

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

DINÂMICA DE BOLHAS EM LÍQUIDOS ELÁSTICOS E
ANISOTRÓPICOS

DANIEL LIMA ALBERNAZ

ORIENTADOR: FRANCISCO RICARDO DA CUNHA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM
CIÊNCIAS MECÂNICAS

PUBLICAÇÃO: ENM.DM - 160 A/11

BRASÍLIA/DF: MARÇO - 2011.

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

DINÂMICA DE BOLHAS EM LÍQUIDOS ELÁSTICOS E
ANISOTRÓPICOS

DANIEL LIMA ALBERNAZ

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO
DE ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA
DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM CIÊNCIAS MECÂNICAS.

APROVADA POR:

Prof. FRANCISCO RICARDO DA CUNHA, PhD. (ENM-UnB)
(Orientador)

Prof. GUSTAVO COELHO ABADE, PhD. (ENM-UnB)
(Examinador Interno)

Prof. YURI DUMARESQ SOBRAL , PhD. (MAT-UnB)
(Examinador Externo)

BRASÍLIA/DF, 23 DE MARÇO DE 2011.

FICHA CATALOGRÁFICA

ALBERNAZ, DANIEL LIMA

Dinâmica de Bolhas em Líquidos Elásticos e Anisotrópicos

[Distrito Federal] 2011.

278p., 297 mm (ENM/FT/UnB, Mestre, Ciências Mecânicas, 2011).

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília.

Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica.

- | | |
|--------------------------|-----------------------|
| 1. Viscoelasticidade | 2. Dinâmica de bolhas |
| 3. Fibras/macromoléculas | 4. Orientação |
| I. ENM/FT/UnB | II. Título (série) |

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

DANIEL, D. L. (2011). Dinâmica de Bolhas em Líquidos Elásticos e Anisotrópicos. Dissertação de Mestrado em Ciências Mecânicas, Publicação ENM.DM - 160 A/11, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 278p.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Daniel Lima Albernaz.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO: Dinâmica de Bolhas em Líquidos Elásticos e Anisotrópicos.

GRAU / ANO: Mestre / 2011

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

Daniel Lima Albernaz
SQN 105 Bloco C Apartamento 201, Asa Norte
70734 - 030, Brasília - DF - Brasil.

“A tarefa não é contemplar o que ninguém contemplou, mas meditar como ninguém ainda meditou, sobre o que todo mundo tem diante dos olhos”.

Arthur Schopenhauer (1788-1860)

“Ninguém comete erro maior do que não fazer nada porque só pode fazer um pouco”.

Edmund Burke (1729-1797)

AGRADECIMENTOS

Acima de tudo, agradeço a Deus, fonte inesgotável de amor, pois foi pela vontade Dele que tenho trilhado o meu caminho com muita disposição, alegria e esperança.

Agradeço à minha família pelo amor que dela sempre recebi, pela sua presença em todos os meus momentos, difíceis ou não. Agradeço ao meu pai, Hélio, pelo apoio. Especialmente, agradeço à minha mãe, Cláudia, que sempre me incentivou ao estudo e ao conhecimento de mim mesmo. Grande exemplo que tenho, nela encontro a busca insaciável em se tornar uma pessoa melhor a cada dia, a viver pelo bem, sempre me lembrando o quanto é importante o nosso aprimoramento moral, espiritual e intelectual, únicas bagagens que levamos conosco após esse mundo, quando deixamos essa vestimenta e seguimos adiante. Da minha mãe obtive o apoio seguro e incansável, que contribuiu para a construção desse trabalho. Agradeço à minha irmã querida, Vanessa, por razões semelhantes às anteriores e por estar sempre ao meu lado. Sou feliz pela oportunidade de compartilhar essa existência com a melhor irmã e amiga que pode existir.

Agradeço aos amigos com quem convivi em minha vida acadêmica. Aos amigos Jaiminho e Golum, pelas longas conversas e pelas contribuições que trouxeram ao meu caminho. Torço para que um dia retornem à área acadêmica para utilizarem todo o seu potencial em benefício do bem comum. Ao amigo Caverna, com quem um dia espero ainda ter o prazer de trabalhar junto (nem que seja em alguma loucura microhidrodinâmica), agradeço pelas conversas e pela convivência. Agradeço também aos companheiros do Vortex, Natália, Vinícius, William, Ana, Bráulio, Vanessa, Nuno e outros, pelos momentos de descontração e amizade.

Não posso olvidar de citar com grande carinho e saudosismo a minha turma de graduação: Brunão (Deus te abençoe onde estiver!), Dallysson, Topeira, Gordo, Jaimanta, Abiga, Snoop, Goiana e tantos outros estimados amigos, que, de acordo com alguns professores, constituíram a melhor turma da Engenharia Mecânica da UnB até hoje. Apesar de todos os apelidos ou nomes estranhos, são pessoas de bom coração e me sinto privilegiado por ter convivido com elas.

Agradeço à Universidade de Brasília, pelo espaço físico e pelo ensino de qualidade que tive, assim como aos professores que colaboraram direta ou indiretamente para a minha formação acadêmica, principalmente àqueles que honram o nome da Universidade, contribuindo para o ensino no País. Agradeço aos profs. Yuri Dumaresq Sobral e Gustavo Coelho Abade pelas sugestões e correções que contribuíram para uma melhor qualidade da versão final da dissertação. Não posso me esquecer de agradecer aos porteiros do SG9, que sempre me trataram bem, apesar da minha insistência em trabalhar nas madrugadas.

Finalmente, faço um agradecimento especial ao meu “pai acadêmico”, Professor Francisco Ricardo da Cunha. Além de ter sido um orientador dedicado, foi, é, e sempre será um grande amigo e um exemplo a ser seguido. Incansável e extremamente motivado em um meio acadêmico que muitas vezes foge do propósito de pesquisa e da seriedade necessária (inclusive com casos que envolvem corrupção e desvio de dinheiro), o Professor é um ponto de referência quanto à sua postura profissional. A sua vida mostra que não se deve desistir nunca e que se deve sempre olhar adiante, de cabeça erguida, com vistas a um ideal maior. A minha estima por ele caminha em paralelo com a minha consciência de que ele é o grande responsável por todo o meu crescimento acadêmico ao longo desses anos.

Dedico, enfim, esse trabalho a todas essas pessoas e às demais aqui não citadas explicitamente, agradecendo pelos momentos marcantes e inesquecíveis que compartilhamos ao longo desses anos.

Daniel Lima Albernaz

RESUMO

DINÂMICA DE BOLHAS EM LÍQUIDOS ELÁSTICOS E ANISOTRÓPICOS

Autor: Daniel Lima Albernaz

Orientador: Francisco Ricardo da Cunha

Programa de Pós-graduação em Ciências Mecânicas

Brasília, 23 de Março de 2011

O presente trabalho tem como objetivo investigar o movimento oscilatório não-linear de uma bolha imersa em um fluido não-Newtoniano, que está sujeito a um campo acústico de pressão. O fluido é caracterizado como sendo uma suspensão de aditivos (fibras longas rígidas ou macromoléculas de alto peso molecular), que combina a viscosidade extensional com efeitos elásticos. Enquanto a viscosidade extensional é associada a forte anisotropia produzida pelo escoamento devido ao estiramento das macromoléculas, a contribuição elástica do modelo representa a relaxação dos aditivos, resultando em uma versão modificada da equação de Rayleigh-Plesset para dinâmica de bolhas, que deve ser integrada computacionalmente utilizando o método Runge-Kutta de quinta ordem, com passos de tempo apropriados. Equações constitutivas para um modelo anisotrópico, modelo viscoelástico linear e não-linear Maxwell-Oldroyd são exploradas e diferentes soluções são apresentadas. Realiza-se uma análise de escala dos parâmetros relevantes com o objetivo de se investigar a importância relativa das contribuições elásticas e anisotrópicas sobre a atenuação do movimento da bolha. A influência de vários parâmetros físicos na resposta da bolha são examinados, e.g. o número de Reynolds, Re , o número de Deborah, De , a fração volumétrica de aditivos, ϕ , entre outros. Desenvolve-se uma função orientação de aditivos que descreve o acoplamento do movimento radial da bolha com a orientação de aditivos a partir de uma função densidade de probabilidade para representar uma média de orientação das fibras no fluido ambiente. A interação bolha-aditivos é considerada para um raio de influência ou espessura da camada limite de probabilidade δ , que varia de acordo com a oscilação da bolha e a condição randômica inicial de orientação. Soluções assintóticas para o raio mínimo de colapso, R_{min} , para a integral de convolução do modelo viscoelástico linear e para a espessura δ são apresentadas, assim como uma análise da dinâmica da bolha no domínio da frequência.

ABSTRACT

BUBBLE DYNAMICS IN ELASTIC AND ANISOTROPIC LIQUIDS

Author: Daniel Lima Albernaz

Supervisor: Francisco Ricardo da Cunha

Graduate Program in Mechanical Sciences

Brasilia, March 23rd, 2011

The main purpose of the present work is to investigate the nonlinear motion of a single oscillating bubble immersed in a non-Newtonian fluid, subjected to an acoustic pressure field. The fluid is characterized as a suspension of additives (long fibers or few ppm of macromolecules), combining an extensional viscosity and elastic effects. While the extensional viscosity is related to the strong anisotropy produced in the flow by the stretched macromolecule, the elastic part of the model represents the relaxation of the additives, resulting in a modified version of the classical Rayleigh-Plesset equation of bubble dynamics that might be integrated by using a fifth order Runge-Kutta scheme with appropriated time steps. Constitutive equations for an anisotropic model, linear viscoelastic and nonlinear Maxwell-Oldroyd models are developed and different solutions are presented. A scale analysis of the relevant parameters in the bubble dynamics is made, with the purpose to investigate the importance of anisotropic and elastic contributions on the bubble movement stabilization. The influence of several physical parameters in the bubble response are investigated, e.g., the Reynolds number, Re , Deborah number, De , the particle volume fraction, ϕ , and many others. An additive orientation function is developed, which describes the radial bubble motion coupling with the additives orientation using a probability density function to represent the mean orientation of the additives in the host fluid. The interaction bubble-additives is considered for an influence radius or a boundary layer thickness of probability, δ , which varies accordingly with the bubble oscillation and an initial random orientation condition. Analytical solutions for the bubble minimum radius of collapse, for the convolution integral in the linear viscoelastic model and for the thickness δ are presented. The bubble dynamics in the frequency spectrum is also analyzed.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	DINÂMICA DE BOLHAS - APLICAÇÕES	4
1.1.1	Cavitação acústica: o Ultra-som	9
1.2	MODELOS MATEMÁTICOS	18
1.3	PROPOSTA DE TRABALHO	22
1.3.1	Objetivos Específicos	25
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	28
2.1	MODELOS CONSTITUTIVOS DE FLUIDOS	28
2.1.1	Princípios para formulação de Equações Constitutivas	29
2.1.2	O Tensor de Tensões	31
2.1.3	A presença de aditivos	40
2.2	O MODELO FÍSICO	42
2.3	EQUAÇÕES DE BALANÇO	45
2.3.1	Equação da continuidade	45
2.3.2	Equação da quantidade de movimento	48
2.4	CONDIÇÕES DE CONTORNO NA INTERFACE DA BOLHA	51
2.5	EQUAÇÃO DA DINÂMICA DE BOLHAS GENERALIZADA	57
2.5.1	Adimensionalização da Equação Governante	58
3	EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS	62
3.1	CARACTERIZAÇÃO DOS ADITIVOS	63
3.1.1	Constante Material da suspensão de aditivos	64
3.1.2	Orientação dos aditivos	66
3.2	O MODELO ANISOTRÓPICO	68
3.2.1	Equação Governante do Modelo Anisotrópico	72

3.3	VISCOELASTICIDADE LINEAR	75
3.3.1	O Modelo de Maxwell	75
3.3.2	Equação Governante do Modelo Viscoelástico Linear	80
3.3.3	Representação Diferencial da Integral de Convolução	82
3.4	VISCOELASTICIDADE NÃO-LINEAR	84
3.4.1	Derivadas Temporais Convectivas	84
3.4.2	Modelo Maxwell-Oldroyd	85
3.4.3	Coordenadas Lagrangeanas	87
3.4.4	Sistema de Equações Diferenciais	90
3.4.5	Considerações entre os Modelos Viscoelásticos	93
4	METODOLOGIA DA SOLUÇÃO NUMÉRICA	100
4.1	O MÉTODO RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM	101
4.2	ANÁLISE DO PASSO DE TEMPO COMPUTACIONAL	102
4.2.1	Solução analítica para a cavidade de Rayleigh	104
4.3	PASSO DE TEMPO ADAPTATIVO	106
4.4	RESULTADOS PRELIMINARES	111
4.4.1	Bolha em um fluido Newtoniano	111
4.4.2	Sensibilidade da Bolha	116
4.4.3	Bolha em um meio anisotrópico	119
4.5	RAIO DE COLAPSO	126
4.5.1	Teoria assintótica para o raio de colapso	127
4.5.2	Análise do Raio de Colapso	131
5	RESULTADOS DO MODELO VISCOELÁSTICO LINEAR	136
5.1	SOLUÇÃO ASSINTÓTICA PARA O MODELO VISCOELÁSTICO LINEAR	146
5.1.1	Análise da Solução Assintótica	150
6	RESULTADOS DO MODELO VISCOELÁSTICO NÃO-LINEAR	155
6.1	O LIMITE ASSINTÓTICO: $De \sim 1$	156
6.2	EFEITOS ELÁSTICOS E ANISOTRÓPICOS	159
6.3	ANÁLISE DE FREQUÊNCIA	171
6.3.1	Considerações Iniciais	173

6.3.2	Espectro de Amplitude da Bolha	178
6.3.3	Frequência de Resposta e Efeitos Elásticos	181
6.4	COMPARATIVO ENTRE OS MODELOS VISCOELÁSTICOS	188
7	ORIENTAÇÃO DE ADITIVOS ANISOTRÓPICOS	196
7.1	DISTRIBUIÇÃO NORMAL DE ORIENTAÇÃO	198
7.1.1	Resultados da Distribuição Normal S_0	201
7.2	FORMULAÇÃO DA FUNÇÃO ORIENTAÇÃO: ACOPLAMENTO BOLHA-ADITIVOS	205
7.2.1	Análise Dimensional da Equação de Evolução de P	209
7.2.2	Normalização da Função de Orientação Bolha-Aditivo	213
7.3	CAMADA LIMITE DE PROBABILIDADE	216
7.3.1	Análise da Função Densidade de Probabilidade	218
7.3.2	Solução Assintótica da Espessura da Camada Limite de Probabilidade δ	222
7.3.3	Análise da Função Orientação de Aditivos $S(R)$	227
7.4	RESULTADOS DO ACOPLAMENTO BOLHA-ADITIVOS	231
7.4.1	Evolução Temporal da função orientação $S(R)$ e Raio da Bolha	231
7.4.2	Influência da Orientação e Efeitos Elásticos	241
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	249
8.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	253
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	255
	APÊNDICES	266
A	MÉTODO DO FATOR INTEGRANTE	267
B	FÓRMULA DE LEIBNIZ	269
C	OBJETIVIDADE DA DERIVADA OLDROYD	271
D	SOLUÇÃO PARA O TEMPO DE COLAPSO DE RAYLEIGH	274
E	EQUAÇÃO DA FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE	277

LISTA DE TABELAS

2.1	Alguns fluidos não-Newtonianos e suas principais características.	38
-----	---	----

LISTA DE FIGURAS

1.1	Cavitação hidrodinâmica de bolhas.	3
1.2	Seqüência do colapso de uma bolha próxima a uma superfície, onde um rápido jato no interior da bolha é formado, com direção à superfície. . .	5
1.3	Exemplo de erosão causada pela cavitação em pás de um propulsor. . .	6
1.4	O efeito da radiação ultra-sônica na superfície de partículas de óxido níquel (a) Antes da utilização do ultra-som; (b) Após seu uso, gerando cavitação, que resulta na fragmentação das partículas maiores e no polimento de partículas por meio de colisões de altas velocidades.	10
1.5	Camada de vaselina misturada com partículas coloridas: (esquerda) antes da cavitação; (centro) após cavitação de uma bolha; (direita) após o colapso de uma segunda bolha no mesmo local, apresentando um aumento da área limpa e ausência de resíduos resultantes do colapso da primeira bolha.	11
1.6	Micro-bolhas circulam livremente em microvasos. Intensos pulsos ultra-sônicos aplicados na região-alvo geram o colapso destes agentes de contraste. Pulsos de baixa pressão são utilizados para analisar o tempo necessário para que outras micro-bolhas ocupem o espaço alvo.	14
1.7	Seqüência que representa o funcionamento da entrega de medicamentos utilizando como veículo micro-bolhas. (a) Micro-bolhas circulam em pequenos vasos sanguíneos contendo partículas terapêuticas (apresentadas pela cor azul). Quando intensos ultra-sons são utilizados no local, a ruptura das micro-bolhas ocorre, gerando a distribuição do medicamento; (b) ruptura das paredes do vaso sanguíneo, devido ao uso indevido do ultra-som, resultando no extravasamento do medicamento.	15

1.8	Célula cancerígena logo após ser exposta ao ultra-som, resultando em rompimento de parede devido ao colapso de uma micro-bolha localizada na sua superfície.	17
2.1	Esquema de uma bolha esférica imersa em um fluido que contém aditivos (macromoléculas ou fibras), sujeita a um campo acústico de excitação. .	44
2.2	Representação bidimensional do volume de controle de um segmento da superfície da bolha.	51
3.1	Configuração de uma macromolécula. (a) Antes do escoamento; (b) após sofrer estiramento gerado pelo escoamento, em que a macromolécula apresenta configuração semelhante a uma fibra longa. A região circular tracejada denota a área ocupada pela macromolécula em repouso. . . .	64
3.2	Orientação dos aditivos no sistema, com relação à bolha.	67
3.3	Modelo de viscosidade extensional.	71
3.4	Modelo de Maxwell, com efeito da viscosidade extensional e efeito elástico. 76	
4.1	Integração do problema da cavidade de Rayleigh obtida por meio do código computacional elaborado no presente trabalho.	105
4.2	Esquematização do algoritmo que caracteriza o método de Fehlberg. . .	108
4.3	Caso de oscilação quase harmônica da bolha, em que $Re = 1$, $We = 1$, $\varepsilon = 0.5$, na ausência de aditivos. (a) $R \times t$ (linha cheia) e $p_\infty \times t$ (linha tracejada); (b) diagrama de fase $\dot{R} \times R$; (c) $p_b \times t$; (d) $\dot{R} \times t$	112
4.4	Comportamento não-linear da bolha, sem aditivos ($\phi = 0$), com $Re = 15$, $W = 15$ e $\varepsilon = 1$. (a) $R \times t$ (linha cheia) e $p_\infty \times t$ (linha tracejada); (b) diagrama de fase $\dot{R} \times R$; (c) $p_b \times t$; (d) $\dot{R} \times t$	114
4.5	Colapso de uma bolha, para $Re = 30$, $We = 30$, $\varepsilon = 1$, na ausência de aditivos. (a) $R \times t$ (linha cheia) e $p_\infty \times t$ (linha tracejada); (b) diagrama de fase $\dot{R} \times R$; (c) $p_b \times t$; (d) $\dot{R} \times t$	115
4.6	Influência das condições iniciais para um sistema sem excitação ($\varepsilon = 0$), em que $Re = 5$, $We = 5$ e $\phi = 0$. (a) $R \times t$; (b) diagrama de fase $\dot{R} \times R$.	116
4.7	Influência das condições iniciais para um sistema sem excitação ($\varepsilon = 0$), em que $Re = 15$, $We = 15$ e $\phi = 0$. (a) $R \times t$; (b) diagrama de fase $\dot{R} \times R$.	117

4.8	Comparativo entre diferentes condições iniciais para um sistema com excitação, em que $Re = We = 20$, e $\phi = 0$. (a) $R \times t$, com $R_0 = 0,5$ e $\dot{R}_0 = 0$; (b) $R \times t$, com $R_0 = 1,5$ e $\dot{R}_0 = 0,5$, resultando em colapso da bolha.	117
4.9	Diagrama de colapso para um modelo puramente viscoso, que ilustra a variação do número de Weber com o número de Reynolds, para uma amplitude de excitação $\varepsilon = 1$	118
4.10	Diagrama de colapso entre os números de Reynolds e Weber, em que a linha cheia denota $\varepsilon = 1,2$; linha tracejada representa $\varepsilon = 1,5$ e linha pontilhada $\varepsilon = 2$	119
4.11	Caso de oscilação não linear da bolha com aditivos com fração volumétrica $\phi = 0,1\%$, razão de aspecto $\ell/a = 100$, $Re = We = 15$ e $\varepsilon = 1$. (a) $R \times t$ (linha cheia) e $p_\infty \times t$ (linha tracejada); (b) diagrama de fase $\dot{R} \times R$. . .	120
4.12	Caso de oscilação não linear da bolha, com aditivos, para $\phi = 0,3\%$, $Re = We = 15$ e $\varepsilon = 1$. (a) $R \times t$ (linha cheia) e $p_\infty \times t$ (linha tracejada); (b) diagrama de fase $\dot{R} \times R$	121
4.13	Um período da solução permanente do raio da bolha em função do tempo, com parâmetros $Re = We = 5$ e $\varepsilon = 1$	121
4.14	Raio máximo em função de Re , para os parâmetros $\varepsilon = 1$ e $We = 5$. Linha tracejada denota um fluido Newtoniano; linha sólida $\phi = 0,1\%$; pontilhada $\phi = 0,3\%$ e traço-ponto $\phi = 0,5\%$	122
4.15	Inibição de um caso de colapso da bolha, para $Re = We = 30$, $\varepsilon = 1$ e $\phi = 0,1\%$. (a) $R \times t$ (linha cheia) e $p_\infty \times t$ (linha tracejada); (b) diagrama de fase $\dot{R} \times R$; (c) $p_b \times t$; (d) $\dot{R} \times t$	123
4.16	Relação entre a amplitude (ε) e o raio máximo, para $Re = 15$ e $We = 15$. Linha cheia corresponde ao caso sem aditivos; tracejada denota um fluido contendo aditivos com concentração $\phi = 0,1\%$, linha pontilhada $\phi = 0,3\%$ e linha traço-ponto $\phi = 0,5\%$. O símbolo X representa o ponto a partir do qual o colapso ocorre.	124
4.17	Caso semelhante à Figura 4.16, agora para os parâmetros $Re = 7$ e $We = 7$.125	

4.18	Raio mínimo R_{min} em função do raio R_0 para diferentes números de Weber, em que linha cheia denota $We = 0.1$, linha tracejada $We = 1$ e linha pontilhada $We = 10$	132
4.19	Raio mínimo R_{min} em função do raio R_0 . Os limites assintóticos $We \rightarrow 0$ e $We \rightarrow \infty$ são representados pelas linhas cheia e traço-pontos, respectivamente. A linha pontilhada denota $We = 0.1$; a linha tracejada consiste em $We = 1$ e linha traço-ponto para $We = 5$	133
4.20	Evolução temporal do raio da bolha, para $\varepsilon = 1$, $We = 5$, $Re = 15$ e $\phi = 0.1\%$. A linha cheia denota o caso $R_0 = 1$; a linha tracejada corresponde a $R_0 = 2.5$ e a linha pontilhada $R_0 = 3$	134
4.21	Raio mínimo R_{min} em função do número de Weber, We , para diferentes valores de R_0 ($R_0 = 2$ linha cheia; $R_0 = 2.2$ linha tracejada; $R_0 = 2.5$ linha pontilhada e $R_0 = 3$ linha traço-ponto).	135
5.1	Comportamento do estado permanente de uma bolha para o modelo linear viscoelástico, com parâmetros: $Re = We = 5$, $\phi = 0.5\%$ e $\varepsilon = 1$. (a) R vs t ; (b) \dot{R} vs R ; (c) p_b vs t ; (d) \dot{R} vs t	138
5.2	Caso semelhante à Fig. 5.1, agora com uma fração volumétrica de aditivos $\phi = 0.1\%$. (a) R vs t ; (b) \dot{R} vs R ; (c) p_b vs t ; (d) \dot{R} vs t	139
5.3	(a) Evolução temporal da integral de convolução I para diferentes concentrações; (b) Diagrama de fase da integral de convolução \dot{I} vs I . Parâmetros utilizados: $Re = We = 5$, $De = 0.5$ e $\varepsilon = 1$	140
5.4	Oscilações não-lineares de uma bolha em estado permanente. (a) R vs t ; (b) p_b vs t . Os parâmetros são: $\phi = 0.15\%$, $Re = 15$, $We = 5$, e $\varepsilon = 1.5$.	141
5.5	Comportamento da integral de convolução I utilizando os parâmetros físicos da Fig. 5.4. (a) I vs t ; (b) \dot{I} vs I (diagrama de fase).	141
5.6	Comportamento caótico do raio de uma bolha em função do tempo, para os parâmetros da Fig. 5.4, aumentando-se o efeito elástico para $De = 1$.	142
5.7	(a) Evolução temporal do raio da bolha para diferentes concentrações e para um fluido Newtoniano ($\phi = 0\%$), para os parâmetros $Re = 8$, $We = 5$, $\phi = 0.1\%$ e $\varepsilon = 1$. (b) R_{max} vs t	144

5.8	Raio máximo atingido pela bolha em função do número de Deborah, para diferentes frequências de excitação. Parâmetros: $\phi = 0.3\%$, $Re = 10$, $We = 5$ e $\varepsilon = 1$	145
5.9	(a) Raio da bolha em função do tempo; (b) Diagrama de fase \dot{R} versus R , em que $De = 0.05$. Linha cheia denota solução numérica; linha pontilhada $O(De)$ e tracejada $O(De^2)$	151
5.10	(a) Raio da bolha em função do tempo; (b) Diagrama de fase \dot{R} versus R , em que $De = 0.2$. Linha cheia denota solução numérica; linha pontilhada $O(De)$ e tracejada $O(De^2)$	152
5.11	(a) Raio máximo atingido pela bolha em função do número de Deborah; (b) Raio mínimo da bolha em função do número de Deborah. Linha cheia denota $O(De)$; linha pontilhada solução numérica e tracejada $O(De^2)$	152
5.12	Comportamento da integral de convolução em função do tempo, para $\phi = 0.1\%$, razão de aspecto $\ell/a = 100$, $Re = 10$, $We = 1$ e $\varepsilon = 0.5$. (a) $De = 0.05$ e (b) $De = 0.2$. Linha cheia denota a solução numérica; linha tracejada corresponde à solução assintótica, $O(De)$	153
5.13	Erro $\Delta(\%)$ entre a solução assintótica e a integral de convolução em função do número de Deborah.	154
6.1	Amplitude máxima do raio da bolha R_{max} em função do número de Deborah, De , para $Re = We = 5$, $\phi = 0.3\%$ e $\varepsilon = 2$	158
6.2	R_{max} vs De no intervalo explorado para o modelo não-linear Maxwell-Oldroyd. Parâmetros: $Re = We = 5$, $\phi = 0.3\%$ e $\varepsilon = 2$	159
6.3	Evolução temporal da dinâmica da bolha para o modelo puramente anisotrópico (traço-ponto) e Maxwell-Oldroyd com $De_c = 0.8$ (sólida). Parâmetros da Fig. 6.2. (a) R vs t ; (b) \dot{R} vs R ; (c) p_b vs t e (d) \dot{R} vs t	160
6.4	(a) Evolução temporal da tensão radial extra avaliada na superfície da bolha, $\sigma_{rr}(R)$; (b) Diagrama de fase de $\dot{\sigma}_{rr}(R)$ em função de $\sigma_{rr}(R)$ Parâmetros físicos semelhantes aos utilizados na Fig. 6.3.	161
6.5	Raio mínimo atingido pela bolha R_m em função de De , para $Re = We = 5$, $\phi = 0.3\%$ e $\varepsilon = 2$	162

6.6	Dinâmica da bolha com $\phi = 0.08\%$ para o modelo anisotrópico (traço-ponto) e Maxwell-Oldroyd com $De_c = 1.1$ (sólida), parâmetros da Fig. 6.7. (a) R vs t ; (b) $\sigma_{rr}(R)$ vs t ; (c) p_b vs t e (d) \dot{R} vs R	163
6.7	Raio máximo (a) e mínimo (b) atingido pela bolha em função de De , para $Re = We = 5$, $\phi = 0.08\%$ e $\varepsilon = 2$	165
6.8	Diagrama de colapso para De em função de ε , para $Re = We = 5$ e $\phi = 0.08\%$	166
6.9	Evolução temporal do regime transiente do raio da bolha para (a) modelo puramente anisotrópico, $De = 0$; (b) $De = 0.3$; (c) $De=1.1$ (limite De_c). Parâmetros físicos $Re = We = 5$, $\phi = 0.08\%$ e $\varepsilon = 2$, partindo de $t_0 = 0$	167
6.10	Diagrama de colapso para De em função de ε , para $Re = We = 2$ e $\phi = 0.05\%$	168
6.11	Raio máximo (a) e mínimo (b) atingido pela bolha em função de De , para $Re = We = 1$, $\varepsilon = 12$ e diferentes frações volumétricas de aditivos.	169
6.12	Dinâmica da bolha com $\phi = 0.1\%$ para o modelo anisotrópico (traço-ponto) e Maxwell-Oldroyd com $De_c = 1$ (sólida) e $De = 0.4$ (pontilhada), para $Re = We = 1$ e $\varepsilon = 12$. (a) R vs t ; (b) $\sigma_{rr}(R)$ vs t ; (c) p_b vs t e (d) \dot{R} vs R	170
6.13	Um sinal qualquer, que consiste na combinação de duas ondas sinusoidais que possuem frequências e amplitudes distintas.	171
6.14	(a) Representação do sinal formado pela combinação de duas ondas senoidais nos eixos da amplitude, tempo e frequência; (b) Sinal no domínio do tempo; (c) Sinal no domínio da frequência.	172
6.15	(a) Função $\varepsilon \text{sen}(\omega t)$ em função do tempo t ; (b) Espectro de potência, em que $\tilde{\omega}$ representa a frequência de resposta ou modos de vibração do sinal.	176
6.16	Domínio de frequência da função apresentada na Fig. 6.15, agora no intervalo positivo e negativo de frequência, demonstrando simetria devido ao fato da função ser real.	177

6.17	Domínio de frequência da função apresentada na Figura 6.15, para diferentes quantidades de períodos. Linha cheia denota um sinal com 500 períodos; linha tracejada com 50 períodos e linha pontilhada contém 5 períodos.	178
6.18	(a) Raio da bolha em função do tempo, para as condições $\varepsilon = 0.1$, $We = Re = 10$, $\phi = 0.2\%$, $\omega = 1$ e $De = 0$; (b) Domínio da frequência, em que a amplitude $ R - R_0 $ é representada em termos da frequência de resposta, $\bar{\omega}$	179
6.19	(a) R em função de t ; (b) Domínio da frequência com amplitude $ R - R_0 $ em função de $\bar{\omega}$. Parâmetros equivalentes à Fig. 6.18, com $\varepsilon = 1$	180
6.20	(a) R em função de t ; (b) Domínio da frequência com amplitude $ R - R_0 $ em função de $\bar{\omega}$. Parâmetros equivalentes à Fig. 6.18, com $\varepsilon = 2$	181
6.21	(a) $ R - R_0 $ em função de $\bar{\omega}$ para $De = 0$; (b) $ R - R_0 $ em função de $\bar{\omega}$ para $De = 1$, i.e. De_c . Parâmetros físicos semelhantes aos utilizados na Fig. 6.11, para uma fração volumétrica de aditivos $\phi = 0.15\%$	182
6.22	Número de modos de vibração N_ω em função da amplitude da excitação ε .	182
6.23	Número de modos de vibração N_ω em função da amplitude da excitação ε para (a) $De = 0$ e (b) $De = 1$	183
6.24	R_{max} vs De , para diferentes frequências da pressão externa de excitação. Parâmetros utilizados: $Re = We = 3$, $\phi = 0.3\%$ e $\varepsilon = 2$	184
6.25	$ R - R_0 $ em função de $\bar{\omega}$, para $Re = We = 3$, $\varepsilon = 2$ e $\phi = 0.3\%$. (a) $De = 0.05$; (b) $De = 0.1$; (c) $De = 0.4$; (d) $De = 1$	185
6.26	Frequência de resposta $\bar{\omega}$ em função da frequência de excitação ω , para a condição $De = 1$ da Fig. 6.24, i.e. $Re = We = 3$, $\phi = 0.3\%$ e $\varepsilon = 2$	186
6.27	$\bar{\omega}$ em função de ω para $De = 1$ com redução das forças de inércia $Re = We = 1$ e redução da fração volumétrica $\phi = 0.15\%$	187
6.28	Amplitude máxima da bolha R_{max} em termos de De para todos modelos constitutivos explorados neste trabalho, com os seguintes parâmetros: $Re = We = 2$, $\phi = 0.2\%$ e $\varepsilon = 3$	188

6.29	Comparativo entre o modelo viscoelástico linear (traço-ponto) e não-linear Maxwell-Oldroyd (cheia) para $Re = We = 2$, $\phi = 0.2\%$, $\varepsilon = 3$ e $De = 0.1$. (a) Evolução temporal do raio da bolha; (b) $B(R)$ (sólida) e $B_0(R)$ (traço-ponto) em função do tempo.	189
6.30	Comparativo realizado na Figura 6.29, agora para $De = 1$	190
6.31	(a) Pressão interna da bolha em função do tempo com relação à Fig. 6.30; (b) diagrama de fase, \dot{R} vs R	190
6.32	R_{max} em termos de De , com os seguintes parâmetros: $Re = We = 2$, $\phi = 0.2\%$ e $\varepsilon = 5$	191
6.33	Comparativo entre modelo viscoelástico linear (traço-ponto) e não-linear Maxwell-Oldroyd (cheia) para $Re = We = 2$, $\phi = 0.2\%$, $\varepsilon = 5$ e $De = 0.1$. (a) R vs t ; (b) B vs t	192
6.34	(a) p_b vs t , com relação à Fig. anterior; (b) diagrama de fase, \dot{R} vs R	193
6.35	Evolução temporal do raio da bolha, seguindo os parâmetros da Figura 6.32, com $De = 1$. Curva traço-ponto – modelo linear; sólida – modelo Maxwell-Oldroyd.	193
6.36	Erro apresentado entre os modelos viscoelástico linear e não-linear em função de De . Curva traço-ponto denota a Fig. 6.28 e curva sólida a Fig. 6.32.	194
6.37	R vs t , para $De = 0.1$ (a) e $De = 1$ (b), com os parâmetros $Re = We = 2$, $\phi = 0.2\%$, $\omega = 0.5$ e $\varepsilon = 5$	195
7.1	Variação da função de orientação S_0 em função do desvio padrão (σ_θ). Linha cheia: $\bar{\theta} = 0$ (limite superior); linha tracejada: $\bar{\theta} = \pi/10$; pontilhada: $\bar{\theta} = \pi/6$; tracejada com ponto: $\bar{\theta} = \pi/4$ e tracejada com pontos: $\bar{\theta} = \pi/3$	200
7.2	(a) R X t , para $\phi = 0.3\%$, $\ell/a = 100$, $Re = 15$, $We = 15$, $\omega = 0.1$, $\varepsilon = 1$ e $De = 0$. Linha cheia: aditivos totalmente alinhados; tracejada $\sigma_\theta = 1$ e $\bar{\theta} = \pi/10$. (b) Diagrama de fase, \dot{R} X R	202
7.3	(a) R_{max} X σ_θ . Linha sólida: $\bar{\theta} = 0$ (limite inferior); tracejada: $\bar{\theta} = \pi/6$; pontilhada $\bar{\theta} = \pi/2$. (b) R_{max} X $\bar{\theta}$, em que linha sólida $\sigma_\theta = 1$; tracejada: $\sigma_\theta = 0.5$ e pontilhada: $\sigma_\theta = 0.1$	203

7.4	camada limite de probabilidade δ , região em que o acoplamento do movimento da bolha com a orientação de aditivos é relevante.	217
7.5	Função $L(r)$ em termos de r , para um raio inicial $R = 0.5$ e $S_0 \cong 0.5$. . .	219
7.6	Função $L(r)$ em termos de r , para diferentes raios da bolha e $S_0 \cong 0.5$. . .	220
7.7	Função $L(r)$ em termos de r , para diferentes raios da bolha ($R > R_0$) e $S_0 \cong 0.5$	220
7.8	δ em função do raio da bolha R , para $R_0 = 1$	221
7.9	δ em função do raio da bolha R na condição $R < R_0$, em que $R_0 = 1$. Curva sólida: solução numérica e curva traço-ponto: solução assintótica.	224
7.10	δ em função de R na condição $R > R_0$, em que $R_0 = 1$	225
7.11	Função de orientação bolha-aditivos $S(R)$ em função do raio da bolha R , para $S_0 \cong 0.5$ e (a) Raio inicial $R_0 = 1$; (b) Raio inicial $R_0 = 2$	227
7.12	$S(R)$ em função do raio da bolha R , para $R_0 = 1$ e diferentes condições iniciais: $S_0 \cong 0.7$ (tracejada); $S_0 \cong 0.5$ (cheia) e $S_0 \cong 0.3$ (traço-ponto).	228
7.13	Camada limite de probabilidade δ associada à função orientação de aditivos $S(R)$, de acordo com o raio da bolha R	229
7.14	(a) R em função de t e (b) $S(R)$ em função de t , para: $Re = We = 5$, $\phi = 0.3\%$, $R_0 = 1$ e $\varepsilon = 3$	232
7.15	Comparação de R_{max} em função da amplitude de excitação (a) e R_m vs ε (b) entre a solução apresentada para $S_0 = 0.3$ (traço-ponto) e $S(R)$ (cheia) para $Re = We = 10$, $R_0 = 1$ e $\phi = 0.1\%$	234
7.16	Dinâmica da bolha para um regime permanente, com $S_0 \cong 0.3$ e raio inicial $R_0 = 1$. Curvas $S_0 = 0.3$ (traço-ponto) e $S(R)$ (sólida), com parâmetros utilizados: $Re = We = 10$, $\phi = 0.1\%$, e $\varepsilon = 1.5$. (a) R vs t ; (b) S_0 vs t ; (c) p_b vs t e (d) $\sigma_{rr}(R)$ vs t	235
7.17	(a) R vs t ; (b) S_0 vs t ; (c) p_b vs t e (d) $\sigma_{rr}(R)$ vs t . $S_0 \cong 0.5$ com raio inicial $R_0 = 1$ (traço-ponto) e $R_0 = 2$ (sólida), parâmetros utilizados: $Re = We = 10$, $\phi = 0.5\%$ e $\varepsilon = 3$	237
7.18	Média da função de orientação \bar{S} em termos da amplitude de excitação ε para diferentes condições iniciais de orientação, com parâmetros: $Re = We = 5$, $R_0 = 2$ e $\phi = 0.3\%$	238

7.19	Comparativo entre $\varepsilon = 5$ (traço-ponto) e $\varepsilon = 1.5$ (sólida) para $S_0 = 0.3$, sendo (a) R vs t ; (b) S_0 vs t , em que linha pontilhada denota a solução $S_0 = 0.3$. Parâmetros da Fig. 7.18.	239
7.20	Média da função de orientação em termos da concentração ϕ para diferentes amplitudes de excitação, com parâmetros: $Re = We = 5$, $R_0 = 2$ e $S_0 = 0.3$	240
7.21	(a) R_{max} vs De ; (b) R_m vs De , em que linha pontilhada denota a solução $S_0 = 0.7$, traço-ponto $S_0 = 1$ e sólida $S(R)$. Parâmetros: $Re = We = 1$, $\varepsilon = 12$, $R_0 = 2$ e $\phi = 0.15\%$ (semelhante à Fig. 6.11).	241
7.22	(a) Média da função orientação de aditivos em função de De para $S(R)$ da Fig. anterior. (b) Regime permanente da evolução temporal de $S(R)$	242
7.23	Média da função de orientação em termos de De para diferentes condições iniciais de orientação. Parâmetros: $Re = We = 2$, $R_0 = 2$, $\phi = 0.2\%$ e $\varepsilon = 3$	243
7.24	(a) R_{max} vs De ; (b) R_m vs De , Para diferentes condições iniciais de orientação. Parâmetros da Fig. 7.23.	244
7.25	\bar{S} em função de De para diferentes amplitudes de excitação e orientação inicial $S_0 = 0.3$. Parâmetros: $Re = We = 2$, $R_0 = 2$ e $\phi = 0.2\%$	245
7.26	\bar{S} em função de ε para os limites assintóticos $R_{max(2)}$ (sólida) e $R_{max(1)}$ (traço-ponto), com orientação inicial $S_0 = 0.3$. Parâmetros: $Re = We = 2$, $R_0 = 2$ e $\phi = 0.2\%$	246
7.27	(a) R_{max} vs ε ; (b) Regime permanente da evolução temporal de $S(R)$ com $\varepsilon = 3$, para os limites assintóticos $R_{max(2)}$ (sólida) e $R_{max(1)}$ (traço-ponto), com orientação inicial $S_0 = 0.3$	247
7.28	(a) R vs t ; (b) S_0 vs t ; (c) p_b vs t e (d) $\sigma_{rr}(R)$ vs t . Limites assintóticos $R_{max(2)}$ (sólida) e $R_{max(1)}$ (traço-ponto) para uma orientação inicial $S_0 \cong 0.3$. Parâmetros utilizados: $Re = We = 2$, $\phi = 0.2\%$, $\varepsilon = 6$ e raio inicial $R_0 = 2$	248

LISTA DE SÍMBOLOS

SÍMBOLOS ROMANOS

a	Diâmetro característico do aditivo
A_0	Função presente na formulação viscoelástica não-linear de uma integral em dy
B	Função que descreve a integração em dr da tensão radial extra
\dot{B}	Derivada temporal de B
C_0	Constante que denota a distribuição de probabilidade de $P(r, R, \theta)$
C_θ	Constante que representa a integral em $d\theta$ para solução de δ
C_δ	Constante de calibração da solução assintótica para δ
\mathbf{D}	Tensor taxa de deformação
D_r	Coefficiente de difusão browniana
De_c	Número de Deborah crítico que define o limite superior anisotrópico
\hat{e}_r	Vetor unitário na direção radial
\hat{e}_θ	Vetor unitário na direção angular
$E(\phi)$	Constante que caracteriza a partícula da suspensão
f_c	Frequência de Nyquist
F	Função de integração da equação da continuidade na superfície da bolha
F_μ	Força de viscosidade
F_σ	Força da tensão superficial
F_i	Força de inércia

$F(\epsilon)$	Fator de forma que considera finitude de partículas
\mathbf{g}	Aceleração da gravidade
$g(R, \delta)$	Função da solução assintótica δ com dependência de R e δ
$g(R)$	Função relacionada ao módulo de relaxação do modelo viscoelástico não-linear
G	Constante de rigidez elástica
G^*	Módulo de relaxação do modelo viscoelástico não-linear
\tilde{G}	Constante de equilíbrio
H	Amplitude no domínio da frequência
\mathbf{I}	Tensor identidade
I	Integral de convolução
\dot{I}	Derivada temporal da integral de convolução
I_1, I_2, I_3	Invariantes fundamentais
J	Jacobiano da transformação de coordenadas
k_0	Constante da equação de evolução de \hat{s}
ℓ	Comprimento do aditivo
ℓ_c	Comprimento característico
ℓ/a	Razão de aspecto do aditivo
$L(r)$	Função densidade de probabilidade normalizada em função do raio
L_c	Comprimento característico de uma fibra ou aditivo
\dot{m}	Taxa de evaporação mássica
M'	Módulo de relaxação do modelo viscoelástico linear
M''	Função de relaxação do modelo viscoelástico não-linear

n	Coeficiente politrópico
n_d	Número de densidade
\hat{n}	Vetor unitário normal à parede da bolha
$P(r, R, \theta)$	Função densidade de probabilidade
$P^+(r, R, \theta)$	Função densidade de probabilidade normalizada
P_δ	Função densidade de probabilidade avaliada na espessura δ
$P(\theta)$	Função densidade de probabilidade da distribuição normal
p	Campo de pressão
p_ℓ	Pressão do líquido exterior à bolha
p_∞	Pressão ambiente
\tilde{p}_∞	Pressão ambiente de equilíbrio
p_b	Pressão interna da bolha
\tilde{p}_b	Pressão de equilíbrio interna da bolha
p_g	Pressão do gás
\tilde{p}_g	Pressão de equilíbrio do gás
p_m	Pressão mecânica
p_v	Pressão do vapor
\mathbf{Q}	Tensor Ortogonal
r	Distância do centro da bolha a um ponto qualquer no fluido
r^*	Raio de interação para a camada limite de probabilidade
R	Raio da bolha
\dot{R}	Derivada temporal do raio da bolha

\ddot{R}	Derivada temporal segunda do raio da bolha
$R^{(3)}$	Derivada temporal terceira do raio da bolha
R_0	Raio inicial da bolha
\dot{R}_0	Velocidade inicial do raio da bolha
\dot{R}_{max}	Amplitude máxima do raio da bolha obtido
$\dot{R}_{max(1)}$	Amplitude máxima do raio da bolha para o limite anisotrópico inferior
$\dot{R}_{max(2)}$	Amplitude máxima do raio da bolha para o limite anisotrópico superior
\dot{R}_m	Valor mínimo do raio da bolha obtido
$\dot{R}_{m(1)}$	Valor mínimo do raio para limite anisotrópico inferior
$\dot{R}_{m(2)}$	Valor mínimo do raio para limite anisotrópico superior
R_E	Raio de equilíbrio da bolha
$ R - R_0 $	Amplitude do raio da bolha no domínio da frequência
\mathbf{s}	Vetor relacionado à direção local de um aditivo
\hat{s}	Módulo do vetor \mathbf{s}
\hat{s}	Vetor unitário da direção local dos aditivos
\hat{s}_r	Taxa do vetor unitário da direção \hat{s} na direção radial
\hat{s}_θ	Taxa do vetor unitário da direção \hat{s} na direção θ
$\dot{\hat{s}}$	Derivada de \hat{s} com relação ao tempo
$\langle \hat{s} \rangle$	Média global da orientação de aditivos
\hat{s}_r	Componente radial do vetor \hat{s}
\hat{s}_θ	Componente angular do vetor \hat{s}
$S(R)$	Função orientação de aditivos com acoplamento
$ S $	Média temporal da função $S(R)$
$ S _{max}$	Valor máximo da média temporal da função $S(R)$
S_0	Função orientação de aditivos para uma distribuição normal gaussiana

Q	Tensor ortogonal
t	Tempo do escoamento
t_c	Tempo característico do escoamento
\hat{t}	Vetor unitário tangente à superfície da bolha
T	Operador de transposição
T_b	Temperatura da bolha
T_e	Temperatura estática do fluido
u	Vetor velocidade
u'	Vetor velocidade em outro referencial
u_ϑ	componente azimutal angular da velocidade
u_φ	componente polar angular da velocidade
u_r	componente radial da velocidade
U_c	Escala de velocidade característica
v	Representação numérica da derivada temporal do raio da bolha
V	Volume da bolha
V_{r^*}	Volume da camada limite de probabilidade
W	Tensor vorticidade
x	Vetor posição
$a, \dot{a}, v, \dot{v}, y, \dot{y}$	Variáveis de integração do método de Runge-Kutta
$Z(\theta)$	Função inserida na função densidade de probabilidade $P^+(r, R, \theta)$

SÍMBOLOS GREGOS

α	Tempo de relaxação do material
β	Fator integrante
δ	Espessura da camada limite de orientação
δ_+	Derivada convectiva Oldroyd
ε	Amplitude de pressão
ε^*	Amplitude de pressão redefinida
ρ	Massa específica do fluido Newtoniano
ρ_b	Massa específica da mistura gás e vapor da bolha
ρ_v	Massa específica do vapor saturado
ϕ	Fração volumétrica de aditivos
φ	Componente polar da coordenada esférica
μ	Viscosidade dinâmica do fluido Newtoniano
μ_e	Viscosidade extensional
μ_e/μ	Constante material da suspensão de aditivos
μ	Tensor viscosidade
N_ω	Número de modos vibracionais
$\hat{\xi}$	Vetor unitário tangente à superfície da bolha
∇	Operador nabla
∇^s	Operador nabla superficial
∇_s	Operador nabla no referencial da fibra
σ	Função tensão na presença de aditivos
σ_{rr}	Componente radial do tensor de tensões em coord. esféricas
$\sigma_{\vartheta\vartheta}, \sigma_{\varphi\varphi}$	Componentes angulares do tensor de tensões em coord. esféricas
σ^N	Tensor de um fluido Newtoniano
σ_{nn}	Componente normal do tensor de tensões
$\sigma_{nt}, \sigma_{n\xi}$	Componentes tangenciais do tensor de tensões
σ_θ^2	Variância da distribuição normal
σ_θ	Desvio padrão da distribuição normal

$\tilde{\sigma}$	Coefficiente de tensão na interface da bolha
$\bar{\kappa}$	Curvatura média da superfície da bolha
θ	Ângulo de orientação local de aditivos
ϑ	Componente azimutal da coordenada esférica
$\bar{\theta}$	Ângulo médio da distribuição normal
ω	Frequência de excitação do sistema
$\bar{\omega}$	Frequência de excitação de resposta da bolha no domínio da frequência
γ_e	Deformação elástica
$\dot{\gamma}_v$	Taxa de deformação viscosa
$\dot{\gamma}_v$	Taxa de deformação
τ	Instante de tempo anterior ao atual
τ_c	Tempo de colapso da cavidade de Rayleigh
Σ	Tensor de tensões do escoamento
Σ^f	Tensor de tensões extra devido aos aditivos
$\tilde{\Sigma}$	Tensor associado com movimentos não-uniformes
$\Delta\tilde{p}$	Diferença de pressão ($\tilde{p}_\infty - p_v$)
Δt	Intervalo de tempo para método Runge-Kutta
Δ_{err}	Estimativa de erro para o controle de passo de tempo adaptativo
Δt_{col}	Intervalo de tempo para a extrapolação utilizada no momento de colapso

GRUPOS ADIMENSIONAIS

<i>De</i>	Número de Deborah
<i>Re</i>	Número de Reynolds
<i>We</i>	Número de Weber
<i>Pe</i>	Número de Peclet

SUBSCRITOS

<i>min</i>	Referente ao raio mínimo obtido pela solução assintótica
<i>nn</i>	Referente às tensões normais à superfície da bolha
<i>Ray</i>	Referente ao intervalo de tempo obtido na solução de Rayleigh
<i>tr</i>	Traço de um vetor/tensor qualquer
<i>max</i>	Amplitude máxima do raio da bolha
*	Utilizado na representação adimensional de um termo

1 INTRODUÇÃO

A curiosidade acerca de bolhas data do século XVIII, e tem como referência ninguém menos que Newton, 1704, que consiste no primeiro trabalho documentado a realizar observações que concernem ao fenômeno hoje descrito como cavitação. Cavitação é o termo utilizado para representar a formação, o comportamento e o colapso de bolhas (ou cavidades) em um líquido.

