,

$$\log P(Z_n \leq G_n(x)) = -(1 + o(1))n[1 - F(G_n(x))]. \tag{2.8}$$

Assim, se (2.5) é válida, então

$$exp\left\{\lim_{n\to\infty} -n[1 - F(G_n(x))]\right\} = exp\{-U(x)\},$$

e por (2.8) segue

$$exp\left\{\lim_{n\to\infty} \log P(Z_n \leq G_n(x))\right\} = exp\{-U(x)\}$$

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq G_n(x)) = exp\{-U(x)\},$$

e (2.6) é satisfeita. Reciprocamente, se (2.6) é válida, então por (2.8),

$$\lim_{n\to\infty}[\log P(Z_n \leq (G_n(x)))] = \lim_{n\to\infty} -(1 + o(1))n[1 - F(G_n(x))]$$

$$\log \lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq (G_n(x))) = \lim_{n\to\infty} -(1 + o(1))n[1 - F(G_n(x))]$$

$$\log H(x) = -(1 + o(1)) \lim_{n\to\infty} n[1 - F(G_n(x))],$$

e segue (2.5).

□

Agora, para cada sequência de inteiros $\{m_n\}_{n\geq 1}$ tal que

$$m_n < n, \quad m_n \xrightarrow{n} \infty, \quad e \quad \frac{m_n}{n} \xrightarrow{n} \lambda \in (0, 1), \tag{2.9}$$

defina

$$g_\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} G_{m_n}^{-1}(G_n(x)). \tag{2.10}$$

Lema 2.2. *(Pantcheva, 1984) Sob a condição* (2.9)*, o limite* (2.10) *existe e satisfaz*

$$g_s \circ g_\lambda(x) = g_{s\lambda}(x) \tag{2.11}$$

Lema 2.3. *(Pantcheva, 1984) Se uma função de distribuição não-degenerada H é o limite de $P(Z_n \leq G_n(x))$, então para cada $\lambda \in (0, 1)$*

$$H(x) = H(g_\lambda(x)).H(g_{1-\lambda}(x)). \tag{2.12}$$

A equação (2.11), conhecida como equação de Abel, tem solução[1] da forma

$$g_\lambda(x) = h^{-1}[h(x) - \log \lambda], \tag{2.13}$$

onde h é contínua e inversível. Mais detalhes sobre a estrutura e o comportamento de h serão devidamente verificados adiante.

Consideraremos aqui transformações $G_n(x)$ tais que $g_\lambda(x)$ seja solúvel com respeito a λ, ou seja, dados x e t, a equação $g_\lambda(x) = t$ tem única solução $\lambda = \bar{g}(t, x)$.

A próxima definição e os dois próximos resultados podem ser encontrados em Small (2007).

Definição 2.4. *Se f: $D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, é uma função satisfazendo*

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad x, y \in D. \tag{2.14}$$

Então, dizemos que f satisfaz a equação de Cauchy.

Lema 2.4. *Na relação* (2.14), *se $D = \mathbb{R}$ ou $D = \mathbb{R}^+$, e vale uma das condições abaixo:*
(i) f é contínua
(ii) f é limitada em algum intervalo
(iii)f é monótona em algum intervalo
(iv) f é positiva para $x > 0$.
Então, para algum $a \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lema 2.5. *Sendo f: $D \to \mathbb{R}$ uma função, as equações:*

$$f(x+y) = f(x).f(y), \qquad x, y \in D \tag{2.15}$$

$$f(x.y) = f(x) + f(y), \qquad x, y \in D \tag{2.16}$$

$$f(x.y) = f(x).f(y), \qquad x, y \in D \tag{2.17}$$

são versões da equação de Cauchy, cujas soluções são, respectivamente[2]:

$$f(x) = e^{ax}, \forall x \in D$$

$$f(x) = a \log x, \forall x \in D$$

$$f(x) = x^a, \forall x \in D.$$

Agora, podemos enunciar e provar o principal resultado desta seção.

Teorema 2.1. *Toda distribuição limite extremal tem a forma*

$$H(x) = exp\{-e^{-h(x)}\}, \tag{2.18}$$

onde h é a função contínua inversível de (2.13).

[1] conforme Aczel (1966), Capítulo 3
[2] Note que estamos levando em conta as soluções não-triviais.

Demonstração:
Dos Lemas 2.2 e 2.3, temos que

$$H(x) = H(g_\lambda(x)).H(g_{1-\lambda}(x)), \tag{2.19}$$

e por (2.13) temos

$$H(x) = H(h^{-1}[h(x) - \log\lambda]).H(h^{-1}[h(x) - \log(1-\lambda)]),$$

onde h é contínua e inversível. Se definirmos $T(x) = H \circ h^{-1}(x)$, segue diretamente que $T(h(x)) = H(x)$ e a equação anterior pode ser escrita como

$$T(h(x)) = T(h(x) - \log\lambda).T(h(x) - \log(1-\lambda)).$$

Fazendo as mudanças

$$v = e^{h(x)}$$

e

$$T(h(x)) = T(\log v) = \omega(v),$$

a equação (2.19) reduz-se a

$$\omega(v) = \omega\left(\frac{v}{\lambda}\right).\omega\left(\frac{v}{1-\lambda}\right). \tag{2.20}$$

Note que $\omega(v)$ é não-decrescente, por sua própria construção, e é claro que $\omega(v) = 0$ e $\omega(v) = 1$ são soluções triviais da equação 2.20. Entretanto, essas soluções não geram distribuições não-degeneradas. Por isso, vamos considerar $0 < \omega(v) < 1$.
Definindo $\psi(v) = \omega\left(\dfrac{1}{v}\right)$ (observe que $v \neq 0$ e que ψ está bem definida) obtemos

$$\psi\left(\frac{1}{v}\right) = \psi\left(\frac{\lambda}{v}\right).\psi\left(\frac{1-\lambda}{v}\right). \tag{2.21}$$

Como para $0 < \lambda < 1$ fixo,

$$\frac{\lambda}{v} \quad e \quad \frac{1-\lambda}{v}$$

são bijeções sobre os reais, de (2.15) temos que a equação (2.21) tem solução

$$\psi\left(\frac{1}{v}\right) = exp\left\{a.\frac{1}{v}\right\} = \omega(v).$$

Como ω é não-decrescente, temos $a < 0$. Agora, como $v = e^{h(x)}$ segue que a solução de (2.19) é da forma

$$H(x) = \omega\left(e^{h(x)}\right) = exp\left\{\frac{a}{e^{h(x)}}\right\},$$

ou seja,

$$H(x) = exp\left\{-ce^{-h(x)}\right\}.$$

onde $c = -a > 0$.
Podemos tomar $c = 1$, pois se $h_*(x) = h(x) + c$, então

$$g_\lambda(x) = h_*^{-1}[h_*(x) - \log\lambda] = h^{-1}[h(x) - \log\lambda],$$

e portanto

$$H(x) = exp\left\{-e^{-h(x)}\right\}.$$

□

Observação 2.3.
a) É claro que $h(x)$ é uma função estritamente crescente, pois H é uma função de distribuição, e por definição, ela é contínua e inversível.
b) Temos também que

$$\lim_{x \to \alpha(H)} h(x) = -\infty, \quad e \quad \lim_{x \to \omega(H)} h(x) = \infty. \tag{2.22}$$

Portanto o domínio da função h é o intervalo $(\alpha(H), \omega(H))$.

Exemplo 2.2. *:*
a) Para $H_{1,\gamma}(x)$, $h(x) = -\log(x^{-\gamma})$ para $x \in (0, \infty)$.
b) Para $H_{2,\gamma}(x)$, $h(x) = -\log(-x)^{\gamma}$ para $x \in (-\infty, 0)$.
c) Para $H_{3,0}(x)$, $h(x) = x, \forall x \in (-\infty, \infty)$.

Corolário 2.1. *Toda distribuição limite extremal é max-estável.*

Demonstração: Tome $G_n(x) = h^{-1}[h(x) + \log n]$. Então temos

$$\begin{aligned} H^n(G_n(x)) &= \left\{\left[exp\left\{-e^{-h(G_n(x))}\right\}\right]\right\}^n \\ &= \left[exp\left\{-e^{-h(x)-\log n}\right\}\right]^n \\ &= exp\left\{-ne^{-h(x)}.e^{-\log n}\right\} \\ &= exp\left\{-n\frac{1}{n}.e^{-h(x)}\right\} \\ &= H(x) \end{aligned}$$

□

Corolário 2.2. *Toda função de distribuição contínua crescente é max-estável.*

Demonstração: Se fizermos $h(x) = -\log\log\frac{1}{F(x)}$, temos que F é uma distribuição limite extremal, e portanto, é max-estável.

□

Observação 2.4. Cabe notar agora que as distribuições extremais clássicas são reduzidas a uma só distribuição geral[3]. De fato, quando $G_n(x)$ é linear, a distribuição H é escrita como

$$H(x) = H_{3,0}(h(x))$$

Se $h(x) = -\log(x^{-\gamma})$, H é uma Fréchet(γ).
Se $h(x) = -\log(-x)^{\gamma}$, H é uma Weibull(γ).
Se $h(x) = x$, H é uma Gumbell.

[3]não estamos falando aqui da função distribuição de valor extremo generalizada, citada na observação 1.2.

2.3 Estabilização Linear - Distribuições Clássicas

Nesta seção, usaremos os resultados da seção anterior para reobter as distribuições extremais clássicas, descritas no Capítulo 1. Vamos agora enunciar um lema que será a ferramenta básica nesta seção.

Lema 2.6. *(Aczel, 1966)*
Seja a função f: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. *Se para um dado* $\lambda \in (0,1)$ *existe* $m \in \mathbb{R} - \{0\}$ *tal que*

$$f(x) = \lambda f(\lambda^m x), \forall x \geq 0 \tag{2.23}$$

então $\forall x \geq 0$,

$$f(x) = bx^{\frac{-1}{m}}, \tag{2.24}$$

para algum $b \in \mathbb{R}$.