As bolhas iniciam sua formação quando se encontram suspensas em um líquido ou, simplesmente, quando presas em pontos de nucleação, os quais podem estar presentes na fronteira da superfície do líquido ou em partículas sólidas que se encontram suspensas neste líquido. As bolhas podem ser compostas predominantemente por gás, por vapor, ou por ambos. No caso de uma bolha composta por gás, as formas de induzir seu crescimento são basicamente pela difusão de gases dissolvidos no líquido (*desgaseificação*), ou pela redução da pressão ou, ainda, pelo aumento da temperatura (*cavitação gasosa*). Já para uma bolha contendo predominantemente vapor, tal processo se dá pela redução suficiente da pressão ambiente à temperatura constante (*cavitação vaporosa*) ou pela elevação da temperatura à pressão constante (*ebulição*).

Contudo, assumir que a formação de bolhas ocorre somente nestes casos pode ser equivocado, uma vez que as bolhas geralmente se encontram preenchidas por uma mistura de vapor e gás. Uma alternativa mais interessante seria distinguir os tipos de cavitação, de acordo com a forma em que esta é produzida (Young, 1989):

- *Cavitação hidrodinâmica*: caracterizada pela variação de pressão em um líquido que escoar. Tal variação é devido à geometria do sistema. A velocidade do líquido varia localmente e, em pontos em que se encontram picos de velocidades, acontecem baixas pressões, que possibilitam a formação de cavidades.

- *Cavitação acústica*: para um sistema sem escoamento, a pressão ambiente pode ser alterada utilizando ondas sonoras, percorrendo o líquido. Caso a amplitude destas ondas ε seja significativa, a ponto de alterar a pressão local para valores abaixo da pressão de vapor, ocorre a geração de bolhas. A partir do campo sonoro presente, a bolha entra em movimento oscilatório, alternando entre momentos de contração ou expansão. Dependendo da excitação aplicada, i.e., da amplitude e frequência do campo sonoro, a bolha pode apresentar comportamento estável durante vários ciclos ou comportamento caótico, que pode resultar no colapso da bolha, antes mesmo de completar o primeiro ciclo de oscilação (Lauterborn & Parlitz, 1988). A resposta do raio da bolha não é, portanto, proporcional à pressão sonora. Este tipo de cavitação tem relação direta com a utilização de ultra-som.
- *Cavitação em partículas*: baseia-se no crescimento de bolhas num líquido supersaturado. Se uma partícula carregada é enviada pelo líquido, deixa uma trilha ionizada por fração de segundo. Um pouco desta energia dos íons é transferida para elétrons, que podem produzir um rápido aquecimento local. Se o líquido tiver sido superaquecido pela expansão, a ebulição ocorrerá ao longo da trilha, que resultará numa linha composta por pequenas bolhas.
- *Cavitação ótica*: este tipo de cavitação é produzida por fótons que possuem uma luminosidade de alta intensidade, rompendo o líquido e ocasionando a formação de bolhas.

O gás contaminante se faz presente em bolhas, sendo inevitável a sua ocorrência em qualquer fluido que se encontre sujeito a experimentações (Brennen, 1995). A característica principal de uma bolha de gás é observada quando a bolha se encontra em momento de contração, instante em que o gás pode atuar como amortecedor, por absorver a energia do líquido que contrai a bolha. Caso não ocorra o colapso da bolha e sua pressão interna seja maior que a pressão externa, registra-se paralisação completa do movimento no sentido de contração, podendo este movimento ser revertido, gerando a expansão da bolha. A pressão do gás apresenta-se, portanto, uma proporção inversa com relação à variação do raio da bolha.

A alta compressibilidade da bolha proporciona uma absorção significativa de energia, podendo esta ser obtida de várias formas. Por exemplo, para o caso de cavitação acústica, no momento de expansão da bolha, ocorre a absorção da energia potencial obtida das ondas sonoras, o que ocasiona um acúmulo de energia cinética no momento de sua contração. Importante ressaltar que, mesmo para uma fonte de baixa energia como a onda sonora, uma maior densidade de energia no momento de contração pode redundar no colapso da bolha. Tal fato caracteriza uma cavitação transiente e ocorre devido ao movimento não-linear que a bolha apresenta, devido a diversos fatores, como o movimento mecânico de propulsores ou bombas, ou pela ação de um campo ultrassônico, ou por aumento da velocidade local em um escoamento, entre outros (Leighton, 1994). A ocorrência do colapso proporciona uma concentração de energia em pequenos volumes, produzindo maiores níveis de pressão e temperatura. Apesar do colapso de uma cavidade ser um acontecimento de baixa energia, este é altamente localizado. Um exemplo ilustrativo da transferência de energia no instante de colapso das bolhas pode ser observado na Figura 1.1¹.



Figura 1.1: Cavitação hidrodinâmica de bolhas.

A dinâmica de bolhas é um tema abrangente e constante em nosso cotidiano. Na verdade, o próprio corpo humano realiza o uso de cavitação diariamente, como no caso do coração, que devido a mudanças bruscas de pressão entre as câmaras de admissão e descarga do fluxo sanguíneo, favorece o aparecimento de micro-bolhas nestas câmaras.

¹Ilustração obtida no site www.fluidlab.naoe.t.u-tokyo.ac.jp/Research/CavPictures

Bolhas são responsáveis por transportes microfluídicos em células e no sangue, podendo realizar uma função de bombeamento em micro-canais (Marmottant & Hilgenfeldt, 2004). Ao mesmo tempo, a cavitação pode apresentar situações indesejáveis, como a doença de descompressão ou barotrauma pulmonar, sofrida por mergulhadores que atingem a superfície rapidamente. Na natureza, a presença da cavitação também pode ser observada de várias maneiras. O animal camarão-pistola, por exemplo, mais conhecido como “snapping shrimp”, gera estalidos com a finalidade de se comunicar, defender o território ou matar suas presas. O estalido neste caso é resultado do colapso de uma bolha de cavitação formada por um rápido jato de água devido ao fechamento abrupto de sua garra (Versluis *et al.*, 2000). A cavitação pode causar efeitos físicos, químicos ou biológicos. Na seção seguinte, são apresentadas aplicações derivadas do uso de bolhas.

1.1 DINÂMICA DE BOLHAS - APLICAÇÕES

Cumpre-se observar preliminarmente que bolhas desempenham uma importante função em diversos campos da ciência e da tecnologia contemporânea. Sistemas de escoamentos de líquidos constituem uma ocorrência comum de cavitação, nos quais efeitos hidrodinâmicos resultam em regiões do escoamento em que a pressão assume valores inferiores ao da pressão de vapor. Foi neste contexto que o estudo da dinâmica de bolhas começou a se desenvolver, tendo iniciado especificamente a partir de problemas apresentados pelo funcionamento de turbinas em navios, em que a propulsão era prejudicada pela formação de uma nuvem de bolhas no momento em que a água se encontrava em regiões de baixa pressão nos propulsores da turbina.

Reynolds, 1873, realizou investigações por meio de teorias e experimentações com a finalidade de tentar encontrar uma solução para o problema apresentado. Diversos outros trabalhos foram publicados, destacando-se a investigação realizada por Parsons, 1906 (inventor da turbina a vapor), o qual observou que maior parte da energia proporcionada pela máquina era consumida na formação e manutenção das cavidades,

ao invés da propulsão do navio. Posteriormente, ficou evidenciado que os propulsores originavam vácuos ou várias bolhas quando a menor pressão ao redor das lâminas decrescia para um determinado valor. O mesmo autor foi responsável pela construção do primeiro túnel de cavitação em 1895 (um túnel de cavitação maior foi construído por Parsons em 1910), bombeando para fora o ar que se encontrava na superfície da água sobre o propulsor, visando produzir cavitação com maior facilidade (maiores detalhes em Burrill, 1951 e Young, 1989).

Oportuno registrar que a curiosidade acerca da dinâmica de bolhas foi impulsionada com observações relacionadas aos efeitos da cavitação, como a erosão, que é resultado do colapso de bolhas próximo a fronteiras sólidas. Um dos primeiros trabalhos científicos a respeito do colapso foi realizado por Rayleigh, 1917, para uma cavidade esférica imersa em um meio infinito. Porém, quando a bolha se encontra próxima a uma superfície sólida ou fronteira, o colapso não ocorre esfericamente (Naude & Ellis, 1961, Benjamin & Ellis, 1966). Caso uma bolha oscilatória esteja localizada adjacente a uma fronteira, a bolha é levemente repelida para longe desta fronteira durante sua fase de expansão. Entretanto, no momento de colapso, a bolha é atraída pela fronteira. O que ocorre é que a bolha se deforma e produz um jato líquido de alta velocidade no seu interior. O jato é formado na face da bolha que se encontra distante da estrutura. Este jato penetra a bolha, atravessando sua face oposta, ocasionando um impacto com a superfície próxima (Figura 1.2²). Este colapso também é caracterizado pela produção de uma intensa onda de choque.

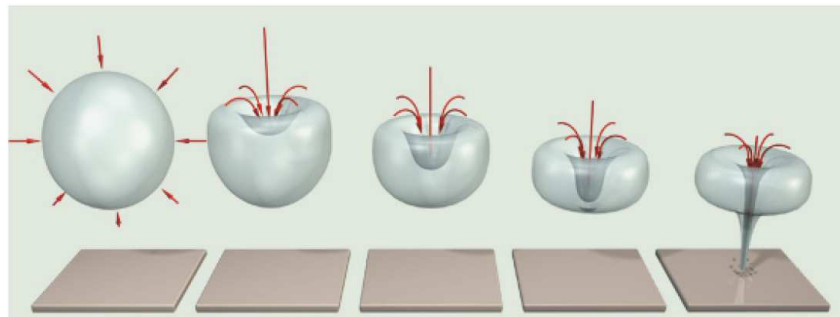


Figura 1.2: Seqüência do colapso de uma bolha próxima a uma superfície, onde um rápido jato no interior da bolha é formado, com direção à superfície.

²Ilustração obtida no site www.lockstockuae.com/storz_shockwave.

Tanto a onda de choque quanto o jato líquido podem ter efeitos devastadores em uma superfície, podendo causar erosão em metais, como o aço, diminuindo a vida útil do material, como constatado na Figura 1.3³.



Figura 1.3: Exemplo de erosão causada pela cavitação em pás de um propulsor.

A engenharia oceânica utiliza-se do estudo da dinâmica de bolhas para auxiliar na construção de equipamentos, principalmente no que concerne aos submarinos (e.g. Zhang *et al.*, 2009). O colapso de bolhas também pode ser um fator determinante na detecção de submarinos, uma vez que o fenômeno é precedido por uma onda sonora. Máquinas diesel sofrem desgastes causados pela cavitação, devido às altas taxas de compressão e paredes de grandes dimensões do cilindro. Neste caso, a vibração induz a uma alternância entre baixa e alta pressão do líquido refrigerante contra a parede do cilindro. Uma forma de amenizar esse desgaste baseia-se na utilização de aditivos no líquido refrigerante, que atuam como uma camada protetora sobre a camisa do cilindro. Esses aditivos reduzem a tensão superficial do líquido e causam uma diminuição do pico de pressão alcançado pela bolha, amenizando o colapso (Beal, 1986).

Existem trabalhos relacionados ao estudo de bolhas com relação a diferentes fronteiras, como a superfície livre, fronteiras flexíveis ou interface entre dois líquidos (Blake & Gibson, 1987). A dinâmica de bolhas também se encontra presente na área de vulcanologia, uma vez que vários aspectos de atividades vulcânicas são atribuídas à presença de bolhas no magma terrestre. O magma é composto por uma mistura de líquido,

³Ilustração obtida no site <http://alumnus.caltech.edu/mark/research/prop/prop.html>.

bolhas e partículas sólidas. As bolhas podem reduzir significativamente a velocidade do som do magma (dependendo de sua rigidez e viscosidade) e influenciar em terremotos, tremores e ondas acústicas na atmosfera (Ichihara *et al.*, 2004).

A dinâmica de bolhas tem sido tema de pesquisa devido aos seus efeitos adversos com relação à performance, ao nível de ruído que é criado, às vibrações e, principalmente, aos danos que podem ser gerados próximos a superfícies sólidas. Porém, apesar da cavitação estar presente em vários fenômenos indesejados, muitas são as aplicações em que ela pode ser utilizada de uma maneira benéfica.

Bolhas podem desempenhar um papel importante quando o assunto é redução de arrasto. O interesse pela lubrificação de escoamentos externos a partir de uma mistura de bolhas ou de uma camada de gás apresenta registros que datam do ano 1880. A injeção de gás leva à criação de uma mistura de bolhas perto da superfície que pode alterar significativamente o fluxo no interior da camada limite turbulenta, podendo gerar uma redução considerável do arrasto. As aplicações são voltadas para veículos submarinos e navios. O transporte naval representa o meio de transporte de carga mais utilizado no mundo e, uma vez que a diminuição de arrasto resulta no consumo de combustível, esse processo reflete favoravelmente na economia, além de apresentar grande importância para questões ambientais. A redução de arrasto em navios por meio de bolhas encontra-se tipicamente na faixa entre 10% a 20%. Para submarinos, estas reduções podem alcançar 80%. O arrasto é maior em velocidades baixas, momento em que a redução de arrasto se faz mais atraente. Importante observar que a potência necessária para bombear o ar sob o casco não deve ser maior do que a potência de propulsão que é salva, uma vez que a injeção de bolhas só é utilizada quando uma economia de energia for viável.

Muitos são as investigações acerca dos mecanismos que geram a redução de arrasto através da injeção de bolhas. A presença de bolhas altera o escoamento, introduzindo efeitos de compressibilidade, modificando o transporte turbulento e a viscosidade do fluido. A deformabilidade e o tamanho das bolhas, assim como as propriedades do escoamento, consistem em relevantes aspectos para descrever a redução de arrasto, como constatado por van den Berg *et al.*, 2005.

Outro trabalho, realizado por van den Berg *et al.*, 2007, demonstra que a redução de arrasto através de bolhas é caracterizado como um efeito de camada limite, em que a eficiência da redução de arrasto é maior quando a superfície do casco apresenta-se mais lisa. Estes resultados ajudam a compreender porque a corrosão do casco ou materiais orgânicos encontrados no mesmo reduzem drasticamente o efeito das bolhas, uma vez que a rugosidade destrói a camada limite e, por conseguinte, o mecanismo que leva à redução de arrasto. Portanto, é importante que a superfície do casco não apresente rugosidade, assim como devem existir cuidados para que não haja cavitação ao redor do casco, pois sua ocorrência pode proporcionar desgastes na superfície. Existem outros avanços significativos na compreensão dos processos físicos que estão envolvidos na redução de arrasto. Para uma revisão detalhada, o trabalho de Ceccio, 2010, é indicado.

É importante salientar que um clássico exemplo da aplicação de bolhas é encontrado na elevação artificial de um fluido que se encontra contido em um poço de produção, através do bombeamento por cavidades progressivas, ou seja, o bombeio contínuo de fluido contendo bolhas. A bomba realiza um deslocamento positivo e é constituída de rotor e estator, onde a geometria do conjunto é responsável por formar uma série de cavidades identicamente herméticas. Tal procedimento é largamente utilizado na indústria petrolífera (Thomas, 2004). O petróleo geralmente flui à superfície espontaneamente, devido à pressão interna dos gases, porém, quando esta pressão é reduzida, faz-se necessária a atuação de processos mecânicos, os quais suprem a pressão dos gases no reservatório (i.e., elevam artificialmente a pressão interna dos gases). A bomba realiza trabalho imersa em poços de petróleo, em que a taxa de fluxo de fluido é diretamente proporcional à velocidade de rotação da bomba. O bombeamento pode ser utilizado mesmo quando existe a elevação natural, com a finalidade de aumentar o fluxo de petróleo que se encontra em um poço de produção. O uso de bombeio por cavidades progressivas consiste no método mais eficiente e de menor custo para auxiliar a extração de petróleo (Saveth *et al.*, 1989).

Registre-se ainda que a cavitação é amplamente utilizada também para homogeneizar, misturar ou quebrar partículas suspensas em um líquido composto, como o leite. Existem várias máquinas comerciais com este intuito, onde bolhas são inseridas em determinados pontos para causar implosões. É importante observar que na

construção destas máquinas, faz-se necessário que suas paredes possuam materiais que resistam ao colapso de bolhas, como o aço inoxidável, dentre outros. Bolhas também podem exercer a função de aumentar a área de contato entre as fases gás-líquido.

1.1.1 Cavitação acústica: o Ultra-som

As ondas geradas pelo ultra-som podem ser utilizadas para estabelecer um campo acústico em um fluido, possibilitando a existência de cavitação. Aparelhos ultra-sônicos são basicamente compostos por transdutores (conversores de energia), construídos a partir de materiais pizeoelétricos, como os cristais, que apresentam variação de suas dimensões físicas quando sujeitos a uma corrente elétrica alternada. Esta variação resulta em um movimento nas faces do material, originando energia de vibração mecânica, ou ondas sonoras. Caso a corrente seja suficientemente alta, ondas de alta frequência, i.e. ultra-sons, são geradas. O mesmo transdutor que emite o sinal ultra-sônico pode funcionar como detector, pois os ecos que a ele voltam produzem vibração no material pizeoelétrico, fazendo variar suas dimensões físicas que, por sua vez, acarretam o aparecimento de um campo elétrico. Esse campo gera sinais que podem ser amplificados e registrados.

A utilização de ultra-som aplicado em bolhas pode favorecer o aumento de reações químicas, correspondendo a uma importante área de investigação, denominada sonoquímica (Mason, 1999). Os efeitos químicos apresentados pela utilização do ultra-som são divididos em três áreas: *(i)* sonoquímica homogênea de líquidos; *(ii)* sonoquímica heterogênea entre sistemas líquido-líquido ou líquido-sólido; *(iii)* sonocatálise, que consiste na combinação entre os anteriores. Estes efeitos químicos não ocorrem devido a uma interação direta com espécies moleculares ou da interação entre ondas, mas provêm da presença de cavitação acústica, utilizada como um meio para concentrar a energia gerada pelo ultra-som em uma forma quimicamente útil. Entre os benefícios gerados, pode-se citar: menor utilização de catalisadores, menor temperatura para ocorrer a reação, redução do período de indução, geração de espécies reativas úteis, entre outros.

A implosão de bolhas consiste em um fenômeno que pode ser considerado uma “micro-reação”, uma vez que gera um alto campo de temperatura (da ordem da temperatura encontrada na superfície do sol), onde simples reações químicas podem acontecer. Para líquidos contendo sólidos, a cavitação próxima de superfícies gera intensos jatos que implicam no aumento da temperatura da superfície e ondas de choque que são capazes de danificar esta superfície. A cavitação pode resultar em transferência de massa, limpeza de superfícies, redução do tamanho de partículas, ativação de metais ou até mesmo no craqueamento ou quebra de moléculas, como o desdobramento de proteínas (Singh *et al.*, 2006). Outras aplicações incluem a modificação das propriedades do sólido, como a fabricação de nanomateriais (Gedanken, 2004) ou a modificação de superfícies de polímeros (uma revisão acerca da aplicação de ultra-som em diferentes materiais pode ser encontrada no trabalho de Suslick & Price, 1999).

Suspensões de pó-líquido produzem colisões de altas velocidades entre partículas, alterando a morfologia, reatividade e composição da superfície (Suslick, 1990). Um exemplo é observado na Figura 1.4⁴, em que o uso cavitação propicia colisões entre partículas de óxido níquel, resulta no polimento destas partículas. Importante observar que a cavitação produz um número maior de partículas individuais, uma vez que ocorre a fragmentação de partículas maiores.

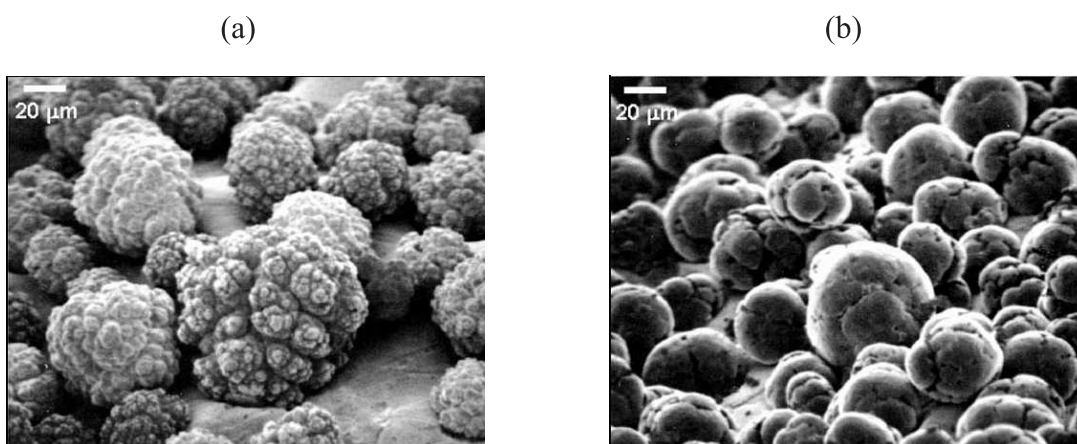


Figura 1.4: O efeito da radiação ultra-sônica na superfície de partículas de óxido níquel (a) Antes da utilização do ultra-som; (b) Após seu uso, gerando cavitação, que resulta na fragmentação das partículas maiores e no polimento de partículas por meio de colisões de altas velocidades.

⁴Ilustração obtida no livro “The Yearbook of Science & the Future 1994”, 1994, Encyclopaedia Britannica, pp. 150.

Doktycz & Suslick, 1990, descobriram que o escoamento turbulento e as ondas de choque produzidas por ultra-som, quando em alta intensidade, podem desencadear o encontro de partículas metálicas com velocidade suficiente para que ocorra fusão no ponto de colisão. A utilização de intenso ultra-som também auxilia na purificação da água, quebrando poluentes e moléculas orgânicas (Dahi, 1982). É importante registrar que a intensa utilização do ultra-som pode repercutir em resultados indesejáveis através do processo de cavitação.

Cumprido examinar neste passo que o uso mais comum de cavitação na indústria é encontrado em dispositivos ultra-sônicos de limpeza, em que o jato causado pela implosão de bolhas remove “sujeiras” indesejadas, como graxas e resíduos de componentes de aeronaves ou automotivos. O colapso também pode ser induzido pela utilização de laser. Na Figura 1.5⁵, uma superfície é coberta por uma fina camada de vaselina, misturada com partículas coloridas, que realizam o papel de referencial. A imagem à esquerda apresenta a superfície antes de ser exposta à cavitação. O colapso de uma única bolha é representada pela imagem ao centro, onde uma limpeza parcial de uma região pode ser observada. O colapso de uma segunda bolha, no mesmo local, é ilustrado pela imagem à direita, apresentando uma área de limpeza ainda maior, em que os resíduos deixados pela primeira bolha são removidos.

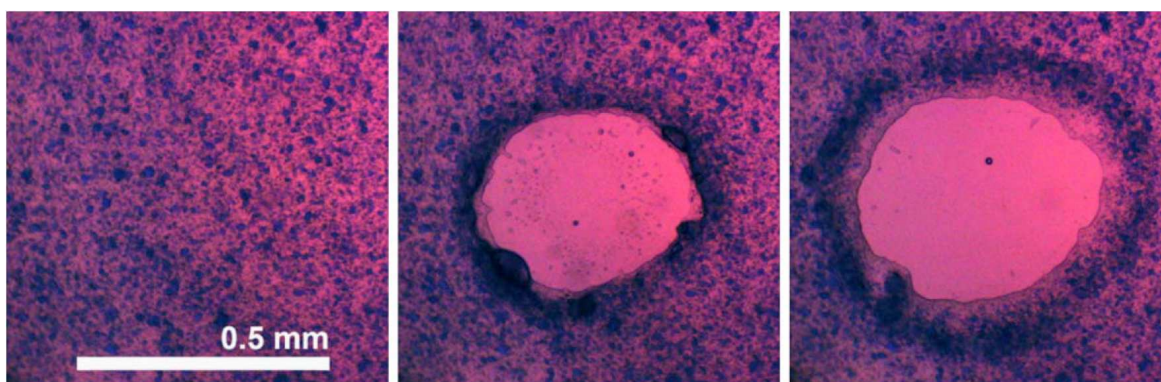


Figura 1.5: Camada de vaselina misturada com partículas coloridas: (esquerda) antes da cavitação; (centro) após cavitação de uma bolha; (direita) após o colapso de uma segunda bolha no mesmo local, apresentando um aumento da área limpa e ausência de resíduos resultantes do colapso da primeira bolha.

⁵Ilustração obtida em publicação de Ohl, C.-D., Arora, M., Dijkink, R., Janve, V., Lohse, D., 2006, Surface cleaning from laser-induced cavitation bubbles, *Appl. Phys. Lett.*, Vol. 89, 074102.

As aplicações para a limpeza são extensas: tais dispositivos são utilizados para limpeza de jóias, lentes, instrumentos cirúrgicos, peças industriais, entre outros. Geralmente, a remoção é função da quantidade de bolhas, da intensidade do ultra-som e do fluxo e temperatura do fluido. Importante ressaltar que um controle da frequência do ultra-som é essencial nos casos de utilização de cavitação com a finalidade de remover sujeiras de superfícies, uma vez que altas frequências podem resultar em intensos colapsos e, conseqüentemente, gerar desgastes na superfície.

Como se pode verificar, a limpeza ultra-sônica também é aplicada em equipamentos eletrônicos, como a remoção de partículas finas em superfícies de silício para fabricação de semicondutores (Gale & Busnaina, 1995). Existem diversas aplicações na área da odontologia, onde a remoção de placas bacterianas (biofilme) de superfícies sólidas como dentes é possível por meio da limpeza ultra-sônica (Parini & Pitt, 2006). Procedimento semelhante pode auxiliar na irrigação do canal radicular, que corresponde a um importante procedimento no tratamento de canais radiculares e consiste na remoção de microorganismos e detritos de dentina resultantes deste tratamento (van der Sluis *et al.*, 2007).

A utilização do ultra-som na presença de micro-bolhas constitui tema frequente na área de biomedicina, que conduz estudos no campo de interface entre biologia e medicina, voltada para a pesquisa das doenças humanas. As primeiras aplicações de micro-bolhas estão relacionadas na sua utilização para acentuar a ultra-sonografia com contraste, ou seja, o diagnóstico a partir do ultra-som. Um exemplo consiste na melhor visualização das câmaras cardíacas durante a ecocardiografia (ou ultra-som do coração). As micro-bolhas, que são injetadas no corpo, assumem o papel de agentes de contraste em sistemas de imagem. Os pulsos do ultra-som são tipicamente aplicados com uma frequência próxima da frequência de ressonância das micro-bolhas. Uma micro-bolha responde aos pulsos ultra-sônicos com o aumento e diminuição no seu diâmetro, produzindo intensos ecos na região em que se encontra. Estes ecos correspondem a frequências que são múltiplos da frequência de ressonância de micro-bolhas. De acordo com os ecos apresentados pelos tecidos, a diferença entre estes ecos e os ecos das micro-bolhas gera um contraste que resulta em uma imagem. O controle da frequência, fase e amplitude da sucessão de pulsos ultra-sônicos é otimizada para

discriminação entre estes ecos, aperfeiçoando a imagem obtida. A evolução da ultra-sonografia com contraste como uma ferramenta clinicamente útil tem sido possível pela capacidade de controlar o tamanho e a estabilidade de micro-bolhas, a partir do seu encapsulamento, realizado por uma “casca”, com diâmetro típico da ordem de microns (Lindner, 2004 e referências neste trabalho). Como resultado, as micro-bolhas, ou agentes de contraste, podem ser administrados através de injeção por via intravenosa. A estabilidade intravascular de micro-bolhas evoluiu com o desenvolvimento de cascas contendo diferentes propriedades ou com a utilização de diferentes gases.

Nos últimos dez anos, uma proposta inovadora tem ocupado espaço cada vez mais significativo em pesquisas científicas: o uso de cavitação para auxiliar no acompanhamento, descobrimento e tratamento de doenças (Stride & Coussios, 2010).

O diagnóstico pela ultra-sonografia pode fornecer informações acerca do volume e velocidade do sangue contido em regiões capilares. Esta técnica tem sido usada recentemente para examinar como respostas capilares anormais contribuem para doenças como a doença arterial coronariana (estreitamento dos vasos que suprem o coração), hiperlipidemia (concentrações elevadas de gorduras no sangue) e diabetes, e se estas alterações podem ser reguladas por meio de terapia envolvendo medicamentos (Lindner, 2004). A imagem a ser adquirida necessita de um “alvo” (região) onde a estimativa da taxa de fluxo microvascular é realizada, de forma similar à ressonância magnética com contraste dinâmico (Dayton & Ferrara, 2002). O método para a formação de imagem é desenvolvido com a utilização de micro-bolhas. Quantificar o escoamento do sangue tem como princípio básico duas propriedades destas micro-bolhas: (i) apresentam comportamento na micro-circulação aproximadamente idêntico ao comportamento das células do sangue (Lindner *et al.*, 2002); (ii) colapsam sob excitação de intenso ultra-som. A Figura 1.6, retirada do artigo realizado por Ferrara *et al.*, 2007, ilustra a seqüência necessária para estimar esta taxa de fluxo sanguíneo: a taxa é avaliada a partir do uso de pulsos de transmissão de altas amplitudes, designados para destruir as micro-bolhas (ou agentes de contraste) localizadas no alvo desejado, combinados posteriormente com pulsos de baixa pressão que realizam a função de estimar o reabastecimento de micro-bolhas no alvo analisado, a partir da taxa de aumento do sinal acústico. Portanto, a investigação da intensidade acústica das micro-bolhas reflete a velocidade de deslocamento do sangue e seu volume contido no micro-vaso.

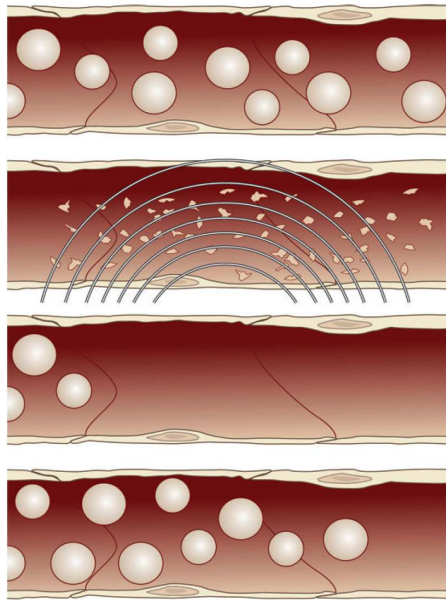


Figura 1.6: Micro-bolhas circulam livremente em microvasos. Intensos pulsos ultra-sônicos aplicados na região-alvo geram o colapso destes agentes de contraste. Pulsos de baixa pressão são utilizados para analisar o tempo necessário para que outras micro-bolhas ocupem o espaço alvo.

É importante observar que este procedimento é efetuado em regime permanente, onde a concentração de micro-bolhas na corrente sanguínea é constante. Assim, o número de micro-bolhas que entra ou sai de uma micro-circulação em um região/alvo fixo é igual.

Além de aplicações em cardiologia, as imagens por meio de micro-bolhas podem ser importantes ferramentas para a avaliação de anormalidades do movimento da parede do vaso, defeitos de perfusão e na descoberta de tumores. No interior de tumores cancerígenos, o escoamento de micro-bolhas não ocorre de forma contínua. Assim, estimar as variações que a taxa de fluxo apresentam consiste em um forte indicativo da presença de tumores (e.g. Chomas *et al.*, 2003).

Da mesma forma, a análise do escoamento também pode ser útil para examinar a resposta à terapia de medicamentos, uma vez que indica se ainda existem tumores na região examinada e se os medicamentos estão atingindo a região correta. O trabalho realizado por Ferrara *et al.*, 2007 (e referências ali encontradas) esclarece como funcionam várias destas aplicações, e.g. o tratamento do câncer utilizando agentes antiangiogênicos.

É importante salientar que micro-bolhas são utilizadas na condução e na entrega de medicamentos e genes, como proposto por Shohet *et al.*, 2000. Esta “entrega a domicílio” ao alvo ou tecido intencionado está relacionada a micro-bolhas especialmente desenvolvidas como veículos que podem ser carregados com o agente terapêutico requerido, como o DNA plasmidial ou medicamentos no auxílio do tratamento de câncer. A liberação destes agentes acontece no momento de ruptura destas micro-bolhas por meio do uso de intenso ultra-som. Como o ultra-som é aplicado somente na região de interesse, os medicamentos são liberados localmente. Esta seqüência é ilustrada pela Figura 1.7 (a), também retirada do artigo realizado por Ferrara *et al.*, 2007. As partículas terapêuticas são apresentadas pela cor azul. Porém, a intensidade do ultra-som deve ser definida de maneira delimitada, uma vez que pode gerar uma ruptura no revestimento das paredes do vaso sanguíneo, ocasionando o extravasamento do medicamento e ineficácia do tratamento, como apresentado pela Figura 1.7 (b).

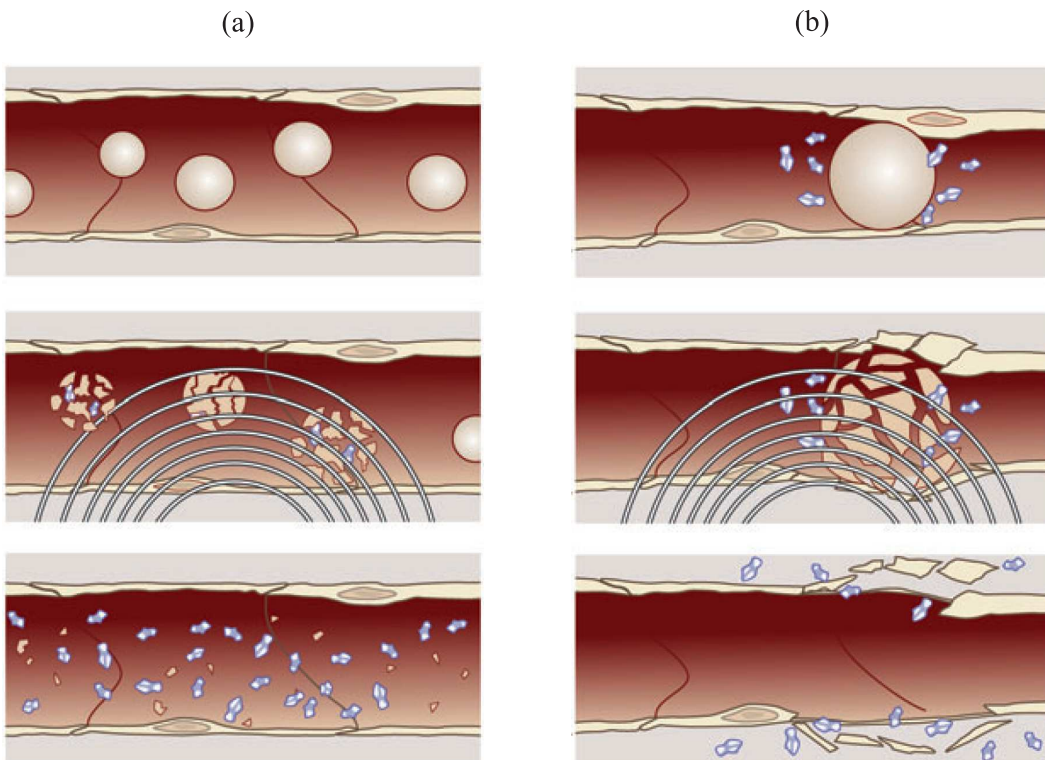


Figura 1.7: Seqüência que representa o funcionamento da entrega de medicamentos utilizando como veículo micro-bolhas. (a) Micro-bolhas circulam em pequenos vasos sanguíneos contendo partículas terapêuticas (apresentadas pela cor azul). Quando intensos ultra-sons são utilizados no local, a ruptura das micro-bolhas ocorre, gerando a distribuição do medicamento; (b) ruptura das paredes do vaso sanguíneo, devido ao uso indevido do ultra-som, resultando no extravasamento do medicamento.

Um medicamento deve superar várias barreiras naturais do corpo para ser efetivo. A utilização de micro-bolhas apresenta-se como ótima solução para entrega de medicamentos devido ao fato de atuarem tanto em regiões da ordem de microns quanto regiões da ordem de centímetros. Além disso, tem sido demonstrado que o movimento das micro-bolhas aumenta a permeabilidade das membranas celulares individuais e do endotélio (camada celular interna dos vasos sanguíneos), conseqüentemente aumentando a absorção e atividade dos medicamentos, tornando possível o transporte destes agentes em locais biologicamente inacessíveis, como os coágulos de sangue ou tumores sólidos (Stride & Coussios, 2010). Assim, o cérebro, coração, pâncreas e vários coágulos e tumores cancerígenos têm sido alvos de estratégias para entrega de medicamentos por meio da ultra-sonografia (Choi *et al.*, 2007).

Apesar do uso de micro-bolhas para a entrega de medicamentos ter sido aplicada somente em animais, vários são os estudos pré-clínicos bem sucedidos e que ajudam a demonstrar o potencial desta metodologia em um futuro próximo, como se pode verificar em Ferrara *et al.*, 2007. A otimização de micro-bolhas consiste em um grande desafio, uma vez que apresenta vários parâmetros envolvidos, que abrangem desde condições ideais relativas aos materiais para encapsular bolhas a limitações no estabelecimento de parâmetros do ultra-som. A investigação do uso de diferentes cascas (geradas pelo encapsulamento), bem como seu comportamento e dinâmica, pode ser encontrado no resumo realizado por Ferrara *et al.*, 2009.

É sobretudo importante assinalar que na medicina, a cavitação também encontra aplicações em outros processos que necessitam de alguma forma de fragmentação, uma vez que o colapso de bolhas resulta na produção de jatos líquidos e tensões de cisalhamento locais que podem gerar a ruptura ou limpeza de estruturas biológicas. Cavidades podem ser acumuladas em torno da membrana de célula cancerígena, quebrando a parede celular, possibilitando a atuação de micro-partículas terapêuticas, como mostrado na Figura 1.8⁶. A célula apresenta-se colorida para facilitar a visualização do seu rompimento.

⁶Ilustração obtida no site www.chemlin.net/news/2006/sep2006/therapeutic-molecules.htm.

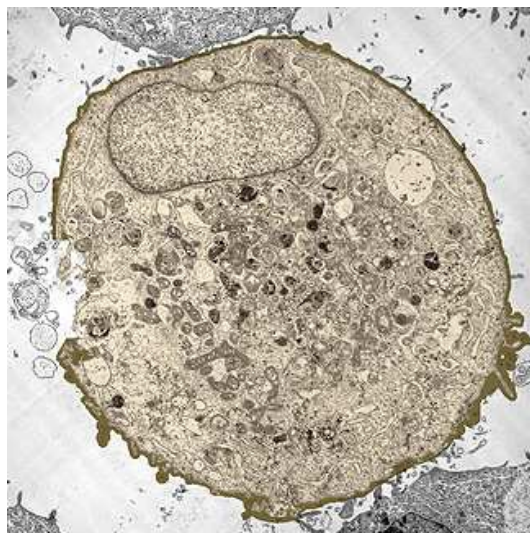


Figura 1.8: Célula cancerígena logo após ser exposta ao ultra-som, resultando em rompimento de parede devido ao colapso de uma micro-bolha localizada na sua superfície.

O colapso de bolhas realiza um papel essencial na destruição da litíase urinária, mais conhecida como pedras nos rins, cujo processo de destruição é denominado Litotripsia Extracorpórea por Ondas de Choque (LECO)⁷, que revolucionou o tratamento da doença. As ondas de choque aplicadas aos cálculos renais (devido justamente à cavitação), resultam em fragmentos menores que podem ser eliminados na urina (Kodama & Takayama, 1998). O uso deste procedimento inicialmente estava associado a danos vasculares, como hemorragias e hematomas. Porém, atualmente, tal procedimento apresenta-se pouco evasivo, devido ao exame minucioso das ondas de choque, a partir das propriedades e do número de pedras existentes (e.g. Lokhandwalla & Sturtevant, 2000). O tema ainda gera investigações relevantes, uma vez que, quanto maior o controle da cavitação, maior pode ser a velocidade e a eficácia do tratamento (Stride & Coussios, 2010). A cavitação demonstra-se igualmente útil para eliminação de gorduras localizadas, processo este denominado hidrolipoclasia.

A presença de micro-bolhas também pode estar associada à obstrução de microvasos (micro-embolia) em diferentes regiões do corpo, como por exemplo a micro-embolia cerebral. Neste caso, o tratamento tem como princípio a retirada de micro-bolhas, a partir de procedimentos que efetuam uma redução do número de micro-embolia gasosa (e.g. Schoenburg *et al.*, 2003).

⁷Citado em publicação de Cheidde, L., Shor, N., Heilberg, I. P., 1998, Alterações renais causadas por litotripsia extracorpórea por ondas de choque (LECO), *J. Bras. Nefrol.*, Vol. 20, 34–39.

Em todas as aplicações aqui apresentadas, é importante ressaltar que a utilização de ultra-som deve ser realizada de maneira controlada, pois pode apresentar efeitos desagradáveis, uma vez que o “benefício” gerado pelo colapso ou implosão de bolhas pode corresponder a um “malefício” para superfícies/regiões próximas, como tecidos (e.g. ter Haar, 2010). Em todos os casos, é importante uma melhor exploração de diversos fatores, como interações bolha-bolha e bolha-parede. O trabalho de Qin *et al.*, 2009, descreve o que já foi realizado sobre a resposta de micro-bolhas a um pulso ultra-sônico e o impacto da oscilação que estas micro-bolhas apresentam em pequenos vasos sanguíneos.

Apesar da necessidade do amadurecimento acerca da combinação ultra-som/bolhas, o potencial de uso é enorme e não há dúvidas quanto ao papel fundamental que bolhas exercem e irão exercer no futuro, ainda mais quando comparadas a outras formas de tratamento, como a radioterapia, em que ocorre contaminação por radiação. A idéia é aprender mais a respeito da dinâmica de bolhas, e conseqüentemente a controlá-las. Motivações não faltam, principalmente com o surgimento da nanomedicina, que concilia a nanotecnologia com a medicina. Por exemplo, trabalhos já estão sendo realizados para investigar a utilização de nano-bolhas como nano-agentes, para auxiliar em diagnósticos ou na entrega de partículas terapêuticas (Wang *et al.*, 2010).

Uma revisão a respeito das aplicações envolvendo ultra-som, sonoquímica e assuntos relacionados pode ser encontrada em livros, como Mason & Lorimer, 2002. A seção seguinte baseia-se em uma abordagem acerca dos modelos matemáticos desenvolvidos na área de dinâmica de bolhas.

1.2 MODELOS MATEMÁTICOS

A investigação do movimento da bolha fornece informações essenciais para as mais diversas aplicações, conforme visto anteriormente. Portanto, modelamentos matemáticos constituem importantes ferramentas para auxiliar nestas aplicações, uma vez que o estudo da dinâmica de bolhas prediz o comportamento que estas podem apresentar.

Rayleigh, 1917, foi responsável pelo primeiro trabalho teórico na área de dinâmica de bolhas, realizando uma formulação matemática para o fechamento de uma cavidade, onde efeitos de pressão e viscosidade são negligenciados (uma descrição mais detalhada é fornecida no capítulo 4). A partir deste trabalho, outros estudos teóricos surgiram, explorando diferentes fatores que envolvem a dinâmica de bolhas. A solução geral para descrever a dinâmica de bolhas é baseada na equação obtida por Rayleigh-Plesset (devidamente explorada no capítulo 2), constituindo o escopo deste trabalho desenvolver uma extensão da mesma. Vários são as investigações acerca das modificações desta equação que rege o movimento da bolha.

Quando a magnitude da velocidade da parede da bolha é da ordem da velocidade do som, o modelo requer que a compressibilidade do líquido seja considerada (e.g. Gilmore, 1952 e Prosperetti, 1987). Transferência de calor entre a bolha e o líquido pode ser considerado, acoplando a equação da difusão de calor à equação de Rayleigh-Plesset modificada, desconsiderando casos adiabáticos ou isotérmicos (Kamath & Prosperetti, 1991). Pode-se remover a consideração de uma morfologia esférica na interface bolha-líquido, em que a forma da interface é determinada pela interação gás-líquido ou por uma forma predeterminada (e.g. Crum, 1979). A análise de uma “nuvem de bolhas” também tem sido explorado, descrito a partir de uma média das equações governantes, levando-se em conta a dinâmica da interação entre bolha-bolha (e.g. Commander & Prosperetti, 1989).

Outros fatores como a difusão de gás, a distribuição espacial da pressão, oscilações não-lineares próximas à superfície ou em tubos também tem sido explorados, a partir de soluções analíticas ou simulações numéricas. Uma revisão acerca dos modelos aplicados pode ser encontrada em Qin *et al.*, 2009. Diversos livros também abordam desenvolvimentos matemáticos apresentados pela dinâmica de bolhas, em que os mais indicados são Leighton, 1994 e Brennen, 1995.

Cumprе salientar que fatos curiosos acerca da dinâmica de bolhas também se encontram presentes em tópicos relevantes na área acadêmica. A implosão de uma bolha é caracterizada por proporcionar temperaturas e pressões extremamente altas e, em condições específicas, pode gerar um fenômeno conhecido pela emissão de pequenas

explosões de luz, que foi primeiramente observado por Frenzel & Schultes, 1934. A emissão de luz a partir de um colapso da bolha consiste em uma área amplamente desenvolvida na cavitação, denominada luminescência.

Quando ocorre a emissão no contexto de cavitação acústica, a luminescência é intitulada sonoluminescência, apesar de ser a cavitação - e não o som - a causa da emissão de luz, visível a olho nu. No entanto, somente a partir da década de 80 que a pesquisa acerca da sonoluminescência foi impulsionada. O fenômeno ocorre quando uma bolha confinada e excitada periodicamente em um fluido ambiente colapsa violentamente, de forma que a energia local do colapso gera uma emissão de luz, seguida por uma curta emissão sonora. Após um determinado tempo, a bolha pode retornar ao tamanho de equilíbrio característico e o processo pode ser repetido, em que a bolha pode permanecer estável por milhares de ciclos acústicos (Brenner *et al.*, 2002).

Experimentos demonstram as propriedades únicas nesse sistema: o espectro de luz emitida tende ao ultravioleta e depende fortemente do tipo de gás dissolvido no líquido: gases nobres como Hélio e Argônio aumentam a intensidade de emissão de luz dramaticamente (Brenner *et al.*, 2002). A observação da luminescência apresenta complexidade devido às durações das emissões, que se encontram na ordem de 50 a 300 picosegundos (Lugli & Zerbetto, 2007). Várias são as teorias que tentam explicar os mecanismos físicos que causam essa emissão de luz e ainda há controvérsias quanto a uma formulação definitiva. Considera-se até a possibilidade da presença de fusão termo-nuclear no processo (Taleyarkhan *et al.*, 2002). Basicamente, a sonoluminescência é explorada a partir da análise de estabilidade e da equação de Rayleigh-Plesset, considerando a dissociação e difusão de gases. O efeito de suspensões contendo surfactantes e polímeros nos fenômenos de sonoluminescência são temas investigados e atuais na corrente literatura (e.g. Wu *et al.*, 2009).

Considerações e modelamentos matemáticos são realizados acerca de formação de bolhas e a respectiva velocidade de subida que estas podem apresentar, responsável pela definição do tempo de contato característico entre as fases que governam o fenômeno de transporte interfacial. Uma revisão sobre o tema pode ser encontrada em Kulkarni & Joshi, 2005, que também inclui trabalhos relacionados a fluidos não-Newtonianos.

O movimento ascendente de uma bolha exibe um comportamento complexo e muitas vezes curioso, como é o caso do “paradoxo de Leonardo”, em que bolhas apresentam trajetórias espirais ou ziguezague, de acordo com um raio característico (Lugli & Zerbetto, 2007).

Existem trabalhos relacionados ao estudo de bolhas imersas em fluidos não-Newtonianos, que pode englobar desde modelos para fluidos magnéticos (Cunha *et al.*, 2002) a fluidos poliméricos. Cumpre registrar que este trabalho se insere neste contexto. A adição de polímeros no fluido ambiente tem sido usada como uma maneira eficiente no propósito de se reduzir o arrasto turbulento em escoamentos (e.g. Toms, 1948, Bark *et al.*, 1975 e Andreotti & Cunha, 2007). Conforme descrito anteriormente, a partir de um campo de pressão constituído por ondas acústicas, a bolha entra em regime oscilatório, onde altos valores de pressão podem proporcionar movimentos não-lineares da mesma, podendo esta entrar em colapso. Ellis & Hoyt, 1968 descobriram que, quando aditivos são utilizados, observa-se oscilações mais estáveis, se comparados à sua ausência. Experimentações contendo soluções de polímeros solúveis (reduzores de arrasto) confirmam a inibição da cavitação (Chahine & Fruman, 1979). Porém, existem dúvidas sobre os mecanismos físicos responsáveis pela linearização do movimento da bolha, como o papel da elasticidade, constituindo-se em tema ainda em discussão.

A presença da elasticidade consiste em uma importante propriedade para caracterizar os aditivos, e sua consideração pode alterar drasticamente a resposta da bolha. Modelos que apresentam os efeitos elásticos dos aditivos, denominados fluidos viscoelásticos, começaram a ser explorados por Fogler & Goddard, 1970, que propuseram um tratamento teórico considerando o colapso de uma bolha esférica em um modelo viscoelástico linear, incluindo soluções analíticas. Cumpre ressaltar o trabalho de Tanasawa & Yang, 1970, desenvolvido para um modelo para fluido Oldroyd de 3 constantes e o trabalho de Kim, 1994 para um fluido UCM (Upper Convected Maxwell). Diversos outros modelos foram explorados, entre eles o modelo de Jeffrey e o modelo que considera um líquido de segunda ordem.

Os efeitos da transferência de calor e massa na parede da bolha tem sido analisados para um fluido viscoelástico (e.g. Shulman & Levitsky, 1992), assim como

investigações acerca do comportamento de bolhas com formas não-esféricas, demonstrando que efeitos da reologia do fluido são maiores caso a bolha não mantenha sua esfericidade (Hara & Schowalter, 1984). Registre-se que efeitos de compressibilidade de um líquido viscoelásticos também tem sido explorados (Brujan, 1999), assim como efeitos do líquido na formação e crescimento de bolhas (e.g. Ting, 1978).

Como pode ser observado, o estudo relativo à dinâmica de bolhas é muito frequente e aborda várias temáticas. Sua exploração resulta numa área cada vez mais importante e aplicada, demonstrando-se essencial a busca por uma compreensão mais abrangente dos fenômenos que envolvem bolhas ou cavidades. Nesta seção foi possível constatar o desenvolvimento e variedade dos modelos matemáticos propostos, onde muitos destes já se encontram consolidados e possuem vasta referência na literatura. Outros temas, todavia, são passíveis de serem melhor explorados.

A dinâmica de bolhas na presença de um fluido não-Newtoniano, particularmente fluidos viscoelásticos, consiste em um assunto que apresenta escassas investigações experimentais e ainda gera muitas discussões no meio acadêmico. A seção a seguir encerra este capítulo, de forma a relacionar as aplicações e os modelos matemáticos descritos com o trabalho proposto.

1.3 PROPOSTA DE TRABALHO

No presente trabalho investiga-se o movimento oscilatório não-linear de uma bolha imersa em um fluido complexo, em que propriedades viscoelásticas são consideradas. A bolha está sujeita a um campo externo acústico de pressão, que assume a princípio um comportamento senoidal. O fluido ambiente considerado é caracterizado a partir de uma suspensão de aditivos, podendo estes serem definidos como fibras longas rígidas ou macromoléculas de polímeros de alto peso molecular. Para uma análise mais rigorosa do problema, pode-se utilizar de diferentes modelos de fluidos não-Newtonianos quando aditivos são aplicados.

A descrição destes aditivos pode ser realizada de acordo com um modelo de Maxwell, i.e., um modelo de viscoelasticidade linear, para pequenas taxas de deformação. O modelo de Maxwell combina um efeito de viscosidade extensional com um efeito elástico (de relaxação). Porém, este modelo linear não permite a realização de investigações com altos efeitos elásticos ou altas amplitudes de excitação (e.g. ultra-som). Para uma análise mais apurada, um modelo de viscoelasticidade não-linear também é desenvolvido, baseado em uma formulação Oldroyd-Maxwell. A influência de alguns parâmetros vinculados ao presente trabalho de dinâmica de bolhas também se faz presente, como o parâmetro elástico número de Deborah De , auxiliando na compreensão do comportamento da bolha nas condições propostas.

Um trabalho anterior relacionado a bolhas foi desenvolvido dentro do grupo Vortex-UnB por Santos, 2005, explorando o comportamento de uma bolha em um fluido Newtoniano contendo aditivos que apresentavam somente anisotropia. Portanto, este trabalho teve como foco a investigação do efeito da anisotropia de partículas poliméricas na dinâmica de bolhas, relacionando os parâmetros físicos que possibilitam atenuar as não-linearidades do movimento da bolha, mesmo para condições severas de escoamento.

O presente trabalho dá prosseguimento aos avanços do trabalho realizado por Santos, 2005, realizando uma análise mais criteriosa e considerando que os aditivos podem apresentar características elásticas e anisotrópicas.

Muitas das aplicações exploradas em seção anterior demandam uma melhor investigação do comportamento de bolhas em fluidos viscoelásticos. O magma, por exemplo, apresenta características viscoelásticas, onde os efeitos da viscosidade e da elasticidade para diferentes viscosidades apresentadas ainda são incompreendidos (Ichihara *et al.*, 2004).

Da mesma forma, a dinâmica de bolhas na presença da viscoelasticidade é fundamental para a investigação do ultra-som em biomedicina. Os meios biológicos podem exibir comportamento viscoelástico, como vários tecidos do corpo ou o próprio sangue (Chmiel & Walitza, 1980).

Um trabalho teórico realizado por Allen & Roy, 2000a, demonstrou que as diferentes características viscoelásticas que os tecidos apresentam constitui um fator que tem relação direta com a intensidade de ultra-som permitido, refletindo em potenciais riscos biológicos que o uso de bolhas pode causar, tema que necessita ser melhor explorado, inclusive experimentalmente. Chahine *et al.*, 2009, elaboraram uma investigação experimental utilizando a técnica de medição de distribuição do tamanho de bolhas (ABS - Acoustic Bubble Spectrometer) para obter medições experimentais em meios biológicos.

Registre-se ainda que as cascas de micro-bolhas, geradas pelo encapsulamento, possuem características viscosas e elásticas, e podem ser descritas a partir de modelos viscoelásticos. Nota-se que uma descrição teórica da dinâmica de bolhas encapsuladas em um escoamento sanguíneo deve considerar propriedades viscoelásticas do líquido e das cascas. Tal estudo requer a presença de mais de um modelo viscoelástico (e.g. Khismatullin & Nadim, 2002). Métodos experimentais modernos estão sendo utilizados para melhor compreender a resposta de bolhas encapsuladas, como o trabalho feito por van der Meer *et al.*, 2007, em que câmeras de alta velocidade possibilitam obter filmes com até 25 milhões de frames por segundo, auxiliando na análise da oscilação destas bolhas.

Vale ressaltar que o comportamento de bolhas em fluidos viscoelásticos também desempenha importante função na limpeza ultra-sônica, assim como em outras aplicações industriais não mencionadas, por exemplo, no processamento de compósitos, na desvolatilização de polímeros (extração de monômeros), em colunas de bolhas ou na fermentação (Lugli & Zerbetto, 2007).

As propriedades reológicas determinam com que frequência ocorre a formação e o colapso de bolhas, bem como a forma e o tamanho que estas apresentam. Fica evidente, portanto, a importância acerca da proposta deste trabalho, uma vez que se faz necessário obter um melhor entendimento das forças hidrodinâmicas e acústicas que atuam nas bolhas.

1.3.1 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos do trabalho consistem em:

- Desenvolvimento de uma análise paramétrica e dimensional da equação governante de dinâmica de bolhas. Descrição das equações de balanço, das condições de contorno e dos parâmetros físicos mais relevantes, que controlam a dinâmica do movimento.
- Estudo de modelos constitutivos de fluidos não-Newtonianos aplicados na formulação do problema. Formulação para viscoelasticidade linear baseado em um Modelo de Maxwell. Desenvolvimento de solução assintótica.
- Formulação de modelamento físico para viscoelasticidade não-linear utilizando formulação Oldroyd-Maxwell.
- Elaboração um código computacional, baseado no método de Runge-Kutta de quinta ordem, utilizando passo de tempo adaptativo. Validação do código.
- Análise para uma bolha imersa em fluido puramente viscoso, levando em consideração a sensibilidade do movimento às condições iniciais. Obtenção de resultados relativos ao movimento da bolha para o modelo puramente anisotrópico.
- Realização de teoria assintótica para o raio mínimo e uma análise do intervalo de tempo. Implementação de nas rotinas computacionais utilizando critério de colapso para a simulação.
- Interpretação da dinâmica da bolha em modelo viscoelástico linear, focando uma investigação do efeito elástico. Análise de uma solução assintótica para este modelo.
- Comparativo entre os modelos viscoelásticos. Análise do modelo viscoelástico não-linear Maxwell-Oldroyd a partir do espectro de potência utilizando FFT (Fast Fourier Transform).

- Determinação de uma função de orientação de aditivos, partindo de uma orientação randômica. Investigação da influência da orientação média de aditivos no comportamento da bolha.
- Estabelecimento e análise de formulação para o acoplamento da distribuição de probabilidade da orientação de aditivos com o movimento da bolha. Investigação do comportamento da densidade de probabilidade e da influência da orientação de acordo com os efeitos elásticos presentes.

Em termos gerais, este trabalho visa um melhor entendimento acerca dos mecanismos físicos responsáveis pela estabilização ou desestabilização do movimento de uma bolha imersa em uma suspensão de aditivos que apresentam propriedades elásticas e anisotrópicas, a partir de uma excitação acústica.

O trabalho se encontra dividido da seguinte maneira: o capítulo 2 trata da fundamentação teórica, explorando as equações de balanço e as condições de contorno que são utilizadas no modelamento físico-matemático do problema. O capítulo aborda os modelos constitutivos de fluidos e a formulação generalizada da equação governante que rege a dinâmica de uma bolha esférica, bem como os parâmetros adimensionais presentes no problema.

No capítulo 3 os modelos constitutivos de fluidos são desenvolvidos. A primeira parte trata do modelo de anisotropia dos aditivos, seguido por um modelo de viscoelasticidade linear, em que uma solução para a equação íntegro-diferencial governante do problema é sugerida. A última parte trata do modelo de viscoelasticidade não-linear Maxwell-Oldroyd e a respectiva formulação matemática adimensional. O capítulo 4 descreve a metodologia numérica utilizada para gerar os resultados computacionais e testes de validação. Neste capítulo também são apresentados resultados preliminares obtidos pelo código computacional desenvolvido, envolvendo a dinâmica de bolha em um meio viscoso assim como em um meio puramente anisotrópico. Ao final do capítulo, descreve-se a teoria assintótica para o raio de colapso e a análise no momento do colapso.

O capítulo 5 apresenta resultados relativos ao modelo viscoelástico linear. O capítulo encerra com uma proposta assintótica para o modelo de viscoelasticidade linear, baseada em uma expansão da integral de convolução por meio de sucessivas integrações por partes, e a respectiva análise de resultados para esta solução.

No capítulo 6 são apresentados e discutidos resultados numéricos para uma bolha imersa em um fluido viscoelástico não-linear Maxwell-Oldroyd. Primeiramente, realiza-se uma comparação entre os efeitos elásticos e anisotrópicos, seguido por uma análise da dinâmica de bolhas por meio do espectro de potência. O capítulo se encerra com a análise do comportamento entre os modelos de viscoelasticidade linear e não-linear.

Já o capítulo 7 explora a função orientação de aditivos. Uma investigação desta função de orientação a partir de uma função de probabilidade caracterizada por uma distribuição normal é apresentada e, logo em seguida, uma formulação para a função de probabilidade considerando um acoplamento com o movimento da bolha é desenvolvida. Neste capítulo também estão presentes os resultados e discussões. Finalmente, o capítulo 8 trata das considerações finais do presente trabalho e apresenta algumas sugestões para trabalhos futuros acerca do tema.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Após a descrição da formação de bolhas vista no capítulo anterior, procede-se objetivando definir a dinâmica de crescimento e colapso de uma bolha que se encontra imersa em um fluido. O presente capítulo descreve a formulação matemática utilizada no desenvolvimento das equações constitutivas que são exploradas neste trabalho.

Primeiramente, considerações acerca de modelos constitutivos de fluidos são realizadas, incluindo uma abordagem vinculada ao tensor de tensões. O modelo físico é apresentado, seguido pelas equações de balanço do problema e das condições de contorno associadas. As últimas seções tratam da descrição da equação governante da dinâmica de bolhas, comumente denominada equação de Rayleigh-Plesset, e sua respectiva adimensionalização. Esta equação, modificada para a proposta deste trabalho, é apresentada na sua forma generalizada, que consiste em importante ferramenta para a realização dos modelos matemáticos baseados nas diferentes equações constitutivas propostas.

2.1 MODELOS CONSTITUTIVOS DE FLUIDOS

A Mecânica dos Meios Contínuos apresenta os princípios gerais que são comuns a mecânica dos sólidos e dos fluidos, a partir de uma análise realizada sobre um meio contínuo, que é definido como um meio cuja menor escala macroscópica específica possível possua propriedades que se encontram distribuídas uniformemente. As equações de balanço vistas na seção anterior representam leis de conservação de massa e quantidade de movimento válidas em qualquer ponto de um meio contínuo, para qualquer instante de tempo. Porém, tornam-se insuficientes quando objetiva-se determinar a resposta de um contínuo caracterizado por um material em particular.

Equações adicionais são necessárias, que consideram e refletem as propriedades características do contínuo em observação. Tais equações são chamadas equações constitutivas (equações reológicas de estado) e definem uma resposta intrínseca, que depende da constituição interna do material considerado. Portanto, não é possível realizar uma generalização das equações constitutivas, uma vez que cada material possui características individuais.

As equações constitutivas baseiam-se em suposições, onde é realizado uma aproximação na escala do contínuo, quando na verdade o fenômeno observado ocorre em nível molecular (como na difusão molecular ou na transferência de momentum). Apesar das equações fornecerem uma definição, nada mais são que uma descrição média dos efeitos moleculares, baseadas em uma experiência física, ou em dados experimentais, devido à inabilidade de descrever o fenômeno a nível molecular. Mas também podem ser desenvolvidas criteriosamente por meio de generalizações matemáticas dos dados experimentais.

2.1.1 Princípios para formulação de Equações Constitutivas

Truesdell & Toupin, 1960, propuseram vários princípios a serem satisfeitos quando se deseja formular uma equação constitutiva, dentre os quais se destacam:

(i) *Princípio da Consistência.* Qualquer equação constitutiva deve ser compatível com as equações de balanço de massa, momentum e energia.

(ii) *Princípio da Causalidade.* Consiste na relação entre causa e efeito, onde o tensor de tensões depende da história recente do movimento.

(iii) *Invariância de Coordenadas.* Quando uma equação constitutiva é proposta, deve-se assegurar que sua forma se conserva para qualquer sistema de coordenadas inercial, para um fixo instante de tempo, uma vez que o fenômeno físico não pode ser afetado por um sistema de coordenadas específico que seja escolhido para sua descrição, mantendo sua forma funcional.

(iv) *Indiferença Material a um Referencial.* Consiste no princípio mais importante para a construção de uma equação constitutiva, e é também conhecido como Princípio da Objetividade. Postula que a resposta intrínseca de um material deve ser independente do observador, ou seja, deve apresentar a mesma resposta para todos os observadores, caso contrário não consistiria em uma propriedade intrínseca do material. Este princípio restringe a forma matemática que a equação constitutiva pode assumir. Para um vetor qualquer \mathbf{u} , este é dito uma quantidade vetorial objetiva quando obedece a seguinte lei de transformação

$$\mathbf{u}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u} , \quad (2.1)$$

onde \mathbf{Q} representa o tensor ortogonal e \mathbf{u}' é o valor que \mathbf{u} assume em outro referencial. Significa, portanto, que o vetor \mathbf{u} é invariante a uma transformação ortogonal ou rotação de corpo rígido. Da mesma maneira, um tensor de segunda ordem qualquer Σ é dito objetivo quando obedece a transformação

$$\Sigma' = \mathbf{Q} \cdot \Sigma \cdot \mathbf{Q}^T , \quad (2.2)$$

onde \mathbf{Q}^T remete ao tensor transposto do tensor ortogonal. Neste trabalho considera-se que T sempre implica na transposição do tensor em que este se encontra aplicado.

A equação constitutiva que descreve o comportamento de um material deve ser independente de sua representação, i.e., do sistema de coordenadas, da base vetorial ou do sistema de referência. De uma maneira geral, a equação constitutiva deve possuir propriedades invariantes. Este trabalho se insere na investigação de equações constitutivas para a Mecânica dos Fluidos. O fluido é uma substância que se deforma continuamente quando submetido a uma tensão de cisalhamento qualquer. Essencialmente, a equação constitutiva relaciona o tensor de tensões em um elemento de fluido ao campo de pressão, à viscosidade e ao gradiente de velocidade que o fluido apresenta.

2.1.2 O Tensor de Tensões

Da Mecânica dos Meios Contínuos, o tensor de tensões é definido como o tensor que trata da distribuição de tensões e esforços internos em um meio contínuo. O tensor de tensões precisa ser especificado por meio de equações constitutivas que descrevam o comportamento do fluido em movimento. O caso mais simples para descrever um tensor de tensões na mecânica dos fluidos consiste na ausência de movimento (ou movimento uniforme) ou então para um fluido invíscido. Neste caso, o fluido encontra-se sujeito somente a tensões normais, que são independentes da direção normal à superfície do elemento fluido na qual a mesma age. Partindo da lei de Cauchy, um tensor de tensões Σ é definido como

$$\Sigma = -p(\rho, T_e)\mathbf{I} , \quad (2.3)$$

em que $p(\rho, T_e)$ denota a pressão estática ou hidrostática do fluido, que pode estar em função da temperatura T_e ou da massa específica ρ (vale notar, porém, que efeitos térmicos e variação da massa específica são desconsiderados neste trabalho). Nota-se que \mathbf{I} é definido como o tensor identidade, que consiste em um tensor unitário e isotrópico.

Como um tensor isotrópico é invariante a uma mudança de coordenadas e a pressão é um escalar, portanto conclui-se que o tensor de tensões da Eq. 2.3 é objetivo. Tomando o traço da Eq. (2.3), obtém-se a pressão mecânica p_m , em que $p_m = -(1/3)(tr\Sigma)$ e que neste caso é equivalente à pressão hidrostática. A equação constitutiva generalizada para o tensor de tensões de um fluido é dada por

$$\Sigma(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} + \tilde{\Sigma}(\mathbf{x}, t) , \quad (2.4)$$

em que $\tilde{\Sigma}(\mathbf{x}, t)$ remete ao tensor associado com movimentos não-uniformes presentes, devido à presença da viscosidade.

Quando torques induzidos por forças magnéticas (fluidos magnéticos) são negligenciados, o tensor $\tilde{\Sigma}$ pode ser escrito como função do gradiente de velocidade

$$\tilde{\Sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F} \left(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}^2, \dots \right)_{\tau \leq t} . \quad (2.5)$$

Neste caso, \mathcal{F} representa um funcional. O tensor $\tilde{\Sigma}$ pode depender da história da deformação que o fluido sofreu, em um instante τ anterior, até o momento atual, t . Importante notar que a história de deformação remete ao princípio da Causalidade (ii). O gradiente de velocidade $\nabla \mathbf{u}$ pode ser decomposto em uma parte simétrica e outra anti-simétrica, sendo reescrito como

$$\nabla \mathbf{u} = \underbrace{\frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right)}_{\text{Simétrico}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T \right)}_{\text{Anti-simétrico}} , \quad (2.6)$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T \right) . \quad (2.7)$$

Define-se a parte simétrica como tensor taxa de deformação \mathbf{D} , associado com estiramento no fluido e a parte anti-simétrica como tensor taxa de rotação, que está associado com a vorticidade. Nota-se que quando aplica-se a lei de transformação para os tensores $\nabla \mathbf{u}$ e $\nabla \mathbf{u}^T$, estes fornecem (Cunha, 2009)

$$\nabla \mathbf{u}' = \mathbf{Q} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^T , \quad (2.8)$$

$$(\nabla \mathbf{u}')^T = \mathbf{Q} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T \cdot \mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T . \quad (2.9)$$

Apesar dos tensores $\nabla \mathbf{u}$ e $\nabla \mathbf{u}^T$ não constituírem quantidades objetivas, o tensor simétrico \mathbf{D} satisfaz a lei de transformação, correspondendo a um tensor objetivo, uma vez que

$$\mathbf{D}' = \frac{1}{2} \mathbf{Q} \cdot \left(\mathbf{Q} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T \cdot \mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^T \right) \cdot \mathbf{Q}^T , \quad (2.10)$$

e, a partir das propriedades do tensor ortogonal $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$ e $\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^T = -\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T$, tem-se que

$$\mathbf{D}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^T, \quad (2.11)$$

enquanto o tensor anti-simétrico \mathbf{W} é uma quantidade não-objetiva, sendo

$$\mathbf{W}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{Q}^T + \frac{1}{2} (\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^T - \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T). \quad (2.12)$$

O tensor Σ encontra-se, portanto, somente em função do tensor taxa de deformação \mathbf{D}

$$\tilde{\Sigma} = \mathcal{F}(\mathbf{D})_{\tau \leq t}. \quad (2.13)$$

Quando a história de deformação do material é desconsiderada, i.e., o material responde de maneira instantânea e independe de tempos anteriores, o fluido é definido como linear. Para o caso em que $\tilde{\Sigma}$ seja função homogênea de \mathbf{D} , tem-se que $\tilde{\Sigma} = \mathcal{F}(\mathbf{D})$. Pode-se escrever o tensor $\tilde{\Sigma}$ como

$$\tilde{\Sigma} = \boldsymbol{\eta} : \mathbf{D}, \text{ ou } \tilde{\Sigma}_{ij} = \eta_{ijkl} D_{kl}. \quad (2.14)$$

A Eq. (2.14) representa a Lei da Viscosidade de Newton Generalizada. Aqui $\boldsymbol{\eta}$ é o tensor viscosidade ou tensor material, que consiste em um tensor de quarta ordem. O tensor η_{ijkl} depende das propriedades físicas do material e possui 81 componentes, denominados coeficientes de viscosidade, com unidade quilograma por metro segundo [M/LT]. Um material que segue esta relação linear proposta na Eq. (2.14) deforma-se na presença da tensão e recupera a configuração original quando a tensão é removida (sem histerese, que caracteriza não-linearidade).

Um fluido linear viscoso isotrópico é definido como o material no qual o tensor viscosidade é isotrópico, não apresentando direção preferencial. Da mecânica dos meios contínuos, tem-se que o tensor isotrópico mais geral de quarta ordem é dado por (Weyl, 1939)

$$\eta_{ijkl} = \lambda_1 \delta_{ij} \delta_{km} + \lambda_2 \delta_{ik} \delta_{jm} + \lambda_3 \delta_{im} \delta_{jk} , \quad (2.15)$$

em que λ_1 , λ_2 e λ_3 são escalares que podem depender da posição e dos invariantes principais do tensor \mathbf{D} . Caso o material seja homogêneo, os coeficientes λ_1 , λ_2 e λ_3 independem das coordenadas espaciais \mathbf{x} explicitamente (pode depender do tempo e da temperatura, que não é o caso). Sendo $\boldsymbol{\eta}$ tensor isotrópico (invariante e objetivo), o tensor de tensões $\boldsymbol{\Sigma}$ satisfaz o princípio da Objetividade, uma vez que este é escrito em termos dos tensores \mathbf{I} , $\boldsymbol{\eta}$ e \mathbf{D} . Utilizando das Eqs. (2.14) e (2.15), o tensor de tensões assume a forma

$$\begin{aligned} \Sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + \lambda_1 \delta_{ij} D_{kk} + \lambda_2 D_{ij} + \lambda_3 D_{ji} \\ \Sigma_{ij} &= (-p + \lambda_1 D_{kk})\delta_{ij} + 2\mu D_{ij} , \end{aligned} \quad (2.16)$$

relembrando que \mathbf{D} consiste em um tensor simétrico ($D_{ij} = D_{ji}$). A constante λ_1 é denominada como segundo coeficiente de viscosidade ou coeficiente de viscosidade dinâmica. A constante μ é conhecida como viscosidade cisalhamento ou simplesmente viscosidade, e é definida em termos de λ_2 e λ_3 , em que $\mu = (\lambda_2 + \lambda_3)/2$.

A viscosidade consiste em uma propriedade intrínseca ao fluido, que descreve sua resistência a fluir, sendo a medida do atrito entre as camadas internas dentro do fluido. Apesar da viscosidade corresponder ao transporte microscópico de quantidade de movimento por difusão molecular, realiza-se uma aproximação a partir da análise de um contínuo do fluido que fornece um valor médio desta difusão. Reescrevendo a Eq. (2.16) em notação de Gibbs, tem-se que

$$\boldsymbol{\Sigma} = -p\mathbf{I} + [\lambda_1 \text{tr}(\mathbf{D})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}] . \quad (2.17)$$

Esta relação é conhecida como Lei de Stokes (Chandrasekharaiah & Debnath, 1994) para um fluido viscoso, isotrópico, instantâneo e linear, onde o termo que se encontra entre colchetes consiste na parte de movimento ou não-equilíbrio.

O tensor de tensões também pode ser representado em termos de um tensor isotrópico e um tensor deviatórico (que possui traço nulo), em que a parte isotrópica é definida em função da pressão mecânica. Tomando o traço da Eq. (2.17) obtém-se

$$\text{tr}\boldsymbol{\Sigma} = -3p + 3\lambda_1(\text{tr}\mathbf{D}) + 2\mu(\text{tr}\mathbf{D}) . \quad (2.18)$$

relembrando a definição de pressão mecânica e para $\text{tr}\mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{u}$, tem-se

$$p_m = -\frac{\text{tr}\boldsymbol{\Sigma}}{3} = p - \left(\lambda_1 + \frac{2}{3}\mu \right) \nabla \cdot \mathbf{u} . \quad (2.19)$$

O coeficiente de viscosidade volumétrica, κ , é definido como $\kappa = \lambda_1 + 2/3\mu$, assumindo valor positivo para escoamentos em alta frequência e pode apresentar valor nulo ($\lambda_1 = -2/3\mu$) para um escoamento em baixa frequência. O coeficiente λ_1 pode ser calculado, assim, a partir da viscosidade volumétrica κ subtraída de dois terços da viscosidade μ .

Utilizando da Eq. (2.19) e substituindo na Eq. (2.17), o tensor de tensões é reescrito em termos de um tensor isotrópico ($p_m\mathbf{I}$) e um tensor deviatórico, associado à viscosidade de cisalhamento, em que

$$\boldsymbol{\Sigma} = -p_m\mathbf{I} + 2\mu \left(\mathbf{D} - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} \right) . \quad (2.20)$$

Quando o fluido é incompressível, tem-se que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ e a Eq. (2.20) assume, portanto,

$$\boldsymbol{\Sigma} = -p_m \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D} . \quad (2.21)$$

Nota-se que $p_m = p$ para este caso. Quando a equação constitutiva assume a forma dada pela Eq. (2.21) e a Lei da viscosidade de Newton é respeitada, define-se o fluido como um *Fluido Newtoniano*. A Lei de viscosidade de Newton prediz que

$$\tau = \mu \dot{\gamma} , \quad (2.22)$$

em que τ corresponde à tensão cisalhante e $\dot{\gamma}$ representa a taxa de deformação. Aqui, a viscosidade mantém-se constante, e a tensão cisalhante relaciona-se linearmente com a taxa de deformação do escoamento. Quando há variação da viscosidade de acordo com a taxa de cisalhamento aplicada, a relação apresentada pela Lei da viscosidade de Newton assume a forma

$$\tau = \mu(\dot{\gamma}) \dot{\gamma} . \quad (2.23)$$

Nota-se que o termo $\mu(\dot{\gamma})$ remete à viscosidade aparente do fluido. A viscosidade, portanto, é descrita como função da taxa de cisalhamento, e a Eq. (2.21) é reescrita como

$$\boldsymbol{\Sigma} = -p \mathbf{I} + 2\mu(\dot{\gamma}) \mathbf{D} . \quad (2.24)$$

Caso o tensor de tensões seja dado pela equação (2.24), o fluido é dito Newtoniano Generalizado ou fluido não-Newtoniano puramente viscoso. Um exemplo de fluido Newtoniano Generalizado é o fluido *power law*, em que a viscosidade é definida como:

$$\mu = C \dot{\gamma}^{b-1} \rightarrow \tau = C \dot{\gamma}^n , \quad (2.25)$$

em que C e b consistem em constantes que podem ser calibradas experimentalmente e representam propriedades do fluido. Nota-se que fazendo $C = \mu$ e $b = 1$ recupera-se a equação (2.22) da solução para a tensão cisalhante de um fluido newtoniano. Qualquer fluido que não satisfaz a Eq. (2.22) é definido como um fluido não-Newtoniano.

É sobretudo importante assinalar que fluidos Newtonianos Generalizados correspondem a fluidos instantâneos, que independem do tempo e que não estão relacionados a efeitos de elasticidade e, portanto, não englobam a totalidade de fluidos não-Newtonianos. Existem vários fluidos que não podem ser preditos a partir da equação constitutiva para fluidos Newtonianos Generalizados. Entre esses fluidos, pode-se citar emulsões, soluções poliméricas ou meios biológicos como o sangue.

Fluidos que dependem do tempo que a taxa de cisalhamento é aplicada e fluidos que possuem propriedades viscosas e elásticas também compõem a categoria de fluidos não-Newtonianos. A tabela (2.1) mostra uma visualização geral das classificações de vários fluidos não-Newtonianos existentes.

A generalização de um fluido incompressível e instantâneo pode ser obtido a partir da definição de um fluido Reiner-Rivlin. Como visto anteriormente, quando o fluido é isotrópico e instantâneo, o tensor associado com movimentos não-uniformes é descrito em termos da parte simétrica do gradiente de velocidade, i.e. $\tilde{\Sigma} = \mathcal{F}(\mathbf{D})$. Assim, o tensor $\tilde{\Sigma}$ pode ser reescrito a partir de uma combinação linear ou polinômio tensorial em \mathbf{D} na forma

$$\tilde{\Sigma} = \alpha_0(I_1, I_2, I_3)\mathbf{I} + \alpha_1(I_1, I_2, I_3)\mathbf{D} + \alpha_2(I_1, I_2, I_3)\mathbf{D}^2 + \dots + \alpha_n(I_1, I_2, I_3)\mathbf{D}^n, \quad (2.26)$$

em que α_n são funções escalares (constantes materiais) dos 3 invariantes fundamentais de D , dados por I_1 , I_2 e I_3 , definidos por Rivlin como (Liu, 2002)

$$I_1 = \text{tr}\mathbf{D}$$

Tabela 2.1: Alguns fluidos não-Newtonianos e suas principais características.

Categoria fluido	Comportamento	Características
Viscoelástico	Maxwell	Combinação linear em série de efeitos viscosos e elásticos
	Oldroyd-B	Modelo não-linear de fluido de Maxwell
	Kelvin	Combinação linear em paralelo de efeitos viscosos e elásticos
	Anelástico	Material retorna à sua forma de repouso
Dependentes do tempo	Reopéticos	$\mu(\dot{\gamma})$ aumenta com duração da tensão
	Tixotrópicos	$\mu(\dot{\gamma})$ reduz com duração da tensão
Fluidos <i>Power Law</i>	Dilatantes	$\mu(\dot{\gamma})$ aumenta com taxa de cisalhamento
	Pseudoplásticos	$\mu(\dot{\gamma})$ reduz com taxa de cisalhamento
Sólido-plástico	Herschell-Bulkley	Requer tensão mínima para iniciar o escoamento
	Bingham	Relação linear entre tensão cisalhamento e taxa de força, para certo valor de tensão que é excedido

$$I_2 = 1/2 [(tr\mathbf{D})^2 - tr(\mathbf{D}^2)]$$

$$I_3 = 1/6 [(tr\mathbf{D})^3 - 3tr(\mathbf{D})tr(\mathbf{D}^2) + 2tr(\mathbf{D}^3)] . \quad (2.27)$$

Nota-se que os invariantes I_1 , I_2 e I_3 representam os coeficientes do polinômio característico de \mathbf{D} . Pelo teorema de Cayley-Hamilton, qualquer tensor de segunda ordem (neste caso o tensor taxa de deformação) satisfaz a equação característica dada por (Cunha, 2008)

$$\mathbf{A}^3 - I_1 \mathbf{A}^2 + I_2 \mathbf{A} - I_3 \mathbf{I} = 0 . \quad (2.28)$$

Deste teorema, fica claro que qualquer tensor \mathbf{D}^n para $n \geq 3$ pode ser expresso como uma combinação linear dos tensores \mathbf{I} , \mathbf{D} e \mathbf{D}^2 . Desta maneira, a Eq. (2.26) assume

$$\tilde{\Sigma} = \alpha_0(I_1, I_2, I_3) \mathbf{I} + \alpha_1(I_1, I_2, I_3) \mathbf{D} + \alpha_2(I_1, I_2, I_3) \mathbf{D}^2 . \quad (2.29)$$

Substituindo a Eq. (2.29) na Eq. (2.4), obtém-se o seguinte tensor de tensões

$$\Sigma = (-p + \alpha_0(I_1, I_2, I_3)) \mathbf{I} + \alpha_1(I_1, I_2, I_3) \mathbf{D} + \alpha_2(I_1, I_2, I_3) \mathbf{D}^2 . \quad (2.30)$$

Fluidos que obedecem a equação constitutiva apresenta na Eq. (2.30) são denominados fluidos Reiner-Rivlin. Para o caso de um fluido que corresponda à Lei de Stokes (Eq. (2.17)), as constantes materiais assumem os valores

$$\alpha_0(I_1, I_2, I_3) = \lambda_1 \text{tr} \mathbf{D} , \quad \alpha_1(I_1, I_2, I_3) = 2\mu , \quad \alpha_2(I_1, I_2, I_3) = 0 . \quad (2.31)$$

Nota-se que a constante α_0 depende somente do primeiro invariante fundamental, $I_1 = \text{tr} \mathbf{D}$, enquanto as constantes α_1 e α_2 são independentes de todos os invariantes fundamentais. Pela ausência da não-linearidade que os termos \mathbf{D}^2 , I_2 e I_3 apresentam, conclui-se que a forma mais geral para um fluido linear é a forma dada pela Eq. (2.17). Para um fluido Reiner-Rivlin incompressível, obtém-se que

$$I_1 = \text{tr} \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 . \quad (2.32)$$

E, assim, a representação do tensor de tensões é a mesma dada pela Eq. (2.21), para um Fluido Newtoniano, ou para um Fluido Newtoniano Generalizado da Eq. (2.24), quando $\mu = \mu(\dot{\gamma})$.

2.1.3 A presença de aditivos

A combinação de aditivos (macromoléculas que possuem alto peso molecular ou fibras) adicionados ao fluido ambiente causa uma mudança estrutural no fluido. Esta combinação consiste em uma suspensão, sendo caracterizado como um fluido complexo, mesmo quando o fluido ambiente é Newtoniano. Um fluido complexo é definido como uma mistura composta por duas fases, que englobam as combinações: sólido-líquido (suspensões), sólido-gás (granulares), líquido-gás (espumas) e líquido-líquido (emulsões).

A maioria dos fluidos complexos são fluidos não-Newtonianos. Pode-se, portanto, descrever o fluido complexo através de um fluido equivalente, contínuo. É proposto por Cunha, 1995, um tensor de tensões para um escoamento constituído por uma suspensão:

$$\Sigma = -p \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D} + \sigma , \quad (2.33)$$

O tensor σ é definido como o tensor de tensões devido à presença de aditivos, em um fluido Newtoniano. É importante conceber que σ está associado à deformação dos aditivos do fluido complexo de acordo com o escoamento em que estes se encontram. O objetivo de se construir este tensor extra está no fato de incorporar o efeito ou contribuição principal das fibras na dinâmica do escoamento, sem recorrer ao uso de cálculos caros ou muito complicados.

Convém notar que o tensor de tensões apresentado na equação (2.33) pode ser reescrito em termos do tensor isotrópico e tensores deviatóricos, em que

$$\boldsymbol{\Sigma} = -p_m \mathbf{I} + 2\mu \left(\mathbf{D} - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} \right) + \left(\boldsymbol{\sigma}^N - \frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I} \right) , \quad (2.34)$$

em que $\boldsymbol{\sigma}^N = 2\mu\mathbf{D}$ representa o tensor associado ao fluido Newtoniano. Assumindo um fluido incompressível e conservando a definição de pressão mecânica, em que $p_m = -tr(\boldsymbol{\Sigma})/3$, o tensor $\boldsymbol{\sigma}$ deve necessariamente apresentar traço nulo. Portanto:

$$tr(\boldsymbol{\sigma}) = 0 . \quad (2.35)$$

Como se pode verificar, movimentos não-uniformes que se encontram presentes na descrição de um fluido contendo aditivos são representados pelo tensor $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}} = \boldsymbol{\sigma}^N + \boldsymbol{\sigma}$. O tensor de tensões definido pela equação (2.33) também pode ser escrito em termos da parte uniforme e não-uniforme, conforme a equação (2.4), assumindo a forma (Cunha, 2008)

$$\boldsymbol{\Sigma} = -p \mathbf{I} + \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} , \text{ ou } \boldsymbol{\Sigma} = -p \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}^N + \boldsymbol{\sigma} . \quad (2.36)$$

Considera-se diferentes equações constitutivas para descrever o tensor extra de tensões. O capítulo 3 aborda as equações constitutivas propostas neste trabalho, enquanto os capítulos posteriores exploram os resultados e a respectiva análise, fornecendo uma comparação entre os modelos.

2.2 O MODELO FÍSICO

Torna-se necessário a descrição do modelo físico aqui tratado, definindo claramente quais condições são assumidas e as consequências acerca destas considerações.

Este trabalho tem como objetivo examinar o comportamento de uma única bolha, imersa num domínio considerado infinito (sem fronteiras), caracterizado por uma suspensão de aditivos ou fluido complexo e sujeita a um campo de pressão acústico variável. O fluido em questão é tido como uma associação de partículas semelhantes a longas fibras cilíndricas ou macromoléculas de polímeros constituídos de alto peso molecular, que atuam imersas em um líquido Newtoniano. De uma forma geral, pode-se dizer que o fluido proposto desenvolve um comportamento típico de um fluido complexo, ou seja, não-Newtoniano.

Considera-se que a bolha mantém sempre uma forma esférica ao longo de seu movimento. Assim, a dinâmica apresentada pela bolha é caracterizada como unidimensional, uma vez que só existe oscilação da superfície da bolha na direção radial e, conseqüentemente, um movimento unidimensional radial também é induzido no líquido. Em resumo, caso se deseje explorar o problema a partir de uma análise realizada em coordenadas esféricas, o campo de velocidade pode ser representado por $\mathbf{u} = u(r, \vartheta, \varphi) = u(r, 0, 0)$, resultando em $\mathbf{u} = u_r(r, t)$.

Em virtude dessas considerações, variações espaciais de pressão no interior da bolha, assim como efeitos de não-equilíbrio no instante de colapso são desconsiderados. Por conseguinte, negligencia-se também os gradientes de pressão no líquido, o campo gravitacional e a presença de surfactantes.

É importante conceber que perturbações não-esféricas demonstram-se mais expressivas quando a bolha encontra-se situada próxima a uma superfície sólida, que induz distorções na configuração da bolha, inclusive no colapso, conforme visto anteriormente (e.g. Figura 1.2). Convém ponderar ainda que a situação de simetria proporcionada pela esfericidade provoca uma simplificação evidente do problema.

Como o presente trabalho encontra-se voltado a análise da influência que a presença de aditivos e suas características exercem na dinâmica do movimento da bolha, a condição de esfericidade do movimento não afeta de maneira significativa os fenômenos investigados.

Assume-se que o líquido é incompressível. Deve-se atentar para tal consideração com cuidado, uma vez que a compressibilidade do líquido não pode ser ignorada quando o interesse reside em fases posteriores do colapso, onde a velocidade da interface da bolha pode ser comparada à velocidade do som no líquido (Brujan, 1999). Este trabalho não possui o intento de investigar minuciosamente o colapso de uma bolha, no entanto, algumas considerações acerca do momento do colapso devem ser realizadas. Uma análise deste tema é apresentada posteriormente no capítulo 4.

É negligenciado qualquer fluxo de massa na interface líquido-gás, pois esse fenômeno demonstra-se relevante em dois casos: (i) para a análise de dinâmica de bolhas na presença de uma pressão ambiente muito baixa; (ii) para uma alta concentração de vapor no interior da bolha (Brennen, 1995). Assume-se que a bolha é composta pela mistura de vapor com gás, em que a concentração de gás é sempre maior que a de vapor. Salienta-se que o gás apresenta um efeito de amortecimento e auxilia a evitar o colapso.

Considera-se a ausência de efeitos térmicos. Desta forma, a utilização da equação do balanço de energia não é necessária, uma vez que são negligenciados os gradientes de temperatura, bem como o aquecimento no líquido devido a fontes internas de calor ou radiação.

Cumprido examinar neste passo que a pressão do gás no interior da bolha depende da difusão de calor através da superfície da bolha e da mudança volumétrica com respeito ao seu estado de equilíbrio (Prosperetti *et al.*, 1988). O gás no interior da bolha assume, portanto, um processo politrópico (comportamento típico de um gás ideal), pelo fato de negligenciar a difusão térmica, relacionando a pressão do gás com o volume da bolha.

Na Figura 2.1, um esquema da bolha é apresentado. Define-se $R(t)$ como o raio da bolha, sendo $p_b(t)$ referente à sua pressão interna, e ρ_b à sua massa específica. O termo $p_\infty(t)$ é definido como a pressão ambiente que excita todo o sistema (i.e. a pressão de excitação acústica). Os termos μ e ρ denotam a viscosidade dinâmica do fluido e a massa específica da suspensão, respectivamente. O coeficiente de tensão superficial é representado por $\tilde{\sigma}$ e r corresponde à distância do centro da bolha até um ponto qualquer localizado no líquido.

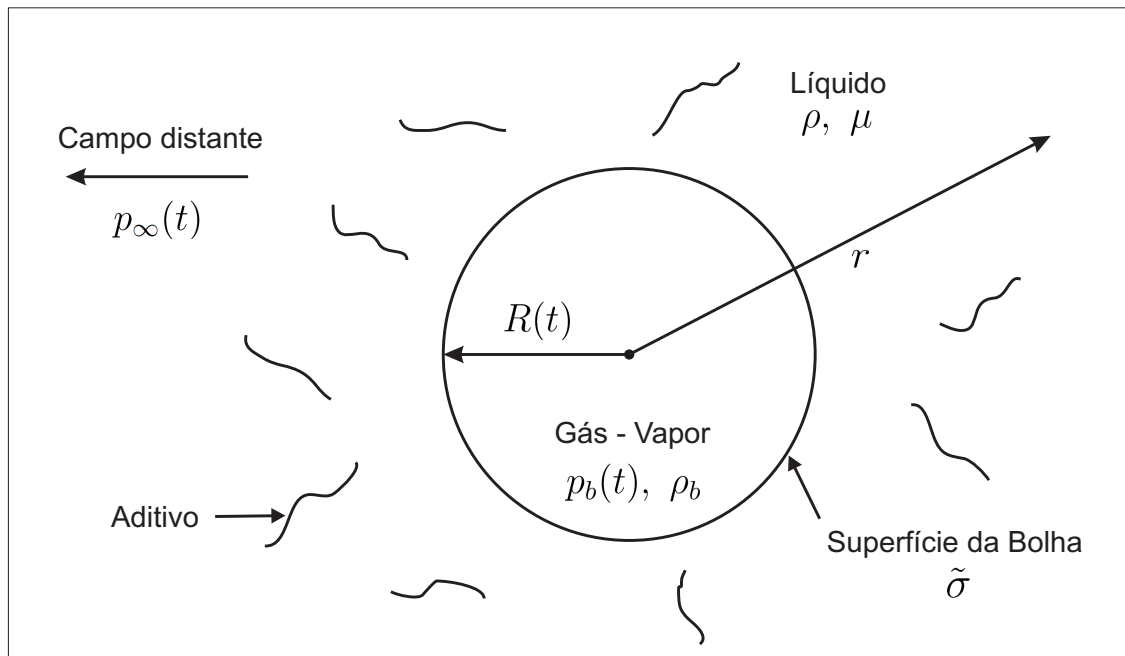


Figura 2.1: Esquema de uma bolha esférica imersa em um fluido que contém aditivos (macromoléculas ou fibras), sujeita a um campo acústico de excitação.

Introduzido o modelo físico e sua conseqüente representação esquemática, a seguir é definido o equacionamento do problema da dinâmica de bolhas, utilizando as equações de balanço.

2.3 EQUAÇÕES DE BALANÇO

Inicia-se o modelamento físico-matemático partindo das equações de balanço, que, para o caso proposto, definem-se como a equação da continuidade e a equação da quantidade de movimento.

2.3.1 Equação da continuidade

A equação da continuidade (ou equação da conservação da massa) em sua forma diferencial é dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 , \quad (2.37)$$

em que \mathbf{u} é o campo de velocidades Euleriano do movimento. Para um fluido incompressível, a equação 2.37 obtém a forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 , \quad (2.38)$$

lembrando que assume-se o escoamento como sendo puramente radial, conseqüentemente há uma simplificação do modelamento matemático do problema, já que $u_\theta = u_\varphi = 0$. Portanto, expandindo a equação da continuidade para coordenadas esféricas, obtém-se:

$$\frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) \right] = 0 , \quad (2.39)$$

em que u_r é a componente de velocidade na direção radial. Após realizar a integração da equação (2.39), a equação da continuidade é obtida da forma:

$$r^2 u_r(r, t) = F(t) , \quad (2.40)$$

resultando em:

$$u_r(r, t) = \frac{F(t)}{r^2} , \quad (2.41)$$

em que $F(t)$ é relacionada ao raio da bolha $R(t)$ por uma condição de contorno cinemática na superfície da bolha ($r = R(t)$). No caso idealizado de não haver transporte de massa pela interface, encontra-se:

$$u(R, t) = \frac{dR}{dt} . \quad (2.42)$$

Substituindo a equação (2.42) em (2.40), para $r = R(t)$:

$$F(t) = R^2 \frac{dR}{dt} . \quad (2.43)$$

Esta é uma boa aproximação, válida mesmo quando evaporação e, ou condensação estão ocorrendo na interface. Caso seja considerada uma bolha de vapor, em que a taxa volumétrica de produção de vapor equivale à taxa de crescimento do tamanho da bolha ($4\pi R^2 dR/dt$), a taxa de evaporação mássica deve ser dada por

$$\dot{m} = \rho_v(T_b) 4\pi R^2 dR/dt , \quad (2.44)$$

em que $\rho_v(T_b)$ consiste na densidade de vapor saturado e pode encontrar-se em função da temperatura da bolha, T_b , mas que é desconsiderado pois este trabalho trata de um caso isotérmico. Essa taxa deve ser igual ao escoamento de massa do líquido para o interior, relativo à interface.

Define-se a velocidade interna do líquido relativo à interface por $\rho_v(dR/dt)/\rho$, em que ρ representa a massa específica do líquido. Então, pela equação da continuidade,

$$4\pi R^2 \frac{dR}{dt} - 4\pi R^2 \frac{\rho_v}{\rho} \frac{dR}{dt} = 4\pi r^2 u . \quad (2.45)$$

Isolando $u(r, t)$ obtém-se:

$$r^2 u = R^2 \frac{dR}{dt} \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho} \right) , \quad (2.46)$$

fazendo $r = R$:

$$u(R, t) = \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho} \right) \frac{dR}{dt} , \quad (2.47)$$

finalmente, substituindo em (2.40):

$$F(t) = \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho} \right) R^2 \frac{dR}{dt} . \quad (2.48)$$

Em muitos casos práticos tem-se $\rho_v \ll \rho$, portanto a aproximação encontrada na equação (2.43) demonstra-se apropriada, tanto para bolhas de gás como bolhas de vapor. Igualando a equação (2.40) com a (2.43), obtém-se:

$$u(r, t) = \frac{R^2}{r^2} \frac{dR}{dt} = \frac{R^2}{r^2} \dot{R} , \quad (2.49)$$

\dot{R} representa a velocidade do raio da bolha. Nota-se que a velocidade $u(r, t)$ diminui com o aumento da distância r em relação ao centro da bolha.