Observação 2.5. Sempre que usarmos este lema, tomaremos $b = 1$, pois do contrário apenas geraremos funções de mesmo tipo.

Cabe ainda ressaltar que, da expressão (2.13) segue que

$$g_\lambda(x) > x, \forall x \in \mathbb{R}, \tag{2.25}$$

pois do contrário, teríamos $\log \lambda = 0$ ou $\log \lambda > 0$, dois absurdos, já que $\lambda \in (0,1)$.

Consideremos então a estabilização $G_n(x) = a_n x + b_n$, $a_n > 0$. Seguindo (2.10), temos que para $m_n < n$, $m_n \xrightarrow{n} \infty$ e $\frac{m_n}{n} \xrightarrow{n} \lambda \in (0,1)$

$$G_{m_n}^{-1} \circ G_n(x) = \frac{a_n x + b_n + (-b_{m_n})}{a_{m_n}}$$

e

$$\begin{aligned} g_\lambda(x) &= \lim_{n\to\infty} G_{m_n}^{-1} \circ G_n(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{m_n}} x + \lim_{n\to\infty} \frac{b_n - b_{m_n}}{a_{m_n}}, \end{aligned}$$

de forma que

$$g_\lambda(x) = \alpha(\lambda)x + \beta(\lambda), \tag{2.26}$$

onde

$$\alpha(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{m_n}} \quad e \quad \beta(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n - b_{m_n}}{a_{m_n}}.$$

Agora, como

$$\frac{a_n}{a_{m_n s}} = \frac{a_n}{a_{m_n}} . \frac{a_{m_n}}{a_{m_n s}},$$

segue que

$$\alpha(\lambda s) = \alpha(\lambda)\alpha(s), \lambda, s \in (0,1), \tag{2.27}$$

e como

$$\frac{b_n - b_{m_n s}}{a_{m_n}} = \frac{a_n}{a_{m_n}}\left(\frac{b_{m_n} - b_{m_n s}}{a_n}\right) + \frac{b_n - b_{m_n}}{a_{m_n}},$$

segue que

$$\beta(\lambda s) = \alpha(\lambda)\beta(s) + \beta(\lambda). \tag{2.28}$$

Do Lema 2.5 segue que as possíveis soluções de (2.27) são

$$\alpha(\lambda) = 1 \qquad ou \qquad \alpha(\lambda) = \lambda^m, \qquad m = constante$$

Caso 1. Se $\alpha(\lambda) = 1$, (2.28) reduz-se a

$$\beta(\lambda s) = \beta(s) + \beta(\lambda),$$

e novamente pelo Lema 2.5 sua solução é

$$\beta(\lambda) = k \log \lambda, \qquad k = constante.$$

Assim, segue de (2.13) e (2.26) que

$$g_\lambda(x) = x + \log \lambda = h^{-1}[h(x) - \log \lambda],$$

e devemos então resolver a equação

$$h(x + \log \lambda) = h(x) - \log \lambda,$$

ou ainda,

$$exp\{h(x + \log \lambda)\} = \frac{1}{\lambda}.e^{h(x)}.$$

Fazendo $f(x) = e^{h(x)} > 0$, ficamos com

$$f(x) = \lambda f(x + k \log \lambda).$$

Fazendo então $F(e^x) = f(x)$, nossa equação se torna

$$F(e^x) = \lambda F(\lambda^k e^x),$$

cuja solução, pelo Lema 2.6 é $F(e^x) = (e^x)^{-\frac{1}{k}}$. Daí

$$F(e^x) = (e^x)^{-\frac{1}{k}} = e^{h(x)}, \quad e \quad h(x) = -\frac{x}{k}, x \in \mathbb{R}.$$

Temos por (2.25), que $k < 0$.
Concluimos então pelo Teorema 2.1 que

$$H(x) = exp\left\{-e^{\frac{x}{k}}\right\}$$

que é do mesmo tipo de $H_{3,0}(x)$, sendo a própria para $k = -1$.

Caso 2. Se $\alpha(\lambda) = \lambda^m$, (2.28) se reduz a

$$\beta(\lambda s) = \lambda^m \beta(s) + \beta(\lambda)$$

cuja solução[4] é

$$\beta(\lambda) = k(\lambda^m - 1), \qquad k = constante,$$

e com isso, de (2.13) e (2.26) temos

$$g_\lambda(x) = \lambda^m(x+k) - k = h^{-1}[h(x) - \log\lambda].$$

Assim, basta resolvermos a equação

$$h(\lambda^m x - k) = h(x-k) - \log\lambda. \tag{2.29}$$

Agora, como $g_\lambda(x) = \lambda^m(x+k) - k$, de (2.25),

$$\lambda^m(x+k) > (x+k).$$

(i) Se $(x+k) > 0$, concluimos que $\lambda^m > 1$ e $m < 0$.
Fazendo $f(x) = e^{h(x-k)}$, a equação (2.29) torna-se

$$f(x) = \lambda f(\lambda^m x),$$

cuja solução, pelo Lema 2.6, é $f(x) = x^{-\frac{1}{m}}$. Assim

$$e^{h(x)} = f(x+k) = (x+k)^{-\frac{1}{m}}$$

e daí

$$h(x) = \log{(x+k)^{-\frac{1}{m}}},$$

onde $x \in (-k, \infty)$. Portanto, do Teorema 2.1 concluímos que

$$H(x) = exp\left\{-e^{h(x)}\right\} = exp\left(-(x+k)^{-\frac{1}{m}}\right),$$

função do mesmo tipo de $H_{1,\gamma}(x)$ com $\gamma = -\frac{1}{m} > 0$.

(ii) Se $(x+k) < 0$, em (2.29) escrevemos

$$h(-\lambda^m x - k) = h(-x-k) - \log\lambda,$$

e fazendo $f(x) = e^{h(-x-k)}$, chegamos novamente a

$$f(x) = x^{-\frac{1}{m}},$$

donde concluímos

$$e^{h(x)} = f(-(x+k)) = [-(x+k)]^{-\frac{1}{m}}$$

e

$$h(x) = \log[-(x+k)]^{-\frac{1}{m}},$$

onde $x \in (-\infty, -k)$. Desta vez, obtemos pelo Teorema 2.1 que $H(x)$ é do mesmo tipo de $H_{2,\gamma}(x)$ com $\gamma = \dfrac{1}{m} > 0$.

Assim, os resultados apresentados da Teoria Clássica são obtidos como consequências dos resultados de Pantcheva. Na abordagem de Pantcheva, as conclusões do Teorema 1.2, que apresenta as distribuições de Gnedenko, seguem como uma aplicação do Teorema 2.1. A seguir trataremos da estabilização potência.

[4] conforme Pantcheva (1984)

2.4 Leis max-estáveis sob estabilização potência

Nesta seção investigaremos o limite da expressão (2.1) sob a estabilização potência, proposta por Pantcheva (1984).

Consideremos então a estabilização

$$G_n(x) = a_n\,|x|^{b_n}\,sign(x),$$

onde $a_n > 0$, $b_n > 0$, e

$$sign(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x < 0, \\ 0 & \text{se} \quad x = 0, \\ 1 & \text{se} \quad x > 0. \end{cases}$$

Seguindo os mesmos passos da seção anterior temos, para $m_n < n$, $m_n \xrightarrow{n} \infty$ e $\frac{m_n}{n} \xrightarrow{n} \lambda \in (0,1)$,

$$G_{m_n}(x) = a_{m_n}\,|x|^{b_{m_n}}\,sign(x)$$

$$G_{m_n}^{-1}(x) = \left(\frac{|x|}{a_{m_n}}\right)^{b_{m_n}^{-1}} sign(x).$$

Assim

$$G_{m_n}^{-1} \circ G_n(x) = \left(\frac{a_n}{a_{m_n}}\right)^{b_{m_n}^{-1}} |x|^{\frac{b_n}{b_{m_n}}}\,sign(x).$$

Portanto

$$g_\lambda(x) = \alpha(\lambda)\,|x|^{\beta(\lambda)}\,sign(x),$$

onde

$$\alpha(\lambda) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{m_n}}\right)^{b_{m_n}^{-1}} \quad e \quad \beta(\lambda) = \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{b_{m_n}}.$$

Usando o mesmo raciocínio do caso linear, chegamos às seguintes possibilidades:

Caso 1. $\beta(\lambda) = 1$ e $\alpha(\lambda) = \lambda^k$, $k = constante$.
Então $g_\lambda(x) = \lambda^k\,|x|$, e de (2.25) temos que

$$|x|\,\lambda^k > x.$$

(i) Se $x > 0$, segue que $k < 0$. De (2.13) segue

$$h(\lambda^k x) = h(x) - \log\lambda.$$

Fazendo $f(x) = e^{h(x)}$, a equação se torna

$$f(x) = \lambda f(\lambda^k x),$$

cuja solução é, pelo Lema 2.6

$$f(x) = x^{-\frac{1}{k}}, x \geq 0$$

Logo, $h(x) = -\dfrac{1}{k}\log x$, e pelo Teorema 2.1 concluímos para $x \geq 0$ que,

$$H(x) = exp\left\{-x^{\frac{1}{k}}\right\} = H_{1,\gamma}(x),$$

com $\gamma = -\dfrac{1}{k}$.

(ii) Se $x < 0$, segue a equação

$$h(-\lambda^k x) = h(x) - \log\lambda,$$

cuja solução é $h(x) = -\dfrac{1}{k}\log(-x)$.
Agora, a restrição (2.25) é satisfeita para todo k não-nulo. Entretanto, se considerarmos $k < 0$ a função h não será crescente, motivo pelo qual consideraremos apenas a restrição $k > 0$. Portanto, chegamos a

$$H(x) = H_{2,\gamma}(x)$$

com $\gamma = \dfrac{1}{k}$.

Caso 2. $\beta_\lambda = \lambda^m$ e $\alpha_\lambda = e^{k(\lambda^m-1)}$, $k = constante$ e $m = constante$.

$$g_\lambda(x) = e^{k(\lambda^m-1)}\left|x\right|^{\lambda^m} sign(x),$$

e

$$h\left(c\left|x\right|^{\lambda^m} sign(x)\right) = h(cx) - \log\lambda, \qquad c = e^{-k}$$

Por facilidade, vamos supor[5] c=1, então teremos

$$h\left(\left|x\right|^{\lambda^m} sign(x)\right) = h(x) - \log\lambda. \tag{2.30}$$

Devido ao módulo na expressão acima, é conveniente analisar as solução caso a caso[6]. Note que a equação (2.30) não faz sentido para $x = 0$, $x = 1$ ou $x = -1$.

(i) Caso $x > 1$.
A condição (2.25) nos leva a $m < 0$. Então, (2.30) torna-se

$$h\left(x^{\lambda^m}\right) = h(x) - \log\lambda.$$

Fazendo $f(x) = e^{h(x)}$, segue que

$$f(x) = \lambda f\left(x^{\lambda^m}\right),$$

e fazendo $F(x) = f(e^x)$, a equação reduz-se a

$$F(\log x) = \lambda F\left(\lambda^m \log x\right),$$

[5]na verdade poderíamos deixar o fator c durante as contas seguintes; no entanto apenas teríamos distribuições do mesmo tipo das que encontramos.

[6]Note que o que muda na análise de cada caso é uma sensível alteração na definição da função F, devido aos valores de x.

cuja solução é

$$F(\log x) = [\log x]^{-\frac{1}{m}}.$$

Assim, segue que

$$[\log x]^{-\frac{1}{m}} = f(x) = e^{h(x)}$$

e

$$h(x) = \log[\log x]^{-\frac{1}{m}},$$

onde $x \in (1, \infty)$, gerando portanto a distribuição extremal

$$H_{3,\gamma}(x) = exp\left\{-(\log x)^{-\gamma}\right\}, x > 1,$$

com $\gamma = -\dfrac{1}{m} > 0$.

(ii) Caso $0 < x < 1$.
Agora, a condição (2.25) nos garante $m > 0$ e chegamos à mesma equação do caso anterior. Como agora, o logaritmo é um número negativo, definimos $F(-\log x) = e^{h(x)}$, e obtemos

$$F(-\log x) = [-\log x]^{-\frac{1}{m}} = e^{h(x)}$$

e

$$h(x) = \log[-\log x]^{-\frac{1}{m}}, 0 < x < 1.$$

Portanto, a distribuição extremal obtida pelo Teorema 2.1 é:

$$H_{4,\gamma}(x) = exp\left\{-(-\log x)^{-\gamma}\right\}, 0 < x < 1,$$

onde $\gamma = \dfrac{1}{m} > 0$.

(iii) Caso $-1 < x < 0$.
Por (2.25) temos $m < 0$, e a equação (2.30) torna-se

$$h\left(-(-x)^{\lambda^m}\right) = h(x) - \log\lambda.$$

Agora, fazendo $F(-\log(-x)) = e^{h(x)}$, obtemos como nos casos anteriores

$$F(-\log(-x)) = [-\log(-x)]^{-\frac{1}{m}} = e^{h(x)}$$

e

$$h(x) = \log[-\log(-x)]^{-\frac{1}{m}}.$$

Portanto a distribuição extremal neste caso é

$$H_{5,\gamma}(x) = exp\left\{-(-\log(-x))^{-\gamma}\right\}, -1 < x < 1,$$

onde $\gamma = -\dfrac{1}{m} > 0$.

(iv) Caso $x < -1$.
Por (2.25) temos $m > 0$, e a equação (2.30) torna-se

$$h\left(-(-x)^{\lambda^m}\right) = h(x) - \log\lambda.$$

Desta vez, fazendo $F(\log(-x)) = e^{h(x)}$ chegaremos a

$$F(\log(-x)) = [\log(-x)]^{-\frac{1}{m}} = e^{h(x)}$$

e

$$h(x) = \log[\log(-x)]^{-\frac{1}{m}}$$

onde $x \in (-\infty, -1)$, gerando portanto a distribuição extremal

$$H_{6,\gamma}(x) = exp\left\{-(\log(-x))^{\gamma}\right\}, x < -1,$$

onde $\gamma = \dfrac{1}{m} > 0$.

Concluindo, a estabilização potência nos proporciona seis possibilidades de distribuições extremais, duas das quais já tínhamos também pela estabilização linear.

Portanto, se F é uma função de distribuição de uma variável aleatória X, e temos n cópias independentes de X, $(X_1, \ldots, X_n)$, o máximo dessas variáveis aleatórias estabilizado por uma sequência de transformações do tipo potência se comporta da seguinte maneira:

$$\left(\frac{|Z_n|}{a_n}\right)^{\frac{1}{b_n}} \xrightarrow{D} Y_i$$

ou

$$P\left(Z_n \leq a_n\,|x|^{b_n}\,sign(x)\right) = F^n\left(a_n\,|x|^{b_n}\,sign(x)\right) \xrightarrow{n} H_{i,\gamma}(x), i = 1, \ldots, 6$$

onde $H_{i,\gamma}(x) = F_{Y_i}(x)$.

Agora, com base nos cálculos dessa seção, e também em (2.22), exibiremos as distribuições extremais da estabilização potência, obtidas por Pantcheva, com os devidos valores para toda a reta real.

$$H_{1,\gamma}(x) = \begin{cases} e^{-x^{-\gamma}} & ,\text{se } x > 0 \\ 0 & ,\text{caso contrário} \end{cases}$$

$$H_{2,\gamma}(x) = \begin{cases} 1 & ,\text{se } x \geq 0 \\ e^{-(-x)^{\gamma}} & ,\text{caso contrário} \end{cases}$$

$$H_{3,\gamma}(x) = \begin{cases} 0 & ,\text{se } x \leq 1 \\ exp\left\{-(\log x)^{-\gamma}\right\} & ,\text{caso contrário} \end{cases}$$

$$H_{4,\gamma}(x) = \begin{cases} 0 & ,\text{se } x \leq 0 \\ exp\left\{-(-\log x)^{\gamma}\right\} & ,\text{ se } 0 < x < 1 \\ 1 & ,\text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

$$H_{5,\gamma}(x) = \begin{cases} 0 & ,\text{se } x \leq -1 \\ exp\left\{-(-\log -x)^{-\gamma}\right\} & ,\text{ se } -1 < x < 0 \\ 1 & ,\text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$H_{6,\gamma}(x) = \begin{cases} exp\left\{-(\log -x)^{\gamma}\right\} & ,\text{se } x < -1 \\ 1 & ,\text{caso contrário} \end{cases}$$

Observação 2.6. Mohan e Ravi (1992) nomearam as seis últimas distribuições como leis *p-max estáveis*, uma vez que a estabilização em questão é a estabilização potência. Eles também nomearam as distribuições clássicas como leis *l-max estáveis*, naturalmente porque a estabilização em questão é linear.

Observação 2.7.

a) Sob a estabilização $G_n(x) = |x|^{n^{-\frac{1}{\gamma}}} sign(x)$, $H_{4,\gamma}$ e $H_{6,\gamma}$ estão no domínio de atração de si mesmas, justamente porque elas se max-estabilizam com esta transformação.O mesmo vale para a estabilização dada por $G_n(x) = |x|^{n^{\frac{1}{\gamma}}} sign(x)$ e as distribuições $H_{3,\gamma}$ e $H_{5,\gamma}$. Ambas as afirmações decorrem diretamente do Corolário 2.2, mas serão justificadas no próximo capítulo.
b) Note que as distribuições $H_{3,\gamma}$, $H_{4,\gamma}$, $H_{5,\gamma}$, $H_{6,\gamma}$ são exemplos de distribuições que são max-estáveis sob a estabilização potência e não são max-estáveis sob a estabilização linear.
c) Seja

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ,\text{se } x < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{1+x} & ,\text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

e considere $G_n(x) = \dfrac{nx^2}{x+1}$, uma estabilização não-linear, que também não se encaixa na estabilização potência. Então $F \in D(H)$, com

$$H(x) = \begin{cases} 0 & ,\text{se } x \leq 0 \\ exp\left(-\dfrac{x+1}{x^2}\right) & ,\text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Mas tal verificação (através do limite (2.4)) não é necessariamente simples, como em muitos outros casos. Por isso, a exemplo do que fizemos com o Lema 1.4 no Capítulo 1, é mais recomendável o uso do Lema 2.1 para verificar tal convergência.

d) Conforme Seção 1.2 do Capítulo 1, a distribuição

$$F(x) = 1 - \frac{1}{\log x}, x \geq e,$$

não pertence ao domínio de atração de nenhuma distribuição extremal sob a estabilização linear. Mas, se $G_n(x) = |x|^n \, sign(x)$, teremos que

$$F^n(G_n(x)) \xrightarrow{n} H_{1,1}(x)$$

Logo, o fato de uma função de distribuição não estar no domínio de atração de outra sob certa estabilização não encerra a discussão sobre essa relação de pertinência, pois pode haver uma estabilização que a satisfaça. Na próxima sessão apresentaremos um critério também suficiente para essa questão.