2.3.2 Equação da quantidade de movimento

A equação da quantidade de movimento, ou equação de Navier-Stokes pode ser apresentada em sua forma generalizada, em que

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma} + \rho \mathbf{g} , \quad (2.50)$$

em que \mathbf{g} corresponde ao vetor aceleração da gravidade. Utilizando a definição de um tensor de tensões na presença de aditivos dada pela equação (2.33) e desprezando-se o campo gravitacional, a equação (2.50) assume a forma

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^N + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} . \quad (2.51)$$

Para o movimento unidimensional proposto, a velocidade consiste na componente $\mathbf{u} = u_r \hat{e}_r$. Portanto, a equação da quantidade de movimento em coordenadas esféricas, na direção r , é dada por

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sigma_{rr}^N \right) - \frac{(\sigma_{\vartheta\vartheta}^N + \sigma_{\varphi\varphi}^N)}{r} \\ &+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sigma_{rr} \right) - \frac{(\sigma_{\vartheta\vartheta} + \sigma_{\varphi\varphi})}{r} . \end{aligned} \quad (2.52)$$

Sabendo que $\boldsymbol{\sigma}$ tem traço nulo, conforme definido na seção 2.1.3, ou seja, $\sigma_{rr} + \sigma_{\vartheta\vartheta} + \sigma_{\varphi\varphi} = 0$, obtém-se a igualdade $\sigma_{rr} = -(\sigma_{\vartheta\vartheta} + \sigma_{\varphi\varphi})$. Procedendo de maneira análoga para $\boldsymbol{\sigma}^N$, a equação (2.52) é reescrita como

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \left[\frac{\partial \sigma_{rr}^N}{\partial r} + \frac{3\sigma_{rr}^N}{r} \right] + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{3\sigma_{rr}}{r} . \quad (2.53)$$

Ressalte-se que $\boldsymbol{\sigma}^N = 2\mu\mathbf{D}$ representa o tensor associado a movimentos não-uniformes presentes em um fluido Newtoniano. Como a única componente do problema aqui tratado encontra-se na direção radial, \hat{e}_r , o tensor taxa de deformação assume a forma:

$$\mathbf{D} = \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \hat{e}_r \hat{e}_r . \quad (2.54)$$

Desta maneira, os termos associados ao tensor $\boldsymbol{\sigma}^N$ na direção radial são dados por

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^N}{\partial r} + \frac{3\sigma_{rr}^N}{r} = 2\mu \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) = 0 . \quad (2.55)$$

É possível observar que os termos da equação (2.55) são cancelados quando utiliza-se da definição da velocidade dada pela equação (2.49), encontrando

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{2\dot{R}R^2}{r^3} \right) = \frac{6\dot{R}R^2}{r^4} , \quad (2.56)$$

$$\frac{3}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{3}{r} \left(-\frac{2\dot{R}R^2}{r^3} \right) = -\frac{6\dot{R}R^2}{r^4} . \quad (2.57)$$

A partir da substituição da equação (2.55) em (2.53) tem-se que

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{3\sigma_{rr}}{r} . \quad (2.58)$$

Os termos à esquerda da igualdade fornecida pela equação (2.58) são apresentados em termos da velocidade, em que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\dot{R}R^2}{r^2} \right) = \frac{2R\dot{R}^2 + R^2\ddot{R}}{r^2} , \quad (2.59)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\dot{R}R^2}{r^2} \left(-\frac{2\dot{R}R^2}{r^3} \right) = -\frac{2\dot{R}^2 R^4}{r^5} , \quad (2.60)$$

Com a substituição das equações (2.59), (2.60) na equação (2.58) finalmente obtém-se:

$$\frac{2\dot{R}^2 R + R^2 \ddot{R}}{r^2} - \frac{2\dot{R}^2 R^4}{r^5} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{3\sigma_{rr}}{r} \right). \quad (2.61)$$

Integra-se a equação (2.61) no intervalo entre o raio da bolha R e o infinito, em que

$$\begin{aligned} \int_R^\infty \frac{2\dot{R}^2 R + R^2 \ddot{R}}{r^2} dr - \int_R^\infty \frac{2\dot{R}^2 R^4}{r^5} dr &= -\frac{1}{\rho} \int_R^\infty \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{1}{\rho} \int_R^\infty \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} dr \\ &+ \frac{3}{\rho} \int_R^\infty \frac{\sigma_{rr}}{r} dr, \end{aligned} \quad (2.62)$$

obtendo:

$$\frac{2\dot{R}^2 R + R^2 \ddot{R}}{R} - \frac{2\dot{R}^2 R^4}{4R^4} = \frac{p_\ell - p_\infty}{\rho} + \frac{1}{\rho} \sigma_{rr}|_R^\infty + \frac{3}{\rho} \int_R^\infty \frac{\sigma_{rr}}{r} dr, \quad (2.63)$$

em que p_∞ denota a pressão ambiente e p_ℓ consiste na pressão do líquido, a ser definida pelas condições de contorno na interface da bolha. Convém notar que $\sigma_{rr} \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$, uma vez que somente a pressão estática encontra-se presente no fluido. A equação (2.63) pode ser resumida em

$$\ddot{R}R + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{p_\ell - p_\infty}{\rho} - \frac{1}{\rho} \sigma_{rr}|_{r=R} + \frac{3}{\rho} \int_R^\infty \frac{\sigma_{rr}}{r} dr. \quad (2.64)$$

Quando modelos anisotrópicos são utilizados, sem a presença de elasticidade, os termos associados a σ_{rr} são cancelados (maiores detalhes podem ser encontrados na descrição de um modelo anisotrópico, presente no capítulo 3), de maneira análoga aos termos σ_{rr}^N apresentados na equação (2.55), e a equação (2.64) é dada por

$$\ddot{R}R + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{p_\ell - p_\infty}{\rho}. \quad (2.65)$$

Nota-se que a forma dada pela Eq. (2.65) também é obtida na ausência de aditivos, ou seja, $\sigma_{rr} = 0$. A equação (2.65) corresponde à famosa equação de Rayleigh-Plesset, que consiste na equação fundamental da dinâmica de bolhas, cuja revisão histórica de seu desenvolvimento foi realizada por Plesset & Prosperetti, 1977. A primeira menção a esta equação foi proposta em um trabalho por Besant, 1859.

A equação de Rayleigh-Plesset foi usada por Rayleigh, 1917 (na ausência de tensão superficial e termos viscosos), explorada detalhadamente no capítulo 4. Plesset, 1949, foi quem primeiro aplicou esta equação ao problema de cavitação de bolhas em movimento, especificamente para uma bolha de vapor sujeita a um campo de pressão variável. A forma obtida na equação (2.64) corresponde à equação de Rayleigh-Plesset generalizada, em que o fluido não-Newtoniano pode ser considerado.

2.4 CONDIÇÕES DE CONTORNO NA INTERFACE DA BOLHA

Para determinar uma análise do comportamento de uma bolha, faz-se necessário definir as condições de contorno existentes na interface da bolha. Com esse propósito, considere um volume de controle que consista numa lâmina infinitesimal contendo um segmento da interface, de acordo com a Figura 2.2.

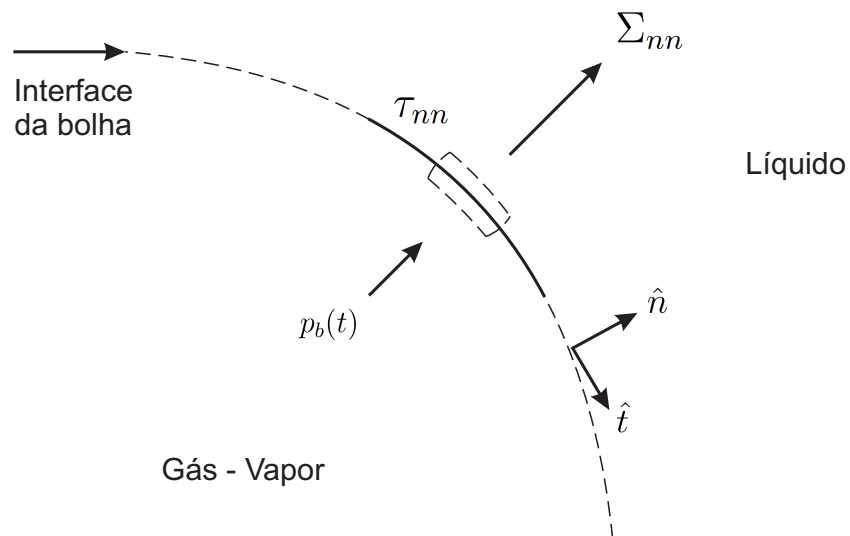


Figura 2.2: Representação bidimensional do volume de controle de um segmento da superfície da bolha.

Aplicando a condição de salto de tensões na interface da bolha, considerando que a mesma se encontra livre de impurezas e, ou surfactantes, resultando na ausência de gradientes de tensão superficial (ou ausência do efeito de Marangoni), obtém-se continuidade de tensões tangenciais e também da velocidade, expressas por, respectivamente:

$$(\Sigma_{nt})_{\ell} = (\Sigma_{nt})_b = (\Sigma_{n\xi})_{\ell} = (\Sigma_{n\xi})_b = 0 , \quad (2.66)$$

$$u_{\ell} = u_b , \quad (2.67)$$

em que \hat{t} e $\hat{\xi}$ representam os vetores unitários tangentes à superfície da bolha, enquanto \hat{n} é o vetor normal à parede da bolha. Os termos Σ_{nt} e $\Sigma_{n\xi}$ denotam as componentes da tensão tangencial presentes na superfície da bolha, referentes ao lado da bolha (índice b) e ao lado do líquido (índice ℓ). O termo u_{ℓ} remete à velocidade na parte líquida e u_b à velocidade no interior da bolha e possuem mesmo valor na interface.

É sobremodo importante assinalar que ocorre neste caso uma descontinuidade nas tensões normais (causada pela tensão superficial), que assume a forma (Pozrikidis, 1992)

$$\tau_{nn} = (\hat{n} \cdot \Sigma \cdot \hat{n})_{\ell} - (\hat{n} \cdot \Sigma \cdot \hat{n})_b = \tilde{\sigma} \nabla^s \cdot \hat{n} . \quad (2.68)$$

A descontinuidade da força de superfície interfacial é representada por τ_{nn} , o termo $(\hat{n} \cdot \Sigma \cdot \hat{n})_b$ denota a componente de tensão na interface para o lado da mistura gás e vapor e $(\hat{n} \cdot \Sigma \cdot \hat{n})_{\ell}$ é relativo à componente de tensão na interface do lado do fluido. Não se pode olvidar que $\tilde{\sigma}$ consiste no coeficiente de tensão superficial. Já ∇^s é definido como o operador nabla superficial, em que $\nabla^s = \nabla \cdot (\mathbf{I} - \hat{n}\hat{n})$. Pode-se igualar

$$\nabla^s \cdot \hat{n} = 2\bar{\kappa} \Rightarrow \bar{\kappa} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) , \quad (2.69)$$

sendo $\bar{\kappa}$ a curvatura média da superfície. Importante observar que a direção radial equivale à direção normal, ou seja, os vetores unitários são equivalentes, $\hat{n} = \hat{e}_r$. Desta forma, quando se deseja obter a condição de contorno a partir do salto de tensões, conforme a Eq. (2.68), o tensor de tensões é calculado na direção normal $\Sigma: (\hat{n}\hat{n})$, ou seja, calcula-se a componente do tensor de tensões na direção radial do escoamento, $\Sigma: (\hat{e}_r\hat{e}_r) = \Sigma_{rr}$. De acordo com as considerações citadas, a equação (2.68) assume a seguinte forma:

$$\Sigma_{rr,\ell} - \Sigma_{rr,b} = \frac{2\tilde{\sigma}}{R}, \quad (2.70)$$

em que $\Sigma_{rr,\ell}$ denota a tensão no lado do líquido e $\Sigma_{rr,b}$ a tensão no lado da bolha. A curvatura média assume o valor $\bar{\kappa} = 1/R$, uma vez que uma bolha esférica é considerada ($R = R_1 = R_2$). A componente de tensão na interface do lado da bolha é definida como:

$$\Sigma_{rr,b} = -p_b(t), \quad (2.71)$$

em que $p_b(t)$ representa a pressão interna da bolha, dada por:

$$p_b(t) = p_v(T_b) + p_g(t), \quad (2.72)$$

em que $p_v(T_b)$ é referente à pressão do vapor do líquido contido na bolha, à temperatura T_b (que apresenta valor fixo neste trabalho), e $p_g(t)$ é a pressão do gás contaminante, que é assumido como gás perfeito (sujeito ao processo politrópico, $p_g V^n = \text{constante}$). Sabendo que o volume é dado por $V = (4/3)\pi R^3$ e definindo uma pressão de equilíbrio \tilde{p}_g , para um raio de equilíbrio R_E , tem-se:

$$p_g(t) \left(\frac{4}{3}\pi R^3 \right)^n = \tilde{p}_g \left(\frac{4}{3}\pi R_E^3 \right)^n. \quad (2.73)$$

Logo, a pressão do gás pode ser simplificada por:

$$p_g(t) = \tilde{p}_g \left(\frac{R_E}{R} \right)^{3n}, \quad (2.74)$$

substituindo na equação (2.72), obtém-se para a pressão interna da bolha:

$$p_b(t) = p_v + \tilde{p}_g \left(\frac{R_E}{R} \right)^{3n}. \quad (2.75)$$

Analisando a condição inicial de uma bolha, dada para o instante de tempo $t = 0$, em que o raio inicial apresenta-se em condição de equilíbrio R_E , a descontinuidade de tensões normais dada pela Eq. (2.68) assume a forma

$$\tilde{p}_b = \tilde{p}_\infty + \frac{2\tilde{\sigma}}{R_E}, \quad (2.76)$$

em que \tilde{p}_∞ denota a pressão estática de equilíbrio do líquido no instante $p_\infty(0)$ e \tilde{p}_b representa a pressão interna de equilíbrio. Nota-se que, independente do modelo de aditivos proposto, o tensor de tensões para o instante $t = 0$ assume a forma $\Sigma = -\tilde{p}_\infty \mathbf{I}$ (conforme visto posteriormente na seção 2.1). A pressão interna de equilíbrio da bolha também pode ser obtida a partir da equação (2.72), obtendo

$$\tilde{p}_b = \tilde{p}_g + p_v, \quad (2.77)$$

substituindo a expressão dada para a pressão interna de equilíbrio na equação (2.76) na equação (2.77), tem-se

$$\tilde{p}_g = (\tilde{p}_\infty - p_v) + \frac{2\tilde{\sigma}}{R_E}. \quad (2.78)$$

Agora que o termo \tilde{p}_g foi colocado em função de outros termos, substitui-se a equação (2.78) na equação (2.75) e assim obtém-se a pressão no interior da bolha:

$$p_b = p_v + \left((\tilde{p}_\infty - p_v) + \frac{2\tilde{\sigma}}{R_E} \right) \left(\frac{R_E}{R} \right)^{3n} . \quad (2.79)$$

Define-se $\tilde{p}_\infty - p_v$ como: $(\tilde{p}_\infty - p_v) = \Delta\tilde{p}$. Assim, a contribuição de tensão na interface do lado da bolha dada pela Eq. (2.71) é redefinida como

$$\Sigma_{rr,b} = -p_v - \left(\Delta\tilde{p} + \frac{2\tilde{\sigma}}{R_E} \right) \left(\frac{R_E}{R} \right)^{3n} . \quad (2.80)$$

Substituindo a equação (2.80) na equação (2.70), obtém-se

$$\Sigma_{rr,\ell} + p_v + \left(\Delta\tilde{p} + \frac{2\tilde{\sigma}}{R_E} \right) \left(\frac{R_E}{R} \right)^{3n} = \frac{2\tilde{\sigma}}{R} . \quad (2.81)$$

Cumprе examinar neste passo que, no intuito de finalizar a análise da descontinuidade de tensões na interface, resta definir a componente de tensão do lado do líquido, $\Sigma_{rr,\ell}$. De acordo com o tensor de tensões utilizado, obtém-se diferentes condições de tensão para o lado do líquido. Admitindo o tensor de tensões proposto pela equação (2.36), a análise da descontinuidade de tensões referente ao lado do líquido assume a seguinte forma

$$\Sigma_{rr,\ell} = -\hat{e}_r \cdot p_\ell \mathbf{I} \cdot \hat{e}_r + \hat{e}_r \cdot \boldsymbol{\sigma}^N \cdot \hat{e}_r + \hat{e}_r \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{e}_r . \quad (2.82)$$

Nota-se que p_ℓ corresponde à pressão estática no lado do líquido em que a bolha encontra-se imersa. Como o tensor $\boldsymbol{\sigma}^N$ é conhecido, a equação (2.82) pode ser reescrita como

$$\Sigma_{rr,\ell} = -p_\ell + 2\mu D_{rr}|_{r=R} + \sigma_{rr}|_{r=R} . \quad (2.83)$$

É importante ressaltar que a Eq. (2.83) é avaliada na superfície da bolha, $r = R$. Lembrando que $u_r = R^2 \dot{R}/r^2$, o tensor \mathbf{D} , na direção radial, é dado por

$$D_{rr}|_{r=R} = \left. \frac{\partial u_r}{\partial r} \right|_{r=R} = -2 \frac{\dot{R}}{R}. \quad (2.84)$$

Substituindo a Eq. (2.84) em (2.83)

$$\Sigma_{rr,\ell} = -p_\ell - 4\mu \frac{\dot{R}}{R} + \sigma_{rr}|_{r=R}, \quad (2.85)$$

e, finalmente, utilizando da equação (2.83), obtém-se a condição de contorno na equação (2.81), em que

$$-p_\ell - 4\mu \frac{\dot{R}}{R} + \sigma_{rr}|_{r=R} + p_v + \left(\Delta \tilde{p} + \frac{2\tilde{\sigma}}{R_E} \right) \left(\frac{R_E}{R} \right)^{3n} = \frac{2\tilde{\sigma}}{R}. \quad (2.86)$$

Reescrevendo em termos da pressão no líquido, p_ℓ , para uma pressão interna da bolha p_b , a equação (2.86) assume a forma simplificada:

$$p_\ell = -4\mu \frac{\dot{R}}{R} - \frac{2\tilde{\sigma}}{R} + p_b + \sigma_{rr}|_{r=R}. \quad (2.87)$$

Como se pode verificar, a pressão exterior à bolha encontra-se em função dos efeitos viscosos aliados ao movimento da bolha, da tensão superficial, da pressão interna da bolha e da tensão extra devido à presença de aditivos no fluido Newtoniano.

2.5 EQUAÇÃO DA DINÂMICA DE BOLHAS GENERALIZADA

Para encontrar a equação governante da dinâmica de bolhas na presença de aditivos, recorre-se novamente à equação (2.64), que corresponde à Rayleigh-Plesset generalizada, obtida a partir do desenvolvimento da equação da quantidade de movimento (Equação de Navier-Stokes). O termo que remete à diferença de pressão $p_\ell - p_\infty(t)$ constitui a chave para a solução do problema. Utilizando a pressão no líquido definida pela equação (2.87), a equação (2.64) é reescrita como

$$\ddot{R}R + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = -4\frac{\mu}{\rho}\frac{\dot{R}}{R} - \frac{2\tilde{\sigma}}{\rho R} + \frac{p_b - p_\infty}{\rho} + \frac{3}{\rho} \int_R^\infty \frac{\sigma_{rr}}{r} dr . \quad (2.88)$$

A equação (2.88) representa a equação da dinâmica de bolhas generalizada para um escoamento unidimensional radial, podendo ser aplicada para qualquer tensão extra considerada (Fogler & Goddard, 1970). É sobretudo importante assinalar que na ausência de aditivos suspensos no fluido, a equação (2.88) fornece a expressão para a equação de Rayleigh-Plesset para um fluido Newtoniano, comumente encontrada na literatura (e.g. Brennen, 1995), assumindo a forma

$$\frac{p_b - p_\infty}{\rho} = R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 + 4\frac{\mu}{\rho}\frac{\dot{R}}{R} + \frac{2\tilde{\sigma}}{\rho R} . \quad (2.89)$$

Retornando à equação (2.88), pode-se definir uma pressão de excitação, que neste trabalho trata de um campo de pressão acústico variável aplicado ao exterior da bolha, em que:

$$p_\infty(t) = \tilde{p}_\infty(1 + \varepsilon \sin(\omega t)) , \quad (2.90)$$

em que ε representa a amplitude de pressão e ω denota a frequência de excitação da pressão. Reescrevendo a equação (2.88) a partir das definições de $p_\infty(t)$ e p_b , lembrando

que $(\tilde{p}_\infty - p_v) = \Delta\tilde{p}$, obtém-se a equação da dinâmica de bolhas generalizada expandida, dada por

$$\begin{aligned} \ddot{R}R + \frac{3}{2}\dot{R}^2 &= -\frac{\Delta\tilde{p}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \left(\Delta\tilde{p} + \frac{2\tilde{\sigma}}{R_E} \right) \left(\frac{R_E}{R} \right)^{3n} - \frac{4\mu}{\rho} \frac{\dot{R}}{R} \\ &- \frac{\tilde{p}_\infty}{\rho} \varepsilon \sin(\omega t) - \frac{2\tilde{\sigma}}{R\rho} + \frac{3}{\rho} \int_R^\infty \frac{\sigma_{rr}}{r} dr . \end{aligned} \quad (2.91)$$

A equação (2.91) consiste na equação governante proposta neste trabalho. Cumpre realizar neste passo uma adimensionalização desta equação, possibilitando a identificação dos parâmetros físicos que atuam no movimento da bolha, proporcionando uma teoria mais geral independente do sistema de unidades. Acresce salientar que, apesar deste trabalho não incluir investigações experimentais, caso se deseje uma comparação entre resultados teóricos e experimentais, sempre é preferível quando utiliza-se da adimensionalização.

2.5.1 Adimensionalização da Equação Governante

É realizada uma análise de escalas, em que se utilizam variáveis adimensionais, indicadas pelos asteriscos, definidas como

$$R^* = \frac{R}{R_E}, \quad t^* = \frac{t}{t_c}, \quad (2.92)$$

em que as típicas escalas de velocidade e tempo são representadas por $U_c = (|\Delta\tilde{p}|/\rho)^{1/2}$ e $t_c = R_E/U_c$, respectivamente. Assim, a velocidade e a aceleração da parede da bolha \dot{R} e \ddot{R} assumem a forma adimensional:

$$\dot{R}^* = \frac{\dot{R}}{U_c}, \quad \ddot{R}^* = \ddot{R} \frac{R_E}{U_c^2}. \quad (2.93)$$

Salienta-se que é necessário também definir o parâmetro ε em termos adimensionais, uma vez que a equação governante adimensional não deve se encontrar em função de \tilde{p}_∞ ou $\Delta\tilde{p}$. Portanto, define-se uma nova amplitude de excitação, em que:

$$\varepsilon^* = \varepsilon \left(\frac{\tilde{p}_\infty}{\Delta\tilde{p}} \right). \quad (2.94)$$

Nota-se que a adimensionalização da tensão σ_{rr} é dada por

$$\sigma_{rr}^* = \frac{\sigma_{rr}}{\rho U_c^2}. \quad (2.95)$$

Utilizando a nova notação para as variáveis adimensionais e utilizando as escalas típicas definidas, a equação diferencial governante (2.91) assume a forma:

$$\begin{aligned} U_c^2 R^* \ddot{R}^* + \frac{3}{2} U_c^2 (\dot{R}^*)^2 &= -U_c^2 + \frac{1}{\rho R_E} \left[\left(\frac{R_E}{R_E R^*} \right)^{3n} - \frac{1}{R^*} \right] \frac{U_c^2}{U_c^2} + \left(\frac{R_E}{R_E R^*} \right)^{3n} U_c^2 \\ &- U_c^2 \varepsilon^* \text{sen}(\omega^* t^*) - \frac{4\mu}{\rho} \frac{U_c}{R_E} \frac{U_c}{U_c} \frac{\dot{R}^*}{R^*} + 3U_c^2 \int_R^\infty \frac{\sigma_{rr}^*}{r} dr, \end{aligned} \quad (2.96)$$

em que a frequência de excitação é adimensionalizada por $\omega^* = \omega t_c$. Dividindo a equação (2.96) por U_c^2 e realizando algumas manipulações algébricas, obtém-se

$$\begin{aligned} R^* \ddot{R}^* + \frac{3}{2} (\dot{R}^*)^2 &= -1 + \frac{2\tilde{\sigma}}{\rho R_E U_c^2} \left[\left(\frac{1}{R^*} \right)^{3n} - \frac{1}{R^*} \right] + \left(\frac{1}{R^*} \right)^{3n} \\ &- \varepsilon^* \text{sen}(\omega^* t^*) - \frac{4\mu}{\rho R_E U_c} \frac{\dot{R}^*}{R^*} + 3 \int_R^\infty \frac{\sigma_{rr}^*}{r} dr. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Uma das finalidades da adimensionalização da equação governante constitui em identificar os parâmetros físicos do problema. Na equação (2.97) são identificados os seguintes parâmetros: o número de Reynolds (Re) e o número de Weber (We), definidos respectivamente por

$$\text{Re} = \frac{\rho U_c R_E}{\mu}, \quad (2.98)$$

$$\text{We} = \frac{\rho U_c^2 R_E}{\tilde{\sigma}}, \quad (2.99)$$

o número de Reynolds Re consiste na razão entre as forças de inércia ($F_i \sim \rho U_c^2 R_E^2$) e as forças viscosas ($F_\mu \sim \mu U_c R_E$). O número de Reynolds relaciona as intensidades dos efeitos de inércia do fluido em relação a intensidade de efeitos viscosos que este apresenta. O número de Weber We denota a razão entre as forças de inércia e as forças associadas à tensão superficial da bolha ($F_\sigma = \tilde{\sigma} R_E$). Quanto maior o número de Weber, maior a intensidade dos efeitos de inércia perante a resistência das forças de tensão superficial da bolha.

Identificando os parâmetros definidos anteriormente que aparecem naturalmente na adimensionalização da equação, obtém-se

$$\begin{aligned} R^* \ddot{R}^* + \frac{3}{2}(\dot{R}^*)^2 &= \frac{2}{\text{We}} \left(\frac{1}{(R^*)^{3n}} - \frac{1}{R^*} \right) - 1 - \varepsilon^* \text{sen}(\omega^* t^*) \\ &+ \frac{1}{(R^*)^{3n}} - \frac{4}{\text{Re}} \frac{\dot{R}^*}{R^*} + 3 \int_R^\infty \frac{\sigma_{rr}^*}{r} dr. \end{aligned} \quad (2.100)$$

A Eq. (2.100) é denominada equação governante adimensional generalizada. No capítulo seguinte, determina-se as equações constitutivas utilizadas ao longo deste trabalho, em que cada equação constitutiva resulta em uma equação governante particular.

Salienta-se que a pressão no interior da bolha (p_b) é analisada posteriormente na parte relacionada aos resultados da dinâmica da bolha. A partir da equação (2.79), dividida pelo termo $\Delta \tilde{p}$, a pressão adimensionalizada assume a forma

$$p_b^* = p_v^* + \left(1 + \frac{2}{\text{We}} \right) \left(\frac{1}{R^*} \right)^{3n}$$

$$p_g^* = \left(1 + \frac{2}{\text{We}}\right) (R^*)^{-3n} . \quad (2.101)$$

Convém notar que a pressão da bolha varia de acordo com a pressão adimensional do gás p_g^* , uma vez que a pressão de vapor p_v^* é considerada constante ao longo do tempo. Portanto, assume-se uma análise da pressão do gás, ou seja, a pressão interna da bolha a menos de uma constante.

3 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

Desenvolve-se o tensor extra de tensão σ para todos os modelos constitutivos utilizados neste trabalho: o modelo puramente anisotrópico, i.e., considerando somente a atuação da viscosidade extensional no tensor de tensões; o modelo de viscoelasticidade linear (incluindo efeitos elásticos para pequenas deformações) e o modelo de viscoelasticidade não-linear (considerando um modelo Maxwell-Oldroyd).

Para cada modelo é proposto, portanto, um tensor de tensões, peça fundamental para o fechamento do problema, necessário para o desenvolvimento da equação governante da dinâmica da bolha, que é descrita em termos da tensão extra analisada na direção radial, σ_{rr} . Cumpre-se observar, preliminarmente, que considerações a respeito da viscosidade extensional e da orientação dos aditivos independem do modelo utilizado, uma vez que são características intrínsecas do problema proposto. A primeira seção deste capítulo trata deste assunto.

A seção posterior aborda um modelo puramente anisotrópico, em que a presença da elasticidade é negligenciada. É interessante notar que qualquer modelo viscoelástico recupera o modelo puramente anisotrópico quando a elasticidade apresenta contribuições desprezíveis.

Examinar o tensor de tensões para modelos viscoelásticos tem como objetivo a obtenção de dados que descrevam a influência da relaxação dos aditivos perante a dinâmica do movimento da bolha. A resposta do fluido quando sujeito a uma pressão de excitação acústica externa, na presença de fibras/macromoléculas no meio em que se encontra imersa, está diretamente relacionada à escala de tempo de observação em relação ao tempo característico do material.

O fluido é considerado viscoelástico devido à existência simultânea de propriedades elásticas e viscosas. Sólidos são caracterizados por possuírem uma memória perfeita. Se eles sofrem deformação pela ação de uma força, eles retornam à sua forma original quando esta é removida. Em contraste, tem-se os fluidos Newtonianos que não possuem memória; assim mesmo que uma força é removida eles retêm sua condição (ou podem continuar se movendo como resultado da inércia). Já no caso de um fluido viscoelástico, se a força é removida rapidamente após ser aplicada, o fluido lembra a sua forma antes da deformação e retorna a ela. Porém, se a força for aplicada por um longo período de tempo, o fluido pode eventualmente “esquecer” sua forma inicial.

O estiramento do fluido é função de duas variáveis: tensão e tempo, e é somente através de uma influência de uma oscilação variável que pode-se obter suas propriedades simultaneamente. Um material viscoelástico responde como um sólido a intervalos curtos de tempo (alta frequência), apresentando características elásticas, e como líquido em intervalos longos de tempo (baixa frequência), apresentando características viscosas.

São explorados dois modelos de viscoelasticidade. Primeiramente, na seção 2.3, um modelo para viscoelasticidade linear é tratado, baseado no modelo de Maxwell, cuja utilização restringe-se somente para casos de pequenas deformações. Os modelos lineares constituem ponto de partida para a formulação de modelos não-lineares, ou modelo Maxwell-Oldroyd, descrito na seção 2.4.

3.1 CARACTERIZAÇÃO DOS ADITIVOS

Quando ocorre movimento não-uniforme no fluido, existe a presença de uma anisotropia, que é decorrente da diferença de tensões normais que pode ser observada, uma vez que os aditivos são estirados, i.e., ocorre “stretching” dos aditivos devido ao escoamento, produzindo tensões extras no escoamento.

Esse processo está representado na Figura 3.1, ilustrado também por Salas, 2006, onde a Fig. 3.1 (a) mostra a configuração de uma macromolécula caracterizada por um alto peso molecular, enquanto a Fig. 3.1 (b) ilustra a mesma macromolécula após

sofrer o estiramento, gerado pelo escoamento. Nota-se que quando a macromolécula permanece estendida e sem sofrer degradações, esta apresenta uma configuração semelhante a uma fibra longa com alta razão de aspecto.

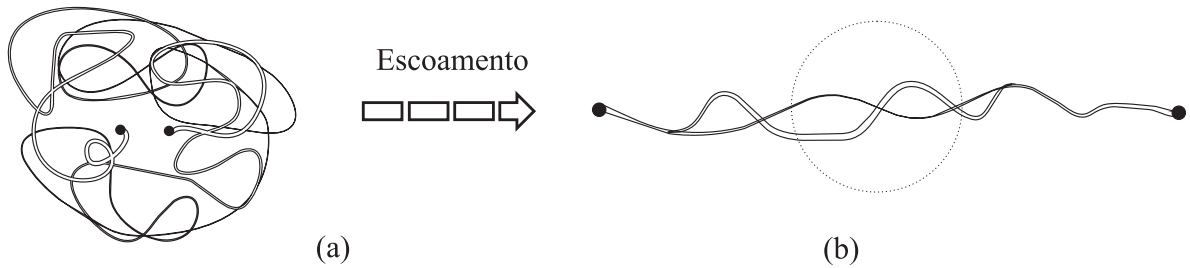


Figura 3.1: Configuração de uma macromolécula. (a) Antes do escoamento; (b) após sofrer estiramento gerado pelo escoamento, em que a macromolécula apresenta configuração semelhante a uma fibra longa. A região circular tracejada denota a área ocupada pela macromolécula em repouso.

A fração volumétrica (ou concentração dos aditivos no fluido ambiente) é representada por ϕ . Quanto menor a concentração de aditivos, maior a tendência do fluido assumir um modelo Newtoniano, dado pela Eq.(2.21), uma vez que o tensor extra apresenta uma pequena ordem de magnitude. A caracterização de fibras na maioria dos casos pode ser realizada através da razão de aspecto (Gyr & Bewersdorff, 1995), definida por ℓ/a , em que ℓ denota o comprimento do aditivo e a corresponde ao seu diâmetro. Fibras de asbestos, por exemplo, assumem valores de razão de aspecto na faixa $10^2 \leq \ell/a \leq 10^3$.

Considera-se que a deformação axial dos aditivos é bem menor que sua espessura, de forma que os aditivos encontram-se livres de movimentos brownianos (colisões entre as partículas suspensas e as moléculas de fluido ao seu redor), i.e. não estão associados a movimentos randômicos.

3.1.1 Constante Material da suspensão de aditivos

A viscosidade extensional representa um parâmetro chave na descrição dos aditivos. A fibra longa tende a resistir ao estiramento ao longo de seu próprio eixo e a viscosidade extensional caracteriza a importância dessa resistência.

Aborda-se nessa seção o desenvolvimento da constante material da suspensão de aditivos, que consiste em um termo adimensional definido como a razão entre a viscosidade extensional e a viscosidade do líquido, μ_e/μ .

Batchelor, 1970, sugeriu um modelo para a viscosidade extensional μ_e/μ , assumindo uma suspensão diluída de aditivos rígidos caracterizados por uma grande razão de aspecto (ℓ/a). Da teoria de corpos delgados, ou “slender body theory”, em uma condição hidrodinâmica para baixos números de Reynolds (número adimensional descrito em seção posterior), Batchelor determinou que:

$$\frac{\mu_e}{\mu} = \frac{4\pi}{3} \frac{(n_d \ell^3)}{\ln(\ell/a)}, \quad (3.1)$$

em que n_d representa o número de densidade (i. e. número de partículas por unidade de volume). Nota-se que a constante material é descrita em termos da razão de aspecto e da concentração dos aditivos. A Eq. (3.1) só é satisfeita para a condição ($n_d \ell^3 \ll 1$), em que é obtido um regime diluído. Para partículas cilíndricas obtém-se:

$$n_d \ell^3 = (\phi/\pi)(\ell/a)^2. \quad (3.2)$$

Substituindo a equação (3.2) na equação (3.1) obtém-se a viscosidade extensional adimensionalizada em termos da fração volumétrica de partículas (ϕ):

$$\frac{\mu_e}{\mu} = \frac{4}{3} \left(\frac{\ell}{a}\right)^2 \frac{\phi}{\ln(\ell/a)}. \quad (3.3)$$

Uma correção realizada por Batchelor, 1971, leva em consideração efeitos de finitude das partículas, por meio do fator de forma $F(\epsilon)$. Neste caso tem-se:

$$\frac{\mu_e}{\mu} = \frac{4}{3} \left(\frac{\ell}{a}\right)^2 \frac{\phi}{\ln(\ell/a)} F(\epsilon), \quad (3.4)$$

em que

$$F(\epsilon) = \frac{1 + 0,64\epsilon}{1 - 3/2\epsilon} + 1,659\epsilon^2 + O(\epsilon^2) . \quad (3.5)$$

Aqui, considera-se que $\epsilon = [\ln(\ell/a)]^{-1}$. É importante notar que a relação na equação (3.5) tende à unidade para partículas infinitamente longas. A situação em que são considerados regimes semi-diluídos ($\phi \ll 1 < n_d \ell^3$) foi explorada por Shaqfeh & Frederickson, 1990, que propuseram uma expressão assintótica para a função material obtida na equação (3.3), corrigindo o efeito de interações hidrodinâmicas entre pares de aditivos. A expressão final para a viscosidade extensional adimensional é dada por:

$$\frac{\mu_e}{\mu} = \frac{4}{3} \left(\frac{\ell}{a} \right)^2 \frac{\phi}{\ln(1/\phi)} \left[1 - \frac{\ln(\ln(1/\phi))}{\ln(1/\phi)} + \frac{E(\phi)}{\ln(1/\phi)} \right] , \quad (3.6)$$

em que $E(\phi)$ representa uma constante que caracteriza a partícula da suspensão. Para partículas cilíndricas alinhadas com as linhas de corrente do escoamento, $E(\phi) = 0,1585$. A equação (3.6) recupera o modelo de Batchelor quando $\phi \rightarrow 0$. Os modelos de viscosidade extensional para a função material são dados por:

$$\frac{\mu_e}{\mu} = \begin{cases} \frac{4}{3} \left(\frac{\ell}{a} \right)^2 \frac{\phi F(\epsilon)}{\ln(\ell/a)}, & \text{se } n_d \ell^3 \ll 1 \\ \frac{4}{3} \left(\frac{\ell}{a} \right)^2 \frac{\phi}{\ln(1/\phi)} \left[1 - \frac{\ln(\ln(1/\phi))}{\ln(1/\phi)} + \frac{E(\phi)}{\ln(1/\phi)} \right], & \text{se } \phi \ll 1 < n_d \ell^3 \end{cases}$$

Considera-se no presente trabalho um regime semi-diluído, que utiliza da correção de interações entre pares de aditivos.

3.1.2 Orientação dos aditivos

O aditivo suspenso no fluido pode apresentar uma orientação local diferente da direção do escoamento. É necessário um esquema que indique a orientação das partículas, em relação à direção radial, conforme ilustrado na Figura 3.2. Tem-se que \hat{s} é um vetor unitário de orientação dos aditivos e \hat{e}_r consiste no vetor unitário que se encontra na direção radial.

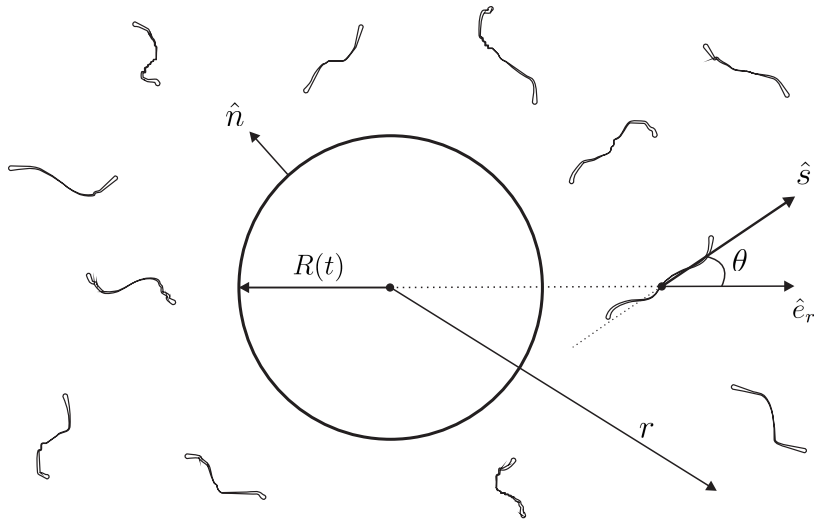


Figura 3.2: Orientação dos aditivos no sistema, com relação à bolha.

O ângulo θ denota o ângulo entre a direção radial e a direção da orientação do aditivo, ou seja, a inclinação local da fibra com relação à direção do escoamento. Nota-se que o ângulo θ não está vinculado aos ângulos presentes nas coordenadas esféricas (ϑ, φ) , uma vez que a orientação das fibras é investigada no sistema de referência das mesmas, em que coordenadas polares cilíndricas (r, θ, z) são consideradas (ver capítulo 7). O vetor de orientação de aditivos \hat{s} pode ser decomposto em vetores unitários na direção \hat{e}_r e \hat{e}_θ , definidos a partir das relações

$$\hat{s}_r = \cos \theta = \hat{s} \cdot \hat{e}_r \quad (3.7)$$

$$\hat{s}_\theta = \sin \theta = \hat{s} \cdot \hat{e}_\theta . \quad (3.8)$$

Como se pode verificar, quando os aditivos assumem uma orientação radial, i.e. aditivos alinhados com a direção do escoamento, $\theta = 0$ e, portanto, $\hat{s}_r = 1$. Ressalte-se que a direção radial equivale à direção normal, onde o produto dos vetores unitários resulta em $\hat{n} \cdot \hat{e}_r = 1$. Convém observar que a contribuição resultante do tensor extra de tensões também é avaliado somente na direção radial. Dito isso, a influência das fibras também se encontra, portanto, diretamente relacionada à orientação média global que as mesmas apresentam, que resulta em uma distribuição de probabilidade de orientação. Orientações que diferem da direção radial são exploradas somente no capítulo 7.

3.2 O MODELO ANISOTRÓPICO

Na ausência de efeitos elásticos e assumindo que os aditivos possuem forma de hastes rígidas, o tensor de tensões extra assume a forma de um tensor anisotrópico viscoso, existente devido ao estiramento dos aditivos. Ericksen, 1960, propôs uma teoria para fluidos transversalmente isotrópicos, em que a tensão adicional devido à presença de uma única macromolécula assume a forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu_0 \mathbf{D} + [\mu_1 + 2\mu_2(\hat{s} \cdot \mathbf{D} \cdot \hat{s})]\hat{s}\hat{s} + 2\mu_3[\hat{s}(\hat{s} \cdot \mathbf{D}) + (\mathbf{D} \cdot \hat{s})\hat{s}] , \quad (3.9)$$

em que μ_0 , μ_1 , μ_2 e μ_3 são constantes materiais, que dependem das propriedades do aditivo. A constante μ_1 , que representa uma tensão que persiste mesmo quando não ocorre escoamento, pode ser desprezada quando a suspensão não possui movimento browniano significativo. Quando tem-se uma suspensão contendo mais de um aditivo, cada elemento de fluido do contínuo possui vários aditivos com diferentes orientações. O tensor macroscópico devido a presença de vários aditivos é dado pela média

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu_0 \mathbf{D} + 2\mu_2 \mathbf{D} : \langle \hat{s}\hat{s}\hat{s}\hat{s} \rangle + 2\mu_3 (\mathbf{D} \cdot \langle \hat{s}\hat{s} \rangle + \langle \hat{s}\hat{s} \rangle \cdot \mathbf{D}) , \quad (3.10)$$

em que $\langle \hat{s}\hat{s} \rangle$ e $\langle \hat{s}\hat{s}\hat{s}\hat{s} \rangle$ correspondem aos tensores de segunda e quarta ordem da função de distribuição do vetor unitário de orientação \hat{s} , respectivamente.

Nota-se que as constantes materiais encontram-se em função também da fração volumétrica ϕ dos aditivos. Quando se considera que os aditivos possuem razão de aspecto $\ell/a \gg 1$, tem-se que $\mu_3 \ll \mu_2$. Para uma suspensão diluída, $\mu_0 = 0$ e a Eq. (3.10) assume a forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu_e(\phi, \ell/a) \mathbf{D} : \langle \hat{s}\hat{s}\hat{s}\hat{s} \rangle . \quad (3.11)$$

O termo $\mu_2 = \mu_e(\phi, \ell/a)$ representa a viscosidade extensional, associada com a extensibilidade dos aditivos, que encontra-se em função da concentração de partículas e de sua razão de aspecto, conforme visto anteriormente. Hinch & Leal, 1976, sugerem uma aproximação para o tensor de quarta ordem, reescrito em termos do tensor de segunda ordem, sendo

$$\langle \hat{s}\hat{s}\hat{s}\hat{s} \rangle = \langle \hat{s}\hat{s} \rangle \langle \hat{s}\hat{s} \rangle . \quad (3.12)$$

Nota-se que a simetria e o traço do tensor de quarta ordem são preservados. A Eq. (3.12) pode assumir então

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu_e \{ \langle \hat{s} \rangle \cdot \mathbf{D} \cdot \langle \hat{s} \rangle \} \langle \hat{s}\hat{s} \rangle . \quad (3.13)$$

Uma vez que o tensor extra foi proposto, resta verificar se este satisfaz o Princípio da Objetividade. Deve-se mostrar que

$$\boldsymbol{\sigma}' = 2 \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T . \quad (3.14)$$

Utilizando da Eq. (3.13), obtém-se que

$$\boldsymbol{\sigma}' = 2 \mathbf{Q} \cdot \mu_e \{ \langle \hat{s} \rangle \cdot \mathbf{D} \cdot \langle \hat{s} \rangle \} \langle \hat{s}\hat{s} \rangle \cdot \mathbf{Q}^T . \quad (3.15)$$

Considerando $\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{I}$, tem-se

$$\boldsymbol{\sigma}' = 2 \mathbf{Q} \cdot \mu_e \{ \langle \hat{s} \rangle \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \langle \hat{s} \rangle \} \langle \hat{s}\hat{s} \rangle \cdot \mathbf{Q}^T . \quad (3.16)$$

Rearranjando o lado direito da Eq. (3.16), observando que o termo entre chaves consiste em um escalar:

$$\boldsymbol{\sigma}' = 2\mu_e \left\{ \langle \hat{s} \rangle \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \langle \hat{s} \rangle \right\} \mathbf{Q} \cdot \langle \hat{s}\hat{s} \rangle \cdot \mathbf{Q}^T . \quad (3.17)$$

Nota-se que as seguintes relações podem ser consideradas, quando \mathbf{D} é uma quantidade objetiva

$$\mathbf{D}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^T , \quad \langle \hat{s} \rangle' = \mathbf{Q} \cdot \langle \hat{s} \rangle = \langle \hat{s} \rangle \cdot \mathbf{Q}^T , \quad \langle \hat{s}\hat{s} \rangle' = \mathbf{Q} \cdot \langle \hat{s}\hat{s} \rangle \cdot \mathbf{Q}^T , \quad (3.18)$$

substituindo a Eq. (3.18) na Eq. (3.17) resulta em

$$\boldsymbol{\sigma}' = 2\mu_e \left\{ \langle \hat{s} \rangle' \cdot \mathbf{D}' \cdot \langle \hat{s} \rangle' \right\} \langle \hat{s}\hat{s} \rangle' , \quad (3.19)$$

onde fica claro que o tensor proposto satisfaz a indiferença material a um referencial, preservando sua forma independente do observador em questão. Uma explicação física para o tensor extra $\boldsymbol{\sigma}$ remete à sua proporcionalidade com relação à componente do tensor taxa de deformação na direção de orientação dos aditivos $\langle \hat{s} \rangle \cdot \mathbf{D} \cdot \langle \hat{s} \rangle$. O aditivo, caracterizado como uma fibra longa, tende a resistir ao estiramento ao longo do seu eixo de alongação.

Nota-se que o tensor extra se encontra na direção $\langle \hat{s}\hat{s} \rangle$ e que a contribuição das macromoléculas/fibras é função da orientação que estas apresentam com relação à direção radial. Tem-se uma formulação para a equação constitutiva do modelo anisotrópico na forma:

$$\boldsymbol{\Sigma} = -p_\ell \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D} + 2\mu_e \left\{ \langle \hat{s} \rangle \cdot \mathbf{D} \cdot \langle \hat{s} \rangle \right\} \langle \hat{s}\hat{s} \rangle . \quad (3.20)$$

O modelo constitutivo encontrado pela Eq. (3.20) considera um caso de suspensão de partículas com grande razão de aspecto que se encontram livres dos efeitos de inércia, bem como do movimento browniano e da sedimentação.

A Figura 3.3 caracteriza o modelo que leva em conta somente o efeito da anisotropia, para um fluido puramente viscoso, onde o efeito da viscosidade extensional tem como analogia um amortecedor. O termo $\dot{\gamma}_v = \dot{\gamma}$ consiste na taxa de deformação. Cumpre-se observar que σ representa a função para força de tensão, que neste caso anisotrópico é definida como

$$\sigma = \mu_e \dot{\gamma} = 2\mu_e \langle \hat{s} \rangle \cdot \mathbf{D} \cdot \langle \hat{s} \rangle . \quad (3.21)$$

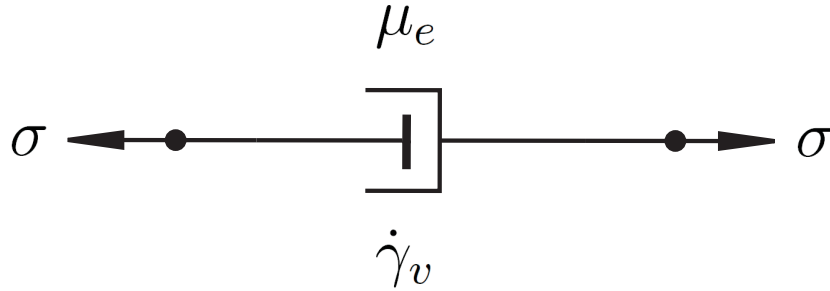


Figura 3.3: Modelo de viscosidade extensional.

Ressalta-se que o modelo proposto foi utilizado anteriormente por Cunha & Andreotti, 2007, com aplicações para a investigação da redução de arrasto em escoamentos turbulentos. A seção seguinte apresenta a equação governante adimensional para o modelo puramente anisotrópico.

Nota-se também que, para um fluido viscoelástico, o fluido equivalente pode exibir características de sólido elástico e/ou de líquido viscoso. No entanto, quando o fluido viscoelástico apresenta comportamento puramente viscoso, o tensor de tensões deve assumir a mesma forma encontrada na Eq. (3.20), ou seja, deve recuperar o modelo anisotrópico proposto.

3.2.1 Equação Governante do Modelo Anisotrópico

Utiliza-se da equação governante adimensionalizada (2.100) para obter uma equação da dinâmica da bolha considerando um modelo puramente anisotrópico. Primeiramente, faz-se necessário determinar a tensão extra na direção radial, σ_{rr} . Da definição do tensor $\boldsymbol{\sigma}$, dada pela equação (3.13), tem-se que

$$\hat{e}_r \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{e}_r = \sigma_{rr} = 2\mu_e \{ \langle \hat{s} \rangle \cdot \mathbf{D} \cdot \langle \hat{s} \rangle \} \hat{e}_r \cdot \langle \hat{s} \hat{s} \rangle \cdot \hat{e}_r . \quad (3.22)$$

Lembrando que $\mathbf{D} = (\partial u_r / \partial r) \hat{e}_r \hat{e}_r$, que a velocidade é dada por $u_r = R^2 \dot{R} / r^2$ e que $\cos \theta = \hat{e}_r \cdot \hat{s}$, a equação (3.22) é reescrita como

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -2\mu_e \left\{ \langle \hat{s} \rangle \cdot \hat{e}_r \frac{2R^2 \dot{R}}{r^3} \hat{e}_r \cdot \langle \hat{s} \rangle \right\} \hat{e}_r \cdot \langle \hat{s} \hat{s} \rangle \cdot \hat{e}_r \\ \sigma_{rr} &= -2\mu_e \left\{ \frac{2R^2 \dot{R}}{r^3} \langle \cos^2 \theta \rangle \right\} \langle \cos^2 \theta \rangle \\ \sigma_{rr} &= -4\mu_e \frac{R^2 \dot{R}}{r^3} \langle \cos^4 \theta \rangle . \end{aligned} \quad (3.23)$$

A média global da orientação dos aditivos associada com $\langle \cos^4 \theta \rangle$, é representada por uma função orientação de aditivos, a ser tratada no capítulo 7. A função de orientação é relacionada a uma média de probabilidade, primeiramente desenvolvida para uma distribuição normal de orientação de aditivos, descrita a partir de uma constante S_0 .

Posteriormente, para um caso mais geral, a função de orientação de aditivos se encontra acoplada ao movimento da bolha, i.e. está em função do raio R da bolha, da posição calculada e, conseqüentemente, do tempo, em que a probabilidade média é definida como $P(r, R, \theta)$ e a função orientação corresponde a $S(R)$.