2.5 Um critério generalizado

Nesta seção, temos como objetivo esboçar uma condição necessária e suficiente para que uma função de distribuição esteja no domínio de atração de uma distribuição extremal. Para tal, precisamos assumir apenas o Lema 2.1, apresentado na Seção 2.2. O próximo resultado foi proposto por M. Sreehari (2008). Antes, defina

$$K(x) = [1 - F(h^{-1}(x))]e^x,$$

e suponha $H(x)$ uma distribuição extremal máxima, ou seja,

$$H(x) = exp\left\{-e^{-h(x)}\right\}.$$

Teorema 2.2. *(Sreehari, 2008)*
Seja F uma função de distribuição não-degenerada. $F \in D(H)$ se, e somente se, existe uma sequência de funções positivas $\{L_n(x)\}_{n\geq 1}$ tal que

$$\frac{K(h(x) + \log[nL_n(x)])}{L_n(x)} \xrightarrow{n} 1, \tag{2.31}$$

$\forall x \in (\alpha(F), \omega(F))$

Demonstração: Suponha $F \in D(H)$. Então existe uma sequência de transformações contínuas estritamente monótonas $\{G_n(x)\}_{n\geq 1}$ tal que

$$F^n(G_n(x)) \xrightarrow{n} H(x), \quad x \in (\alpha(F), \omega(F)), \tag{2.32}$$

ou, segundo o Lema 2.1

$$n[1 - F(G_n(x))] \xrightarrow{n} -\log H(x) = e^{-h(x)}. \tag{2.33}$$

Seja

$$L_n(x) = \frac{1}{n} exp[h(G_n(x)) - h(x)],$$

então temos

$$G_n(x) = h^{-1}[h(x) + \log(nL_n(x))].$$

Todas essas passagens são automáticas, visto que $\{G_n(x)\}_{n\geq 1}$ é sequência de transformações contínuas inversíveis, $h(x)$ é contínua inversível, e o mesmo podemos dizer de $\log(x)$. Agora, como $\log(nL_n(x)) = h(G_n(x)) - h(x)$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
A_{n,x} &= \frac{K(h(x) + \log[nL_n(x)])}{L_n(x)} \\
&= ne^{-[h(G_n(x)) - h(x)]}\{1 - F(h^{-1}[h(x) + h(G_n(x)) - h(x)])\}e^{h(x)+\log(nL_n(x))} \\
&= ne^{-[h(G_n(x)) - h(x)]}\{1 - F(G_n(x))\}e^{h(G_n(x))} \\
&= n[1 - F(G_n(x))]e^{h(x)}.
\end{aligned}$$

Por hipótese, temos que

$$A_{n,x} \xrightarrow{n} e^{-h(x)}e^{h(x)} = 1,$$

e temos assim, a relação (2.31).

Reciprocamente, suponha que vale (2.31).Considere

$$G_n(x) = h^{-1}[h(x) + \log(nL_n(x))].$$

Então temos

$$\begin{aligned}
n[1 - F(G_n(x))] &= n[1 - F\{h^{-1}[h(x) + \log(nL_n(x))]\}] \\
&= nK(h(x) + \log[nL_n(x)])e^{-[h(x) + \log nL_n(x)]} \\
&= \frac{nK(h(x) + \log[nL_n(x)])e^{-h(x)}}{nL_n(x)} \\
&= \frac{K(h(x) + \log[nL_n(x)])e^{-h(x)}}{L_n(x)}
\end{aligned}$$

e daí segue de (2.31) que

$$n[1 - F(G_n(x))] \xrightarrow{n} e^{-h(x)}.$$

Novamente do Lema 2.1 podemos concluir que $F \in D(H)$.

$\square$

Observação 2.8.
a) Existem maneiras específicas de se tomar a sequência $\{L_n(x)\}_{n\geq 1}$ dado que $F \in D(H)$. Algumas sugestões nesse sentido podem ser verificadas em Sreehari (2008).
b) Os trabalhos de Mohan e Ravi (1992), e de Christoph e Falk (1996) fazem importantes relações entre domínios de atração determinados por estabilizações lineares e estabilizações potência, e também mostram condições necessárias e suficientes para que, sob a estabilização potência, uma função de distribuição pertença ao domínio de atração de uma distribuição extremal. Tal fato não consta em nosso trabalho porque o Teorema 2.2 é mais abrangente que os trabalhos anteriores.

Exemplo 2.3.
Seja

$$F(x) = 1 - \frac{1}{x}, x \geq 1$$

Considerando $G_n(x) = nx$, segue que

$$n[1 - F(G_n(x))] = n\left[\frac{1}{nx}\right] \xrightarrow{n} x^{-1}$$

Assim, pelo Lema 2.1 e pela definição de domínio de atração, $F \in D(H_{1,1})$ com a estabilização considerada.
Neste caso, $L_n(x) = 1$ e $A_{n,x} = 1$, onde seguimos a mesma nomenclatura da demonstração.

Para finalizar esta seção cabe observar que Pantcheva (1984) apresentou um teorema com os mesmos objetivos do teorema anterior. O resultado de Pantcheva dizia o seguinte:

Teorema 2.3. *Sejam F uma função de distribuição e H uma função de distribuição não-degenerada.*

$$F \in D(H)$$

se, e somente se,

$$1 - F(x) = [1 + o(1)]L(h(x))e^{-h(x)} \quad \textit{quando} \quad x \to \omega(F), \tag{2.34}$$

onde $L(x)$ é uma função Regularmente Variante. A sequência de transformações normalizadoras pode ser escolhida como

$$G_n(x) = h^{-1}\{h(x) + \log[nL(\log n)]\}. \tag{2.35}$$

Esse resultado foi questionado por Sreehari (2008). Antes de apresentar o Teorema 2.2 como alternativa ao Teorema 2.3, ele citou o seguinte contra-exemplo para a necessidade da condição (2.34) proposta por Pantcheva:

Exemplo 2.4.
Conforme Mohan e Ravi (1992), sejam F e H as funções de distribuição

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ,se\ x < 1 \\ 1 - exp\{-(\log x)^2\} & ,se\ x \geq 1 \end{cases}$$

e

$$H(x) = H_{1,1}(x) = \begin{cases} 0 & ,se\ x < 0 \\ exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) & ,se\ x \geq 0 \end{cases}.$$

Então $F \in D(H)$ quando usamos a estabilização $G_n(x) = a_n\,|x|^{b_n}\,sign(x)$, onde

$$a_n = \sqrt{\log n} \quad e \quad b_n = \frac{1}{2\sqrt{\log n}}.$$

Para $x > 0$, temos que,

$$h(x) = -\log\left(\frac{1}{x}\right) \quad e \quad h^{-1}(y) = e^y, y \in \mathbb{R}.$$

Logo, de (2.34)

$$L(\log x) \approx exp\left\{-h^2(x) + h(x)\right\}$$

ou

$$L(y) = exp\left(y - y^2\right).$$

Note agora que

$$\frac{L(ty)}{L(y)} \xrightarrow{t} \infty, \quad se \quad t > 1$$

e

$$\frac{L(ty)}{L(y)} \xrightarrow{t} 0, \quad se \quad 0 < t < 1$$

e a função L não é regularmente variante.
Segundo o Teorema 2.3, para $x > 0$

$$\begin{aligned} G_n^*(x) &= exp\{h(x) + \log[nL(\log n)]\} \\ &= exp\{\log[xnL(\log n)]\} \\ &= xnL(\log n) \\ &= x.n.exp\left[\log n - (\log n)^2\right] \\ &= xn^2 exp\left[-(\log n)^2\right] \end{aligned}$$

e segue que

$$n[1 - F(G_n^*(x))]$$

não converge para $\dfrac{1}{x}$ quando $n \to \infty$, o que deveria acontecer segundo o Lema 2.1.

Assim, a condição do Teorema de Pantcheva não é necessária e suficiente, já que a parte da necessidade não está correta. O problema na parte da necessidade no Teorema 2.3 é que em sua demonstração, Pantcheva assume que existe uma função regularmente variante $L(x)$ para ser usada em (2.35) ao invés de mostrar que a função $L(x)$ que atende (2.35) é regularmente variante. Uma outra suposição de Pantcheva era que a função L em (2.34) era tal que $L(\log x)$ seria lentamente variante, fato que não acontece no exemplo acima.

Capítulo 3

Resultados para modelos de misturas finitas

3.1 Introdução

Quando se trata de modelagem e coleta de dados, é bastante razoável levar em conta que as observações de uma variável aleatória provenham de duas ou mais populações. O nível de um rio, por exemplo, pode ser influenciado por chuvas em seus afluentes e pela vaporação em seu leito. Nestas situações a modelagem pode ser feita por uma mistura finita.

Definição 3.1. *Sejam* $F, F_1, F_2, \ldots, F_k$*, funções de distribuição,* $p_1, p_2, \ldots, p_k$*, números reais tais que* $0 < p < 1$ *e* $\sum_{j=1}^{k} p_j = 1$*. Se a função de distribuição* F *é dada por*

$$F = p_1F_1 + p_2F_2 + \ldots + p_kF_k \tag{3.1}$$

dizemos que ela é uma distribuição de mistura finita. Os números p_j *são chamados pesos da mistura e as distribuições* F_j *são as componentes da mistura.*

Ressalta-se que a hipótese básica é que a decomposição em (3.1) é única e só faz sentido se $\bigcap_{j=1}^{k} S(F_j) \neq \emptyset$, onde $S(F_j)$ representa o suporte da função F_j.

Misturas finitas têm alcance em várias áreas; Titterington et al (1985), cita uma série de aplicações, como em pesquisas de indústrias de pesca, economia, medicina, psicologia, paleontologia, sedimentologia, agricultura, zoologia, dentre outros. Sob o ponto de vista estatístico, a modelagem de dados por meio de uma mistura,conforme Coles et al (2003), descreve o fenômeno analisado de uma maneira mais eficiente do que os modelos padrões.

Nosso interesse neste capítulo é estudar o comportamento limite de

$$P(Z_n \leq G_n(x)) = F^n(G_n)$$

quando F é dada por (3.1) e G_n é uma sequência de transformações contínuas estritamente monótonas. Esse problema foi, inicialmente, abordado por Al-Hussaini e

El-Adll (2004) e posteriormente por Ravi e Sreehari (2009). Na Seção 3.3 discutiremos a relação entre o comportamento limite de uma mistura e de suas componentes sob uma mesma estabilização $G_n(x)$. Na Seção 3.4 retomaremos essa discussão no caso em que as estabilizações das componentes são distintas. Na próxima seção selecionaremos alguns exemplos de comportamentos limite para serem usados nas seções posteriores. As referências deste capítulo são Al-Hussaini e El-Adll (2004), e Ravi e Sreehari (2009).

3.2 Convergências - exemplos

Nesta seção, selecionamos alguns exemplos de convergências utilizando o Teorema 2.1, o Lema 2.1, e o Corolário 2.1, que serão úteis nas próximas seções.