Substituindo a equação (3.23) no último termo da equação governante generalizada (2.100), que consiste na integral em dr da tensão extra na direção radial, obtém-se

$$3 \int_R^\infty \frac{\sigma_{rr}^*}{r} dr = 3 \left(\frac{-4\mu_e R^2 \dot{R}}{\rho U_c^2} S(R) \right) \int_R^\infty \frac{1}{r^4} dr . \quad (3.24)$$

Nota-se que $\sigma_{rr}^* = \sigma_{rr}/\rho U_c^2$. Resolvendo a integral em dr , a equação (3.24) resulta em

$$-12 \frac{\mu_e R^2 \dot{R}}{\rho U_c^2} S(R) \int_R^\infty \frac{1}{r^4} dr = -4 \frac{\mu_e R^2 \dot{R}}{\rho U_c^2 R^3} S(R) = -4 \frac{\mu_e \dot{R}}{\rho U_c^2 R} S(R) . \quad (3.25)$$

Utilizando das escalas típicas definidas, sendo $\text{Re}\mu = \rho U_c R_E$, o termo relacionado a σ_{rr} na equação (3.24) é reescrito em termos adimensionais, obtendo

$$3 \int_R^\infty \frac{\sigma_{rr}^*}{r} dr = -\frac{4}{\text{Re}} \frac{\mu_e}{\mu} \frac{\dot{R}^*}{R^*} S(R) . \quad (3.26)$$

Finalmente, substituindo a equação (3.26) na equação generalizada (2.100), tem-se que

$$\begin{aligned} R^* \ddot{R}^* + \frac{3}{2} (\dot{R}^*)^2 &= \frac{2}{\text{We}} \left(\frac{1}{(R^*)^{3n}} - \frac{1}{R^*} \right) - 1 - \varepsilon^* \text{sen}(\omega^* t^*) \\ &+ \frac{1}{(R^*)^{3n}} - \frac{4}{\text{Re}} \frac{\dot{R}^*}{R^*} \left(1 + \frac{\mu_e}{\mu} S(R) \right) . \end{aligned} \quad (3.27)$$

A Eq. (3.27) é denominada a equação governante adimensional para o modelo anisotrópico puramente viscoso. Nota-se que a Eq. (3.27) constitui uma equação diferencial ordinária (EDO), não-linear, de segunda ordem e não-homogênea.

A razão entre a viscosidade extensional e a viscosidade do fluido ambiente μ_e/μ é caracterizada conforme uma *constante material*, explorada anteriormente (seção 3.1.1). É fácil observar que, na ausência de aditivos (i.e. $\mu_e = 0$), o modelo anisotrópico recupera um modelo Newtoniano. Ressalta-se também que, modelos viscoelásticos devem recuperar a mesma forma da equação governante adimensional (3.27), quando estes assumem efeitos puramente viscosos (ausência de efeitos elásticos).

Outro ponto importante reside no fato da caracterização de um tensor extra de tensão em termos de um modelo anisotrópico resultar na equação de Rayleigh-Plesset apresentada pela Eq. (2.65), em que

$$\ddot{R}R + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{p_\ell - p_\infty}{\rho}, \quad (3.28)$$

obtida a partir da integração em dr da equação da quantidade de movimento. Tal afirmativa pode ser demonstrada partindo da equação (2.58), em que

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \left[\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{3\sigma_{rr}}{r} \right]. \quad (3.29)$$

Desenvolvendo os termos em colchetes no lado direito da equação, utilizando a definição de σ_{rr} na Eq. (3.23), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{3\sigma_{rr}}{r} &= 2\mu_e \langle \cos^4 \theta \rangle \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \\ &= 2\mu_e \langle \cos^4 \theta \rangle \left(\frac{6\dot{R}R^2}{r^4} - \frac{6\dot{R}R^2}{r^4} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

A equação (3.30) se anula de maneira análoga à equação (2.55), referente ao tensor devido a movimentos não-uniformes de um fluido Newtoniano. A diferença é que a tensão σ_{rr}^N é descrita em termos da viscosidade μ , enquanto a tensão σ_{rr} em termos

da viscosidade extensional μ_e e da orientação média $\langle \cos^4 \theta \rangle$. No entanto, a orientação (que varia somente de acordo com o tempo) e a viscosidade não interferem no resultado da equação (3.30). Convém notar que o resultado da equação (3.30) ocorre somente na ausência de efeitos elásticos.

Em suma, a equação governante adimensional do modelo anisotrópico (3.27) também pode ser obtida partindo da equação (2.65), substituindo a pressão no líquido, dada pela equação (2.87), que resulta em

$$p_\ell = -4\mu \frac{\dot{R}}{R} - \frac{2\tilde{\sigma}}{R} + p_b + \sigma_{rr}|_{r=R} = -4\mu \frac{\dot{R}}{R} - \frac{2\tilde{\sigma}}{R} + p_b + -4\mu_e \frac{\dot{R}}{R} S(R). \quad (3.31)$$

3.3 VISCOELASTICIDADE LINEAR

3.3.1 O Modelo de Maxwell

Maxwell, 1867, propôs uma equação simples para a descrição de um fluido viscoelástico linear a partir do princípio da combinação entre as leis da viscosidade de Newton e do sólido elástico de Hooke. O sólido de Hooke lembra sua posição em um tempo inicial, em contraste com um fluido Newtoniano. No entanto, como a lei de Hooke é válida somente para pequenas deformações, o modelo de Maxwell encontra-se sujeito a mesma restrição.

Pode-se caracterizar um modelo de Maxwell a partir da combinação de um sistema massa-mola, ilustrado pela Figura 3.4. A mola representa a contribuição elástica (Hooke), com a tensão proporcional à deformação, enquanto o amortecedor corresponde ao efeito viscoso do material (Newton), em que a tensão é proporcional à taxa de deformação.

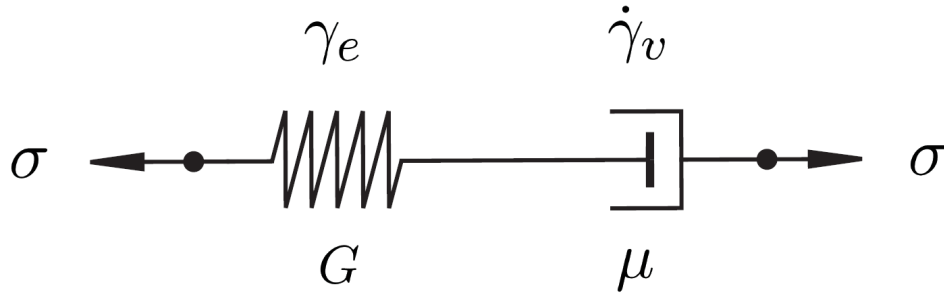


Figura 3.4: Modelo de Maxwell, com efeito da viscosidade extensional e efeito elástico.

No esquema do modelo, μ representa a viscosidade, $\dot{\gamma}_v$ é a taxa de deformação, G é a constante de rigidez elástica, γ_e é a deformação plástica e σ consiste na tensão aplicada pelo escoamento e caracteriza uma função da tensão elástica, que se encontra em função do espaço \mathbf{x} e do tempo, $\sigma = \sigma(\mathbf{x}, t)$. A soma das contribuições define a descrição geral do Modelo de Maxwell, obtendo a equação

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_e + \dot{\gamma}_v, \quad (3.32)$$

em que o termo de elasticidade é definido por

$$\sigma = \gamma_e G \Rightarrow \dot{\gamma}_e = \frac{\dot{\sigma}}{G}. \quad (3.33)$$

O termo viscoso assume a seguinte forma:

$$\sigma = \dot{\gamma}_v \mu \Rightarrow \dot{\gamma}_v = \frac{\sigma}{\mu}. \quad (3.34)$$

Substituindo as equações (3.33) e (3.34) na (3.32) obtém-se que

$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{\sigma}}{G} + \frac{\sigma}{\mu}. \quad (3.35)$$

Utiliza-se representar $\alpha = \mu/G$ como uma constante que corresponde ao tempo de relaxação do fluido elástico (o tempo intrínseco do material). Uma vez definido o tempo de relaxação, substitui-se então na equação (3.35), que fornece

$$\alpha \dot{\sigma} + \sigma = \dot{\gamma} \mu . \quad (3.36)$$

A equação diferencial ordinária em (3.36) retrata exatamente o modelo proposto por Maxwell. É importante observar que o modelo linear de Maxwell é restrito para deformações infinitesimais, ou seja, pequenos deslocamentos, ponto chave da Teoria da Elasticidade Linear. Portanto, a derivada material da tensão corresponde à derivada temporal, $\dot{\sigma} = D\sigma/Dt \approx \partial\sigma/\partial t$.

A partir do método do fator integrante, apresentado no Apêndice A e considerando a integração para um tempo em um instante qualquer τ , anterior ao momento atual, t , tem-se

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \left\{ \frac{\mu}{\alpha} e^{-\frac{(t-\tau)}{\alpha}} \right\} \dot{\gamma}(\tau) d\tau . \quad (3.37)$$

O termo que se encontra entre chaves é denominado o módulo de relaxação para um modelo de Maxwell. Nota-se que a tensão no tempo atual t depende da taxa de deformação do tempo atual, bem como da taxa de deformação de todos os tempos anteriores τ , com um fator de peso, i.e. o módulo de relaxação. Pode-se dizer que a tensão σ no instante atual t depende da “história” do fluido em todos os tempos $-\infty < \tau < t$.

Registre-se que o módulo de relaxação decai exponencialmente quando calculado na direção contrária ao tempo, ou seja, de maneira cronologicamente inversa. Portanto, a memória se esvai, interpretação comumente conhecida como *fading memory*: o fluido tem “consciência” de um passado recente, mas guarda somente “imagens” de um passado longínquo, que se apresenta cada vez mais rudimentar quanto mais se aprofunda neste passado.

Em suma, o modelo de Maxwell propõe uma relação linear entre a tensão σ e a taxa de deformação $\dot{\gamma}$. Outras relações lineares podem ser realizadas, resultando em diferentes modelos lineares (Bird *et al.*, 1987). Um exemplo é o modelo de Jeffrey, onde considera-se duas constantes temporais do material e a derivada temporal da taxa de deformação.

Não quer isto dizer, entretanto, que os modelos lineares diferem quanto à sua forma: todos apresentam uma integral que considera os tempos anteriores de um módulo de relaxação multiplicado por uma taxa de deformação. Apesar de apresentarem complexidades diferentes, a única idéia física incorporada está relacionada à viscosidade e à elasticidade. Os modelos para um fluido viscoelástico linear podem ser generalizados pela seguinte equação

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t M'(t - \tau) \dot{\gamma}(\tau) d\tau , \quad (3.38)$$

em que M' denota um módulo de relaxação generalizado. O integrando consiste no produto de duas funções: a primeira que depende da natureza do fluido e a segunda que depende da natureza do escoamento.

É importante ressaltar que o modelo linear não “suporta” altas taxas de deformação, uma vez que violaria o princípio de indiferença material, fundamental na construção de uma equação constitutiva.

Faz-se necessário adaptar a equação do modelo de Maxwell (equação (3.36)) para o presente trabalho. Relembrando a definição da taxa de deformação fornecida pela equação (3.21), obtém-se

$$\dot{\sigma} + \frac{1}{\alpha} \sigma = 2 \frac{\mu_e}{\alpha} \hat{s} \cdot \mathbf{D} \cdot \hat{s} . \quad (3.39)$$

Nota-se que a viscosidade é representada pela viscosidade extensional, μ_e , que difere dos modelos convencionais encontrados em diversos trabalhos, e.g. Lind & Phillips, 2010. Assim, a constante que denota o tempo de relaxação dos aditivos é dada por $\alpha = \mu_e/G$. Como a tensão σ apresenta a mesma solução mostrada na equação (3.37), esta é reescrita como

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \frac{2\mu_e}{\alpha} e^{-\frac{(t-\tau)}{\alpha}} [\langle \hat{s} \rangle \cdot \mathbf{D} \cdot \langle \hat{s} \rangle] d\tau . \quad (3.40)$$

Sendo o tensor \mathbf{D} representado na forma $\mathbf{D} = -2\dot{R}R^2/r^3 (\hat{e}_r \hat{e}_r)$, a equação (3.40) assume a forma:

$$\sigma = - \int_{-\infty}^t \frac{4\mu_e}{\alpha} e^{-\frac{(t-\tau)}{\alpha}} \left[\langle \hat{s} \rangle \cdot \hat{e}_r \frac{\dot{R}(\tau)R^2(\tau)}{r^3} \hat{e}_r \cdot \langle \hat{s} \rangle \right] d\tau , \quad (3.41)$$

como $\langle \cos \theta \rangle = \langle \hat{s} \rangle \cdot \hat{e}_r$, a equação (3.41) é apresentada como

$$\sigma = -4 \frac{\mu_e}{r^3 \alpha} \langle \cos^2 \theta \rangle \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(t-\tau)}{\alpha}} \dot{R}(\tau)R^2(\tau) d\tau . \quad (3.42)$$

Convém notar que caso o fluido não apresente relaxação (i.e. efeito elástico), a equação (3.42) é reduzida ao modelo anisotrópico expresso anteriormente na equação (3.13), conforme visto na seção 3.2.

A solução obtida para σ é dada em função de uma integral de convolução, que leva em conta o efeito de memória (ou o efeito elástico de relaxação dos aditivos). Define-se a integral de convolução a partir do termo I , definido como

$$I = \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(t-\tau)}{\alpha}} \dot{R}(\tau)R^2(\tau) d\tau . \quad (3.43)$$

Cumpramos examinar na próxima seção a equação governante correspondente a um modelo de viscoelasticidade linear, dado um tensor de tensões para o fluido na presença de uma tensão extra a partir do modelo de Maxwell desenvolvido.

3.3.2 Equação Governante do Modelo Viscoelástico Linear

O tensor extra de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ para um modelo de viscoelasticidade linear, cuja contribuição elástica dos aditivos é levada em consideração, é dado por

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma \langle \hat{s}\hat{s} \rangle = -4 \langle \hat{s}\hat{s} \rangle \frac{\mu_e}{r^3 \alpha} \langle \cos^2 \theta \rangle \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(t-\tau)}{\alpha}} \dot{R}(\tau) R^2(\tau) d\tau . \quad (3.44)$$

A componente da tensão extra na direção radial é representada como

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -4 \{ \hat{e}_r \cdot \langle \hat{s}\hat{s} \rangle \cdot \hat{e}_r \} \frac{\mu_e}{r^3 \alpha} \langle \cos^2 \theta \rangle \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(t-\tau)}{\alpha}} \dot{R}(\tau) R^2(\tau) d\tau \\ \sigma_{rr} &= -4 \frac{\mu_e}{r^3 \alpha} \langle \cos^4 \theta \rangle \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(t-\tau)}{\alpha}} \dot{R}(\tau) R^2(\tau) d\tau . \end{aligned} \quad (3.45)$$

Nota-se que $\langle \cos^4 \theta \rangle$ corresponde à função de orientação de aditivos, $S(R)$. Substituindo a equação (3.45) no último termo da equação governante generalizada (2.100), que consiste na integral em dr da tensão extra na direção radial, obtém-se

$$\begin{aligned} 3 \int_R^\infty \frac{\sigma_{rr}^*}{r} dr &= -12 \frac{\mu_e}{\rho U_c^2 \alpha} S(R) \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(t-\tau)}{\alpha}} \dot{R}(\tau) R^2(\tau) d\tau \left\{ \int_R^\infty \frac{1}{r^4} dr \right\} \\ &= -4 \frac{\mu_e}{R^3 \rho U_c^2 \alpha} S(R) \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(t-\tau)}{\alpha}} \dot{R}(\tau) R^2(\tau) d\tau . \end{aligned} \quad (3.46)$$

Apresentando a equação (3.46) termos adimensionais, utiliza-se as escalas típicas anteriormente definidas, obtendo assim

$$-4 \mu_e S(R) \frac{1}{(R^*)^3} \frac{R_E^2}{\rho R_E^3} \frac{U_c}{U_c^2} \frac{t_c}{\alpha} \int_{-\infty}^{t^*} e^{-\frac{t_c(t^*-\tau^*)}{\alpha}} \dot{R}^*(\tau^*) R^{*2}(\tau^*) d\tau^* . \quad (3.47)$$

Nota-se que a descrição adimensional do tempo τ é descrito como $\tau^* = \tau/t_c$. Neste contexto pode ser identificado outro parâmetro adimensional, o número de Deborah (De), definido como

$$De = \frac{\alpha}{t_c} . \quad (3.48)$$

O parâmetro De corresponde à razão entre o tempo de relaxação, caracterizando a elasticidade do fluido (α), pela escala de tempo de observação do fenômeno, ou tempo de escoamento, definido pela escala típica do tempo t_c . Importante observar que o tempo de relaxação é uma característica intrínseca do fluido.

Quanto menor o número de Deborah, $De \rightarrow 0$, mais viscoso é o comportamento do fluido (i. e., regime Newtoniano), por outro lado, no limite em que $De \rightarrow \infty$ resulta em um comportamento tipicamente elástico (sólido de Hooke).

Utilizando da igualdade $\rho R_E U_c = \text{Re} \mu$, a equação (3.47) é reescrita como

$$-4 \frac{\mu_e}{\mu} \frac{De^{-1}}{\text{Re}(R^*)^3} S(R) \int_{-\infty}^{t^*} e^{-\frac{(t^*-\tau^*)}{De}} \dot{R}^*(\tau^*) R^{*2}(\tau^*) d\tau^* = -4 \frac{\mu_e}{\mu} \frac{De^{-1}}{\text{Re}(R^*)^3} S(R) I^* . \quad (3.49)$$

em que I^* denota a forma adimensional da integral de convolução apresentada na equação (3.43). Retornando à equação governante generalizada (2.100), utilizando a equação (3.49), obtém-se

$$\begin{aligned} R^* \ddot{R}^* + \frac{3}{2} (\dot{R}^*)^2 &= \frac{2}{\text{We}} \left(\frac{1}{(R^*)^{3n}} - \frac{1}{R^*} \right) - 1 - \varepsilon^* \text{sen}(\omega^* t^*) \\ &+ \frac{1}{(R^*)^{3n}} - \frac{4}{\text{Re}} \frac{\dot{R}^*}{R^*} - 4 \frac{\mu_e}{\mu} \frac{De^{-1}}{\text{Re}(R^*)^3} S(R) I^* . \end{aligned} \quad (3.50)$$

A equação (3.50) é definida como uma equação íntegro-diferencial não-linear que rege a dinâmica de bolhas em um fluido viscoelástico linear de Maxwell, apresentada na sua forma adimensional.

No entanto, para a resolver a equação apresentada, faz-se necessário um sistema de equações diferenciais ordinárias. A transformação da integral de convolução em uma equação diferencial é utilizada.

3.3.3 Representação Diferencial da Integral de Convolução

Transformar uma integral de convolução em uma equação diferencial ordinária consiste em um procedimento comumente utilizado no contexto de escoamentos que envolvem fluidos não-Newtonianos com memória (e.g. Jiménez-Fernández & Crespo, 2006). De acordo com a Fórmula de Leibniz (ver maiores detalhes no Apêndice B), determina-se que:

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} G(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} G(x, t) dx + G(b, t) \frac{db}{dt} - G(a, t) \frac{da}{dt}, \quad (3.51)$$

em que $G(x, t)$ representa uma função qualquer, para um caso unidimensional. Define-se a função $G(x, t)$ como

$$G(x, t) = e^{-\frac{(t^* - \tau^*)}{De}} \dot{R}^*(\tau^*) R^{*2}(\tau^*). \quad (3.52)$$

A equação (3.52) é obtida a partir da integral de convolução adimensional obtida pela equação (3.49). Substituindo a equação (3.52) em (3.51), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt^*} I^* &= \int_{-\infty}^{t^*} \frac{\partial}{\partial t^*} e^{-\frac{(t^* - \tau^*)}{De}} \dot{R}^*(\tau^*) R^{*2}(\tau^*) d\tau^* + e^{-\frac{(t^* - \tau^*)}{De}} \dot{R}^*(\tau^*) R^{*2}(\tau^*) \Big|_{t^*} \frac{dt^*}{dt^*} \\ &- \lim_{k \rightarrow -\infty} \left(e^{-\frac{(k - \tau^*)}{De}} \dot{R}^*(\tau^*) R^{*2}(\tau^*) \Big|_{-\infty} \frac{dk}{dt^*} \right), \end{aligned} \quad (3.53)$$

simplificando a equação (3.53), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt^*} I^* &= \dot{R}^*(t^*) R^{*2}(t^*) - \frac{1}{De} \int_{-\infty}^{t^*} e^{-\frac{(t^*-\tau^*)}{De}} \dot{R}^*(\tau^*) R^{*2}(\tau^*) d\tau^* \\ \dot{I}^* &= \dot{R}^* R^{*2} - \frac{1}{De} I^* , \end{aligned} \quad (3.54)$$

em que \dot{I}^* consiste na derivada temporal da integral representada por I^* . Nota-se que a Eq. (3.54) define a integral I^* a partir de uma equação diferencial ordinária.

Cumpramos examinar neste passo que, quando os efeitos elásticos não estão presentes, a equação governante do modelo de viscoelasticidade linear proposto pela Eq. (3.50) deve apresentar a mesma forma da equação governante para o modelo puramente anisotrópico. Isso é facilmente observado substituindo a equação (3.54) em (3.50), em que

$$\begin{aligned} R^* \ddot{R}^* + \frac{3}{2} \dot{R}^{*2} &= \frac{2}{We} \left(\frac{1}{(R^*)^{3n}} - \frac{1}{R^*} \right) - 1 - \varepsilon^* \sin(\omega^* t^*) + \frac{1}{R^{*3n}} - \frac{4\dot{R}^*}{ReR^*} \left(1 + \frac{\mu_e}{\mu} S(R) \right) \\ &+ 4 \frac{\mu_e}{\mu} \frac{S(R)}{Re(R^*)^3} \frac{d}{dt^*} \left\{ \int_{-\infty}^{t^*} e^{-\frac{(t^*-\tau^*)}{De}} \dot{R}^*(\tau^*) R^{*2}(\tau^*) d\tau^* \right\} . \end{aligned} \quad (3.55)$$

Nota-se que o único termo que se encontra em função do número de Deborah (ou da relaxação do material) consiste na integral de convolução, que se apresenta entre chaves. Desprezando qualquer contribuição elástica, ou seja, fazendo $De \rightarrow 0$, observa-se que a integral de convolução tende a zero, devido à função exponencial, que representa o kernel da integral.

Assim, o modelo viscoelástico proposto recupera a forma dada para um fluido equivalente instantâneo, na presença de uma viscosidade extensional associada a um efeito de anisotropia, que corresponde ao modelo puramente anisotrópico proposto, apresentado pela equação (3.27).

3.4 VISCOELASTICIDADE NÃO-LINEAR

A limitação de um modelo viscoelástico linear decorre do fato de estarem restritos a pequenas deformações, cuja derivada material pode ser aproximada na forma $D\sigma/Dt \approx \partial\sigma/\partial t$, ficando restrita a análise para pequenos tempos de relaxação ou número de Deborah $De < 1$. Nesta seção, objetiva-se explorar um modelo para viscoelasticidade não-linear.

3.4.1 Derivadas Temporais Convectivas

Para construir equações constitutivas para modelos viscoelásticos não-lineares, faz-se necessário a utilização de derivadas materiais que são objetivas, obedecendo ao princípio da invariância da equação constitutiva com relação a uma mudança de referencial ou transformação homogênea. Oldroyd, 1950, propôs que esta invariância de coordenadas pode ser obtida a partir da descrição da equação constitutiva em um referencial que convecta e deforma junto dos elementos materiais. A derivada temporal em um sistema de coordenadas convectivo pode ser representado como (Bird *et al.*, 1987)

$$\frac{\delta_+ \boldsymbol{\sigma}}{\delta t} = \overset{\Delta}{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \nabla \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T . \quad (3.56)$$

Que corresponde à derivada convectiva Oldroyd baixa. A derivada Oldroyd baixa de um tensor é obtida a partir de um sistema de referência baseado nos autovetores do tensor deformação \mathbf{D} , em que as bases vetoriais são normais aos planos materiais. A derivada Oldroyd também pode ser obtida na base dual de autovetores do tensor \mathbf{D}^{-1} (Cunha, 2008), dada por

$$\frac{\delta_- \boldsymbol{\sigma}}{\delta t} = \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \dot{\boldsymbol{\sigma}} - (\nabla \mathbf{u})^T \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{u} . \quad (3.57)$$

A derivada expressa pela equação (3.57) é denominada derivada convectiva Oldroyd alta, em que as bases vetoriais são paralelas às linhas materiais. Ambas derivadas Oldroyd podem ser interpretadas como uma taxa de variação de $\boldsymbol{\sigma}$ vista por um observador que translada, gira e deforma com as partículas materiais. O termo $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ denota a derivada material translacional do tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$, dada por

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{D\boldsymbol{\sigma}}{Dt} = \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\boldsymbol{\sigma} \quad (3.58)$$

O princípio da Invariância Material ou Objetividade das derivadas materiais convectivas Oldroyd é apresentado no Apêndice C.

3.4.2 Modelo Maxwell-Oldroyd

A proposta original feita por Oldroyd consistia de um modelo mais geral do que o modelo linear de Maxwell, a partir de uma equação constitutiva invariante, cuja forma mais geral pode ser escrita na forma

$$\boldsymbol{\sigma} + \alpha \frac{\delta\boldsymbol{\sigma}}{\delta t} = 2\mu \left(\mathbf{D} + \alpha_2 \frac{\delta\mathbf{D}}{\delta t} \right) . \quad (3.59)$$

A equação acima é denominada Equação de Jeffrey (Cunha, 2008), em que o termo α_2 é definido como o tempo de retardação do material. Na ausência de α_2 , a equação (3.59) reduz-se a

$$\boldsymbol{\sigma} + \alpha \frac{\delta\boldsymbol{\sigma}}{\delta t} = 2\mu\mathbf{D} , \quad (3.60)$$

que consiste do Modelo Maxwell-Oldroyd viscoelástico não-linear. Ressalte-se que, a derivada temporal Oldroyd pode assumir tanto a forma alta quanto baixa, não havendo

distinção entre ambas, uma vez que a utilização destas depende do problema de escoamento examinado. Neste trabalho utiliza-se a derivada convectiva Oldroyd baixa, em que garante-se a convergência do modelo proposto.

No presente contexto dessa dissertação, o Modelo Maxwell-Oldroyd é modificado, expressando o mesmo em termos de uma viscosidade extensional associada à anisotropia de tensões produzida pela orientação de aditivos anisotrópicos, assumindo a seguinte forma:

$$\alpha \frac{\delta_+ \boldsymbol{\sigma}}{\delta t} + \boldsymbol{\sigma} = 2\mu_e \{ \langle \hat{s} \rangle \cdot \mathbf{D} \cdot \langle \hat{s} \rangle \} \langle \hat{s} \hat{s} \rangle . \quad (3.61)$$

Convém notar que a equação (3.60) recupera o modelo viscoelástico linear anisotrópico, quando a derivada Oldroyd é simplesmente substituída pela derivada $\partial/\partial t$ (local), uma vez que esse corresponde ao limite de pequenas deformações e termos obtidos em $\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{u}$ são de segunda ordem. Substituindo a definição dada pela equação (3.56) em (3.61), obtém-se que

$$\alpha \frac{D\boldsymbol{\sigma}}{Dt} + \boldsymbol{\sigma} = -\alpha \left(\nabla \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T \right) + 2\mu_e \{ \langle \hat{s} \rangle \cdot \mathbf{D} \cdot \langle \hat{s} \rangle \} \langle \hat{s} \hat{s} \rangle . \quad (3.62)$$

Aplicando a equação (3.62) ao problema de dinâmica de bolhas em líquido viscoelástico, obtém-se

$$\alpha \frac{D\sigma_{rr}}{Dt} + \sigma_{rr} = -2\alpha \frac{\partial u_r}{\partial r} \sigma_{rr} + 2\mu_e \left(-\frac{2\dot{R}R^2}{r^3} \langle \cos^2 \theta \rangle \right) \hat{e}_r \cdot \langle \hat{s} \hat{s} \rangle \cdot \hat{e}_r , \quad (3.63)$$

aqui $(\nabla \mathbf{u})_{rr} = -(2R^2 \dot{R}/r^3) \hat{e}_r \hat{e}_r$, analisado na direção radial do escoamento e, neste caso, $\nabla u_r = (\nabla u_r)^T$. Desenvolvendo o produto escalar $\hat{e}_r \cdot \langle \hat{s} \hat{s} \rangle \cdot \hat{e}_r$ na equação (3.63), tem-se

$$\alpha \frac{D\sigma_{rr}}{Dt} + \sigma_{rr} = 4\alpha \frac{\dot{R}R^2}{r^3} \sigma_{rr} - 4\mu_e \frac{\dot{R}R^2}{r^3} \langle \cos^4 \theta \rangle . \quad (3.64)$$

É conveniente escrever a equação anterior na forma:

$$\alpha \frac{D\sigma_{rr}}{Dt} = -\sigma_{rr} \left(1 - 4\alpha \frac{\dot{R}R^2}{r^3} \right) - 4\mu_e \frac{\dot{R}R^2}{r^3} S(R). \quad (3.65)$$

Cumpramos examinar neste passo que o tensor de tensões para um modelo anisotrópico é recuperado quando o tempo de relaxação é nulo (i.e., $\alpha = 0$), em que a equação (3.65) assume a mesma forma da equação (3.23). Nota-se que considerações acerca da função orientação de aditivos $S(R)$ são realizadas somente no capítulo 7. Utilizando das escalas típicas determinadas anteriormente, pode-se adimensionalizar a equação (3.63), determinando que

$$\alpha \frac{\rho U_c^2}{t_c} \frac{D\sigma_{rr}^*}{Dt^*} = -\rho U_c^2 \sigma_{rr}^* \left(1 - 4 \frac{\alpha}{t_c} \frac{\dot{R}^* R^{*2}}{r^3} \right) - 4 \frac{\mu_e}{t_c} \frac{\dot{R}^* R^{*2}}{r^3} S(R). \quad (3.66)$$

É importante ressaltar que $\sigma_{rr}^* = \sigma_{rr}/\rho U_c^2$. Multiplicando a equação (3.66) por $1/(\rho U_c^2)$ e considerando que $\text{Re}\mu = \rho R_E U_c$, a equação (3.66) pode ser finalmente escrita na forma

$$De \frac{D\sigma_{rr}^*}{Dt^*} = -\sigma_{rr}^* \left(1 - 4De \frac{\dot{R}^* R^{*2}}{r^3} \right) - 4 \frac{\mu_e}{\mu \text{Re}} \frac{1}{r^3} \frac{\dot{R}^* R^{*2}}{r^3} S(R). \quad (3.67)$$

A equação (3.67) corresponde à forma adimensional da equação constitutiva para um modelo viscoelástico não-linear, modelo este que consiste em uma equação diferencial de primeira ordem, descrita em termos da derivada material da tensão extra devido aos efeitos elásticos não-lineares.

3.4.3 Coordenadas Lagrangeanas

A equação constitutiva (3.67) pode ser escrita numa forma mais apropriada para o presente contexto, dada por

$$\frac{D\sigma_{rr}^*}{Dt^*} = -\sigma_{rr}^*(r, t) \left(\frac{1}{De} - 4 \frac{\dot{R}^* R^{*2}}{r^3} \right) - 4 \frac{\mu_e}{\mu} \frac{S(R)}{ReDe} \frac{\dot{R}^* R^{*2}}{r^3}. \quad (3.68)$$

Por conveniência, a partir deste ponto, os “asteriscos” são suprimidos, objetivando uma nomenclatura mais simples na apresentação das equações. É importante notar que a função elástica $\sigma_{rr}(r, t)$ é função do tempo t e da coordenada espacial r . Uma mudança de coordenadas espacial para material é utilizada com o objetivo de imobilizar a fronteira, ou seja, a superfície da bolha. Isso proporciona o estudo do problema em termos de coordenadas lagrangeanas, em que a derivada material segundo um observador que translada com as partículas do líquido é representada por

$$\frac{D}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{r_0}, \quad (3.69)$$

em que r_0 corresponde à coordenada material. Por conveniência, a derivada material será representada simplesmente por

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{r_0} = \frac{d}{dt} \quad (3.70)$$

Para um fluido incompressível, o Jacobiano J da transformação de coordenadas eulerianas para lagrangeanas, que representa a relação entre o volume em um estado de referência da partícula fluindo em um tempo t e o volume em estado de referência inicial, $t = 0$, é dado pela primeira fórmula de Euler é igual a unidade. Portanto

$$J = \frac{\Delta V_{(t)}}{\Delta V_0} = 1 \quad (3.71)$$

Neste caso, tem-se que $\Delta V_{(t)} = \Delta V_0$ (movimento sem dilatação, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$). Para o caso de uma bolha esférica de raio $R(t)$ descrevendo um movimento puramente radial, é válido escrever

$$\frac{4}{3}\pi(r^3 - R^3(t)) = \frac{4}{3}\pi(r_0^3 - R_0^3) \quad (3.72)$$

Definindo $y = r^3 - R^3$, a relação fornecida pela equação (3.72) reduz-se a:

$$y = r^3 - R^3 . \quad (3.73)$$

Agora, reescrevendo a equação constitutiva (3.68) em coordenadas lagrangeanas, obtém-se

$$\frac{d\sigma_{yy}(y, t)}{dt} = -\sigma_{yy}(y, t) \left(\frac{1}{De} - 4 \frac{\dot{R}R^2}{y + R^3} \right) - 4 \frac{\mu_e}{\mu} \frac{S(R)}{\text{Re}De} \frac{\dot{R}R^2}{(y + R^3)} . \quad (3.74)$$

A integral em σ_{rr} , contida na equação governante que rege a dinâmica da bolha, dada pela equação (2.100), representa a contribuição não-Newtoniana do líquido ambiente e por consequência deve ser apresentada em termos de coordenadas lagrangeanas. Primeiramente, a integral é denotada por uma quantidade escalar $B = B(R(t))$, em que

$$B(R(t)) = \int_R^\infty \frac{\sigma_{rr}(r, t)}{r} dr . \quad (3.75)$$

Considerando novamente a mudança de coordenadas $y = r^3 - R^3$, como $dy/dr = 3r^2$, a equação (3.75) assume a forma

$$B(R) = \frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{\sigma_{yy}(y, t)}{y + R^3} dy . \quad (3.76)$$

Substituindo a função ou integral B na equação (2.100), obtém-se a equação governante para um modelo viscoelástico não-linear, dada por

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{2}{\text{We}} \left(\frac{1}{R^{3n}} - \frac{1}{R} \right) - 1 - \varepsilon \text{sen}(\omega t) + \frac{1}{R^{3n}} - \frac{4}{\text{Re}} \frac{\dot{R}}{R} + 3B(R(t)) . \quad (3.77)$$

Para resolver a equação governante apresentada em (3.77), o foco consiste em encontrar uma metodologia de solução sem que haja a necessidade de integrar espacialmente a tensão extra σ_{rr} para cada intervalo de tempo desejado (i.e. evitar resolver a equação íntegro-diferencial da dinâmica de bolhas diretamente), o que pode elevar de forma exorbitante o custo computacional em uma simulação numérica (e.g. Allen & Roy, 2000b e Kim, 1994).

3.4.4 Sistema de Equações Diferenciais

No sentido de evitar a solução de uma equação íntegro-diferencial para $R(t)$, determina-se uma equação diferencial a ser resolvida para $B(R)$ (eq. (3.76)), uma vez que esta quantidade representa também uma incógnita para o problema.

Derivando a integral (3.76) com relação ao tempo e aplicando a relação de Leibniz (Apêndice B), obtém-se

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty \frac{\sigma_{yy}(y, t)}{y + R^3} dy = \int_0^\infty \frac{d}{dt} \left[\frac{\sigma_{yy}}{y + R^3} \right] dy + \frac{\sigma_{yy}}{y + R^3} \Big|_\infty \frac{d(\infty)}{dt} - \frac{\sigma_{yy}}{y + R^3} \Big|_0 \frac{d(0)}{dt} \quad (3.78)$$

Portanto,

$$3\dot{B} = \int_0^\infty \frac{\dot{\sigma}_{yy}(y, t)}{y + R^3} dy . \quad (3.79)$$

Aqui, $\dot{B} = dB/dt$ e $\dot{\sigma}_{yy} = d\sigma_{yy}/dt$. Agora, multiplicando a equação (3.74) por $dy/(y + R^3)$ e integrando em dy , obtém-se

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\dot{\sigma}_{yy}(y, t)}{y + R^3} dy &= -\frac{1}{De} \int_0^\infty \frac{\sigma_{yy}(y, t)}{y + R^3} dy + 4\dot{R}R^2 \int_0^\infty \frac{\sigma_{yy}(y, t)}{(y + R^3)^2} dy \\ &- 4\frac{\mu_e}{\mu} \frac{\dot{R}R^2}{ReDe} S(R) \int_0^\infty \frac{1}{(y + R^3)^2} dy . \end{aligned} \quad (3.80)$$

Define-se a quantidade A_0 para representar a seguinte integral:

$$A_0 = \int_0^\infty \frac{\sigma_{yy}(y, t)}{(y + R^3)^2} dy . \quad (3.81)$$

Com algumas manipulações algébricas em (3.80), determina-se que

$$3\dot{B} = -3\frac{B}{De} + 4\dot{R}R^2 A_0 - 4\frac{\mu_e}{\mu} \frac{S(R)}{ReDe} \frac{\dot{R}}{R} , \quad (3.82)$$

para o fechamento da formulação, resta determinar uma equação para a integral (3.81) em função de $R(t)$. Primeiramente, utiliza-se o método de integração por partes, dado por

$$\int adb = ab - \int bda , \quad (3.83)$$

na integral definida por

$$\int_0^\infty \frac{\dot{\sigma}_{yy}}{y + R^3} dy , \quad (3.84)$$

com $a = \frac{1}{y+R^3}$ e $db = \frac{d\sigma_{yy}}{dt} dy$, determina-se da e b como segue:

$$da = \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{y + R^3} \right) dy = -\frac{1}{(y + R^3)^2} dy \quad (3.85)$$

e

$$b = \int \frac{d\sigma_{yy}}{dt} dy = \int \frac{dy}{dt} d\sigma_{yy} = -3\dot{R}R^2 \int d\sigma_{yy} = -3\dot{R}R^2 \sigma_{yy} , \quad (3.86)$$

substituindo na equação (3.84), e utilizando (3.81), obtém-se

$$\int_0^\infty \frac{\dot{\sigma}_{yy}}{y + R^3} dy = -\frac{3\dot{R}R^2 \sigma_{yy}}{y + R^3} \Big|_0^\infty - 3\dot{R}R^2 \int_0^\infty \frac{\sigma_{yy}}{(y + R^3)^2} dy , \quad (3.87)$$

e, portanto

$$\int_0^\infty \frac{\dot{\sigma}_{yy}}{y + R^3} dy = 3\sigma_{yy}(0, t) \frac{\dot{R}}{R} - 3\dot{R}R^2 A_0 . \quad (3.88)$$

É importante registrar que, quando $y = 0$, tem-se $r = R$ e, portanto, $\sigma_{yy}(0, t) = \sigma_{rr}(R, t)$. Utilizando a equação (3.79), (3.88) pode ser reescrita na forma

$$3\dot{B} = 3\sigma_{rr}(R, t) \frac{\dot{R}}{R} - 3\dot{R}R^2 A_0 \quad (3.89)$$

com

$$A_0 = \frac{\sigma_{rr}(R, t)}{R^3} - \frac{\dot{B}}{\dot{R}R^2} . \quad (3.90)$$

Com o resultado dado pela equação (3.90), é possível reescrever a equação (3.82) em termos de \dot{B} . Substituindo (3.90) em (3.82) determina-se que:

$$3\dot{B} = -3\frac{B}{De} + 4\dot{R}R^2 \left(\frac{\sigma_{rr}(R, t)}{R^3} - \frac{\dot{B}}{\dot{R}R^2} \right) - 4\frac{\mu_e}{\mu} \frac{S(R)}{ReDe} \frac{\dot{R}}{R} \quad (3.91)$$

ou ainda,

$$\dot{B} = -\frac{3}{7} \frac{B}{De} + \frac{4}{7} \sigma_{rr}(R, t) \frac{\dot{R}}{R} - \frac{4}{7} \frac{\mu_e}{\mu} \frac{S(R)}{ReDe} \frac{\dot{R}}{R} . \quad (3.92)$$

Cumpramos examinar neste passo que, para um completo fechamento do modelo acoplado de dinâmica de bolhas em fluido viscoelástico não-linear, é necessário determinar a tensão elástica avaliada no raio da bolha $R(t)$, i.e. $\sigma_{rr}(R)$. Para tal, avalia-se a equação constitutiva (3.74) na superfície da bolha, que corresponde a fazer $y = 0$. Desta maneira, obtém-se:

$$\left. \frac{d\sigma_{yy}(y, t)}{dt} \right|_{y=0} = -\sigma_{yy}(y, t) \left(\frac{1}{De} - 4\frac{\dot{R}R^2}{y + R^3} \right) \Big|_{y=0} - 4\frac{\mu_e}{\mu} \frac{S(R)}{ReDe} \frac{\dot{R}R^2}{(y + R^3)} \Big|_{y=0} \quad (3.93)$$

considerando $\dot{\sigma}_{yy}(0, t) = \dot{\sigma}_{rr}(R)$, determina-se que:

$$\dot{\sigma}_{rr}(R) = -\sigma_{rr}(R) \left(\frac{1}{De} - 4 \frac{\dot{R}}{R} \right) - 4 \frac{\mu_e}{\mu} \frac{S(R)}{ReDe} \frac{\dot{R}}{R}. \quad (3.94)$$

Portanto, a partir do sistema de equações diferenciais não-lineares acopladas (eqs. 3.77, 3.92 e 3.94), pode-se examinar a evolução temporal do movimento oscilatório radial de uma bolha esférica em um fluido viscoelástico não-linear Maxwell-Oldroyd.

3.4.5 Considerações entre os Modelos Viscoelásticos

Primeiramente, considera-se a mesma metodologia utilizada na seção 3.4.4 visando obter um sistema de equações diferenciais ordinárias para o modelo de Maxwell (i.e. viscoelástico linear). A equação governante é representada, novamente, pela equação (3.77), em que a função $B = B(R)$ é definida pela equação (3.75). A equação diferencial adimensionalizada que representa o modelo de Maxwell em regime viscoelástico linear é dada por

$$De \dot{\sigma}_{rr} + \sigma_{rr} = -\frac{4}{Re} \frac{\mu_e}{\mu} \frac{\dot{R}R^2}{r^3} S(R), \quad (3.95)$$

multiplicando a eq. (3.95) por r/dr e integrando o resultado no intervalo de R a ∞ , obtém-se

$$De \int_R^\infty \frac{\partial}{\partial t} \frac{\sigma_{rr}}{r} dr + \int_R^\infty \frac{\sigma_{rr}}{r} dr = -\frac{4}{Re} \frac{\mu_e}{\mu} \dot{R}R^2 S(R) \int_R^\infty \frac{1}{r^4} dr. \quad (3.96)$$

A primeira integral da eq. (3.96) pode ser reescrita usando a fórmula de Leibniz. Portanto,

$$\int_R^\infty \frac{\partial}{\partial t} \frac{\sigma_{rr}}{r} dr = \frac{d}{dt} \int_R^\infty \frac{\sigma_{rr}}{r} dr + \sigma_{rr}(R, t) \frac{\dot{R}}{R}. \quad (3.97)$$

Destá maneira, a eq. (3.96) é reduzida para a forma

$$\dot{B} = -\frac{B}{De} - \sigma_{rr}(R, t) \frac{\dot{R}}{R} - \frac{4 \mu_e S(R) \dot{R}}{3 \mu Re De R}, \quad (3.98)$$

avaliando-se a eq. (3.95) em $r = R$, obtém-se uma EDO de primeira ordem em termos de $\sigma_{rr}(R, t)$, dada por

$$\dot{\sigma}_{rr}(R, t) = -\frac{\sigma_{rr}(R, t)}{De} - \frac{4 \mu_e S(R) \dot{R}}{Re \mu De R}. \quad (3.99)$$

Resolvendo-se as equações (3.77), (3.98) e (3.99) obtém-se a resposta do movimento da bolha para um modelo viscoelástico linear. Nota-se que, apesar da combinação entre estas equações resultar na solução para a dinâmica de uma bolha a partir do modelo viscoelástico linear, é preferível a utilização da metodologia obtida na seção 3.3, uma vez que o custo computacional para resolver um sistema de três equações diferenciais ordinárias é menor do que o custo que envolve um sistema composto por 4 EDOs de primeira ordem.

É importante atentar para o fato das equações (3.92) e (3.98), que representam EDOs para a função $B(R)$ relativas aos modelos viscoelástico não-linear e linear, respectivamente, apresentarem coeficientes distintos, justamente devido à presença da derivada material convectiva Oldroyd no modelo não-linear. Derivada esta associada com uma mudança de coordenadas lagrangeana, seguindo um referencial que deforma, gira e convecta com o material. Da mesma forma, a EDO para a tensão localizada na superfície da bolha, representada pela equação (3.94) em um modelo não-linear difere da equação (3.99) pela adição de um termo extra, relativo à deformação oriunda da deriva convectiva Oldroyd baixa.

Para um modelo viscoelástico do tipo Maxwell-Oldroyd, é possível também obter a tensão em termos de uma integral de convolução. A partir da equação constitutiva (3.74), apresentada em coordenadas lagrangeanas, pode-se rearranjar os termos, obtendo-se

$$\dot{\sigma}_{yy}(y, t) + \sigma_{yy}(y, t) \left(\frac{1}{De} - 4 \frac{\dot{R}R^2}{y + R^3} \right) = -4 \frac{\mu_e}{\mu} \frac{S(R)}{ReDe} \frac{\dot{R}R^2}{(y + R^3)}. \quad (3.100)$$

Cumpra observar neste passo que a equação diferencial (3.100) é semelhante à forma da EDO padrão $y'(t) + p(t)y(t) = q(t)$. Conforme visto anteriormente na seção 3.3.1, é possível encontrar uma solução em termos de $\sigma_{rr}(y, t)$, utilizando o método de integração por fator integrante. A solução é bem conhecida e é dada por:

$$\sigma_{yy}(y, t) = \exp[-P(t)] \int_{-\infty}^t q(\tau) \exp[P(\tau)] d\tau, \quad (3.101)$$

em que a função $P(t)$ é calculada na forma

$$P(t) = \int \left(\frac{1}{De} - \frac{4\dot{R}R^2}{y + R^3} \right) dt = \frac{t}{De} - \frac{4}{3} \frac{R^3}{(y + R^3)}, \quad (3.102)$$

com as funções exponenciais $\exp[-P(t)]$ e $\exp[P(\tau)]$ dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \exp[-P(t)] &= e^{\left[\frac{4}{3} \frac{R^3}{(y+R^3)} - \frac{t}{De} \right]} \\ \exp[P(\tau)] &= e^{\left[-\frac{4}{3} \frac{R^3}{(y+R^3)} + \frac{\tau}{De} \right]}. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Sabendo que $q(\tau)$ consiste no termo à direita da igualdade fornecida pela equação (3.100), a equação (3.101) é reescrita como:

$$\sigma_{yy}(y, t) = -e^{\left[\frac{4}{3} \frac{R^3}{(y+R^3)} - \frac{t}{De} \right]} \int_{-\infty}^t e^{\left[-\frac{4}{3} \frac{R^3(\tau)}{y+R^3(\tau)} + \frac{\tau}{De} \right]} 4 \frac{\mu_e}{\mu} \frac{S(R)}{ReDe} \frac{\dot{R}(\tau)R^2(\tau)}{(y + R^3(\tau))} d\tau, \quad (3.104)$$

ou, ainda:

$$\sigma_{yy}(y, t) = -4 \frac{\mu_e}{\mu} \frac{S(R)}{\text{Re}De} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(t-\tau)}{De}} \left(e^{\frac{4}{3} \left[\frac{R^3(t)}{y+R^3(t)} - \frac{R^3(\tau)}{y+R^3(\tau)} \right]} \right) \frac{\dot{R}(\tau) R^2(\tau)}{y + R^3(\tau)} d\tau . \quad (3.105)$$

visando apresentar uma menor densidade na nomenclatura da equação (3.105), considera-se que

$$g(t) = \frac{R^3(t)}{y + R^3(t)} , \quad g(\tau) = \frac{R^3(\tau)}{y + R^3(\tau)} , \quad (3.106)$$

e, substituindo em (3.105), obtém-se uma forma mais apropriada:

$$\sigma_{yy}(y, t) = -4 \frac{\mu_e}{\mu} \frac{S(R)}{\text{Re}De} \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)/De} \left(e^{\frac{4}{3}(g(t)-g(\tau))} \right) \frac{\dot{R}(\tau) R^2(\tau)}{y + R^3(\tau)} d\tau . \quad (3.107)$$

Cumpramos registrar que a integral apresentada na equação (3.107) denota a integral de convolução para um modelo viscoelástico não-linear Maxwell-Oldroyd. Uma comparação direta com a integral de convolução do modelo viscoelástico linear pode ser realizada. A partir da equação (3.45), observa-se que a tensão $\sigma_{rr}(r, t)$ adimensional para o modelo viscoelástico linear é dada por

$$\sigma_{rr}(r, t) = -4 \frac{\mu_e}{\mu} \frac{S(R)}{\text{Re}De} \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)/De} \frac{\dot{R}(\tau) R^2(\tau)}{r^3} d\tau , \quad (3.108)$$

relembrando que a forma generalizada de um modelo viscoelástico é dada por

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t M'(t - \tau) \dot{\gamma}(\tau) d\tau , \quad (3.109)$$

é possível identificar que a função de relaxação do modelo viscoelástico linear e a taxa de cisalhamento correspondem, respectivamente, a:

$$M'(t - \tau) = -2 \frac{\mu_e}{\mu} \frac{S(R)}{\text{Re}De} e^{-(t-\tau)/De}, \quad \dot{\gamma}(\tau) = -\frac{2R(\tau)^2 \dot{R}(\tau)}{r^3}. \quad (3.110)$$

A partir da equação (3.107), nota-se que a função de relaxação da tensão para um modelo viscoelástico não-linear apresenta uma forma diferenciada, dada por

$$G^*(y, t, \tau, R) = -2 \frac{\mu_e}{\mu} \frac{S(R)}{\text{Re}De} e^{-(t-\tau)/De} \left(e^{\frac{4}{3}(g(t)-g(\tau))} \right), \quad (3.111)$$

como se pode identificar, o módulo de relaxação de tensão para um modelo viscoelástico não-linear $G^*(y, t, \tau, R)$ também pode ser escrito em termos do módulo de relaxação da equação (3.110), em que:

$$G^*(y, t, \tau, R) = M'(t - \tau) \left(e^{\frac{4}{3}(g(t)-g(\tau))} \right) = M'(t - \tau) M''(y, R(t), R(\tau)). \quad (3.112)$$

Observa-se que $G^*(y, t, \tau, R)$ é calculada pelo produto da função de relaxação de tensão de Maxwell, em regime viscoelástico linear ($M'(t - \tau)$) e da função dada por $M''(y, R(t), R(\tau))$, que representa a parte não-linear de G^* devido ao acoplamento do movimento da bolha com a relaxação de aditivos. Portanto, $G(y, t, \tau)$ representa fisicamente uma memória mais complexa do fluido, devido ao efeito não-linear da elasticidade, descrita agora em função do raio da bolha nos instantes $R(t)$ e $R(\tau)$.

É importante destacar que, quando $M'' = 1$, a equação (3.112) reduz-se ao módulo de relaxação linear, dado pela equação (3.110), recuperando a integral de convolução do modelo linear de Maxwell. Para $M'' = 1$, nota-se que $g(t) \cong g(\tau)$, ou seja, o raio da bolha atual $R(t)$ é praticamente equivalente ao raio da bolha em um tempo anterior, $R(\tau)$. Isso demonstra a limitação da memória da relaxação dos aditivos para um modelo viscoelástico linear, em que $R(t) \cong R(\tau)$. Portanto, o modelo viscoelástico linear deve ser explorado somente para um efeito elástico moderado, i.e. número de Deborah moderado. Desta forma, tem-se que

$$M''(y, R(t), R(\tau)) = \begin{cases} 1, & \text{para modelo viscoelástico linear} \\ e^{\frac{4}{3}(g(t)-g(\tau))}, & \text{para modelo viscoelástico não-linear} \end{cases}$$

Não se pode olvidar que o modelo viscoelástico não-linear é descrito em coordenadas lagrangeanas e, portanto, apresenta um maior acoplamento com o escoamento. O módulo de relaxação G^* apresenta uma dependência com a variável y , assim como a taxa de cisalhamento, que é agora descrita em coordenadas lagrangeanas, $r^3 = R^3(\tau) + y$.

Uma vez que a tensão para um modelo viscoelástico não-linear examinada aqui é expressa na equação (3.101), pode-se substituir diretamente na equação (3.76), que remete à quantidade $B(R)$, definida em coordenadas lagrangeanas e que se encontra presente na equação governante da dinâmica de bolhas. Desta maneira, obtém-se:

$$B = -\frac{4}{3} \frac{\mu_e}{\mu} \frac{S(R)}{\text{ReDe}} \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)/De} \left\{ \int_0^\infty \frac{M''(y, R(t), R(\tau))}{y + R^3(t)} dy \right\} \frac{\dot{R}(\tau) R^2(\tau)}{y + R^3(\tau)} d\tau . \quad (3.113)$$

A função $B(R)$ equivalente ao modelo viscoelástico linear, denominada $B_0(R)$, é dada por

$$B_0(R) = \int_R^\infty \frac{\sigma_{rr}(r, t)}{r} dr = -\frac{4}{3} \frac{\mu_e}{\mu} \frac{S(R)}{\text{ReDe}} \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)/De} \frac{\dot{R}(\tau) R^2(\tau)}{R^3(t)} d\tau , \quad (3.114)$$

Nota-se que a diferença entre $B(R)$ e $B_0(R)$ remete ao termo $M''(y, R(t), R(\tau))$ e à consideração de coordenadas lagrangeanas. A equação (3.114) pode ser reescrita em termos da integral de convolução do modelo viscoelástico linear, I , obtendo-se:

$$B_0(R) = -\frac{4}{3} \frac{\mu_e}{\mu} \frac{S(R)}{\text{ReDe}} \frac{1}{R^3} I , \quad (3.115)$$

Na seção 6.4 realiza-se uma comparação entre as soluções para a dinâmica de bolhas em um modelo viscoelástico linear e não-linear, em que maiores considerações acerca da descrição da relaxação dos aditivos podem ser encontradas. É importante conceber que o modelo viscoelástico não-linear remete à descrição de um regime não-linear que pode ser assumido pelo fluido. Os capítulos a seguir exploram a metodologia do código numérico desenvolvido e resultados obtidos neste trabalho.

Ressalta-se que a função orientação de aditivos é explorada somente no capítulo 7, em que considerações acerca do comportamento da bolha de acordo com a orientação média global dos aditivos são realizadas. Portanto, qualquer resultado anterior ao capítulo supracitado, considera-se a condição de aditivos completamente alinhados na direção radial (i.e. a condição da solução permanente de orientação). Desta forma, $\theta = 0$, que corresponde a $S(R) = \langle \cos^4 \theta \rangle = 1$. A aproximação de partículas alinhadas é baseada na constatação de que fibras caracterizadas por uma grande razão de aspecto tendem a se alinhar rapidamente com a direção do escoamento. Nesta aproximação, resolve-se somente o campo de velocidades, que tem a função tanto de prever o escoamento do fluido quanto a orientação dos aditivos.

4 METODOLOGIA DA SOLUÇÃO NUMÉRICA

A simulação computacional constitui a base para a análise do comportamento não-linear da dinâmica da bolha, por meio da qual serão resolvidas as equações diferenciais ordinárias não-lineares desenvolvidas nos capítulos anteriores. A rotina de cálculo foi desenvolvida em compilador Compaq Visual Fortran versão 6.6, executado na plataforma Microsoft Windows XP Professional. O computador utilizado possuía um processador Intel Core 2 Quad, de 2.4 Ghz, com 2 GB de memória RAM. Para desenvolvimento da rotina utilizou-se do livro *Numerical Recipes* (Press *et al.*, 1992).

O código computacional contém três subrotinas (ou subprogramas). Primeiramente é criado um arquivo principal, que carrega as subrotinas existentes. Um arquivo global é inserido, definindo todos os parâmetros que serão utilizados para evoluir a simulação, diferenciando a definição de cada um entre números inteiros, reais e vetores. A seguir, é criado um arquivo em que as funções são inseridas. As formas das equações serão descritas na seção (4.1). Uma vez que a parte principal do programa se encontra elaborada, são incorporadas as subrotinas. Primeiramente, uma subrotina para carregar os dados iniciais é adicionada à rotina, em que se faz necessária a criação de um arquivo no formato “DAT”, o qual servirá de pré-processamento para os valores dos parâmetros requisitados, tais como o tempo máximo, número de integrações, raio e velocidade iniciais, entre outros, sendo estes interpretados pela subrotina existente.

O próximo passo é definir a forma de cálculo da equação diferencial não-linear governante do movimento da bolha, que consiste numa subrotina referente ao algoritmo para solucionar a mesma. A subrotina é definida como o método de solução do problema. O caso investigado, definido como um problema de valor inicial (equação diferencial contendo a condição $dx/dt = f(x, t) \rightarrow x(t = 0) = x_0$), é resolvido por meio da utilização do método de Runge-Kutta de quarta ordem (Press *et al.*, 1992).

A descrição do funcionamento, desenvolvimento e utilização do método encontra-se na seção (4.1). Uma vez que o programa já contém sua base, sua entrada de dados e processamento, resta somente, o pós-processamento dos dados com a impressão dos resultados. Para tal fim é elaborada uma subrotina de pós-processamento, em que são requisitados as variáveis que caracterizam a solução do problema. Nota-se que o formato da saída dos dados é controlado, sendo possível a criação de um arquivo em um formato que pode ser carregado, diretamente, em aplicativos que realizam a conversão de dados em resultados gráficos.

A seguir, descreve-se o método de integração numérica a partir da utilização de um Runge-Kutta de quarta ordem. A definição do passo de tempo utilizado nas simulações para a análise da dinâmica de bolhas também é explorada. A análise inicial para validação do código baseia-se na solução analítica desenvolvida por Rayleigh, 1917, considerando o tempo de colapso de uma bolha/vácuo que se encontra imersa em um meio infinito. Uma solução mais robusta para o controle do passo de tempo, por meio do uso de um passo de tempo adaptativo para o Runge-Kutta é apresentado, utilizado principalmente nas simulações envolvendo os modelos anisotrópicos e elásticos. O capítulo encerra com a análise preliminar de resultados, onde se considera uma bolha imersa em um fluido viscoso e em um fluido puramente anisotrópico, assim como a sensibilidade da mesma às condições iniciais e para alguns parâmetros físicos que envolvem o problema proposto.

4.1 O MÉTODO RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM

O método de Runge-Kutta corresponde ao algoritmo corretor-preditor avançado, que utiliza de médias ponderadas de uma função f calculada nos extremos e em pontos intermediários de um intervalo $[t_j, t_{j+1}]$. Avalia-se cada passo de tempo em quatro sub-passos, realizando, portanto, não apenas uma, mas quatro integrações por passo de tempo. A expressão padrão que caracteriza o Runge-Kutta clássico de ordem 4, a ser utilizado, é da forma (Press *et al.*, 1992):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}{6}, \quad (4.1)$$

em que:

$$k_1 = \Delta t f(x_n, y_n), \quad (4.2)$$

$$k_2 = \Delta t f\left(x_n + \frac{\Delta t}{2}k_1, y_n + \frac{\Delta t}{2}\right) \quad (4.3)$$

$$k_3 = \Delta t f\left(x_n + \frac{\Delta t}{2}k_2, y_n + \frac{\Delta t}{2}\right) \quad (4.4)$$

$$k_4 = \Delta t f(x_n + \Delta t k_3, y_n + \Delta t) . \quad (4.5)$$

Logo, para a integração numérica por intermédio de um problema de valor inicial, utilizando n passos, faz-se necessário $4n$ avaliações da função em um passo de tempo Δt . Nota-se que a utilização do método Runge-Kutta estabelece que a EDO que se deseja calcular seja transformada num sistema de EDOs de primeira ordem. Portanto, seja uma EDO que contenha K derivadas, sua função será definido em termos de um sistema de K equações diferenciais ordinárias de primeira ordem acopladas.

4.2 ANÁLISE DO PASSO DE TEMPO COMPUTACIONAL

O valor de Δt deve ser explorado de maneira meticulosa, uma vez que a função $R(t)$ que descreve a evolução temporal do raio da bolha pode variar significativamente para pequenos valores de Δt , uma ocorrência muito comum em trabalhos envolvendo situações altamente não-lineares, gerando erros nas simulações. A otimização do passo Δt é a maior desvantagem do método, mas que não justifica sua exclusão, pois basta ser executado com a devida resolução para que a resposta seja suficientemente precisa.

Para se ter noção de sua precisão, o erro numérico para o método de solução numérica é da ordem $O(\Delta t^5)$. Para tornar possível a visualização dos períodos que são obtidos nas simulações, define-se o intervalo de tempo em termos da frequência de excitação. Caso seja fornecida uma frequência muito alta, o período resulta em valores reduzidos, em que o passo de tempo de integração deve ser menor que este período para capturar a dinâmica de oscilação da bolha. De outra maneira, o programa fica sujeito a erros e problemas de convergência.

Um passo de tempo numérico proposto em função da frequência assume a forma: $\Delta t = O(1/w)$. A formulação de um passo de tempo que seja compatível com o tempo de relaxação do fluido externo também é necessária. Este intervalo precisa ser, obrigatoriamente, menor que o tempo de relaxação dos aditivos, para que seja possível a captura dos efeitos elásticos na resposta dinâmica da bolha. Portanto, o passo de tempo adimensional controlado pelo tempo de relaxação do fluido ambiente equivale a $\Delta t = O(De)$.

Por fim, com base na análise da simulação para a aplicação na cavidade de Rayleigh (a ser desenvolvida na seção seguinte), um passo mínimo de tempo $\Delta t_{Ray} = 10^{-3}$ é calibrado visando a obtenção de um tempo de colapso semelhante ao determinado por Rayleigh, com um erro de valor desprezível.

Portanto, o passo de tempo adimensional a ser utilizado baseia-se no valor mínimo entre os vários intervalos de tempo propostos, em que:

$$\Delta t = \min \left(10^{-2} De, 10^{-2} \omega^{-1}, 10^{-3} \right) . \quad (4.6)$$

A condição (4.6) foi utilizada em várias simulações, mostrando-se eficiente quanto à estabilidade e convergência numérica. A descrição de um intervalo de tempo adaptativo é apresentada na seção 4.3, utilizado para obter uma solução numérica com menor tempo computacional, essencial na condição em que a bolha desenvolve oscilações extremas de não-linearidade.

4.2.1 Solução analítica para a cavidade de Rayleigh

A investigação do colapso de cavidade teve como pioneiro o trabalho de Besant, 1859. Naquele trabalho foi proposto uma massa infinita de fluido incompressível homogêneo atuando sem forças e em repouso, em que uma porção esférica de fluido é subitamente preenchida. Com a pressão a uma distância infinita considerada constante (condição de excitação), Besant determinou – utilizando-se da equação do movimento do fluido – a alteração instantânea de pressão para qualquer ponto da massa, bem como o tempo em que a cavidade é preenchida.

Rayleigh, 1917 propôs uma análise mais rigorosa do colapso de uma cavidade de vácuo, desenvolvendo um modelo teórico que resultou em uma solução analítica em termos da função Beta para a velocidade da interface da bolha de vácuo e o cálculo do tempo τ_c de colapso total da cavidade, que assume a forma (detalhes da solução são mostrados no Apêndice D):

$$\tau_c = 0,915R_0\sqrt{\frac{\rho}{P_0}}, \quad (4.7)$$

que em termos adimensionais resulta em:

$$\frac{\tau_c}{R_0\sqrt{\rho/P_0}} = 0,915. \quad (4.8)$$

Para aplicar o resultado do problema da cavidade de Rayleigh na simulação desenvolvida, faz-se necessário recordar a solução de Rayleigh-Plesset descrita na equação (2.64), que no caso de uma cavidade, a equação adimensionalizada reduz-se à forma simples

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = -1. \quad (4.9)$$

A solução numérica da equação (4.9) é reescrita na seguinte forma:

$$\begin{cases} y = \dot{R} \\ \dot{y} = \frac{1}{R} \left[-1 - \frac{3}{2}y^2 \right] \end{cases} \quad (4.10)$$

A Figura 4.1 apresenta a solução numérica do colapso da cavidade de Rayleigh obtida por meio da integração numérica desenvolvida aqui. O valor do passo de tempo necessário para a solução numérica do problema de Rayleigh foi $\Delta t_{ray} = 10^{-3}$. O erro na estimativa do tempo de colapso numérico relativo ao tempo de colapso da solução analítica (Apêndice D) foi de aproximadamente 0,1%. Valor este que valida o código computacional e fornece também suporte para a definição de um passo de tempo computacional preliminar $\Delta t_{ray} = 10^{-3}$.

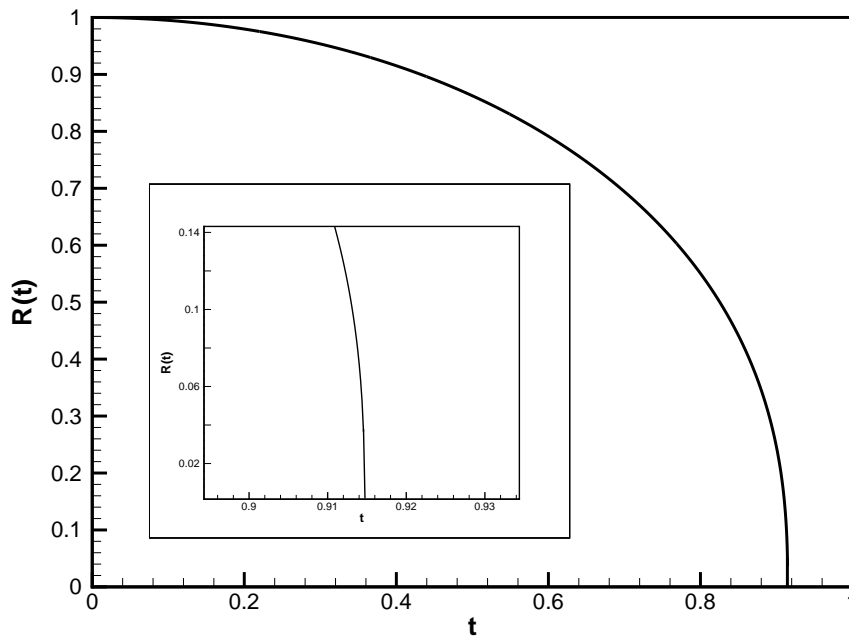


Figura 4.1: Integração do problema da cavidade de Rayleigh obtida por meio do código computacional elaborado no presente trabalho.

4.3 PASSO DE TEMPO ADAPTATIVO

Uma ferramenta relevante para obter a resposta de um sistema de equações diferenciais ordinárias consiste no controle adaptativo sobre o seu progresso. Geralmente usa-se o passo de tempo adaptativo visando alcançar e permanecer dentro de uma tolerância na solução, com a menor exigência computacional possível. Enquanto alguns passos muito pequenos são necessários para as regiões de maior instabilidade, da mesma forma ocorrerão regiões em que um passo de tempo maior pode ser utilizado, diminuindo o tempo necessário para realizar uma simulação. Muitas vezes o controle do passo de tempo pode ganhar mais eficiência computacional do que se imagina. O mais interessante é que além do passo de tempo se adaptar à acurácia desejada, a mesma pode ser monitorada, sendo vantajoso e até necessário o controle desta tolerância.

A implementação que define o controle do passo de tempo adaptativo requer que o algoritmo que fornece o passo de tempo retorne informações a respeito da performance do programa, tornando possível a visualização da estimativa de erro que está sendo realizada.

Aplicando o controle de passo de tempo adaptativo ao Runge-Kutta de quarta ordem, faz-se utilização de uma técnica que captura cada passo duas vezes, uma vez como um passo de tempo completo (fornece um valor para a função y_1) e outra, de forma independente, como dois passos de tempo (resulta no valor y_2). Avaliando a solução para cada passo, o erro associado entre essas duas estimativas numéricas assume a forma:

$$\Delta_{err} = y_2 - y_1 , \quad (4.11)$$

essa diferença deve ser a base para manter uma tolerância desejada, ajustando, portanto, o passo de tempo h . O problema requer agora um algoritmo para ajustar o passo de tempo. O primeiro e mais conhecido foi realizado por Fehlberg (Press *et al.*, 1992).

Um fato curioso acerca das fórmulas de Runge-Kutta é que para ordens M maiores que quatro, faz-se necessário o uso de M ou mais funções (porém não mais que $M + 2$). Fehlberg determinou um método de Runge-Kutta de quinta ordem utilizando seis funções em que a combinação destas também resulta no método de quarta ordem.

A diferença entre estas duas soluções fornece uma estimativa de erro para ajustar o passo de tempo. A forma geral das funções do Runge-Kutta de Fehlberg é dado por (Press *et al.*, 1992)

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf(x_n, y_n) \\
 k_2 &= hf\left(x_n + \frac{1}{5}h, y_n + \frac{1}{5}k_1\right) \\
 k_3 &= hf\left(x_n + \frac{3}{10}h, y_n + \frac{3}{40}k_1 + \frac{9}{40}k_2\right) \\
 k_4 &= hf\left(x_n + \frac{3}{5}h, y_n + \frac{3}{10}k_1 - \frac{9}{10}k_2 + \frac{6}{5}k_3\right) \\
 k_5 &= hf\left(x_n + h, y_n - \frac{11}{54}k_1 + \frac{5}{2}k_2 - \frac{70}{27}k_3 + \frac{35}{27}k_4\right) \\
 k_6 &= hf\left(x_n + \frac{7}{8}h, y_n + \frac{1631}{55296}k_1 + \frac{175}{512}k_2 + \frac{575}{13824}k_3 + \frac{44275}{110592}k_4 + \frac{253}{4096}k_5\right)
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Onde a aproximação da solução $y(x)$ para o Runge-Kutta de quinta ordem é obtido pela equação:

$$y_{n+1}^* = y_n + \frac{2825}{27648}k_1 + \frac{18575}{48384}k_3 + \frac{13525}{55296}k_4 + \frac{277}{14336}k_5 + \frac{1}{4}k_6 . \tag{4.13}$$

Já a aproximação da solução $y(x)$ para o Runge-Kutta de quarta ordem assume a forma:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{37}{378}k_1 + \frac{250}{621}k_3 + \frac{125}{594}k_4 + \frac{512}{1771}k_6 , \tag{4.14}$$

portanto, a estimativa de erro é:

$$\Delta_{err} = y_{n+1}^* - y_{n+1} \tag{4.15}$$

Os valores obtidos para as constantes das funções k_n foram determinadas por Cash & Karp, 1990. Estas constantes fornecem menores erros que os obtidos por Fehlberg. O método de Runge-Kutta Fehlberg pode ser implementado a partir de um algoritmo que assume uma lógica semelhante ao esquema ilustrado pela Figura 4.2. O passo de tempo mínimo é definido como h_{min} .

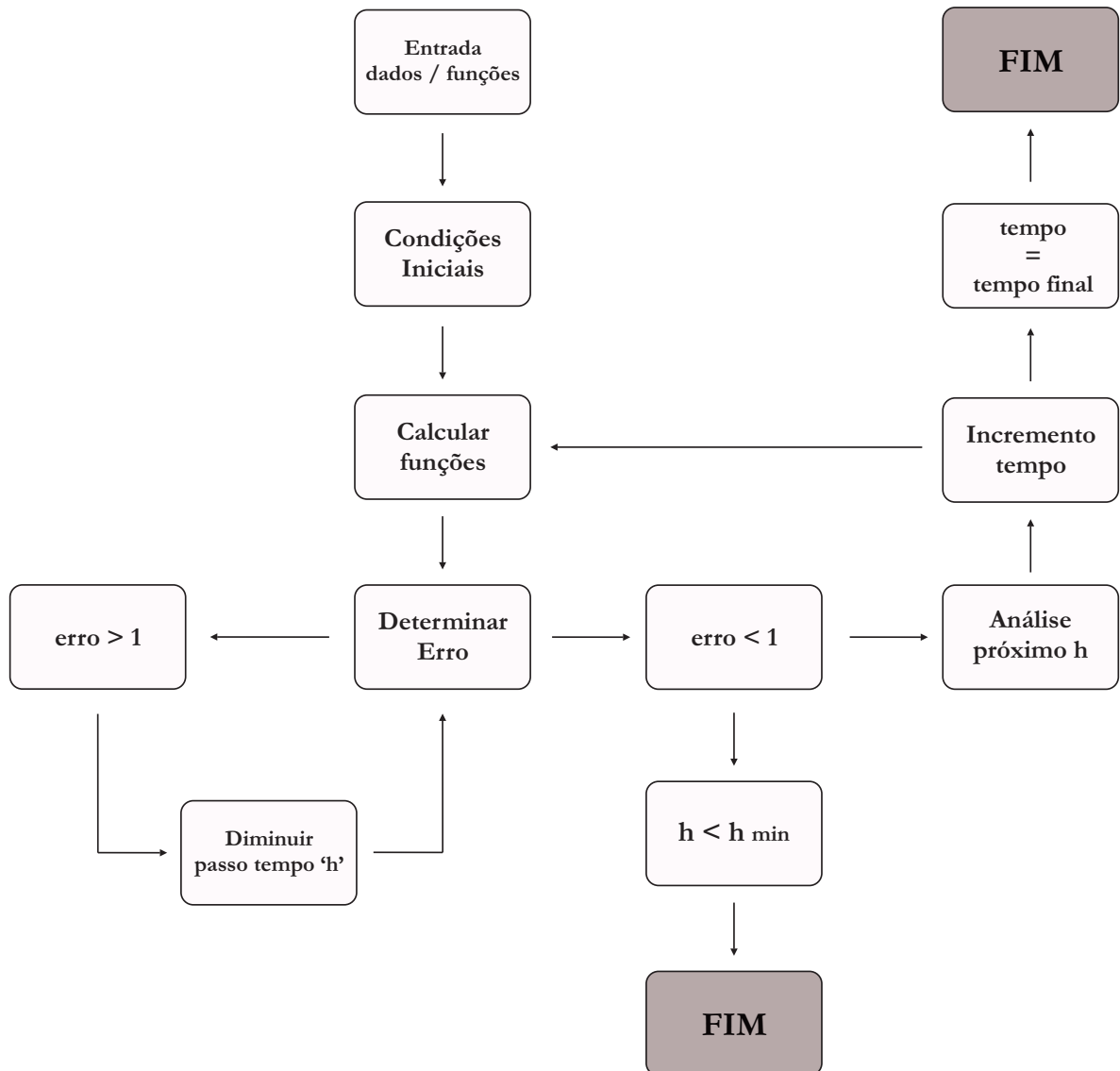


Figura 4.2: Esquematização do algoritmo que caracteriza o método de Fehlberg.

Uma maneira mais detalhada de descrever a Figura 4.2 auxilia na compreensão da implementação numérica do método de Runge-Kutta Fehlberg, de acordo com o seguinte algoritmo:

Algoritmo numérico

- Determinação de funções, tipo e nome de variáveis
- Entrada de dados (intervalo da simulação [a,b], parâmetros do problema e do algoritmo, passo de tempo mínimo h_{min} , etc.)
- Condições iniciais e zerar vetores

do while($x_n < b$)

 calcular k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 e k_6

 fornecer y_n, y_n^*, Δ_{err}

 estimar o erro: erro= Δ_{err} /tolerância

if(erro > 1.0) **then**

do while(erro > 1.0)

 htemp=Segurança* h

 calcular $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, y_n, y_n^*$ e Δ_{err}

 estimar novamente o erro

end do

end if

if($h < h_{min}$)**exit** (sair da simulação)

if (erro > Parâmetro) **then**

 hnext=Segurança* h *Parâmetro2 (diminuir h para próxima corrida)

else

 hnext=Parâmetro3* h (aumentar h)

end if

 hdid= h

h =hnext

```

fornecer  $y_{n+1}$ ,  $y_{n+1}^*$ ,  $x_{n+1}$ ,  $\Delta_{err}$ 
rodar novamente (enquanto a simulação não alcançar o tempo final)
end do
-Imprimir valores de  $y_{n+1}^*$  e  $x_{n+1}$ 

```

O algoritmo acima foi utilizado para realizar as corridas numéricas neste trabalho. Nota-se que “Segurança”, “Parâmetro”, “Parâmetro2” e “Parâmetro3” consistem em parâmetros do algoritmo que devem ser calibrados de acordo com a função que se deseja calcular.

Caso o parâmetro “erro” satisfaça a tolerância pré-estabelecida ($\text{erro} < 1$), a aproximação é aceita. Caso não satisfaça a tolerância, o tamanho do passo h de integração é reduzido até o momento em que o erro desejado ocorra. Depois que um passo de tempo satisfatório é estabelecido ($h = \text{“hdid”}$), este é avaliado e definido para uma próxima iteração do programa, aumentando (diminuindo) “hnext” caso o erro final apresente-se muito menor (próximo) da tolerância determinada. Uma nova iteração não é realizada somente caso o passo de tempo “hdid” seja menor que um passo de tempo mínimo ou caso o incremento de tempo corresponda ao tempo final da simulação.

Cumpre-se observar que a utilização de uma tolerância pequena não resulta necessariamente em um bom código numérico. O código deve ser rápido, ao mesmo tempo em que não pode apresentar perda de precisão, causada, por exemplo, com um aumento significativo do passo de tempo “hnext”. É importante compreender e explorar o papel e as limitações de cada parâmetro dentro do algoritmo, assim como as relações destes perante a tolerância e o passo de tempo mínimo escolhidos.

Para complementar a validação do código numérico, realizou-se uma comparação entre o método envolvendo o passo de tempo adaptativo e a solução com passo de tempo fixo, para diferentes condições de parâmetros físicos. O erro na integração numérica foi menor que 0.1%. Outro teste do esquema de integração numérica consistiu em reproduzir soluções periódicas (para diferentes condições) cujas mudanças na amplitude do raio da bolha fossem imperceptíveis por mais de cinco ciclos de oscilação.

4.4 RESULTADOS PRELIMINARES

4.4.1 Bolha em um fluido Newtoniano

Nas simulações numéricas deste trabalho, o coeficiente politrópico sempre apresenta o valor da unidade ($n = 1$), permitindo assumir que o movimento da bolha acontece através de um processo isotérmico. Para todas as corridas numéricas realizadas neste capítulo, o valor da frequência utilizado foi $w = 1$. Inicialmente são realizadas simulações considerando a bolha imersa em um fluido caracterizado pelo seu comportamento puramente viscoso, ou seja, um fluido Newtoniano.

Para a simulação numérica foi necessária a definição da equação governante da bolha em um meio viscoso. Para uma bolha oscilante imersa em um fluido viscoso não existem aditivos, logo $\mu_e/\mu = 0$. Assim, partindo da equação (2.89) tem-se:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{2}{\text{We}} \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{R} \right) - 1 - \varepsilon \sin(\omega t) + \frac{1}{R^3} - \frac{4}{\text{Re}} \frac{\dot{R}}{R}, \quad (4.16)$$

que é definida como a equação governante da dinâmica de bolhas apresentada neste trabalho, em um fluido puramente viscoso. Aplicando esta equação nas simulações numéricas deve-se primeiramente transformá-la em equações de primeira ordem, como definido na seção (4.1), pois utiliza-se o método de Runge-Kutta. Assim, assumindo $v = dR/dt$, a representação da equação (4.16) fica:

$$\begin{cases} v &= \dot{R} \\ \dot{v} &= \frac{1}{R} \left[\frac{2}{\text{We}} \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{R} \right) - 1 - \varepsilon \sin(\omega t) + \frac{1}{R^3} - \frac{3}{2}v^2 - \frac{4}{\text{Re}} \frac{v}{R} \right] \end{cases}$$

Os dados referentes à resposta da bolha foram analisados com o auxílio do programa TecPlot 2009. Considerações acerca do momento de colapso da bolha podem ser encontrados a seção 4.5.

A Figura 4.3 representa um movimento quase linear referente à oscilação da bolha. Tal comportamento é obtido com a utilização de uma baixa amplitude de excitação $\varepsilon = 0,5$, assim como baixos valores do número de Reynolds e do número de Weber ($Re = 1, We = 1$), resultando numa atuação das forças de inércia que não seja significativa (da ordem da força devido a tensão superficial e da força viscosa).

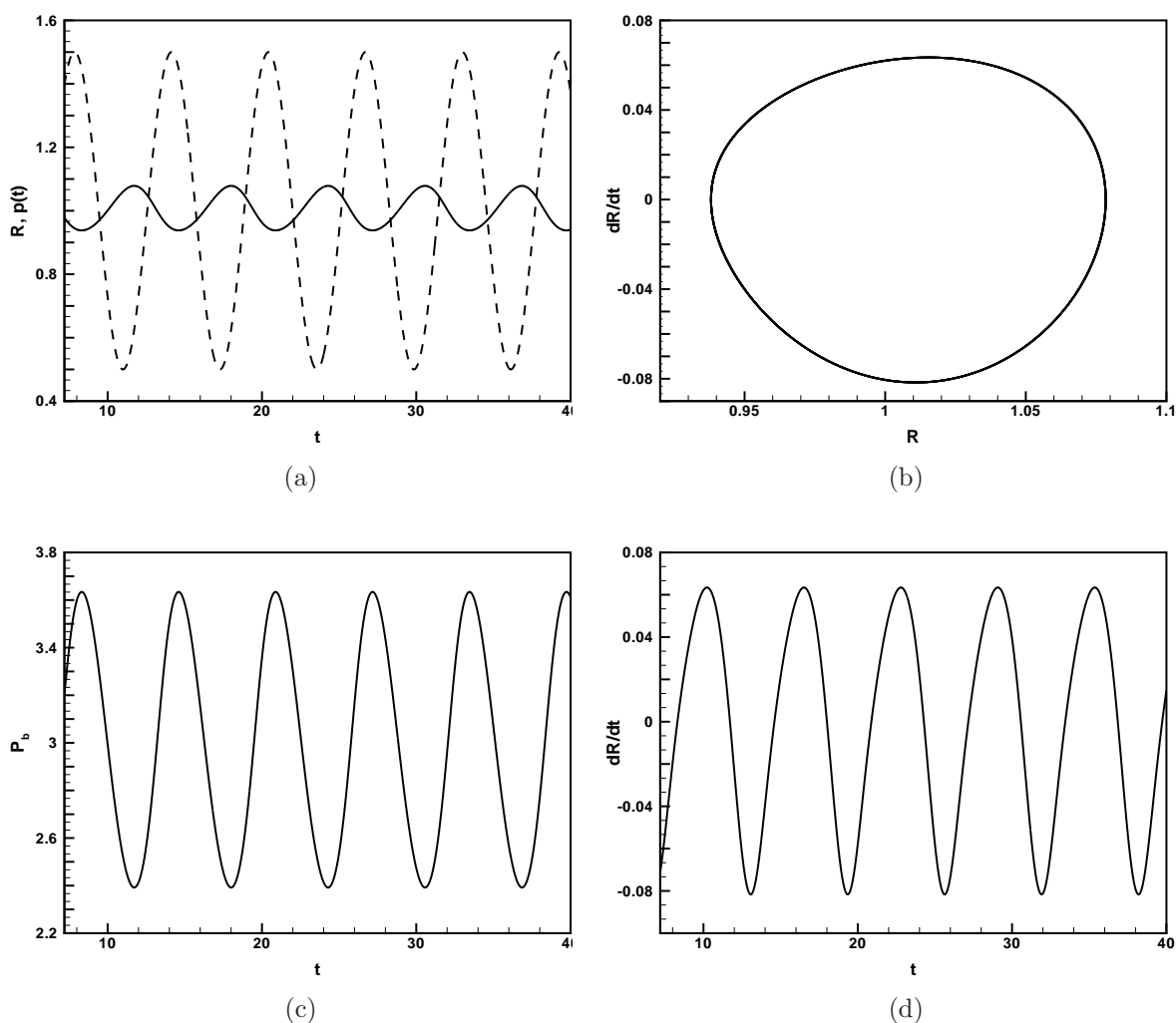


Figura 4.3: Caso de oscilação quase harmônica da bolha, em que $Re = 1, We = 1, \varepsilon = 0.5$, na ausência de aditivos. (a) $R \times t$ (linha cheia) e $p_\infty \times t$ (linha tracejada); (b) diagrama de fase $\dot{R} \times R$; (c) $p_b \times t$; (d) $\dot{R} \times t$.

A linha cheia da Figura 4.3(a) apresenta a relação entre o raio da bolha (R) e o tempo, enquanto a linha tracejada ilustra a pressão de excitação (p_∞) pelo tempo. Observe-se que os picos de pressão resultam nos mínimos valores encontrados para o raio da bolha, pois a atuação exterior da pressão resulta na contração da bolha. Da mesma forma, os valores máximos do raio são obtidos a partir das menores pressões de excitação, momento de expansão da bolha.

A Figura 4.3(b) representa a relação entre a velocidade da parede da bolha \dot{R} e o raio da bolha R . Nota-se que dR/dt corresponde à \dot{R} . Esta relação $\dot{R} \times R$ é definida como o diagrama de fase, que constitui um gráfico relevante para realizar uma análise do comportamento da bolha. Quanto mais esférico o resultado apresentado neste gráfico, mais linear apresenta-se o movimento da bolha, e, na Figura apresentada, destoa-se pouco de uma forma circular.

Na Figura 4.3(c) relaciona-se a pressão no interior da bolha, ou pressão do gás – obtida na equação (2.101) – ao tempo. Se analisada a pressão no interior da bolha com relação ao raio da mesma, nota-se uma dependência inversamente proporcional. Esse fato pode ser explicado pela avaliação dos momentos de expansão e contração da bolha, em que no primeiro obtém-se um maior raio e a bolha tende a sofrer uma pressão maior em seu exterior (que vence a tensão superficial e a pressão interior). Na contração da bolha acontece justamente o contrário, pois sua pressão interior é a maior possível, que, com o decaimento da pressão externa (de excitação), realiza um movimento de expansão. A relação entre a velocidade da parede da bolha (\dot{R}) e o tempo é apresentada na Fig. 4.3(d).

Cumpramos examinar neste passo que, geralmente, a dinâmica de bolhas é caracterizada pelo seu comportamento não-linear. Realizando algumas mudanças nos parâmetros que coordenam seu movimento, como na Figura 4.4, em que $We = 15$, $Re = 15$ e $\varepsilon = 1$ já é possível a observação de uma resposta instável do movimento da bolha. No diagrama de fase ilustrado em 4.4(b), o gráfico obtido sofre um desvio quanto à trajetória circular, que caracteriza um movimento linear. Sua análise indica que o comportamento é dado por mais de um grau de liberdade, com diferentes períodos de oscilação. Pode-se obter uma amplitude máxima do raio e da velocidade por meio do ciclo mais externo deste diagrama.

É importante ressaltar que os valores da pressão interna da bolha apresentados na Figura 4.4(c) já alcançam uma faixa em torno de $p_b = 270$, valor que, uma vez comparado ao valor de $p_b = 3,7$, obtido na Figura 4.3, representa um crescimento significativo da pressão interna.

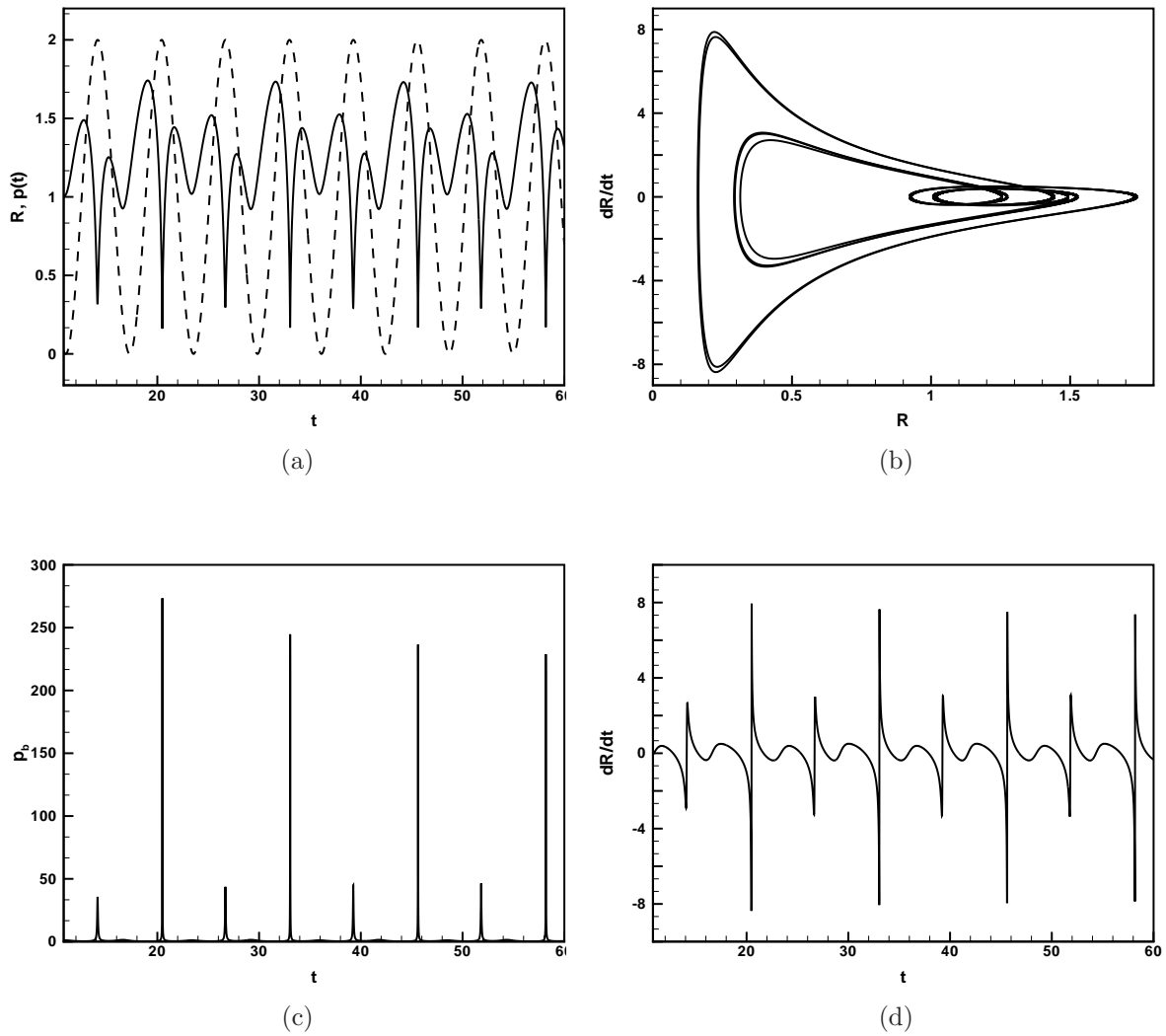


Figura 4.4: Comportamento não-linear da bolha, sem aditivos ($\phi = 0$), com $Re = 15$, $We = 15$ e $\varepsilon = 1$. (a) $R \times t$ (linha cheia) e $p_\infty \times t$ (linha tracejada); (b) diagrama de fase $\dot{R} \times R$; (c) $p_b \times t$; (d) $\dot{R} \times t$.

Caso seja exigida da bolha uma condição mais crítica, como ilustrado na Figura 4.5, em que os parâmetros físicos assumem os valores $Re = 30$, $We = 30$ e $\varepsilon = 1$, a resposta desta resulta em colapso. A oscilação se dá somente até o tempo $t \simeq 21$, momento que ocorre uma diminuição abrupta do raio da bolha, caracterizado como o colapso, melhor observado na Fig. 4.5(a).

O pico de pressão no interior da bolha, ilustrado na Figura 4.5(c), é da ordem $O(10^3)$ ($p_b \simeq 45000$), significando uma enorme quantidade de energia liberada no meio em que a mesma se encontra imersa.

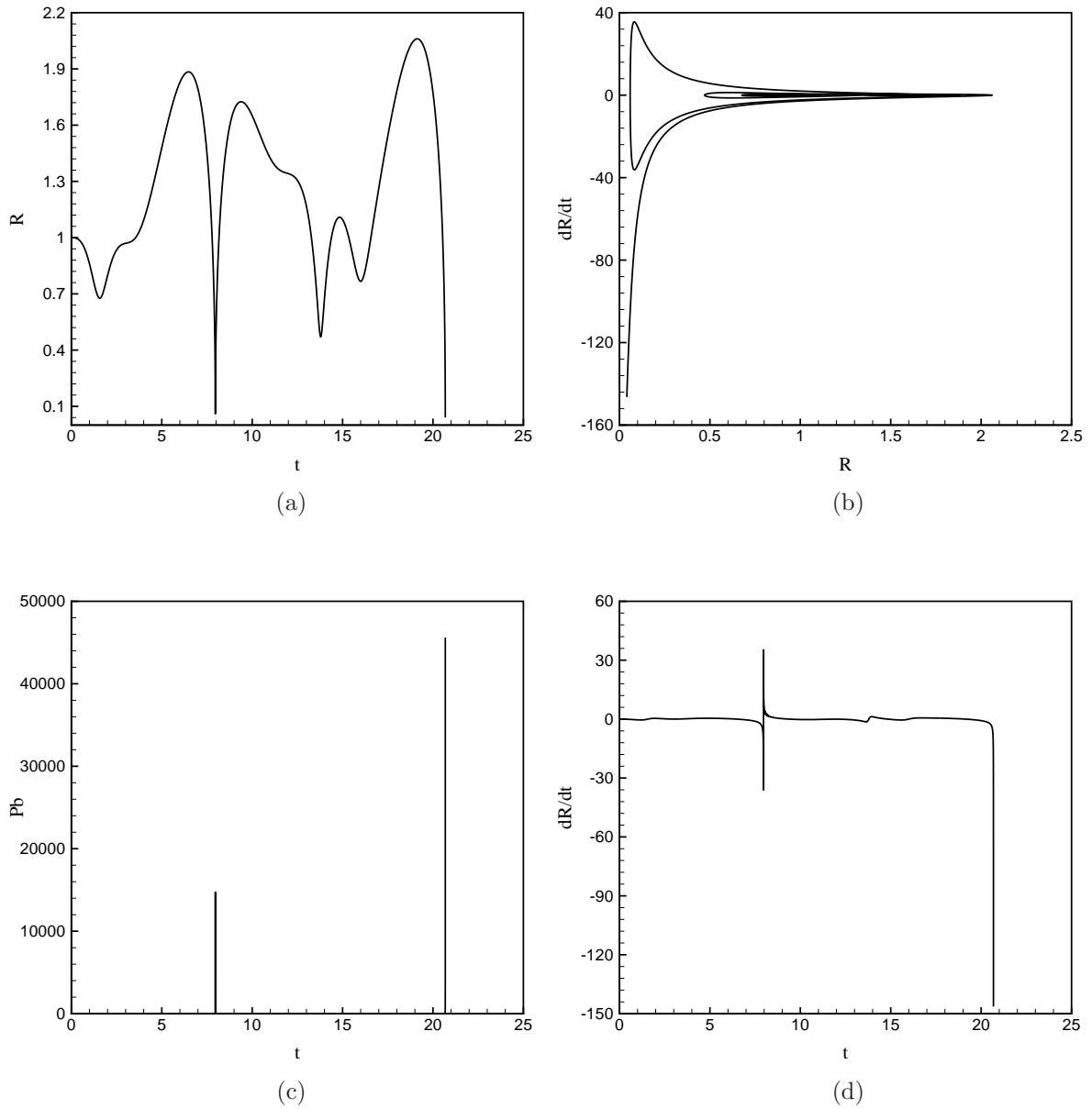


Figura 4.5: Colapso de uma bolha, para $Re = 30$, $We = 30$, $\varepsilon = 1$, na ausência de aditivos. (a) $R \times t$ (linha cheia) e $p_\infty \times t$ (linha tracejada); (b) diagrama de fase $\dot{R} \times R$; (c) $p_b \times t$; (d) $\dot{R} \times t$.

Mesmo uma pequena variação nos parâmetros físicos que governam a dinâmica da bolha para o caso de um movimento harmônico simples pode resultar em uma situação complexa de movimento oscilatório não-linear ou vários modos vibracionais, ocasionando muitas vezes o colapso (e.g. Santos, 2005).

4.4.2 Sensibilidade da Bolha

Nesta parte do trabalho é analisada a sensibilidade da bolha com relação às condições iniciais. Para tal, supõe-se uma bolha num sistema sem excitação ($\varepsilon = 0$). Diferentes valores para o raio inicial R_0 e velocidade inicial \dot{R}_0 serão testados. Primeiramente é introduzido uma Figura 4.6, contendo a relação $R \times t$ (Fig. 4.6(a)) e o diagrama de fase $\dot{R} \times R$ (Fig. 4.6(b)). Os parâmetros físicos correspondem a: $Re = 5$ e $We = 5$.

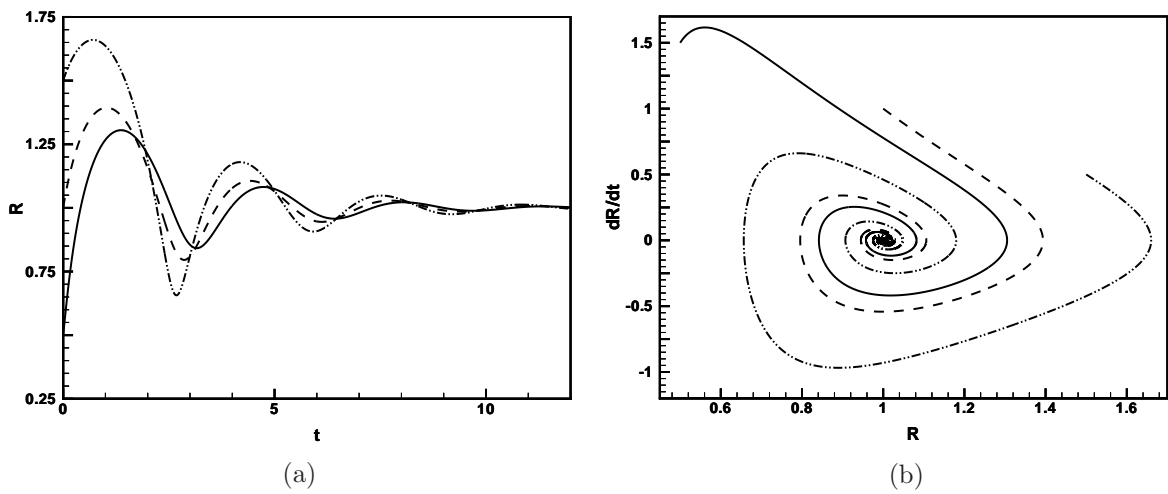


Figura 4.6: Influência das condições iniciais para um sistema sem excitação ($\varepsilon = 0$), em que $Re = 5$, $We = 5$ e $\phi = 0$. (a) $R \times t$; (b) diagrama de fase $\dot{R} \times R$.

Outro exemplo é apresentado na Figura 4.7, para diferentes parâmetros ($Re = 15$ e $We = 15$). Pode-se observar que todos os gráficos apresentam uma tendência do movimento oscilatório em torno de $R = 1$, valor que é alcançado quando aplica-se um tempo suficientemente longo. Para esta condição, a bolha se encontra em situação de equilíbrio. Portanto, é correto afirmar que o movimento da bolha tende à estabilização, para um sistema ausente de pressões de excitação.

Na Figura 4.8, obtém-se o movimento da bolha para uma pressão de excitação $\varepsilon = 1$, e os parâmetros $Re = 20$ e $We = 20$. Os gráficos contêm diferentes condições iniciais: na Fig. 4.8(a) as condições são $R_0 = 0,5$ e $\dot{R}_0 = 0$, enquanto em 4.8(b) tem-se $R_0 = 1,5$ e $\dot{R}_0 = 0,5$. Nota-se que o gráfico em (b) representa uma situação de colapso, para um tempo $t \simeq 27$.