Exemplo 3.1. Afirmamos na Seção 2.3 que $H_{3,\gamma}(x)$ e $H_{5,\gamma}(x)$ estão no domínio de atração de si mesmas, com

$$G_n(x) = |x|^{n^{\frac{1}{\gamma}}} sign(x).$$

Vamos verificar este fato.
Seguindo o Teorema 2.1 para $H_{3,\gamma}(x)$ temos,

$$h(x) = \log[\log(x)]^{\gamma}, \qquad x \in (1, \infty),$$

cuja inversa é

$$h^{-1}(x) = exp\left[(e^{x})^{\frac{1}{\gamma}}\right], \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

Pelo Corolário 2.1

$$\begin{aligned} G_n(x) &= h^{-1}(h(x) + \log n) \\ &= exp\left\{(exp\left[\log(\log x)^{\gamma} + \log n\right])^{\frac{1}{\gamma}}\right\} \\ &= exp\left\{[n(\log x)^{\gamma}]^{\frac{1}{\gamma}}\right\} \\ &= exp\left\{n^{\frac{1}{\gamma}} \log x\right\} \\ &= [x^{n}]^{\frac{1}{\gamma}}, \end{aligned}$$

que pode ser escrita como

$$G_n(x) = |x|^{n^{\frac{1}{\gamma}}} sign(x).$$

Para $H_{5,\gamma}(x)$, o cálculo é análogo.

Exemplo 3.2. Considere a função de distribuição

$$F(x) = \left\{ \begin{array}{rcl} 0 & \text{se} & x < 0, \\ 1 - e^{-x} & \text{se} & x \geq 0 \end{array} \right. .$$

Se $G_n(x) = x + \log n$, podemos ver que

$$\begin{aligned} n[1 - F(G_n(x))] &= n\left[e^{x+\log n}\right] \\ &= n\left[\frac{1}{n}e^{-x}\right] = e^{-x}. \end{aligned}$$

Daí

$$n[1 - F(G_n(x))] \xrightarrow{n} e^{-x},$$

e pelo Lema 2.1,

$$F^n(G_n(x)) \xrightarrow{n} H_{3,0}(x).$$

Concluimos assim que $F \in D(H_{3,0})$.

Exemplo 3.3. Seja

$$F(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}, x \in \mathbb{R}$$

e a mesma estabilização do exemplo anterior. Então

$$\begin{aligned} F^n(G_n(x)) &= \left[\frac{1}{1 + \dfrac{e^{-x}}{n}}\right]^n \\ &= \left[\left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)^{-1}\right]^n \end{aligned}$$

e assim

$$F^n(G_n(x)) \xrightarrow{n} H_{3,0}(x).$$

Exemplo 3.4.
a) Sejam F a função de distribuição de uma variável aleatória uniforme em $(0, 1)$ e $G_n(x) = |x|^{\frac{1}{n}} sign(x)$. Para $0 < x < 1$,

$$F^n(G_n(x)) = \left[x^{\frac{1}{n}}\right]^n = x \xrightarrow{n} x = H_{4,1}(x)$$

b) Se F é a função de distribuição de uma variável aleatória uniforme em $(-2, -1)$, ou seja.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < -2, \\ x + 2, & \text{se} \quad -2 \leq x \leq -1, \\ 1, & \text{se} \quad x > -1. \end{cases}$$

com a mesma estabilização, segue que

$$F^n(G_n(x)) \xrightarrow{n} H_{6,1}(x).$$

Exemplo 3.5. Sejam

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 1 \\ 1 - x^{-\gamma} & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

e

$$G_n(x) = n^{\frac{1}{\gamma}} x.$$

Temos que

$$\begin{aligned} n[1 - F(G_n(x))] &= n\left[\left(n^{\frac{1}{\gamma}} x\right)^{-\gamma}\right] \\ &= x^{-\gamma}, \end{aligned}$$

e daí segue

$$F^n(G_n(x)) \xrightarrow{n} H_{1,\gamma}(x).$$

Exemplo 3.6. Sejam

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{(x+1)^2}\right], & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

e

$$G_n(x) = \frac{nx^2}{x+1}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} n[1 - F(G_n(x))] &= \frac{n}{2}\left\{\frac{1+x}{nx^2 + (1+x)} + \frac{(1+x)^2}{nx^2 + (1+x)^2}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{n(1+x)}{n\left[x^2 + \dfrac{1+x}{n}\right]} + \frac{n(1+x)^2}{n^2\left[x^2 + \dfrac{1+x}{n}\right]^2}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{(1+x)}{x^2 + \dfrac{1+x}{n}} + \frac{(1+x)^2}{n\left[x^2 + \dfrac{1+x}{n}\right]^2}\right\}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} n[1 - F(G_n(x))] = \frac{1}{2}\left[\frac{1+x}{x^2}\right] = exp\left\{\log \frac{1}{2}\left[\frac{1+x}{x^2}\right]\right\},$$

e então, do Lema 2.1, segue

$$F^n(G_n(x)) \xrightarrow{n} \left(e^{-x^{-2}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(e^{-x^{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Exemplo 3.7. Seja

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 1 \\ 1 - x^{-\gamma}, & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}.$$

Vamos encontrar a estabilização $G_n(x)$ que deixa F em seu próprio domínio de atração, o que é possível, já que F é max-estável por ter o formato indicado no Teorema 2.1. Assim, embasados em (2.18), sabemos que

$$h(x) = -\log[-\log(1 - x^{-\gamma})], \qquad x > 1,$$

e daí

$$h^{-1}(x) = \left[1 - exp\left(-e^{-x}\right)\right]^{-\frac{1}{\gamma}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Com isso

$$\begin{aligned} G_n(x) &= h^{-1}[h(x) + \log n] \\ &= \left[1 - exp\left\{-e^{-h(x)}.e^{-\log n}\right\}\right]^{-\frac{1}{\gamma}} \\ &= \left[1 - F(x)^{-\frac{1}{n}}\right]^{-\frac{1}{\gamma}}, \end{aligned}$$

ou seja

$$G_n(x) = \left[1 - \left(1 - x^{-\gamma}\right)^{-\frac{1}{n}}\right]^{-\frac{1}{\gamma}}$$

3.3 Estabilizações idênticas

Nesta seção, abordaremos o problema do comportamento limite da expressão $F^n(G_n(x))$ quando a distribuição F é uma mistura como em (3.1), e suas componentes são submetidas à mesma estabilização $G_n(x)$. Antes, vale ressaltar uma consequência direta do Corolário 2.2.

Lema 3.1. *Se $F(x)$ e $G(x)$ são distribuições limite extremais, então*

$$H(x) = F(x)G(x)$$

é uma distribuição limite extremal.

O teorema a seguir, mostra que se uma sequência de transformações $G_n(x)$ estabiliza cada componente de uma mistura, então ela estabiliza toda a mistura.

Teorema 3.1. *(Ravi e Sreehari, 2009)*
Suponha que $F_1, \ldots, F_k$, $H_1, \ldots, H_k$ são funções de distribuição não-degeneradas, tais que

$$F_j^n(G_n(x)) \xrightarrow{n} H_j(x), \quad 1 \leq j \leq k \tag{3.2}$$

e vale que $S(H_i) \cap S(H_j) \neq \emptyset$, $1 \leq i < j \leq k$.
Se $F(x) = p_1F_1(x) + \ldots + p_kF_k(x)$ é uma mistura, então

$$F^n(G_n(x)) \xrightarrow{n} H(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x \leq max\{\alpha(H_1), \ldots, \alpha(H_k)\} \\ \displaystyle\prod_{j=1}^{k} H_j^{p_j}(x) & se \quad x > max\{\alpha(H_1), \ldots, \alpha(H_k)\} \end{cases} \tag{3.3}$$

Demonstração: Usaremos o Lema 2.1 para verificar este teorema, ou seja, basta provar que

$$n[1 - F(G_n(x))] \xrightarrow{n} -\log[H_1^{p_1}...H_k^{p_k}]. \tag{3.4}$$

Para isto consideraremos dois casos:

(1) Suponha $x > max\{\alpha(H_1), \ldots, \alpha(H_k)\}$.

Temos que $H_j(x) > 0, \forall\ 1 \leq j \leq k$. Usando que $p_1 + \ldots + p_k = 1$, podemos escrever

$$\begin{aligned} n[1 - F(G_n(x))] &= n\left[1 - \sum_{j=1}^{k} p_j F_j(G_n(x))\right] \\ &= n\left[\sum_{j=1}^{k} p_j - \sum_{j=1}^{k} p_j F_j(G_n(x))\right] \\ &= \sum_{j=1}^{k} p_j n(1 - F_j(G_n(x))). \end{aligned}$$

Usando a hipótese (3.2), obtemos

$$n[1 - F(G_n(x))] \xrightarrow{n} \sum_{j=1}^{k} p_j[-\log H_j(x)]. \tag{3.5}$$

Ou seja,

$$n[1 - F(G_n(x))] \xrightarrow{n} -\log\left[H_1^{p_1}...H_k^{p_k}\right]$$

e segue o resultado.

Note que se $S(H_i) \cap S(H_j) = \emptyset$, o produto resulta nulo.

(ii) Se $x \leq max\{\alpha(H_1), \ldots, \alpha(H_k)\}$, temos que para algum $1 \leq i \leq k$,

$$n[1 - F_i(G_n(x))] \xrightarrow{n} \infty$$

e daí

$$n[1 - F(G_n(x))] \xrightarrow{n} \infty$$

o que leva o limite de $F^n(G_n(x))$ a zero.

□

Observação 3.1.

a) No caso particular das leis max-estáveis sob estabilização potência , introduzidas por Pantcheva (1984) e apresentadas na Seção 2.4, podemos observar que neste caso potências de uma das 6 possíveis distribuições limites extremais $H_{i,\gamma}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, 6$, são do mesmo *p-tipo* de uma delas. Aqui dizemos, conforme Pantcheva (1984), que duas distribuições H e H^* são do mesmo *p-tipo* se existem constantes positivas A e B tais que $H^*(x) = H(A\,|x|^B\, sign(x))$ (em outras palavras, na Definição 2.3 consideramos $G(x) = A\,|x|^B\, sign(x)$).