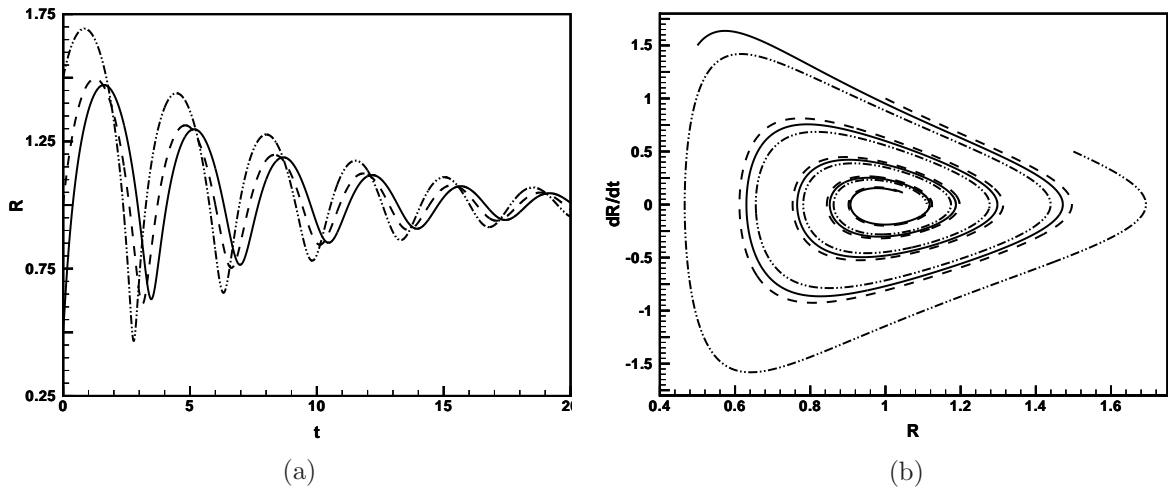


Figura 4.7: Influência das condições iniciais para um sistema sem excitação ($\varepsilon = 0$), em que $Re = 15$, $We = 15$ e $\phi = 0$. (a) $R \times t$; (b) diagrama de fase $\dot{R} \times R$.

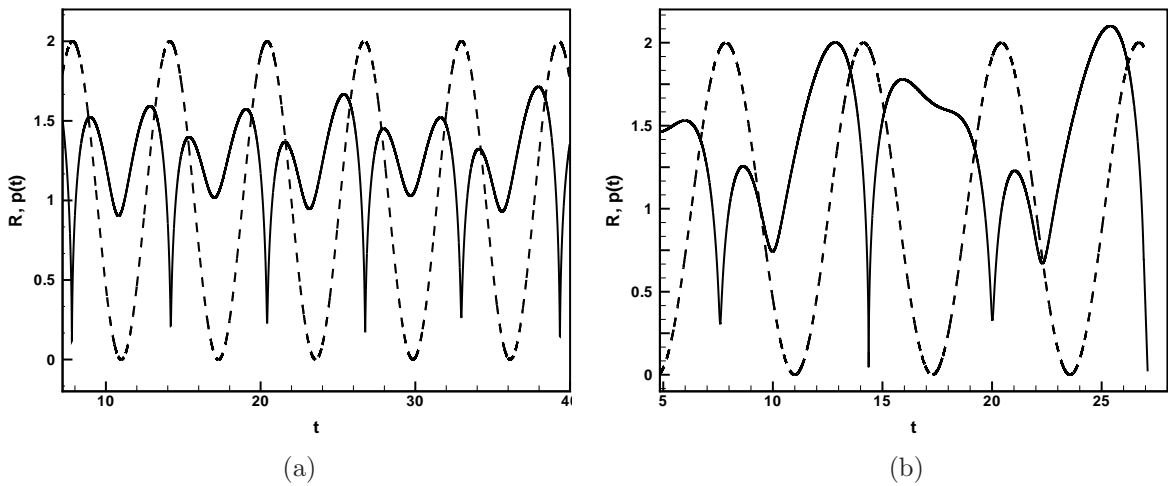


Figura 4.8: Comparativo entre diferentes condições iniciais para um sistema com excitação, em que $Re = We = 20$, e $\phi = 0$. (a) $R \times t$, com $R_0 = 0,5$ e $\dot{R}_0 = 0$; (b) $R \times t$, com $R_0 = 1,5$ e $\dot{R}_0 = 0,5$, resultando em colapso da bolha.

Logo, para uma mesma configuração de parâmetros físicos, diferentes condições iniciais podem causar o colapso da bolha. Tal característica se faz presente em sistemas caóticos, que apresentam grande sensibilidade a condições iniciais impostas.

Na Figura 4.9 observa-se a relação que existe entre Re e We . As curvas apresentadas delimitam a região de colapso (acima da curva) e não-colapso (abaixo da curva). O caso analisado representa a situação em que $\varepsilon = 1$ e um raio inicial $R_0 = 1$.

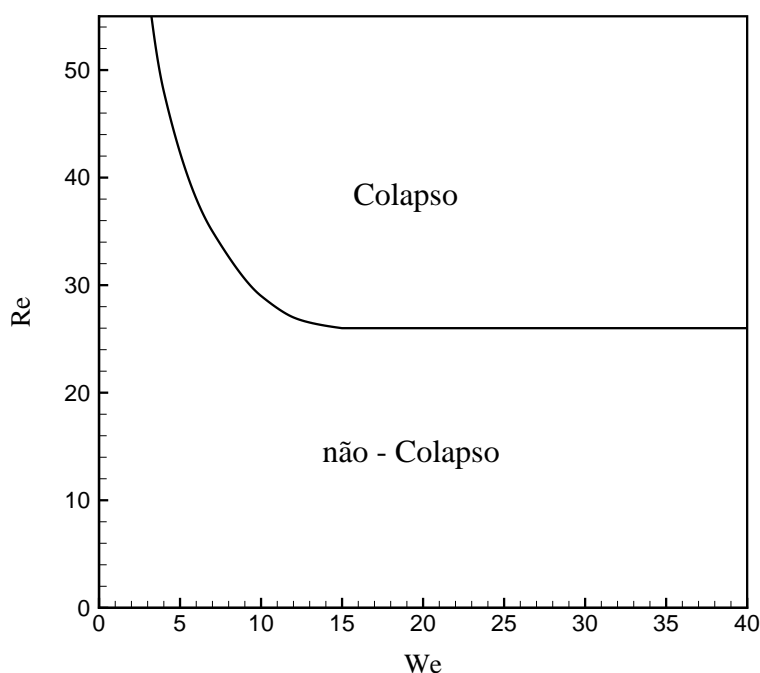


Figura 4.9: Diagrama de colapso para um modelo puramente viscoso, que ilustra a variação do número de Weber com o número de Reynolds, para uma amplitude de excitação $\varepsilon = 1$.

A partir desta curva, que delimita a região do colapso, percebe-se que o número de Reynolds consiste em um parâmetro mais determinante na determinação do colapso de uma bolha. Nota-se que pode ocorrer colapso quando $We \sim 5$, no entanto, não ocorre colapso quando $Re \leq 25$, independente do número de Weber assumido, pois trata-se de um limite assintótico. Assim, a não-linearidade do movimento da bolha pode ser obtida para pequenos valores de We aumentando-se Re , mas o contrário não ocorre.

Pode-se também explorar o diagrama de colapso para diferentes valores da amplitude de excitação. Na Figura 4.10, a linha cheia denota $\varepsilon = 1.2$; a linha tracejada representa $\varepsilon = 1.5$ e a linha pontilhada $\varepsilon = 2$. Com o aumento da amplitude de excitação, a região de não colapso diminui, logo o colapso acontece para menores valores de Re e We , assim como o limite assintótico de We .

Assim como na Fig. anterior, é possível verificar que, mesmo para baixos valores de We , caso Re assumia valores mais significativos, o colapso da bolha pode ocorrer. Tal análise leva a concluir que uma força de inércia maior que a força relativa à tensão superficial resulta em uma instabilidade maior do movimento da bolha.

Estes resultados indicam, portanto, que a bolha apresenta uma maior sensibilidade ao número de Reynolds quando comparado ao número de Weber, fato constatado também por Santos, 2005.

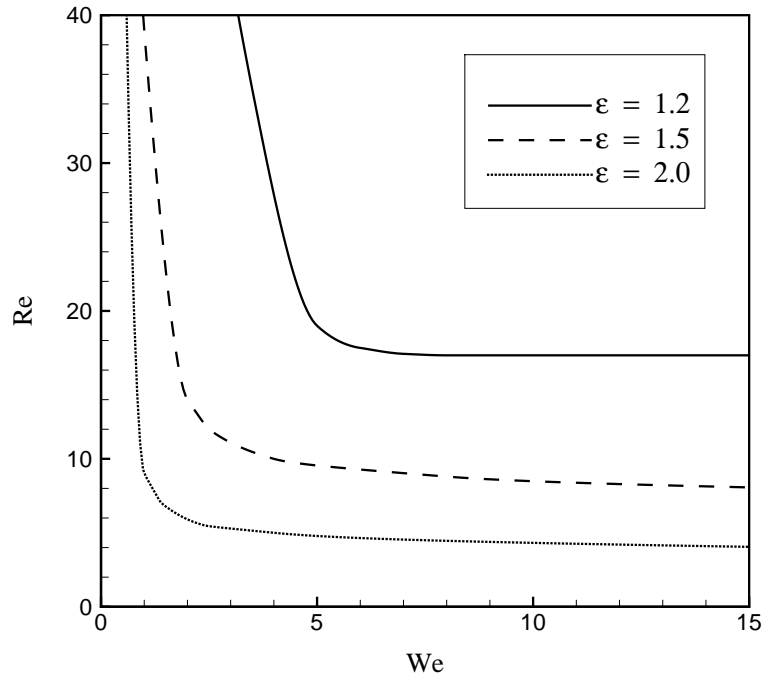


Figura 4.10: Diagrama de colapso entre os números de Reynolds e Weber, em que a linha cheia denota $\varepsilon = 1.2$; linha tracejada representa $\varepsilon = 1.5$ e linha pontilhada $\varepsilon = 2$.

4.4.3 Bolha em um meio anisotrópico

Nesta seção são examinados os resultados obtidos para o comportamento da bolha na presença de um modelo anisotrópico, caracterizado pela viscosidade extensional. Alguns parâmetros físicos são analisados, assim como comparações entre soluções contendo os aditivos e na ausência destes.

Para atribuir a equação governante da bolha em um fluido contendo fibras ou macromoléculas à simulação numérica, é necessário transformar a equação (3.27) em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, em que:

$$\begin{cases} \dot{v} = \dot{R} \\ \dot{v} = \frac{1}{R} \left[\frac{2}{\text{We}} \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{R} \right) - 1 - \varepsilon \sin(\omega t) + \frac{1}{R^3} - \frac{3}{2} v^2 - \frac{4}{\text{Re}} \frac{v}{R} \left(1 + \frac{\mu_e}{\mu} S(R) \right) \right] \end{cases}$$

em que $v = dR/dt$. Para todas simulações realizadas, o valor da frequência utilizado foi $w = 1$. As condições iniciais assumem os valores $\dot{R}_0 = 0$ e $R_0 = 1$. A orientação de alinhamento das partículas com relação ao escoamento foi considerada. A razão de aspecto dos aditivos é $\ell/a = 100$.

Uma primeira análise é realizada utilizando os mesmos parâmetros que caracterizam a Figura 4.4, em que a suspensão de aditivos não se faz presente. A Fig. 4.11 assume as mesmas condições, com uma fração volumétrica de aditivos $\phi = 0.1\%$. A Fig. 4.12 também trata dos mesmos parâmetros, aumentando a concentração para $\phi = 0.3\%$.

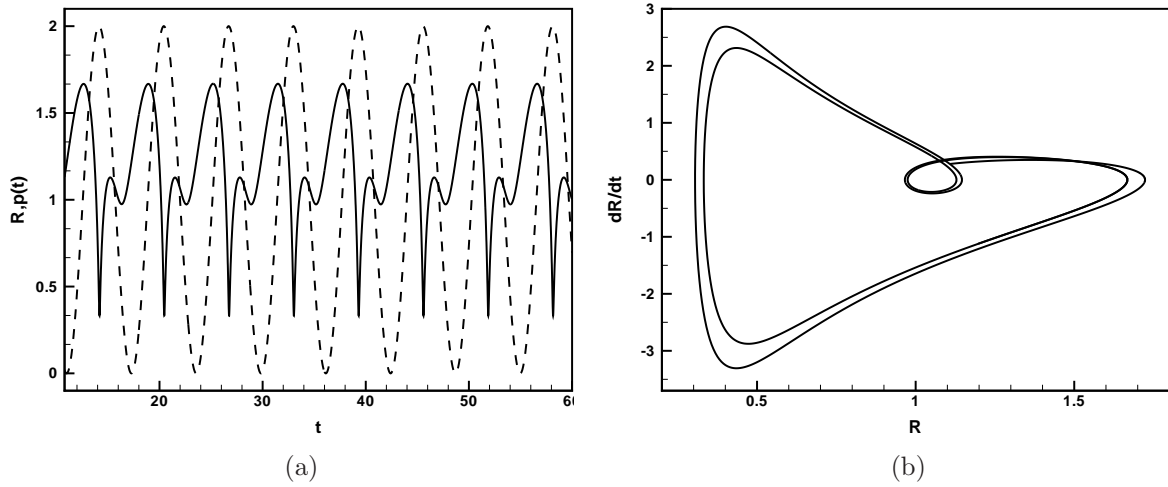


Figura 4.11: Caso de oscilação não linear da bolha com aditivos com fração volumétrica $\phi = 0.1\%$, razão de aspecto $\ell/a = 100$, $\text{Re} = \text{We} = 15$ e $\varepsilon = 1$. (a) $R \times t$ (linha cheia) e $p_\infty \times t$ (linha tracejada); (b) diagrama de fase $\dot{R} \times R$

O diagrama de fase da Fig. 4.11 apresenta menos modos vibracionais se comparada ao diagrama de um fluido Newtoniano (ver Fig. 4.4(b)). Nota-se que o comportamento da bolha a partir do uso de fibras/macromoléculas no fluido ambiente demonstra menores oscilações, mais facilmente observado na Figura 4.12(a), em que uma maior concentração proporciona uma estabilidade significativa na resposta da bolha. Destaque também para uma atenuação do movimento da bolha para uma maior concentração de aditivos (Fig. 4.12(b)).

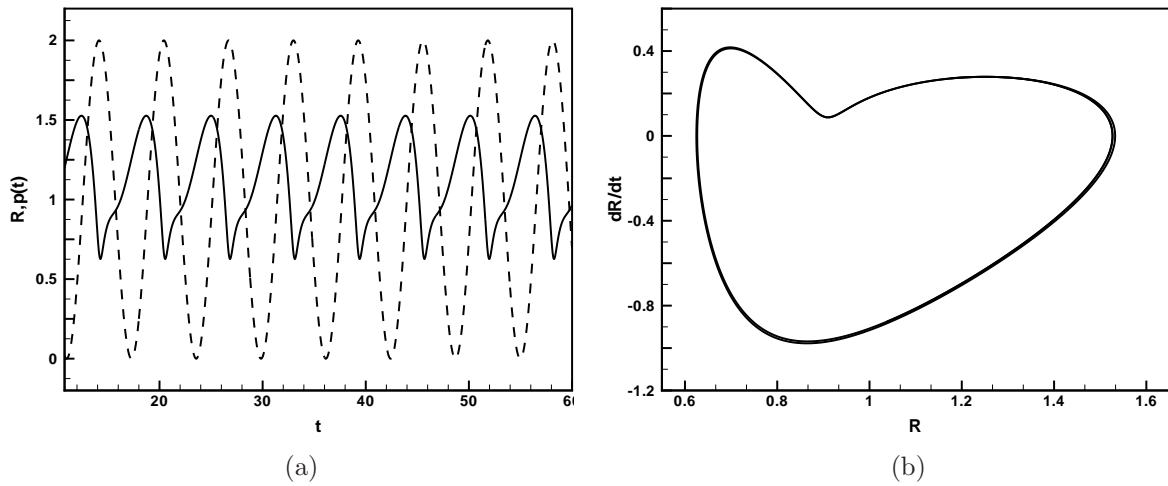


Figura 4.12: Caso de oscilação não linear da bolha, com aditivos, para $\phi = 0.3\%$, $Re = We = 15$ e $\varepsilon = 1$. (a) $R \times t$ (linha cheia) e $p \times t$ (linha tracejada); (b) diagrama de fase $\dot{R} \times R$

A Figura 4.13 ilustra a solução permanente da resposta do raio da bolha em função do tempo para um fluido Newtoniano (linha pontilhada) e diferentes concentrações de aditivos, com parâmetros $Re = We = 5$ e $\varepsilon = 1$. Com o aumento da anisotropia, i.e.

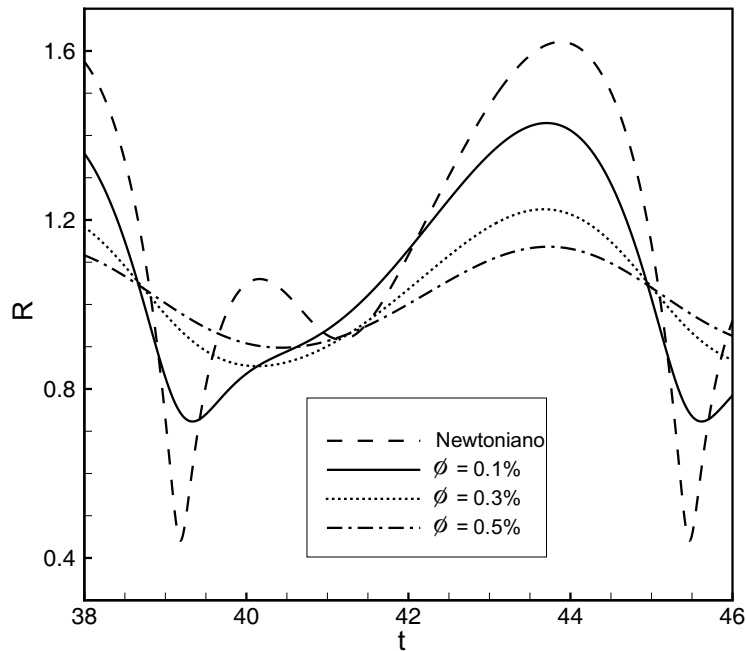


Figura 4.13: Um período da solução permanente do raio da bolha em função do tempo, com parâmetros $Re = We = 5$ e $\varepsilon = 1$.

da fração volumétrica de fibras/macromoléculas, ocorre a linearização do movimento da bolha, obtendo uma solução harmônica simples quando $\phi \cong 0.5\%$. Enquanto o raio da bolha em um fluido Newtoniano apresenta um máximo quando $R \sim 1.6$ e mínimo $R \sim 0.4$, os raios máximo e mínimo na presença de aditivos com concentração $\phi \cong 0.5\%$ são $R \cong 1.2$ e $R \cong 0.9$, respectivamente.

A importância da adição de aditivos também pode ser ressaltada quando se realiza uma análise do raio máximo que a bolha apresenta em uma simulação. A Figura 4.14 ilustra o raio máximo da bolha R_{max} , em função do número de Reynolds Re , para diferentes frações volumétricas de aditivos. Pode-se observar que, apesar do aumento dos efeitos de inércia proporcionarem um aumento do raio máximo da bolha (comportamento já esperado), a anisotropia presente no fluido resulta na diminuição do raio máximo quando uma maior concentração de aditivos se faz presente.

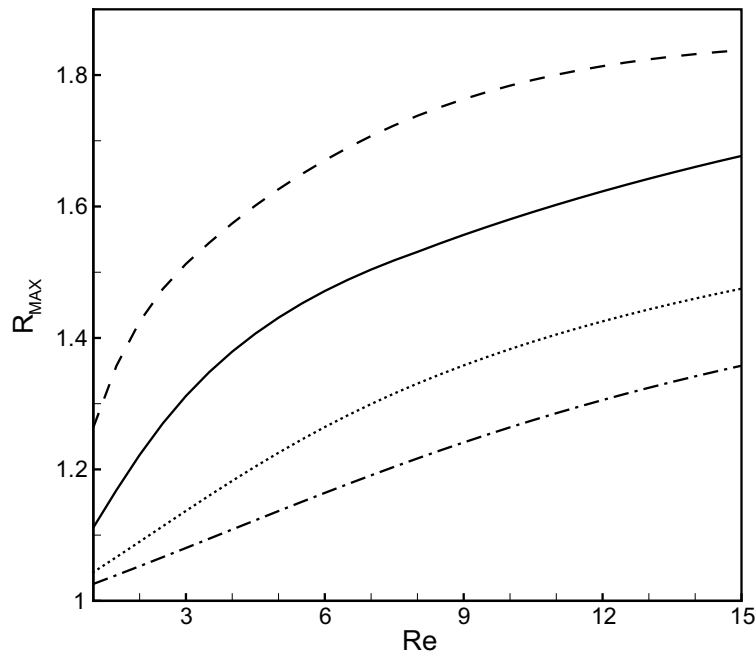


Figura 4.14: Raio máximo em função de Re , para os parâmetros $\varepsilon = 1$ e $We = 5$. Linha tracejada denota um fluido Newtoniano; linha sólida $\phi = 0.1\%$; pontilhada $\phi = 0.3\%$ e traço-ponto $\phi = 0.5\%$.

A influência da anisotropia, devido à viscosidade extensional, também é observada na Figura 4.15, em que os mesmos parâmetros contidos na Fig. 4.5, que apresenta uma situação de colapso para um fluido Newtoniano, são utilizados.

Observa-se que uma solução permanente do movimento da bolha é obtido somente para $t \sim 50$. A estabilização do movimento da bolha, causada pela presença de aditivos, diminui o transporte da quantidade de movimento e impede o colapso da bolha.

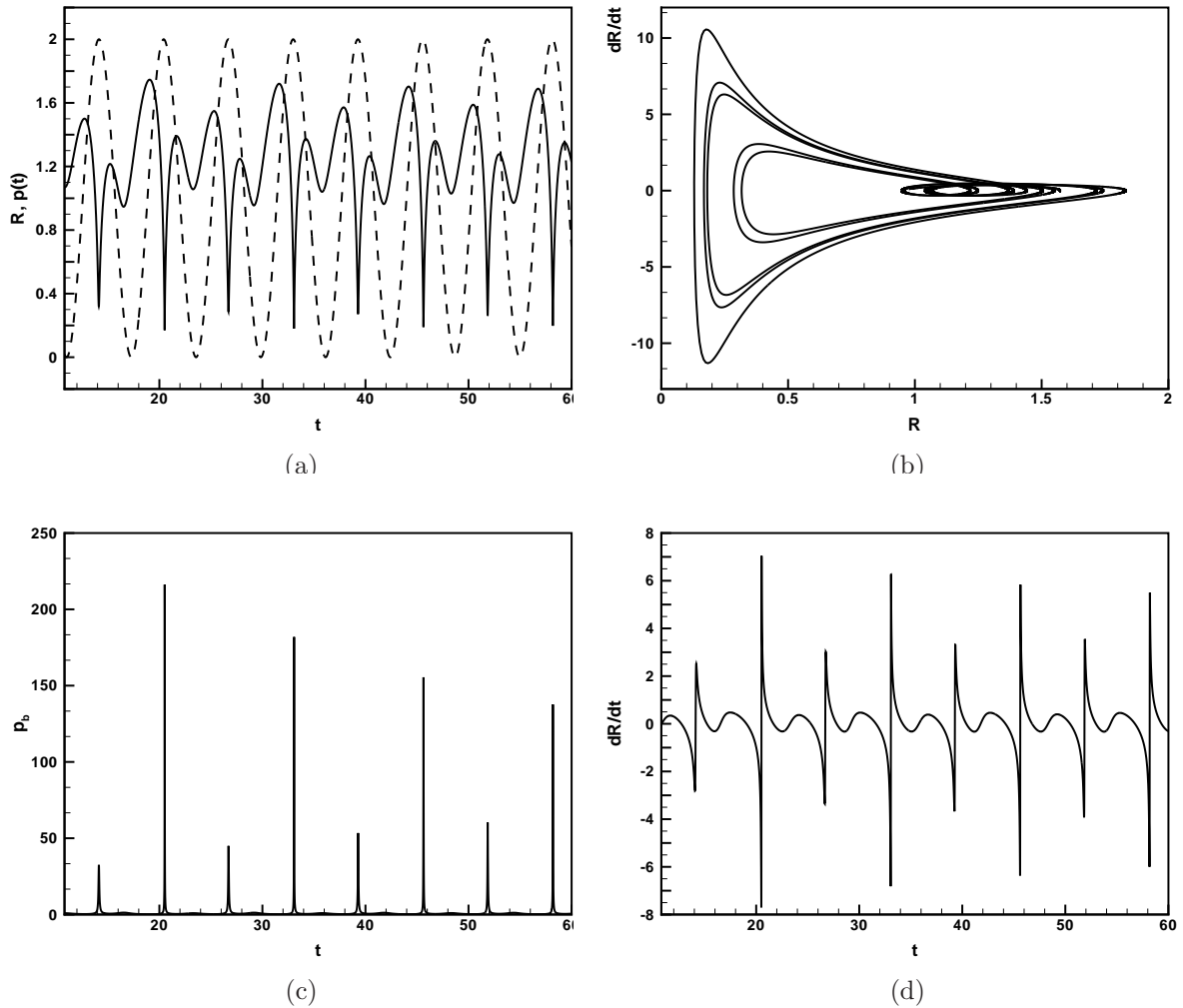


Figura 4.15: Inibição de um caso de colapso da bolha, para $Re = We = 30$, $\varepsilon = 1$ e $\phi = 0.1\%$. (a) $R \times t$ (linha cheia) e $p_\infty \times t$ (linha tracejada); (b) diagrama de fase $\dot{R} \times R$; (c) $p_b \times t$; (d) $\dot{R} \times t$.

A Figura 4.15(c) apresenta valores bastante inferiores da pressão interna da bolha ($p_b \simeq 230$) se comparados ao caso de colapso ($p_b \simeq 45000$), da mesma forma que a Fig. 4.15(d) ilustra a atenuação da velocidade da parede da bolha, que encontra-se agora numa faixa $\dot{R} = \pm 7$. É perceptível o efeito de estabilização do movimento de uma bolha proporcionado pelo uso de aditivos inseridos no fluido em que a bolha encontra-se imersa. A utilização de pequenas frações volumétricas de aditivos adicionados ao fluido ambiente resulta no aumento do tempo de colapso ou pode até evitar a sua ocorrência, atenuando a resposta não-linear da bolha.

Convém notar que, a partir da presença de partículas anisotrópicas no fluido ambiente, é possível observar o movimento de uma bolha para maiores amplitudes de excitação, sem que ocorra o colapso. Na Figura 4.16 é ilustrado a relação entre o raio máximo da bolha R_{max} em função da amplitude da pressão de excitação ε , para $Re = We = 15$, onde a linha cheia apresenta o comportamento de um fluido Newtoniano e as demais linhas denotam um fluido contendo aditivos. Com o aumento da concentração de aditivos, as curvas apresentam uma diminuição do raio máximo, para uma mesma amplitude de excitação, claro indicativo de uma linearização do movimento da bolha na presença de fibras/macromoléculas.

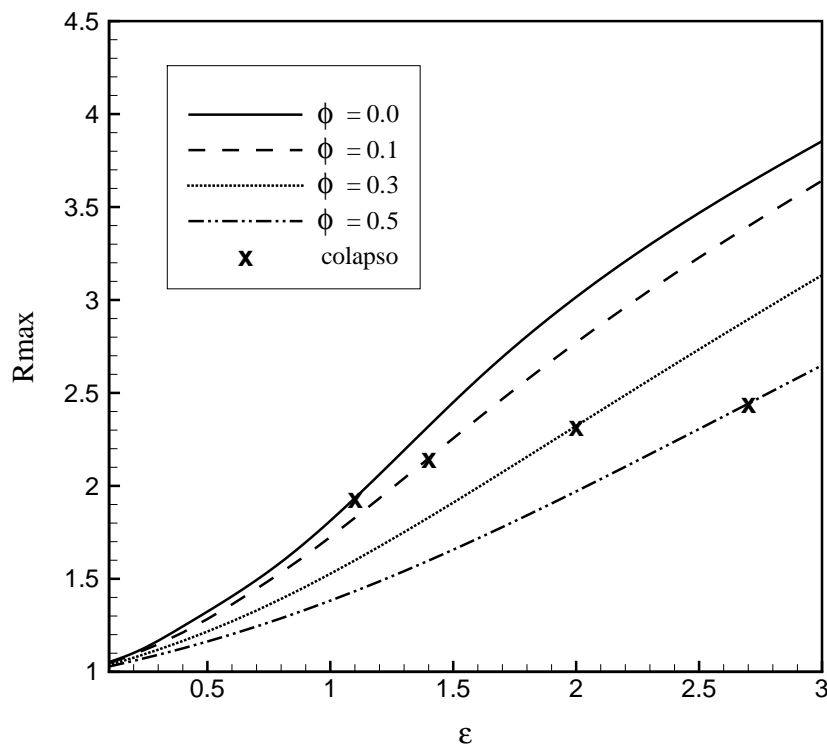


Figura 4.16: Relação entre a amplitude (ε) e o raio máximo, para $Re = 15$ e $We = 15$. Linha cheia corresponde ao caso sem aditivos; tracejada denota um fluido contendo aditivos com concentração $\phi = 0.1\%$, linha pontilhada $\phi = 0.3\%$ e linha traço-ponto $\phi = 0.5\%$. O símbolo **X** representa o ponto a partir do qual o colapso ocorre.

O símbolo **X** apresenta o ponto da curva em que ocorre o colapso da bolha. A parte superior ao símbolo também apresenta uma situação de colapso. Nota-se que a presença de aditivos afeta diretamente a amplitude de excitação que causa o colapso. Enquanto a linha sem aditivos colapsa a partir de $\varepsilon \geq 1.1$, a linha $\phi = 0.5\%$ tem a presença de colapso somente a partir de $\varepsilon \geq 2.7$.

Quando os parâmetros apresentam os valores $Re = 7$ $We = 7$, o colapso ocorre para maiores amplitudes de excitação, conforme ilustrado pela Figura 4.17, em que a linha sem aditivos passa a colapsar quando $\varepsilon \geq 1.5$, enquanto a linha $\phi = 0.5\%$ colapsa para $\varepsilon \geq 5.5$.

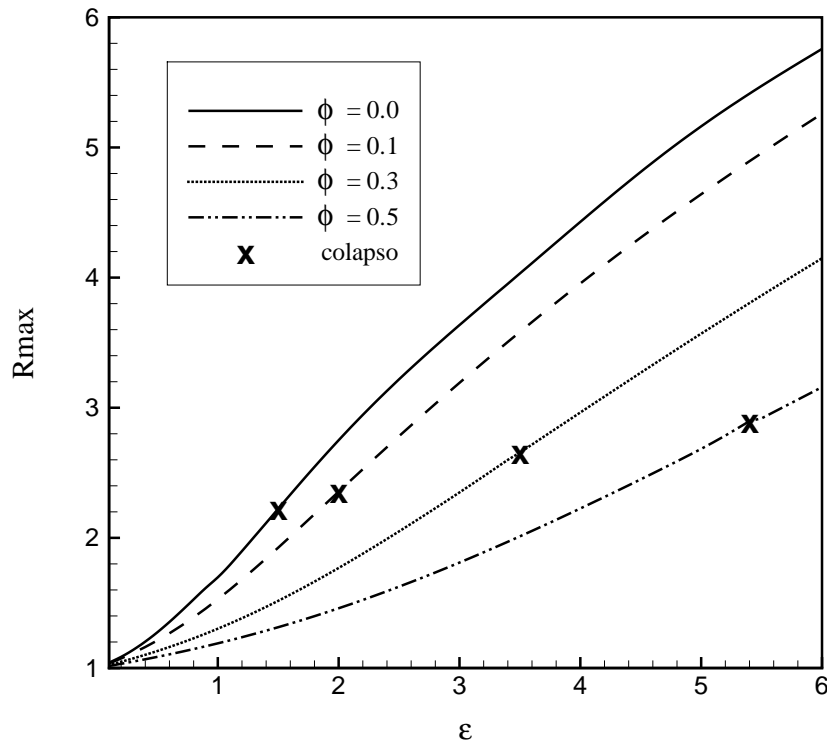


Figura 4.17: Caso semelhante à Figura 4.16, agora para os parâmetros $Re = 7$ e $We = 7$.

Fica evidente, portanto, a atenuação do raio máximo quando aditivos se encontram imersos no fluido ambiente, consolidando a eficiência da aplicação destes no caso da dinâmica de bolhas. Com o aumento da concentração de fibras/macromoléculas, a quantidade de movimento transportada pela bolha torna-se menos eficaz, podendo alterar uma dinâmica que se apresenta não-linear para uma condição de estabilidade, como um simples oscilador harmônico.

Os resultados indicam que o efeito da anisotropia, devido à viscosidade extensional (controlada pela razão de aspecto e fração volumétrica de aditivos) pode reduzir drasticamente as oscilações do movimento da bolha e conseqüentemente aumentar o tempo de colapso ou simplesmente evitar sua ocorrência.

Não foi explorada a variação da razão de aspecto, pois Santos, 2005 demonstra que, apesar do aumento do efeito anisotrópico quando a razão de aspecto e a concentração aumentam, a bolha apresenta uma sensibilidade consideravelmente maior à concentração dos aditivos.

É importante ressaltar que o modelo puramente anisotrópico consiste na representação do modelo elástico quando o número de Deborah tende a zero, ou seja, quando o fluido não possui memória ou relaxação. Desta forma, fica claro que a consideração de partículas alinhadas com o escoamento que não apresentam relaxação, auxiliam na atenuação do movimento não-linear da bolha, diminuindo inclusive os modos vibracionais que a bolha pode apresentar.

Tal conclusão ocorre somente para polímeros de alto peso molecular, na ausência de degradações das macromoléculas. Registre-se que o mecanismo produzido pelo estiramento da macromolécula é similar ao efeito produzido por longas fibras.

Os resultados para um fluido viscoelástico são explorados no capítulo 5. A seção a seguir aborda a solução assintótica para o raio de colapso desenvolvida neste trabalho.

4.5 RAIIO DE COLAPSO

De acordo com as condições impostas ao movimento da bolha, a mesma pode entrar em colapso. A definição da duração do colapso apresenta complicações, já que este se dá na ordem de picosegundos. Esta escala está fora da formulação dos meios contínuos, entrando no campo da termodinâmica do não-equilíbrio. Fatores como a compressibilidade devem ser levados em conta quando a investigação encontra-se voltada para momentos posteriores ao colapso (conforme descrito na seção 2.2).

O tempo computacional nas proximidades do colapso deve ser reduzido e deve ser evitado, uma vez que pode apresentar dificuldades na convergência, conforme reportado por Ting, 1978, Kim, 1994 ou Brujan, 1999. Neste trabalho realiza-se um estudo da condição de parada das corridas computacionais de maneira mais criteriosa, com o

objetivo de definir o raio de colapso. Considera-se que, caso o raio da bolha atinja um raio mínimo pré-estabelecido, em função dos parâmetros físicos do movimento da bolha, determina-se que a mesma atingiu uma condição extrema de colapso.

Esta seção trata primeiramente, da teoria desenvolvida neste trabalho para um raio mínimo assintótico, denotado por R_{min} , assumindo o momento em que ocorre o colapso. A análise do raio mínimo e o método de cálculo são apresentados posteriormente.

4.5.1 Teoria assintótica para o raio de colapso

Para uma estimativa do raio mínimo de colapso, considera-se a condição mais adversa possível do escoamento, encontrada quando $Re \rightarrow \infty$, em que o termo viscoso é desprezado ($\mu \rightarrow 0$), assim como a presença de aditivos no fluido ($\mu_e = 0$). Considerando que a pressão ambiente seja constante ($p_\infty(t) = \tilde{p}_\infty$), da equação (2.89) obtém-se

$$\ddot{R}R + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = -\frac{\Delta\tilde{p}}{\rho} + \frac{1}{\rho}\left(\Delta\tilde{p} + \frac{2\tilde{\sigma}}{R_E}\right)\left(\frac{R_E}{R}\right)^{3n} - \frac{2\tilde{\sigma}}{R\rho}. \quad (4.17)$$

A equação (4.17) remete à forma da equação (A.1), podendo ser resolvida por meio do método do fator integrante, que é dado por $2R^2\dot{R}$. Multiplicando a equação (4.17) pelo fator integrante, tem-se:

$$\begin{aligned} 2\ddot{R}\dot{R}R^3 + 3\dot{R}^3R^2 &= -2\dot{R}R^2\frac{\Delta\tilde{p}}{\rho} \\ &+ \frac{1}{\rho}2\dot{R}R^2\left(\Delta\tilde{p} + \frac{2\tilde{\sigma}}{R_E}\right)\left(\frac{R_E}{R}\right)^{3n} - \frac{4\dot{R}R\tilde{\sigma}}{\rho}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

para facilitar a manipulação matemática será definido uma constante de equilíbrio \tilde{G} , que estará presente em todo o desenvolvimento subsequente:

$$\tilde{G} = \left(\Delta\tilde{p} + \frac{2\tilde{\sigma}}{R_E} \right) R_E^3 . \quad (4.19)$$

Tendo em vista gerar uma estimativa do movimento da bolha na vizinhança do colapso, é suficiente assumir que o coeficiente politrópico $n = 1$ (processo isotérmico). Voltando à equação (4.18), pode-se descrever os termos em função de suas respectivas derivadas, em que:

$$\frac{d}{dt} (R^3 \dot{R}^2) = -\frac{2}{3} \left(\frac{\Delta\tilde{p}}{\rho} \right) \frac{d}{dt} (R^3) + \frac{2}{\rho} \tilde{G} \frac{d}{dt} (\ln R) - \frac{2\tilde{\sigma}}{\rho} \frac{d}{dt} (R^2) , \quad (4.20)$$

logo existe a possibilidade de integrar a equação (4.20) analiticamente, para as condições iniciais:

$$\text{condições iniciais} = \begin{cases} R(0) = R_0 \\ \dot{R}(0) = 0 \end{cases}$$

Portanto, integrando a equação (4.20), obtém-se:

$$R^3 \dot{R}^2 = -\frac{2}{3} \left(\frac{\Delta\tilde{p}}{\rho} \right) (R^3 - R_0^3) + \frac{2}{\rho} \tilde{G} \ln \left(\frac{R}{R_0} \right) - \frac{2\tilde{\sigma}}{\rho} (R^2 - R_0^2) . \quad (4.21)$$

Quando o termo (R_0^3/R_3) encontra-se em evidência, a equação (4.21) pode ser reescrita na forma:

$$\dot{R}^2 = \left(\frac{R_0^3}{R^3} \right) \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\Delta\tilde{p}}{\rho} \right) \left(1 - \frac{R^3}{R_0^3} \right) + \frac{2}{\rho} \tilde{G} \frac{1}{R_0^3} \ln \left(\frac{R}{R_0} \right) - \frac{2\tilde{\sigma}}{\rho} \frac{1}{R_0} \left(\frac{R^2}{R_0^2} - 1 \right) \right] . \quad (4.22)$$

Na eminência do colapso considera-se que o raio da bolha $R \ll 1$, ou seja, $R \rightarrow 0$. Logo após a simplificação de (4.22) nas condições do limite considerando $R/R_0 \ll 1$ tem-se que

$$\dot{R}^2 = \left(\frac{R_0^3}{R^3} \right) \left[\frac{2}{3} \frac{\Delta\tilde{p}}{\rho} + \frac{2}{\rho} \tilde{G} \frac{1}{R_0^3} \ln \left(\frac{R}{R_0} \right) + \frac{2\tilde{\sigma}}{\rho} \frac{1}{R_0} \right]. \quad (4.23)$$

É importante conceber que caso a condição $\dot{R} \rightarrow -\infty$ seja utilizada, a equação (4.23) resulta em um raio mínimo nulo, i.e. $R = R_{min} = 0$, uma vez que

$$\lim_{\dot{R} \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{\dot{R}^2} \right) = \left(\frac{R_{min}}{R_0} \right)^3 \frac{1}{\left[\frac{2}{3} \frac{\Delta\tilde{p}}{\rho} + \frac{2}{\rho} \tilde{G} \frac{1}{R_0^3} \ln \left(\frac{R}{R_0} \right) + \frac{2\tilde{\sigma}}{\rho} \frac{1}{R_0} \right]} = 0. \quad (4.24)$$

Nota-se que tal condição só seria possível caso a cavidade fosse vácuo e não uma bolha que apresenta um número de moles finito. Retornando à equação (4.23) e, considerando que na condição de colapso o raio da bolha atinge um mínimo, em que a condição $\dot{R} = 0$ deve ser satisfeita, a equação (4.23) com $R = R_{min}$ reduz-se para

$$0 = \frac{2}{3} \frac{\Delta\tilde{p}}{\rho} + \frac{2}{\rho} \tilde{G} \frac{1}{R_0^3} \ln \left(\frac{R_{min}}{R_0} \right) + \frac{2\tilde{\sigma}}{\rho} \frac{1}{R_0}. \quad (4.25)$$

Isolando R_{min} obtém-se

$$\ln \left(\frac{R_{min}}{R_0} \right) = -\frac{R_0^3}{3\tilde{G}} \left(\Delta\tilde{p} + \frac{3\tilde{\sigma}}{R_0} \right). \quad (4.26)$$

E conseqüentemente:

$$R_{min} = R_0 e^{-\frac{R_0^3}{3\tilde{G}} \left(\Delta\tilde{p} + \frac{3\tilde{\sigma}}{R_0} \right)}. \quad (4.27)$$

Resta agora adimensionalizar o raio mínimo para que seja possível sua aplicação como condição de parada, em caso de colapso, na simulação utilizada, em que todo o cálculo numérico é baseado em equações adimensionalizadas. Realizando uma análise de escala, tem-se

$$\begin{aligned} R_{min}^* &= R_{min} R_E \\ R_0^* &= R_0 R_E , \end{aligned} \quad (4.28)$$

em que R_{min}^* e R_0^* representam o raio mínimo e o raio inicial adimensionalizados, respectivamente. Assim, substituindo em (4.27):

$$R_{min}^* = R_0^* e^{-\frac{(R_0^*)^3 R_E^3}{3G} \left((\Delta\tilde{p}) + \frac{3\tilde{\sigma}}{R_0^* R_E} \right)} = R_0^* e^X . \quad (4.29)$$

Explorando a adimensionalização do termo definido por X , obtém-se:

$$X = -\frac{(R_0^* R_E)^3 \Delta\tilde{p}}{3\Delta\tilde{p} R_E^3 \left[\frac{2\tilde{\sigma}}{R_E \Delta\tilde{p}} + 1 \right]} \left[1 + \frac{3\tilde{\sigma}}{R_0^* R_E \Delta\tilde{p}} \right] . \quad (4.30)$$

A partir do número adimensional We , a equação (4.30) é reescrita como

$$X = -\frac{(R_0^*)^3}{3 \left[\frac{2}{We} + 1 \right]} \left[1 + \frac{3}{R_0^* We} \right] . \quad (4.31)$$

Logo, simplificando obtém-se:

$$X = -\frac{(R_0^*)^3 \left(\frac{R_0^* We + 3}{R_0^* We} \right)}{3 \left(\frac{2 + We}{We} \right)} = -(R_0^*)^2 \frac{\left(1 + \frac{R_0^* We}{3} \right)}{(We + 2)} . \quad (4.32)$$

Assim, o raio mínimo encontrado pela solução assintótica, adimensionalizado, é dado por

$$R_{min}^* = R_0^* e^{-(R_0^*)^2 \left[\frac{1+R_0^* We/3}{We+2} \right]} . \quad (4.33)$$

Nota-se que o critério para o colapso, determinado a partir da equação (4.33), depende diretamente do raio inicial da bolha, para um número de Weber finito, conforme indicado por Fogler & Goddard, 1970.

4.5.2 Análise do Raio de Colapso

Realizando uma análise mais aprofundada acerca do comportamento deste raio mínimo R_{min} , de acordo com os valores que podem ser assumidos para diferentes raios iniciais R_0 , pode-se definir uma função em que:

$$R_{min}(R_0) = R_0 e^{-R_0^2 \left[\frac{1+R_0 We/3}{We+2} \right]} . \quad (4.34)$$

A variação de $R_{min}(R_0)$, para vários valores fixo do número de Weber, é apresentado na Figura 4.18. É possível perceber que, para um valor do raio inicial $R_0 \leq 1.5$, tem-se o aumento do raio mínimo com o aumento do número de Weber. Já para valores $R_0 \geq 1.5$, o raio mínimo diminui quando aumenta-se o número de Weber. Tal comportamento é típico desta função definida através de uma exponencial $R_0 e^{-R_0^2}$. Nota-se que ocorre uma convergência de todas as curvas quando aumenta-se R_0 , independente do número de Weber assumido.

A partir da Figura 4.18 fica claro que, para $R_0 \rightarrow 0$, as curvas encontram-se fora dos limites da teoria proposta, pois a mesma estabelece que $R_0 = R_{min}$ e $R_{min} \ll R_0$. Isto mostra que a teoria desenvolvida deve ser aplicada somente para $R_0 \geq 2$.

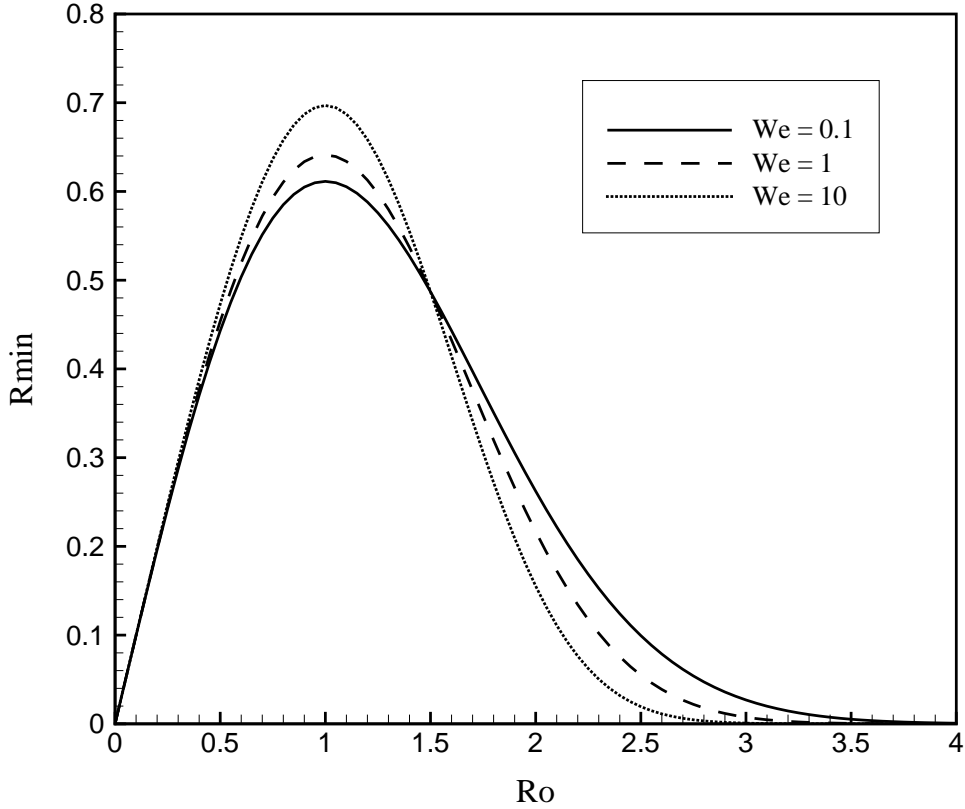


Figura 4.18: Raio mínimo R_{min} em função do raio R_0 para diferentes números de Weber, em que linha cheia denota $We = 0.1$, linha tracejada $We = 1$ e linha pontilhada $We = 10$.

Por exemplo, quando $We = 1$ e $R_0 = 2$, o raio mínimo correspondente é dado por $R_{min} \simeq 0.2$ e a condição $R_{min} \ll R_0$ é satisfeita. Portanto, o limite inferior é definido de acordo com a condição assumida pela teoria desenvolvida. Pode-se avaliar também os limites assintóticos $We \rightarrow 0$ e $We \rightarrow \infty$. Da equação (4.34), tem-se

$$\begin{aligned} We \rightarrow 0, & \quad R_{min}(R_0) = R_0 e^{-\frac{R_0^2}{2}} \\ We \rightarrow \infty, & \quad R_{min}(R_0) = R_0 e^{-R_0^3}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

A Figura 4.19 representa estes limites, em que $We \rightarrow 0$ e $We \rightarrow \infty$ são representados pelas linhas cheia e traço-pontos, respectivamente. Cumpre observar que o intervalo utilizado para o raio inicial foi $2 \leq R_0 \leq 4$. O encarte da Figura 4.19 fornece uma ilustração mais detalhada dos valores que o raio mínimo assume, quando $R_0 \cong 3$, que se encontram $R_{min} \sim 10^{-2}$.

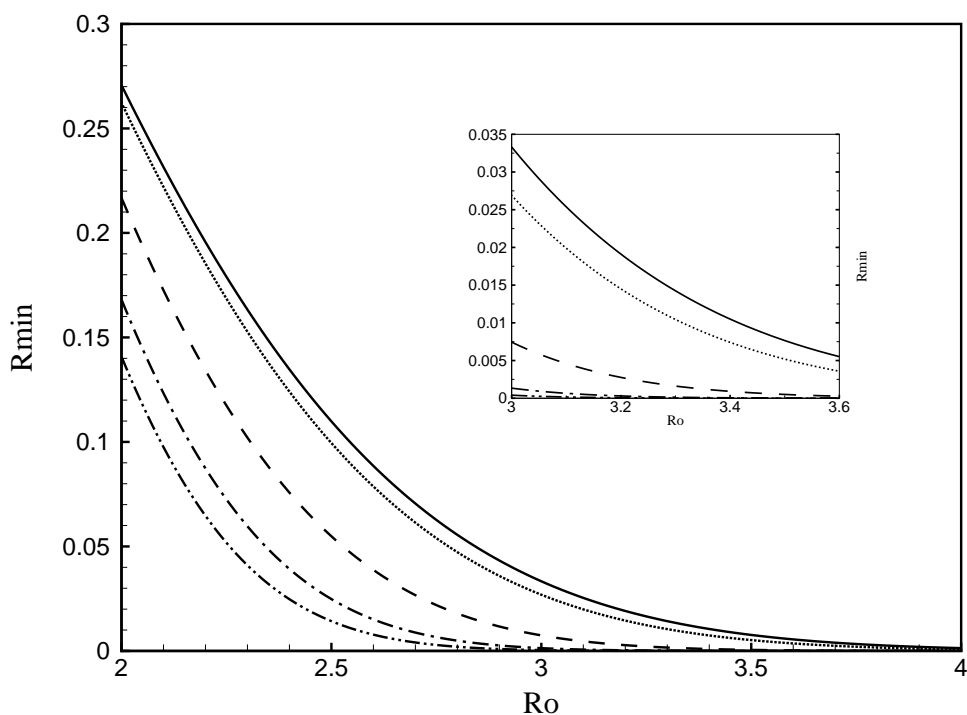


Figura 4.19: Raio mínimo R_{min} em função do raio R_0 . Os limites assintóticos $We \rightarrow 0$ e $We \rightarrow \infty$ são representados pelas linhas cheia e traço-pontos, respectivamente. A linha pontilhada denota $We = 0.1$; a linha tracejada consiste em $We = 1$ e linha traço-ponto para $We = 5$.