De fato, sejam $\gamma > 0$, $A > 0$, $B > 0$. Considere

- $G_1(x) = A\,|x|^B\, sign(x)$ com $A = p^{-\frac{1}{\gamma}}$ e $B = 1$.

- $G_2(x) = A\,|x|^B\, sign(x)$ com $A = p^{\frac{1}{\gamma}}$ e $B = 1$.
- $G_3(x) = A\,|x|^B\, sign(x)$ com $A = 1$ e $B = p^{-\frac{1}{\gamma}}$.
- $G_4(x) = A\,|x|^B\, sign(x)$ com $A = 1$ e $B = p^{\frac{1}{\gamma}}$.

Dessa forma, temos o seguinte:

- $H^p_{1,\gamma}(x) = H_{1,\gamma}(G_1(x))$.
- $H^p_{2,\gamma}(x) = H_{2,\gamma}(G_2(x))$.
- $H^p_{3,\gamma}(x) = H_{3,\gamma}(G_3(x))$.
- $H^p_{4,\gamma}(x) = H_{4,\gamma}(G_4(x))$.
- $H^p_{5,\gamma}(x) = H_{5,\gamma}(G_3(x))$.
- $H^p_{6,\gamma}(x) = H_{6,\gamma}(G_4(x))$.

b) Sob a estabilização potência, a distribuição limite de uma mistura é do mesmo tipo de um dos 6 limites $H_{i,\gamma}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, 6$ encontrados por Pantcheva (1984). Para exemplificar, consideramos o caso de duas componentes. Para isso, sejam $0 < p < 1$ e $0 < q < 1$. Daí,

- $H^p_{1,\gamma}(x).H^q_{i,\gamma}(x) = H^p_{1,\gamma}(x) = H_{1,\gamma}(G_1(x))$ para $i = 2, 5, 6$.
- $H^p_{1,\gamma}(x).H^q_{3,\gamma}(x) = H_{3,\gamma}(G(x))$, em que

$$G(x) = \begin{cases} x & , \quad x \le 1, \\ exp\left[\dfrac{p}{x^\gamma} + \dfrac{q}{(\log x)^\gamma}\right]^{-\frac{1}{\gamma}} & , \quad x > 1. \end{cases}$$

- $H^p_{1,\gamma}(x).H^q_{4,\gamma}(x) = H_{1,\gamma}(G(x))$, em que

$$G(x) = \begin{cases} x & , \quad x \le 0, \\ \left[\dfrac{p}{x^\gamma} + q(-\log x)^\gamma\right]^{-\frac{1}{\gamma}} & , \quad 0 < x < 1, \\ p^{-\frac{1}{\gamma}}x & , \quad x \ge 1 \end{cases}$$

- $H^q_{2,\gamma}(x).H^p_{3,\gamma}(x) = H^p_{3,\gamma}(x) = H_{3,\gamma}(G_3(x))$
- $H^q_{2,\gamma}(x).H^p_{4,\gamma}(x) = H^p_{4,\gamma}(x) = H_{4,\gamma}(G_4(x))$
- $H^p_{2,\gamma}(x).H^q_{5,\gamma}(x) = H_{5,\gamma}(G(x))$ em que

$$G(x) = \begin{cases} x & , \quad x \le -1, \\ -exp\left(-\left[p(-x)^\gamma + \dfrac{q}{(-\log -x)^\gamma}\right]^{-\frac{1}{\gamma}}\right) & , \quad -1 < x < 0, \\ x & , \quad x \ge 0 \end{cases}$$

- $H^p_{2,\gamma}(x).H^q_{6,\gamma}(x) = H_{2,\gamma}(G(x))$ em que

$$G(x) = \begin{cases} -\left[p(-x)^\gamma + q(\log -x)^\gamma\right]^{\frac{1}{\gamma}} & , \quad x \leq -1, \\ G_2(x) & , \quad -1 \leq x < 0, \\ x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

- $H^p_{3,\gamma}(x).H^q_{i,\gamma}(x) = H^p_{3,\gamma}(x) = H_{3,\gamma}(G_3(x))$ para $i = 4, 5, 6$.
- $H^p_{4,\gamma}(x).H^q_{i,\gamma}(x) = H^p_{4,\gamma}(x) = H_{4,\gamma}(G_4(x))$ para $i = 5, 6$.
- $H^p_{5,\gamma}(x).H^q_{6,\gamma}(x) = H^p_{5,\gamma}(x) = H_{5,\gamma}(G_3(x))$

Exemplo 3.8.
a) Considere

$$F(x) = p_1F_1(x) + p_2F_2(x) + p_3F_3$$

e

$$G_n(x) = x + \log n,$$

onde

$$F_1(x) = H_{3,0}(x)$$

$$F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases},$$

e

$$F_3(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

Pelos Exemplos 3.2 e 3.3, com a estabilização sugerida temos,

$$F_1 \in D(H_{3,0}) = H_1$$

$$F_2 \in D(H_{3,0}) = H_2$$

$$F_3 \in D(H_{3,0}) = H_3$$

Então

$$F^n(G_n(x)) \xrightarrow{n} H^{p_1}_{3,0}(x).H^{p_2}_{3,0}(x).H^{p_3}_{3,0}(x) = H_{3,0}(x).$$

Com esse exemplo, ilustramos uma indicação direta do teorema, que nos diz que se as componentes da mistura estão no mesmo domínio de atração sob a mesma estabilização, então a mistura também está neste domínio de atração com a referida estabilização.

b) Seja

$$F(x) = p_1F_1(x) + p_2F_2(x)$$

com $F_1(x)$ sendo a função de distribuição de uma uniforme em (0,1) e $F_2(x)$ a função de distribuição de uma uniforme em (-2,-1).
Pelo Exemplo 3.4, a estabilização $G_n(x) = |x|^{\frac{1}{n}} sign(x)$ nos leva a

$$F_1 \in D(H_{4,1}),$$

e

$$F_2 \in D(H_{6,1}).$$

Então

$$F^n(G_n(x)) \xrightarrow{n} H_{4,1}^{p_1}(x).H_{6,1}^{p_2}(x) = H_{4,1}^{p_1}(x)$$

e aqui, em conformidade com o Teorema 3.1 a distribuição limite da mistura é não-nula apenas na interseção dos suportes das distribuições limite das componentes, que coincide com o suporte de $H_{4,1}(x)$.

c) Considere agora a estabilização $G_n(x) = |x|^{n^{\frac{1}{\gamma}}} sign(x)$. Seja

$$F(x) = p_1.F_1(x) + p_2F_2(x)$$

com $F_1(x) = H_{3,\gamma}(x)$ e $F_2(x) = H_{5,\gamma}(x)$.
Pelo Exemplo 3.1, $F_1 \in D(F_1)$ e $F_2 \in D(F_2)$. Portanto

$$F^n(G_n(x)) \xrightarrow{n} H_{3,\gamma}^{p_1}(x).H_{5,\gamma}^{p_2}(x) = H_{3,\gamma}^{p_1}(x),$$

e novamente a relação entre os suportes das distribuições limites das componentes define o formato final da distribuição limite da mistura.

Uma pergunta natural ao teorema anterior é se vale a recíproca, ou seja, dado que uma mistura se estabiliza com determinada $G_n(x)$ interessa-nos saber se suas componentes também se estabilizam com tal sequência e se a distribuição limite de cada componente tem o formato de um dos fatores da distribuição limite da mistura. Neste sentido, Al-Hussaini e El-Adll (2004) enunciaram o seguinte teorema:

Teorema 3.2. *Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes com uma distribuição comum $F(x)$ dada por* (3.1). *Então*

$$P(Z_n \leq G_n(x)) = F^n(G_n(x)) \xrightarrow{n} \prod_{j=1}^{k} H_j^{p_j}(x) \tag{3.6}$$

se, e somente se

$$F_j^n(G_n(x)) \xrightarrow{n} H_j(x), \tag{3.7}$$

onde $\{G_n(x)\}_{n\geq 1}$ é uma sequência de transformações contínuas estritamente monótonas e $H_j(x), i = 1, 2, \ldots, k$ são funções de distribuição não-degeneradas.

No referido trabalho, os autores mostraram que (3.7) implica em (3.6), o que corresponde ao Teorema 3.1. Nossa referência nesse caso foi o trabalho de Ravi e Sreehari (2009), porque o enunciado e a demonstração neste caso foram mais simples e precisos. A implicação contrária (que não foi exemplificada) foi deixada por Al-Hussaini e El-Adll a cargo do leitor. No entanto, Ravi e Sreehari mostraram que tal implicação é falsa, com o contra-exemplo a seguir.

Exemplo 3.9. Seja
$$F(x) = \frac{1}{2}F_1(x) + \frac{1}{2}F_2(x)$$
com
$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x < 1 \\ 1 - x^{-\gamma}\left(1 + \dfrac{sen(\log x)}{c}\right), & se \quad x \geq 1 \end{cases}$$
e
$$F_2(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x < 1 \\ 1 - x^{-\gamma}\left(1 - \dfrac{sen(\log x)}{c}\right), & se \quad x \geq 1 \end{cases},$$
onde $0 < \gamma < 1$, *e* $c > 1 + \dfrac{1}{\gamma}$.
Assim
$$F(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x < 1 \\ 1 - x^{-\gamma}, & se \quad x \geq 0. \end{cases}$$
Pelo exemplo 3.5, esta distribuição está no domínio de atração de
$$H_{1,\gamma}(x) = \left(H_{1,\gamma}^{\frac{1}{2}}(x)\right) . \left(H_{1,\gamma}^{\frac{1}{2}}(x)\right),$$
com $G_n(x) = n^{\frac{1}{\gamma}}x$, ou seja, (3.6) é satisfeita. Entretanto, com esta estabilização (linear), as componentes da mistura não têm qualquer distribuição limite, contrariando a necessidade de (3.7) no Teorema 3.2 conforme verificaremos a seguir.
Como a estabilização é linear, as componentes só podem estar no domínio de atração de $H_{1,\gamma}$, $H_{2,\gamma}$ ou $H_{3,0}$, segundo o Teorema 1.2. Mas $\omega(F_1) = \omega(F_2) = \infty$, o que nos faz descartar $H_{2,\gamma}$ como possibilidade, conforme o Teorema 1.4.

(i) Pelo Teorema 1.3, para que $F_1 \in D(H_{1,\gamma})$ é preciso que $F \in RV_{-\gamma}$. Seja
$$\begin{aligned} K(x) &= \lim_{t\to\infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} \\ &= \lim_{t\to\infty} x^{-\gamma}\frac{c + sen \log tx}{c + sen \log t} \\ &= x^{-\gamma} \lim_{t\to\infty} \frac{c + sen[\log t + \log x]}{c + sen \log t}. \end{aligned}$$
Desenvolvendo o seno da soma, e trocando t pela sequência $\{e^{n\pi}\}_{n\geq 1}$, temos
$$\begin{aligned} K(x) &= x^{-\gamma} \lim_{n\to\infty} \frac{c}{c + sen(n\pi)} + x^{-\gamma}\cos(\log x) \lim_{n\to\infty} \frac{sen(n\pi)}{c + sen(n\pi)} \\ &+ x^{-\gamma} sen(\log x) \lim_{n\to\infty} \frac{\cos n\pi}{c + sen(n\pi)}. \end{aligned}$$
Para a subsequência $n = 2k, k = 1, 2, \ldots$
$$K(x) = x^{-\gamma} + \frac{x^{-\gamma} sen(\log x)}{c}.$$

Já para a subsequência $n = \dfrac{4k+1}{2}, k = 1, 2, \ldots$

$$K(x) = x^{-\gamma} + \frac{x^{-\gamma}\cos(\log x)}{1+c}.$$

Como ambas as subsequências vão ao infinito, já temos o suficiente para ver que o limite sequer existe. Logo $F_1 \notin D(H_{1,\gamma})$.

(ii) Pelo Teorema 1.5, para que $F_1 \in D(H_{3,0})$, é necessário que

$$\int_a^{\omega(F_1)} (1 - F_1(x))dx < \infty, \tag{3.8}$$

para algum a. Tome então $a < 1$.

$$\begin{aligned}
\int_a^{\infty} (1 - F_1(x))dx &= \int_a^1 1dx + \int_1^{\infty} x^{-\gamma}\left(1 + \frac{sen(\log x)}{c}\right)dx \\
&= (1-a) + \int_1^{\infty} x^{-\gamma}\left(1 + \frac{sen(\log x)}{c}\right)dx \\
&\geq (1-a) + \int_1^{\infty} x^{-\gamma}\left(1 - \frac{1}{c}\right)dx \\
&= (1-a) + \left(1 - \frac{1}{c}\right)\int_1^{\infty} x^{-\gamma}dx = \infty.
\end{aligned}$$

Portanto (3.8) não ocorre para $a < 1$. Da mesma forma não o será para $a \geq 1$, de forma que $F_1 \notin D(H_{3,0})$. De maneira análoga, $F_2 \notin D(H_{1,\gamma})$ e $F_2 \notin D(H_{3,0})$.

Assim, a recíproca do Teorema 3.1 é falsa no sentido de que o fato de a mistura ter uma distribuição limite sob uma estabilização $G_n(x)$ não implica que as componentes tenham uma distribuição limite que seja fator da distribuição limite da mistura, sob a mesma estabilização. No exemplo acima, elas sequer possuem uma distribuição limite não-degenerada com esta estabilização.

A seguir, descreveremos um exemplo (apresentado também em Mohan e Ravi (2009)) que mostra que as componentes podem ter distribuições limites com a mesma estabilização da mistura, sem contudo atender as condições da recíproca do Teorema 3.1.

Exemplo 3.10.
Seja $F(x) = \dfrac{1}{2}F_1(x) + \dfrac{1}{2}F_2(x)$ e $G_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+x}$,
onde

$$F_j(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{(1+x)^j} & se \quad x \geq 0, j = 1, 2. \end{cases}$$

Conforme o Exemplo 3.6,

$$F^n(G_n(x)) \xrightarrow{n} [H_1(x).H_2(x)]^{\frac{1}{2}},$$

onde

$$H_j(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x < 0 \\ exp(-x^{-j}) & se \quad x \geq 0, j = 1, 2. \end{cases}$$

Partindo do cálculo feito no referido exemplo, podemos verificar que para esta $G_n(x)$, $F_1 \in D\left([H_1(x).H_2(x)]^{\frac{1}{2}}\right)$ e que $F_2^n(G_n(x)) \xrightarrow{n} 1, x > 0$. E novamente não vale a volta do teorema, pois a distribuição limite de F_2 é degenerada no zero.

O último exemplo sugere que se retirarmos a necessidade de a distribuição limite ser não-degenerada, a recíproca do teorema pode ser verdadeira. O próximo resultado, também encontrado em Ravi e Sreehari (2009), mostra exatamente esse fato.

Teorema 3.3. *Seja*

$$B(x) = pE_0(x) + (1-p)F(x),$$

onde $0 < p < 1$, *e*

$$E_0(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x < 0 \\ 1 & se \quad x \geq 0. \end{cases}$$

i)Se $\omega(F) > 0$. *Então*

$$B^n(G_n(x)) \xrightarrow{n} H^{1-p}(x) \tag{3.9}$$

se, e somente se,

$$F^n(G_n(x)) \xrightarrow{n} H(x). \tag{3.10}$$

ii)Se $\omega(F) < 0$ *e vale (3.10), então*

$$B^n(G_n(x)) \xrightarrow{n} E_0(x).$$

Demonstração:
Caso (i)
Temos que

$$\sup\{x; F(x) < 1\} = \omega(F) = \omega(B) = \sup\{x; G(x) < 1\},$$

e para n suficientemente grande:

$$\begin{aligned} n[1 - B(G_n(x))] &= n[1 - pE_0(G_n(x)) - (1-p)F(G_n(x))] \\ &= n[(1-p) - (1-p)F(G_n(x))]. \end{aligned}$$

Se (3.9) é válida, então pelo Lema 2.1

$$n[1 - B(G_n(x))] \xrightarrow{n} -\log[H^{1-p}(x)],$$

ou seja,

$$(1-p)n[1 - F(G_n(x))] \xrightarrow{n} -\log[H^{1-p}(x)]$$

$$n[1 - F(G_n(x))] \xrightarrow{n} \frac{-\log H^{1-p}(x)}{1-p}$$

$$n[1 - F(G_n(x))] \xrightarrow{n} -\log H(x),$$

e novamente pelo Lema 2.1 segue (3.10).
Reciprocamente, se (3.10) é verdadeira, repetindo o mesmo raciocínio anterior obtemos (3.9).
Caso (ii)
Se $\omega(F) < 0$, a expressão de $B(x)$ é dada por

$$B(x) = \begin{cases} (1-p).F(x), & \text{se} \quad x < \omega(F) \\ (1-p), & \text{se} \quad \omega(F) \leq x < 0 \\ 1, & \text{se} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Logo $B^n(G_n(x)) < (1-p)$ para $x < 0$, e $B^n(G_n(x)) = (1-p)$ para $x > 0$. Então

$$B^n(G_n(x)) \xrightarrow{n} E_0(x)$$

□

3.4 Estabilizações distintas

Nesta seção, continuaremos analisando a distribuição limite de uma mistura com base nas suas componentes. A diferença é que agora não exigimos que as estabilizações usadas na mistura e nas componentes sejam idênticas.

O próximo teorema é uma extensão do Teorema 3.1.

Teorema 3.4. *(Al-Hussaini e El-Adll, 2004)*
Considere a mistura

$$F(x) = p_1F_1(x) + \ldots p_kF_k(x)$$

Suponha que existam sequências de transformações contínuas estritamente monótonas $\{G_n(x)\}_{n\geq 1}$ *e* $\{G_{i,n}(x)\}_{n\geq 1}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, *tais que*

$$F_i^n(G_{i,n}(x)) \xrightarrow{n} H_i(x) \tag{3.11}$$

e

$$n[F_i(G_n(x)) - F_i(G_{i,n}(x))] \xrightarrow{n} V_i(x), \tag{3.12}$$

onde $H_i(x)$ *é não-degenerada,* $0 \leq V_i(x) \leq U_i(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, *e* $U_i(x) = -\log H_i(x)$.
Então, para $x > max\{\alpha(H_1), \ldots, \alpha(H_k)\}$,

$$F^n(G_n(x)) \xrightarrow{n} \prod_{i=1}^{k} exp(-p_i[U_i(x) - V_i(x)]). \tag{3.13}$$

Note que se $G_{i,n} = G_n$, temos exatamente o Teorema 3.1.
Demonstração:
Chamando $S_{n,x} = n[1 - F(G_n(x))]$, temos

$$\begin{aligned} S_{n,x} &= n\left[1 - \sum_{i=1}^{k} p_iF_i(G_n(x))\right] \\ &= n\left[1 - \sum_{i=1}^{k} p_iF_i(G_n(x)) + \sum_{i=1}^{k} p_iF_i(G_{i,n}(x)) - \sum_{i=1}^{k} p_iF_i(G_{i,n}(x))\right] \end{aligned}$$

Usando que $p_1 + \ldots + p_k = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} S_{n,x} &= n\left[-\sum_{i=1}^{k} p_i F_i(G_n(x)) + \sum_{i=1}^{k} p_i F_i(G_{i,n}(x)) + \sum_{i=1}^{k} p_i - \sum_{i=1}^{k} p_i F_i(G_{i,n}(x))\right] \\ &= -\sum_{i=1}^{k} p_i n[F_i(G_n(x)) - F_i(G_{i,n}(x))] + \sum_{i=1}^{k} p_i n[1 - F_i(G_{i,n}(x))]. \end{aligned}$$

Agora, pela hipótese (3.11) segue do Lema 2.1 que

$$\lim_{n\to\infty} n(1 - F_i(G_{i,n}(x))) = -U_i(x), i = 1, 2, \ldots, k.$$

Daí, e da hipótese (3.12) temos

$$n(1 - F(G_n(x))) \xrightarrow{n} -\sum_{i=1}^{k} p_i V_i(x) + \sum_{i=1}^{k} p_i U_i(x).$$

Novamente, pelo Lema 2.1 segue

$$F^n(G_n(x)) \xrightarrow{n} exp\left\{-\sum_{i=1}^{k} p_i(U_i(x) - V_i(x))\right\}$$

e assim, obtemos (3.13).

$\square$

Exemplo 3.11. Para ilustrar, vamos considerar a situação em que somente uma das estabilizações das componentes é igual à estabilização da mistura.
Seja $F(x) = pF_1(x) + (1-p)F_2(x)$, $0 < p < 1$, onde $F_1(x) = H_{1,\gamma}(x)$ e $F_2(x) = H_{3,0}(x)$ Escolhendo as estabilizações

$$G_{1,n}(x) = (nx)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad G_{2,n}(x) = x + \log n \quad e \quad G_n(x) = (nx)^{\frac{1}{\gamma}}$$

onde $\gamma > 0$, observe que para $x > 0$,

$$\begin{aligned} F_2^n(G_{2,n}(x)) &= exp\{-n.exp[-(x + \log n)]\} \\ &= exp\left\{-n\left[e^{-x}.\frac{1}{n}\right]\right\} \\ &= exp\{-e^{-x}\}. \end{aligned}$$

e também que

$$\begin{aligned} F_1^n(G_{1,n}(x)) &= exp\left\{n\left(-\left[(nx)^{\frac{1}{\gamma}}\right]^{-\gamma}\right)\right\} \\ &= exp\left(n\left\{-\frac{1}{nx}\right\}\right) \\ &= exp\left\{-\frac{1}{x}\right\}. \end{aligned}$$

E do Lema 2.1 segue que

$$n[1 - F_1(G_{1,n}(x))] \xrightarrow{n} \frac{1}{x} \quad e \quad n[1 - F_2(G_{2,n}(x))] \xrightarrow{n} e^{-x},$$

e por isso (3.11) é satisfeita com $H_1(x) = H_{1,1}(x)$ e $H_2(x) = H_{3,0}(x)$.
Por outro lado

$$\begin{aligned}
V_1(x) &= \lim_{n\to\infty} n[F_1(G_n(x)) - F_1(G_{1,n}(x))] = 0 \leq U_1(x) = \frac{1}{x}. \\
V_2(x) &= \lim_{n\to\infty} n[F_2(G_n(x)) - F_2(G_{2,n}(x))] \\
&= \lim_{n\to\infty} n[1 - F_2(G_{2,n}(x))] - \lim_{n\to\infty} n[1 - F_2(G_n(x))] \\
&= e^{-x} + \lim_{n\to\infty} n\left[exp\left(-e^{-(nx)^{\frac{1}{\gamma}}}\right) - 1\right] \\
&= e^{-x} \leq U_2(x) = e^{-x},
\end{aligned}$$

e temos também validada a condição (3.12). Logo, sabendo que $V_2 = U_2$, concluimos que

$$F^n(G_n(x)) \xrightarrow{n} H^p_{1,1}(x) = H^p_1(x),$$

ou seja, como já previsto no teorema em (3.13), se $V_i = U_i$ para algum i, a *contribuição* de F_i à distribuição limite da mistura é nula. Se $G_n = G_{2,n}$, o limite terá a forma $H_2^{1-p}(x)$.

No próximo exemplo, as estabilizações são todas distintas.

Exemplo 3.12. Considere $F(x) = pF_1(x) + (1-p)F_2(x)$, $0 < p < 1$, onde

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 1 \\ 1 - x^{-\gamma} & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

e

$$F_2(x) = H_{1,\gamma}.$$

Escolhemos

$$G_{1,n}(x) = \left[1 - \left(1 - x^{-\gamma}\right)^{\frac{1}{n}}\right]^{\frac{1}{\gamma}}, \quad G_{2,n}(x) = n^{\frac{1}{\gamma}}x, \quad e \quad G_n(x) = (nx)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Conforme o Exemplo 3.7 e o Corolário 2.1,

$$F_1^n(G_{1,n}(x)) \xrightarrow{n} F_1(x) \quad e \quad F_2^n(G_{2,n}(x)) \xrightarrow{n} F_2(x).$$

Por isso, vale a condição (3.11) com $H_i(x) = F_i(x)$, $i = 1, 2$. Agora

$$\begin{aligned}
V_1(x) &= \lim_{n\to\infty} n[F_1(G_n(x)) - F_1(G_{1,n}(x))] \\
&= \lim_{n\to\infty} n[1 - F_1(G_{1,n}(x))] - \lim_{n\to\infty} n[1 - F_1(G_n(x))] \\
&= -\frac{1}{x} - \log[1 - x^{-\gamma}] \leq -\log[1 - x^{-\gamma}] = U_1(x),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} V_2(x) &= \lim_{n\to\infty} n[F_2(G_n(x)) - F_2(G_{2,n}(x))] \\ &= \lim_{n\to\infty} n[1 - F_2(G_{2,n}(x))] - \lim_{n\to\infty} n[1 - F_2(G_n(x))] \\ &= \left(\frac{1}{x}\right)^{\gamma} - \frac{1}{x} \leq \left(\frac{1}{x}\right)^{\gamma} = U_2(x). \end{aligned}$$

Então, temos também a condição (3.12) satisfeita, de modo que o teorema nos possibilita concluir

$$F^n(G_n(x)) \xrightarrow{n} e^{-\frac{1}{x}}.$$

Referências Bibliográficas

[1] ACZEL, J., *Lectures on Functional Equations and their applications.* University of Waterloo, Ontário, 1966.

[2] AL-HUSSAINI, E.K. and El-ADLL, M.E., *Asymptotic distribution of normalized maximum under finite mixture models.* Static. Probab. Lett. **70**, 109-117, 2004.

[3] BALKEMA, A. A., and DE HAAN, L., *On R. Von Mises‘ condition for the Domain of Atraction of* $e^{-e^{-x}}$. Ann. Math. Statist. **36**, 1352-1354, 1972.

[4] CHRISTOPH, G. and FALK, M., *A note on domains of attraction of p-max stable laws.* Statist. Prob. Lett. **28**, 279-284, 1996.

[5] COLES, S. G., PERICCHI, L. R., SISSON, S. A., *A fully probabilistic approach to extreme value modelling.* Journal of Hydrology, Amsterdam, **273**, 35-50, 2003.

[6] DE HAAN, L., *A Form of Regular Variation and its application to the Domain of Attraction of the Double Exponential Distribution.* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **17**, 241-258, 1971.

[7] DE HAAN, L., *A Unified criterion for the Domain of Attraction of Extreme-Value Distributions.* Theory Probab. Appl. **39**, 323-329, 1994.

[8] DOREA, C. C. Y., *Teoria Assintótica das Estatísticas.* 20° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1995.

[9] EVERITT, B. S., e HAND, D. J., *Finite Mixture Distribution.* Chapman & Hall, London, 1981.

[10] FISHER, R. A. e TIPPET, L. H. C., *Limiting forms of the frequency distributions of the largest or smallest member of a sample.* Proc. Cambridge Philos. Soc. **24**, 180-190, 1928.

[11] FRÈCHET, M., *Sur la loi de probabilité de l‘écart maximum.* Ann. de la Soc. polonaise de Math. **6**, 93, 1927, Cracow.

[12] GALAMBOS, J., *The asymptotic theory of extreme order statistics.* Jonh Wiley, New York, 1978.

[13] GALAMBOS, J., *The development of the mathematical Theory of Extremes in the past half century.* Theory Probab. Appl. **39**, 234-248, 1994.

[14] GNEDENKO, B. V., *Sur la distribution limite du terme maximum d´une série aleatóire.* Ann. Math. **44**, 423-453, 1943.

[15] KOTZ, S. and NADARAJAH, S., *Extreme Value Theory, and its applications.* Imperial College Press, London, 2000.

[16] LINDSAY, B. G., *Mixture Models: Theory, Geometry and Applications.* NSF-CBMS Regional Conference Series in Probability and Statistics, Institute of Mathematical Statistics and the American Statistical Association, vol **5**, Virginia, 1995.

[17] McLACHLAN, G. J., PEEL, D., *Finite mixture models.* Wiley, New York, 2000.

[18] MOHAN, N. R. and RAVI, S. *Max Domains of Attraction of Univariate and Multivariate p-Max Stable Laws.* Theory Probab. Appl. **37**, 632-643, 1992.

[19] PANTCHEVA, E., *Limit Theorems for Extreme Order Statistics under nonlinear normalization.* Lect. Notes Math. **1155**, 284-309, 1984.

[20] PEARSON, K., *Contribution to the Mathematical theory of evolution.* Phil. Trans. Roy. Soc. A, **185**, 71-110, 1894.

[21] RAVI, S. e SREEHARI, M., *On extremes of mixtures of distributions.* Metrika **71**, 117-123, 2009.

[22] RESNICK, S. I., *Extreme Values, regular variation and point process.* Springer-Verlag, Berlim, 1987.

[23] SILVA, R., *A distribuição Generalizada de Pareto e mistura de distribuições de Gumbel no estudo da vazão e da velocidade máxima do vento em Piracicaba, SP.* Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, Piracicaba, 2008.

[24] SMALL, C. G., *Functional Equations and How to Solve Them.* Springer, Waterloo, 2007.

[25] SREEHARI, M., *General max-stable laws.* Extremes **12**, 187-200, 2008.

[26] TARTAGLIA, V., CAPORALI, E., CAVIGLI, E., MORO, A. L., *Moments based assessment of a mixture model for frequency analysis of rainfall extremes.* Advanced in Geociences, Katlenburg - Lindau, **2**, 331-334, 2006.

[27] TITTERINGTON, D. M., SMITH, A. F. M., and MAKOV, U. E., *Stastitical Analysis of Finite Mixture.* Springer, Waterloo, 1985.

[28] WALSHAW, D., *Modelling extreme wind speeds in regions prope to hurricanes.* Applied Statistics, **49, vol. 1**, 51-62, 2000.