Analisando a Fig. (4.19), para $R_0 \geq 2$, nota-se que a solução do raio mínimo assintótico reproduz resultados esperados pela física do problema: quando $We \rightarrow \infty$ significa que a tensão superficial é menor perante as forças de inércia. Logo, quando a bolha contrai, a tensão superficial não consegue “resistir” às forças externas que atuam na bolha, obtendo R_{min} pequeno. O raio mínimo é menor se comparado ao mesmo raio inicial quando $We \rightarrow 0$, em que a tensão superficial se sobrepõe às forças de inércia, reagindo melhor às forças externas e obtendo, assim, maiores raios mínimos de colapso.

Cumpramos examinar neste passo que a utilização de um raio inicial alto pode gerar uma situação de colapso, para um caso contendo os mesmos parâmetros mas um raio inicial moderado. Assim como visto na seção 4.4.2, a bolha apresenta uma sensibilidade a condições iniciais. Pela Figura 4.19 é possível observar que o raio mínimo assume o valor $R_{min} \cong 0.025$ quando $We = 5$ e $R_0 = 2.5$, enquanto $R_{min} \cong 0.002$ para $We = 5$ e $R_0 = 3$.

Apesar do aumento do raio inicial resultar em um menor raio mínimo de colapso, o movimento da bolha apresenta uma não-linearidade maior para $R_0 = 3$, que pode gerar uma situação de colapso quando $Re = 15$ e $\varepsilon = 1$, por exemplo, conforme ilustrado na Figura 4.20. Nota-se que a curva que corresponde a $R_0 = 2.5$ não apresenta um caso de colapso.

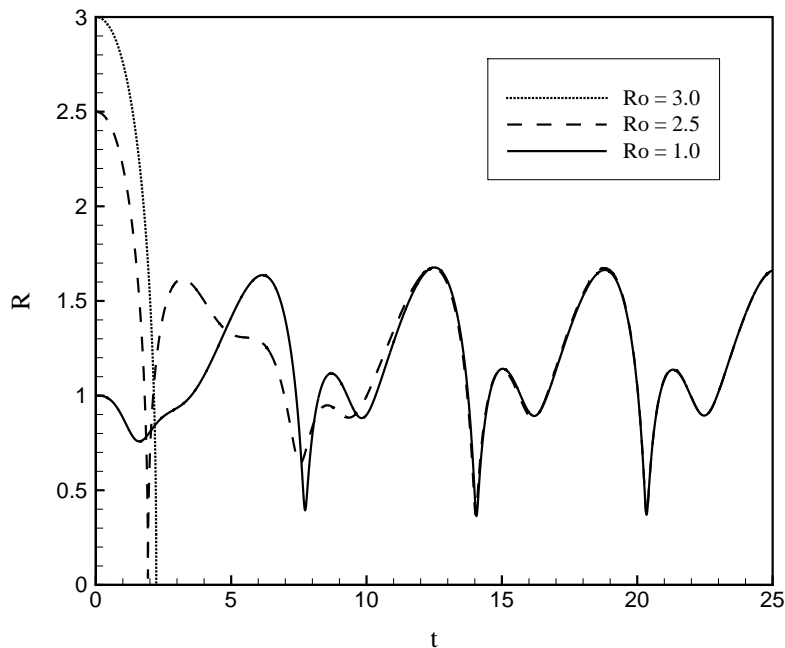


Figura 4.20: Evolução temporal do raio da bolha, para $\varepsilon = 1$, $We = 5$, $Re = 15$ e $\phi = 0.1\%$. A linha cheia denota o caso $R_0 = 1$; a linha tracejada corresponde a $R_0 = 2.5$ e a linha pontilhada $R_0 = 3$.

Uma forma de compensar a utilização de um valor alto para a condição inicial reside no fato de utilizar um menor número de Reynolds, uma vez que efeitos de inércia são conhecidos por proporcionar um maior grau de não-linearidade no movimento da bolha. Outro parâmetro que pode auxiliar na utilização de um alto R_0 sem que ocorra o colapso é a concentração de aditivos, pois um maior efeito da anisotropia das fibras resulta na linearização do movimento da bolha, conforme visto no capítulo anterior.

Pode-se também realizar uma análise da variação do raio mínimo a partir de um raio inicial fixo, em que $R_{min} = R_{min}(We)$. A Figura 4.21 representa $R_{min}(We)$ para diferentes R_0 , resultando em uma forma mais simples de analisar a relação existente entre We e R_{min} .

Pela análise da Fig. 4.21 percebe-se mais claramente que o raio mínimo diminui com o aumento do número de Weber, de forma que para um limite $We \rightarrow \infty$, ocorre a saturação do valor do raio mínimo.

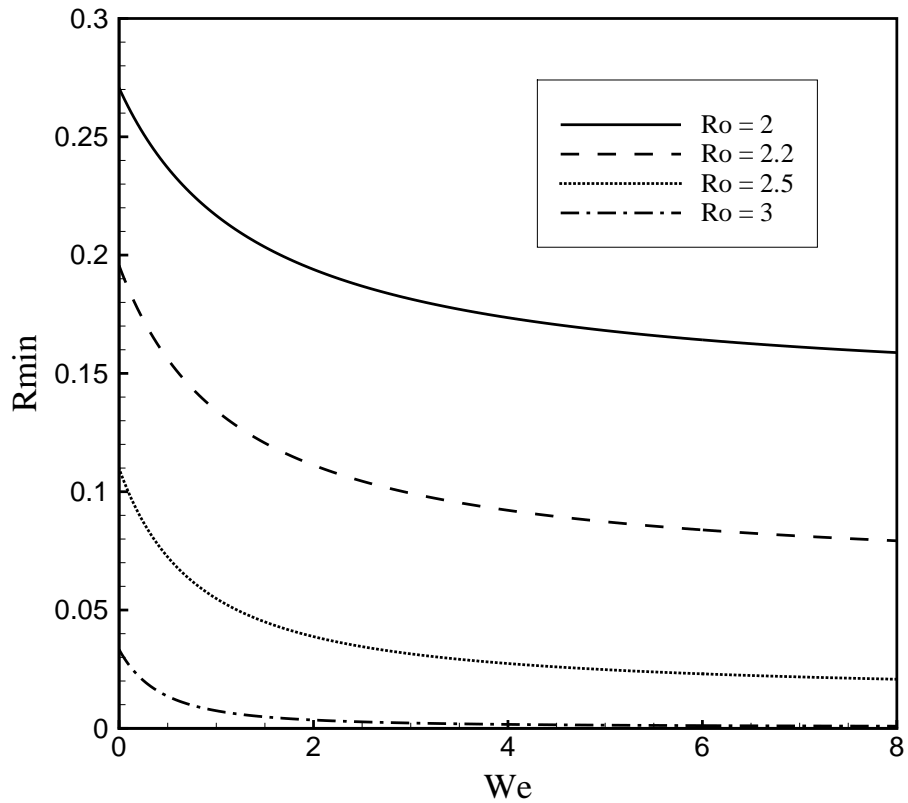


Figura 4.21: Raio mínimo R_{min} em função do número de Weber, We , para diferentes valores de R_0 ($R_0 = 2$ linha cheia; $R_0 = 2.2$ linha tracejada; $R_0 = 2.5$ linha pontilhada e $R_0 = 3$ linha traço-ponto).

Pelo gráfico nota-se que a maior variação do raio mínimo sentida pelo parâmetro We se dá para valores $0 < We < 6$, em que $We \sim 5$ consiste em um valor alto para a solução, correspondendo praticamente à condição de saturação quando ($We \rightarrow \infty$).

5 RESULTADOS DO MODELO VISCOELÁSTICO LINEAR

Neste capítulo explora-se os resultados da dinâmica de uma bolha na presença de uma suspensão descrita a partir de um modelo viscoelástico linear de Maxwell. Considera-se a aproximação de partículas alinhadas com o escoamento, baseado em observações que relatam um alinhamento rápido de fibras com alta razão de aspecto na direção do escoamento. Nesta aproximação, resolve-se somente o campo de velocidade, que exerce a função de prever o movimento do fluido e a orientação das partículas. Portanto, assume-se que os aditivos possuem uma condição de orientação permanente na direção radial do escoamento, i.e., $\theta = 0$, obtendo $S(R) = 1$.

Considerações acerca do comportamento da bolha de acordo com a orientação média global dos aditivos são realizadas somente no capítulo 7. Desta forma, a viscosidade extensional, que remete aos efeitos anisotrópicos e, conseqüentemente, aos aditivos completamente estirados, é relacionada aos efeitos elásticos (a partir da relaxação dos aditivos).

Trabalhos recentes, como Kafiabad & Sadeghy, 2010, resolveram a equação íntegro-diferencial de fluidos viscoelásticos de maneira direta a partir da utilização de outros modelos e da discretização espacial da suspensão por malhas, apesar do custo computacional elevado. As manipulações matemáticas da equação íntegro-diferencial obtida neste trabalho (conforme descritas na seção 3.3.1) reduzem o custo computacional, auxiliando na análise do presente modelo. Para gerar simulações do modelo viscoelástico Maxwell linear, é necessário resolver a equação apresentada em (3.50) pelo método de Runge-Kutta, a partir de um sistema contendo três equações de primeira ordem, em que:

$$\begin{cases} v = \dot{R} \\ \dot{I} = vR^2 - I/De \\ \dot{v} = \frac{1}{R} \left(\frac{2}{We} \left(\frac{1}{R^{3n}} - \frac{1}{R} \right) - 1 - \varepsilon \sin(\omega t) + \frac{1}{R^{3n}} - \frac{3}{2}v^2 - \frac{4}{Re} \frac{v}{R} - \frac{4}{Re} \frac{\mu_e S(R)}{\mu De} I \right) \end{cases}$$

Devido à presença de uma viscosidade extensional, o modelo linear de Maxwell aqui apresentado difere de modelos típicos, como encontrado por Lind & Phillips, 2010. O número de Reynolds é explorado para valores moderados, i.e. $Re < 15$, uma vez que, para regimes contendo alto Re , os efeitos reológicos das partículas na dinâmica da bolha são desprezados (Brujan, 1999), direção contrária ao foco deste trabalho.

A Figura 5.1 mostra o comportamento da solução permanente de uma bolha na presença de efeitos elásticos. Os parâmetros usados são $Re = We = 5$, $\phi = 0.5\%$ e $\varepsilon = 1$. Cada curva apresenta um valor diferente de De , em que linha cheia denota $De = 0$ (modelo anisotrópico); linha tracejada $De = 0.1$ e pontilhada $De = 0.5$. Nota-se que a evolução temporal do raio da bolha (Fig. 5.1 (a)) apresenta um suave deslocamento com o aumento do efeito elástico, o que reflete em um comportamento diferenciado do diagrama de fase e da pressão interna da bolha, Figs. 5.1 (b) e (c), respectivamente.

Para uma contribuição menos significativa do efeito elástico, $De = 0.1$, é possível observar uma solução semelhante ao modelo puramente anisotrópico. É importante registrar que a evolução temporal da velocidade \dot{R} para $De = 0.5$ já demonstra uma dinâmica mais instável da bolha, conforme observado no diagrama de fase, que apresenta desvio da solução harmônica (i.e., da trajetória circular).

Cumpramos examinar neste passo que, com o propósito de comparar os efeitos elásticos e anisotrópicos, a parte física relevante do problema é capturada para De pequenos e moderados, até valores em que $De \sim 1$ (Absi *et al.*, 2006), em que o tempo de relaxação do aditivo é da mesma ordem que o tempo característico do escoamento $1/(|du/dr|)$. No entanto, o modelo de Maxwell linear restringe-se ao regime elástico linear e, no presente contexto, utiliza-se do intervalo $0 < De < 1$.

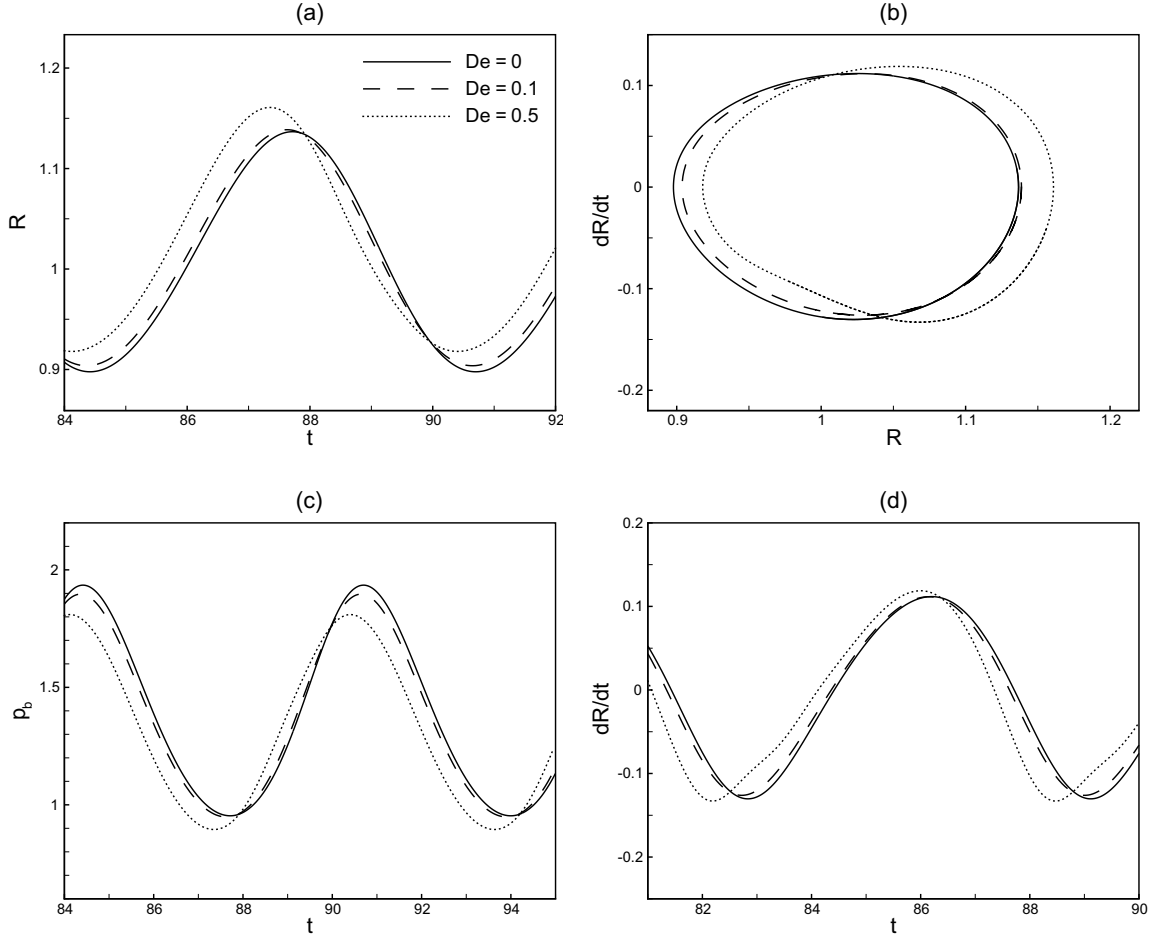


Figura 5.1: Comportamento do estado permanente de uma bolha para o modelo linear viscoelástico, com parâmetros: $Re = We = 5$, $\phi = 0.5\%$ e $\varepsilon = 1$. (a) R vs t ; (b) \dot{R} vs R ; (c) p_b vs t ; (d) \dot{R} vs t .

Em virtude dessas considerações, a influência dos efeitos elásticos pode ser mais acentuada com o uso de uma menor fração volumétrica de aditivos. A Figura 5.2 apresenta os mesmos parâmetros da Fig. 5.1, agora com $\phi = 0.1\%$. Apesar da solução $De = 0.1$ assemelhar-se à resposta da bolha para um modelo anisotrópico, a curva $De = 0.5$ apresenta uma maior não-linearidade do movimento da bolha, em que duas amplitudes para o raio da bolha em uma solução permanente são observadas (Fig. 5.2 (a)). Tal fato incide diretamente no diagrama de fase (Fig. 5.2 (b)) e na pressão interna da bolha (Fig. 5.2 (c)), em que nota-se a presença de mais modos vibracionais.

Realizando uma comparação entre as Figuras 5.1 e 5.2, observa-se que os efeitos elásticos exercem maior influência na dinâmica da bolha com a diminuição da fração volumétrica dos aditivos.

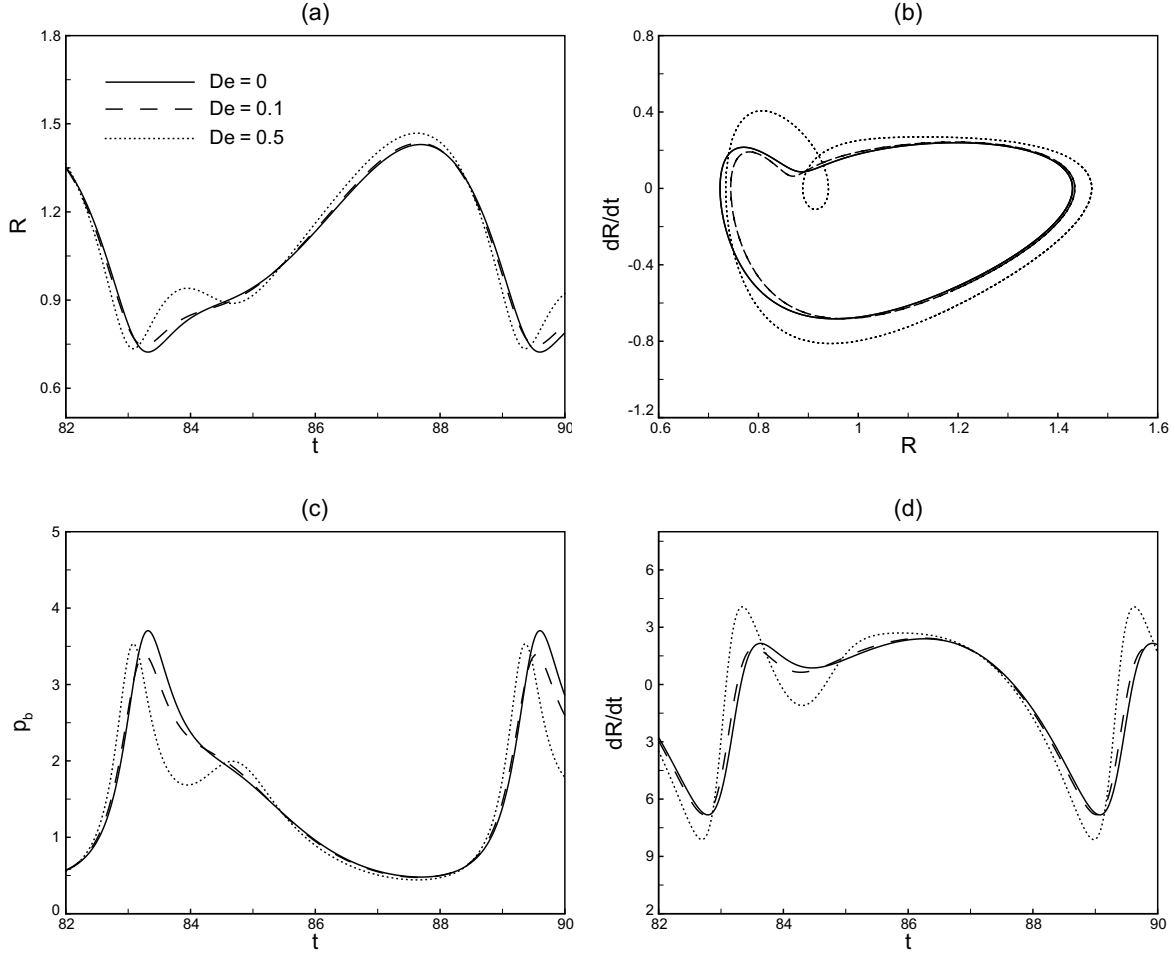


Figura 5.2: Caso semelhante à Fig. 5.1, agora com uma fração volumétrica de aditivos $\phi = 0.1\%$. (a) R vs t ; (b) \dot{R} vs R ; (c) p_b vs t ; (d) \dot{R} vs t .

Assim, o efeito de atenuação do movimento, produzido pela anisotropia (devido à viscosidade extensional) apresenta-se mais fraco, e favorece a influência da relaxação de aditivos na produção de uma não-linearidade na dinâmica da bolha. A Figura 5.3 (a) fortalece a afirmativa acima, mostrando a evolução temporal da integral de convolução, I , para diferentes concentrações de aditivos, mantendo-se a elasticidade constante, $De = 0.5$. Nota-se que uma menor fração volumétrica de aditivos é traduzida em um aumento da influência da integral de convolução, que caracteriza a elasticidade existente em um modelo viscoelástico.

Desta forma, o comportamento não-linear da integral I reflete os efeitos de relaxação dos aditivos, apresentando maior número de graus de liberdade com a diminuição da fração volumétrica dos aditivos, conforme visto na Fig. 5.3 (b), que mostra o diagrama de fase da integral, I vs \dot{I} .

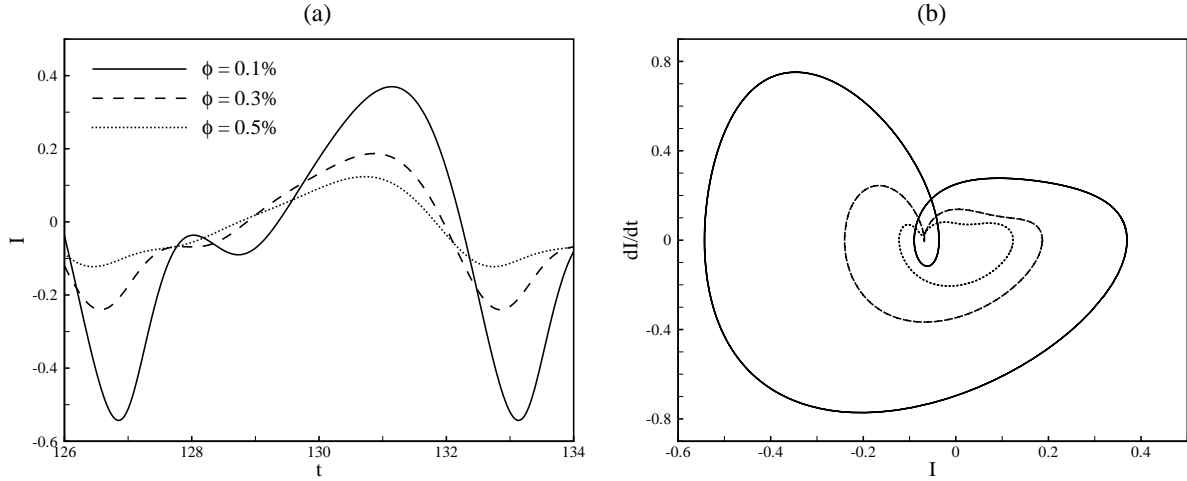


Figura 5.3: (a) Evolução temporal da integral de convolução I para diferentes concentrações; (b) Diagrama de fase da integral de convolução \dot{I} vs I . Parâmetros utilizados: $Re = We = 5$, $De = 0.5$ e $\varepsilon = 1$.

A Figura 5.4 (a) mostra a evolução temporal do raio da bolha na presença de maiores efeitos de inércia no escoamento, $Re = 15$, com a amplitude de excitação $\varepsilon = 1.5$ e concentração $\phi = 0.15\%$. As curvas (para diferentes De) certificam a influência da elasticidade dos aditivos na resposta não-linear da bolha. Novamente, uma pequena diferença pode ser observada entre as curvas $De = 0$ e $De = 0.1$. No entanto, o fraco efeito elástico em $De = 0.1$ já parece acentuar a presença de um segundo harmônico. Observa-se que, enquanto as curvas $De = 0$ e $De = 0.1$ apresentam duas oscilações do regime permanente no intervalo de tempo ilustrado em 5.4 (a), a curva que denota $De = 0.4$ apresenta somente uma oscilação permanente da bolha, que reflete maior quantidade de modos vibracionais.

É importante notar também que uma maior presença de elasticidade resulta em um aumento do raio máximo atingido pela bolha, indicando que o aumento de De resulta na produção de não-linearidade no movimento oscilatório da bolha. Os picos da pressão interna $p_b \simeq 340$ (Fig. 5.4 (b)) para a curva $De = 0.4$, apresentam valor superior ao modelo puramente anisotrópico $p_b \simeq 280$ e confirmam que, durante o movimento de contração da bolha, $144 < t < 148$, a relaxação dos aditivos (fibras ou macromoléculas) no líquido ambiente redonda em um raio menor atingido pela bolha, quando comparado ao raio mínimo atingido pela bolha na ausência de efeitos elásticos ($De = 0$).

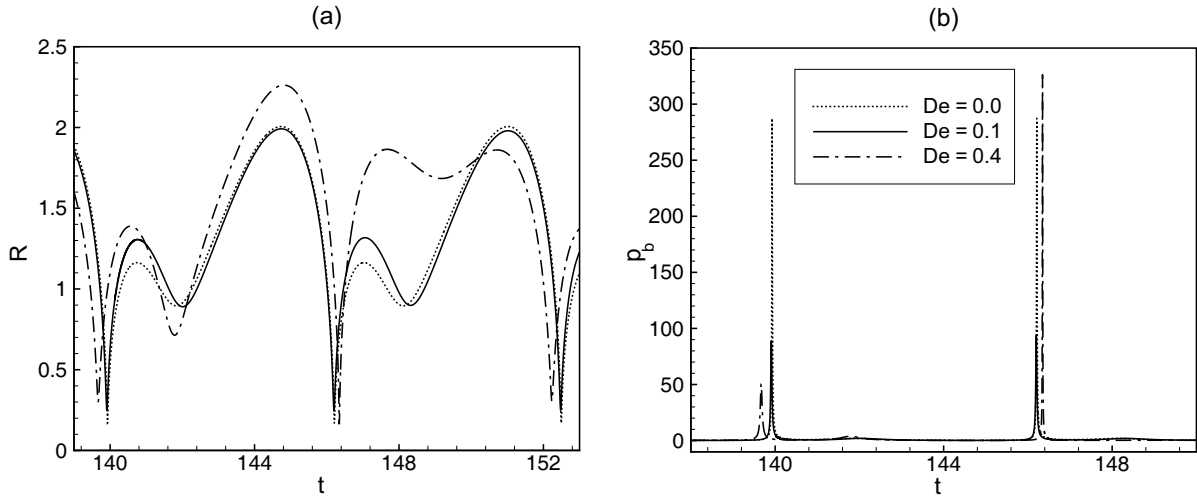


Figura 5.4: Oscilações não-lineares de uma bolha em estado permanente. (a) R vs t ; (b) p_b vs t . Os parâmetros são: $\phi = 0.15\%$, $Re = 15$, $We = 5$, e $\varepsilon = 1.5$.

A respectiva evolução temporal da integral de convolução da Fig. 5.4 é ilustrada na Fig. 5.5 (a). O comportamento instável de I é aumentado pela elasticidade do fluido, apresentando maiores graus de liberdade para efeitos elásticos mais significativos (ver Fig. 5.5 (b)). A maior interação da integral I no movimento da bolha reflete no aumento da não-linearidade da solução deste movimento. Isso indica que, para o intervalo de valores do número de Deborah explorados, existe um acoplamento entre o efeito elástico dos aditivos e a oscilação periódica da bolha.

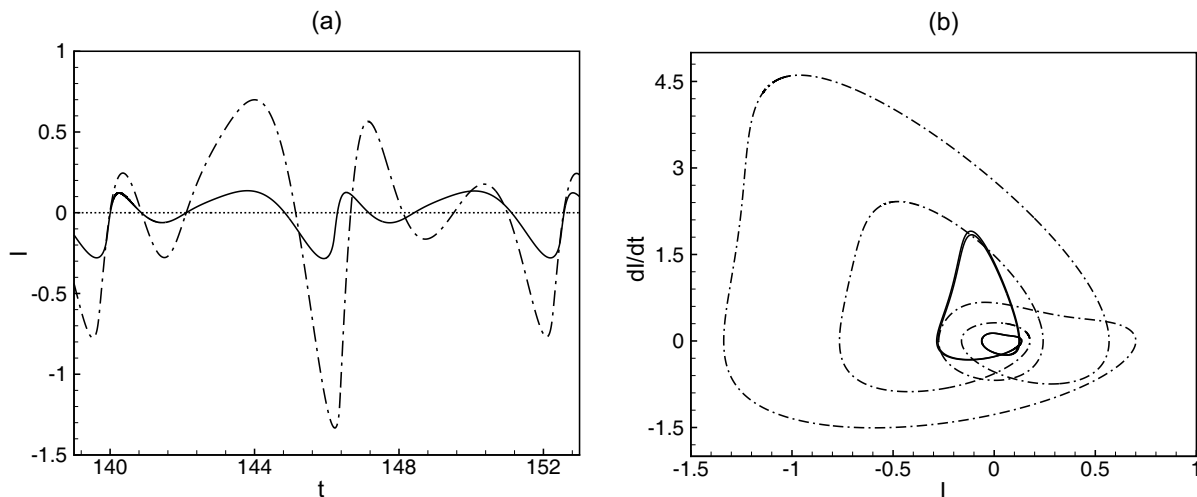


Figura 5.5: Comportamento da integral de convolução I utilizando os parâmetros físicos da Fig. 5.4. (a) I vs t ; (b) \dot{I} vs I (diagrama de fase).

A afirmativa que a elasticidade pode produzir um movimento não-linear também é confirmada para alto número de Deborah, em que um comportamento caótico pode ser encontrado (e.g. Jiménez-Fernández & Crespo, 2005, Foteinopoulou & Laso, 2010).

A Figura 5.6 mostra R vs t para as mesmas condições da Fig. 5.4 com $De = 1.0$. O resultado apresenta um típico comportamento caótico do movimento de uma bolha, caracterizado por um crescimento “explosivo” que pode eventualmente levar ao colapso da bolha, conforme obtido por Allen & Roy, 2000b. Tal comportamento varia de acordo com os parâmetros físicos envolvidos, cuja ocorrência é mais suscetível quando $Re > 5$ e fração volumétrica de aditivos $\phi < 0.3\%$. Neste regime, a anisotropia apresenta uma contribuição menor na dinâmica da bolha, considerando-se amplitudes de excitação moderadas ou altas ($\varepsilon > 1$). Portanto, o aumento da relaxação de aditivos acelera a rota para o colapso da bolha quando comparado com um modelo que considera somente efeitos anisotrópicos, que se encontra representado somente a partir da viscosidade extensional no fluido ambiente.

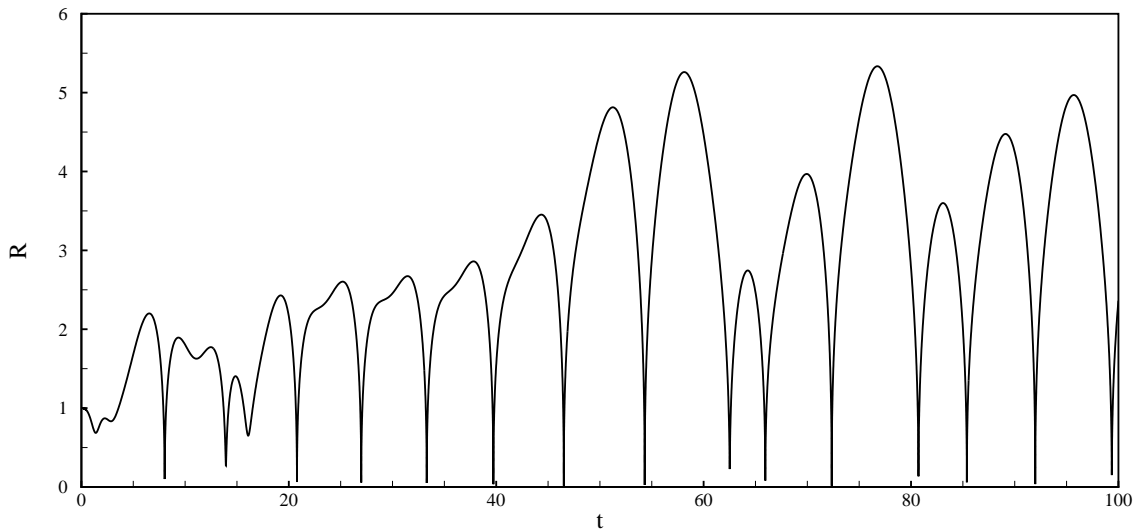


Figura 5.6: Comportamento caótico do raio de uma bolha em função do tempo, para os parâmetros da Fig. 5.4, aumentando-se o efeito elástico para $De = 1$.

Pode-se observar que, para $De < 1$, a relaxação dos aditivos contribui para o aumento da instabilidade da bolha em contraste com o efeito de anisotropia, que sempre apresenta um caminho oposto ao da instabilidade, ou seja, atenua as oscilações da bolha e, conseqüentemente, aumenta o tempo de colapso. Quando o tempo de relaxação dos aditivos é da ordem do tempo de oscilação do período da bolha, a elasticidade dos aditivos pode alterar de maneira significativa o movimento da bolha. Esta proposição fornece uma indicação clara de que deve existir um número de Deborah crítico, De_c , tal que, quando $De > De_c$ a elasticidade passa a apresentar um efeito anisotrópico

decorrente da saturação da extensão dos aditivos pelo escoamento, em que o tempo de relaxação é maior que o tempo de oscilação da bolha.

Desta forma, pode-se considerar dois limites assintóticos para o modelo viscoelástico, relacionados a $De \ll 1$ e $De \sim 1$, que correspondem a duas configurações diferentes de anisotropia. É importante observar que, a anisotropia superior (2), que corresponde a $De \sim 1$, apresenta uma viscosidade extensional “equivalente” maior que a anisotropia inferior (1), dada por $De \ll 1$ e, portanto, $\mu_{e(1)} < \mu_{e(2)}$. Assim, deve existir um valor De_c em que a presença de uma anisotropia extra resulte na atenuação do movimento da bolha. Por outro lado, caso a fração volumétrica de aditivos apresente valor nulo, $\phi \rightarrow 0$, os limites inferior (1) e superior (2) se reduziriam a um clássico fluido Newtoniano para baixa e alta taxa de cisalhamento, respectivamente.

A Figura 5.7 (a) ilustra a evolução temporal de R para diferentes De e compara diretamente à solução Newtoniana (linha traço-ponto). Registra-se que o aumento da elasticidade resulta em um comportamento da bolha cada vez mais próximo do comportamento apresentado na presença de um fluido Newtoniano. É importante notar ainda que a diminuição da fração volumétrica de aditivos favorece uma solução do modelo viscoelástico que se encontre cada vez mais próxima à solução Newtoniana, conforme observado pelo raio máximo R_{max} da bolha em função da elasticidade De (ilustrado pela Figura 5.7 (b)).

Desta forma, infere-se e demonstra-se a existência de uma limitação quanto ao uso do modelo viscoelástico linear, uma vez que este não consegue prever o ponto em que o limite assintótico De_c fornece uma solução que retorna uma anisotropia superior, proveniente da extensão dos aditivos. Assim, a contribuição elástica para um regime linear não deve se estender até a ordem $De \sim 1$, uma vez que o aumento da relaxação de aditivos para este modelo sempre caminha na direção contrária da estabilização da bolha e uma respectiva solução anisotrópica.

A mesma conclusão pode ser estendida para a investigação de diferentes frequências de excitação. A Figura 5.8 mostra R_{max} vs De , em que as curvas apresentam ω diferentes.

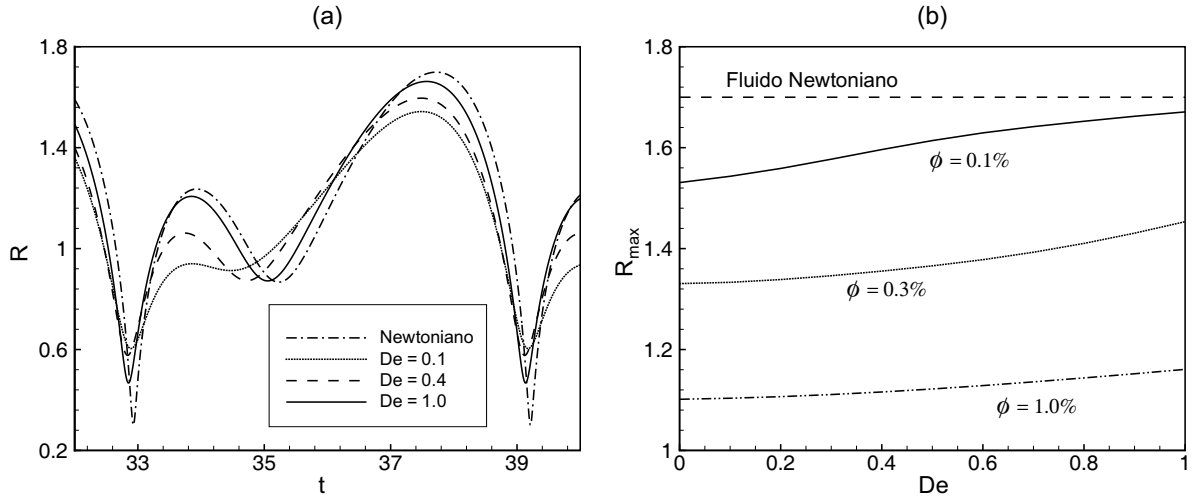


Figura 5.7: (a) Evolução temporal do raio da bolha para diferentes concentrações e para um fluido Newtoniano ($\phi = 0\%$), para os parâmetros $Re = 8$, $We = 5$, $\phi = 0.1\%$ e $\varepsilon = 1$. (b) R_{\max} vs t .

Observa-se que o aumento do efeito elástico sempre resulta no aumento da amplitude de oscilação da bolha, ou seja, do raio máximo atingido. Cumpre salientar que o número de Deborah De pode ser redefinido a partir da frequência de excitação utilizada, denominado De_N . Relembrando que a forma adimensional da frequência é dada por $\omega^* = \omega t_c$, De_N assume $De_N = \alpha \omega^* / t_c$ ou, ainda, escrevendo De_N em termos de De , obtém-se $De_N = De \omega^*$.

O capítulo 6 explora um modelo viscoelástico não-Linear. Discute-se as questões relativas ao limite assintótico para $De \sim 1$ e diferentes frequências de excitação, estabelecendo uma relação com a solução anisotrópica inferior, ou seja, $De \rightarrow 0$, que corresponde ao modelo puramente anisotrópico. Antecipa-se que o limite De_c , que se encontra na ordem $De \sim 1$, representa uma extrema situação em que a anisotropia domina a elasticidade. Na seção seguinte, uma solução assintótica da integral de convolução para um modelo viscoelástico linear é apresentada e analisada.

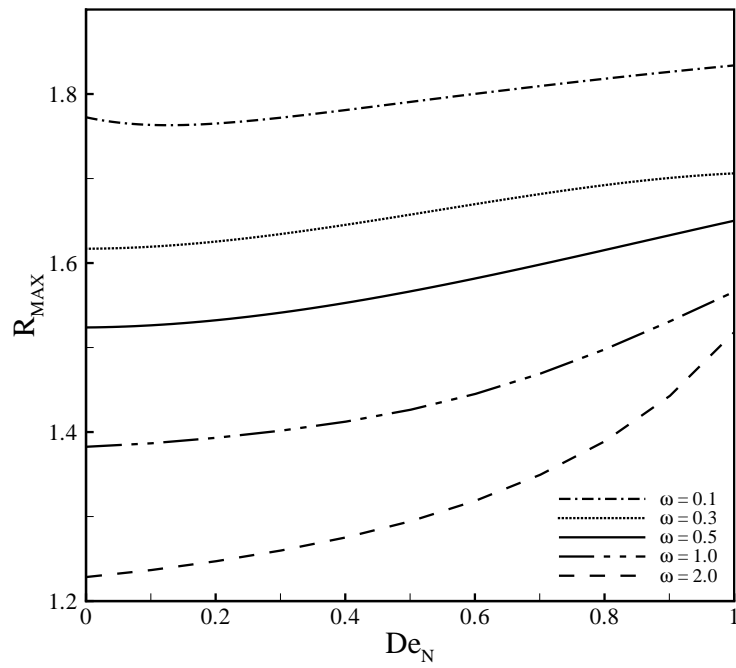


Figura 5.8: Raio máximo atingido pela bolha em função do número de Deborah, para diferentes frequências de excitação. Parâmetros: $\phi = 0.3\%$, $Re = 10$, $We = 5$ e $\varepsilon = 1$.

5.1 SOLUÇÃO ASSINTÓTICA PARA O MODELO VISCOELÁSTICO LINEAR

Nesta seção propõe-se uma aproximação assintótica para o modelo viscoelástico linear desenvolvido no capítulo 3. Relembra-se, primeiramente, a definição da integral de convolução para o modelo de Maxwell utilizado, dado por

$$I^* = \int_{-\infty}^{t^*} e^{-\frac{(t^*-\tau^*)}{De}} \dot{R}^*(\tau^*) R^{*2}(\tau^*) d\tau^* . \quad (5.1)$$

Para o caso em questão, é importante notar que uma solução analítica exata não seria possível. Porém pode-se realizar uma solução aproximada, denominada aproximação assintótica. Tal aproximação é válida somente caso a solução assintótica proposta apresente valores semelhantes à solução do problema quando o parâmetro observado é desprezado, i.e. tender a zero (Hinch, 1991).

O parâmetro, neste caso analisado, consiste no número de Deborah, De . Propõe-se o uso do método de integração por partes sucessivas para gerar esta aproximação assintótica. O método da integração por partes apresenta-se como:

$$\int x dy = xy - \int y dx , \quad (5.2)$$

aplicando à integral definida na equação (5.1), obtém-se

$$x = \dot{R}(\tau) R^2(\tau) , \quad (5.3)$$

$$dx = \frac{d}{dt} \left(\dot{R}(\tau) R^2(\tau) \right) d\tau , \quad (5.4)$$

$$dy = e^{-\frac{(t-\tau)}{De}} d\tau . \quad (5.5)$$

É importante observar que os asteriscos são suprimidos, visando uma menor densificação da nomenclatura utilizada. Para obter o termo y , é necessário realizar a integração da equação (5.5), em que

$$y = \int e^{-\frac{(t-\tau)}{De}} d\tau \Rightarrow y = -De \int e^{-s} ds . \quad (5.6)$$

Salienta-se que uma substituição de variáveis foi utilizada com o objetivo de facilitar o cálculo matemático, em que $s = (t - \tau)/De$ e a derivada $ds = 1/De(-d\tau)$. Encontra-se, assim, para y :

$$y = De \cdot e^{-s} \Rightarrow y = De \cdot e^{-\frac{(t-\tau)}{De}} . \quad (5.7)$$

Substituindo todos os termos na equação (5.2), tem-se:

$$I = \dot{R}(\tau)R^2(\tau)De \cdot e^{-\frac{(t-\tau)}{De}} \Big|_{-\infty}^t - \int_{-\infty}^t De \cdot e^{-\frac{(t-\tau)}{De}} \frac{d}{dt} \left(\dot{R}(\tau)R^2(\tau) \right) d\tau , \quad (5.8)$$

sendo:

$$e^{-\frac{(t-\tau)}{De}} \Big|_{-\infty}^t = 1 . \quad (5.9)$$

Portanto, após uma primeira integração por partes, obtém-se:

$$I = \dot{R}R^2De - De \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(t-\tau)}{De}} \frac{d}{dt} \left(\dot{R}(\tau)R^2(\tau) \right) d\tau . \quad (5.10)$$

Realizando uma segunda integração por partes, tem-se:

$$x = \frac{d}{dt} \left(\dot{R}(\tau)R^2(\tau) \right) , \quad (5.11)$$

$$dx = \frac{d^2}{dt^2} \left(\dot{R}(\tau)R^2(\tau) \right) d\tau . \quad (5.12)$$

Os termos de dy e y serão iguais aos encontrados nas equações (5.5) e (5.7), respectivamente. Substituindo os termos na integral, uma segunda expansão é obtida, na forma

$$I = \dot{R}R^2De - \frac{d}{dt} (\dot{R}R^2) De^2 + De^2 \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(t-\tau)}{De}} \frac{d^2}{dt^2} (\dot{R}(\tau)R^2(\tau)) d\tau . \quad (5.13)$$

uma terceira integração por partes apresenta os seguintes termos:

$$x = \frac{d^2}{dt^2} (\dot{R}(\tau)R^2(\tau)) \Rightarrow dx = \frac{d^3}{dt^3} (\dot{R}(\tau)R^2(\tau)) d\tau , \quad (5.14)$$

$$dy = e^{-\frac{(t-\tau)}{De}} \Rightarrow y = De \cdot e^{-\frac{(t-\tau)}{De}} , \quad (5.15)$$

obtendo, portanto, a seguinte tensão, para a terceira expansão:

$$\begin{aligned} I &= \dot{R}R^2De - \frac{d}{dt} (\dot{R}R^2) De^2 + \frac{d^2}{dt^2} (\dot{R}R^2) De^3 \\ &- De^3 \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(t-\tau)}{De}} \frac{d^3}{dt^3} (\dot{R}(\tau)R^2(\tau)) d\tau . \end{aligned} \quad (5.16)$$

Observe-se que a série obtida segue um padrão, podendo ser representada na forma:

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} De^k \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} (\dot{R}(t)R^2(t)) . \quad (5.17)$$

O próximo passo é apresentar as derivadas necessárias para os primeiros termos da série. Derivando primeiramente $(\dot{R}(t)R^2(t))$ em relação ao tempo t , determina-se:

$$\frac{d}{dt} (\dot{R}R^2) = \ddot{R}R^2 + 2\dot{R}^2R, \quad (5.18)$$

para a segunda derivada:

$$\frac{d^2}{dt^2} (\dot{R}R^2) = R^{(3)}R^2 + 6\ddot{R}\dot{R}R + 2\dot{R}^2. \quad (5.19)$$

Importante observar que a equação (5.19) envolve uma terceira derivada do raio com relação ao tempo, dado por $R^{(3)}$, fato este que não apresenta nenhum sentido físico. Além disso, note-se que é necessário somente uma segunda derivada no tempo para a obtenção da solução numérica do modelo, conforme visto na seção 3.3.3.

De acordo com Hinch, 1991, é possível analisar uma expansão negligenciando-se algum termo indesejável. Neste caso, portanto, considera-se para a segunda derivada, somente os termos que não incluem $R^{(3)}$, sendo esta redefinida como

$$\frac{d^2}{dt^2} (\dot{R}R^2) = 6\ddot{R}\dot{R}R + 2\dot{R}^2. \quad (5.20)$$

Realizando uma substituição das derivadas obtidas nas equações (5.18) e (5.20) na equação geral descrita em (5.16), obtém-se

$$I = \dot{R}R^2De - (\ddot{R}R^2 + 2\dot{R}^2R)De^2 + (6\ddot{R}\dot{R}R + 2\dot{R}^2)De^3. \quad (5.21)$$

Tendo em vista o alto grau de não-linearidade do problema e a complexidade que a expansão apresenta para termos de alta ordem, a expansão encontra-se restrita aos três primeiros termos da série. Objetivando obter uma equação governante adimensional para a solução assintótica proposta, substitui-se a integral de convolução expandida, dada pela equação (5.21), na equação governante do modelo viscoelástico linear (3.50), novamente suprimindo asteriscos, obtendo

$$\begin{aligned}
R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 &= \frac{2}{\text{We}} \left(\frac{1}{R^{3n}} - \frac{1}{R} \right) - 1 - \varepsilon \text{sen}(\omega t) + \frac{1}{R^{3n}} - \frac{4\dot{R}}{\text{Re}R} \left(1 + \frac{\mu_e}{\mu} \right) \\
&+ 4 \frac{\mu_e}{\mu} \frac{De}{\text{Re}} \left[\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{2\dot{R}^2}{R^2} \right] - 4 \frac{\mu_e}{\mu} \frac{De^2}{\text{Re}} \left[\frac{6\ddot{R}\dot{R}}{R^2} + \frac{2\dot{R}^2}{R^3} \right] + O(De^3). \quad (5.22)
\end{aligned}$$

Cumpramos observar que a série é truncada, portanto, para $O(De^3)$. Aditivos alinhados radialmente com o escoamento ($S(R) = 1$) são considerados, uma vez que o foco do desenvolvimento da solução assintótica reside no fato de examinar seu comportamento com a solução numérica.

Nota-se que a expansão em série possui uma propriedade importante, que consiste na obtenção da solução geral a partir do primeiro termo da série, o termo principal. Ou seja, caso não exista influência do relaxamento ($De \rightarrow 0$), a série dada pela equação governante (5.24) retorna a resposta esperada, assumindo a forma da equação governante para o modelo anisotrópico.

Um acréscimo no valor do parâmetro De requer a presença destas correções, ou seja, um número maior de termos para que a expansão apresente valores próximos à solução do problema.

5.1.1 Análise da Solução Assintótica

Para a expansão por meio de integrações sucessivas proposta neste trabalho, determinada pela equação governante (5.24), faz-se necessário realizar uma análise desta série, afim de estabelecer se a série proposta para a função elástica pode ser considerada uma boa aproximação da solução do problema. A análise se baseia na confirmação da expansão proposta apresentar uma combinação de termos da expansão que satisfaça um erro aceitável se comparada à solução do problema, para um dado valor fixo do parâmetro analisado (número de Deborah).

É importante observar que, para realizar uma análise mais criteriosa da série, faz-se necessário que a equação (5.24) adimensional constitua termos na ordem da unidade. Portanto, assume-se pequenos valores para os parâmetros de entrada da simulação, em que $Re = 10$, $We = 1$, $\phi = 0,1\%$, $\ell/a = 100$, $\varepsilon = 1$ e $\omega = 1$.

Relembrando que a expansão é truncada para $O(De^3)$, em que o termo associado a $R^{(3)}$ é negligenciado. A análise da solução assintótica consiste em examinar a resposta do movimento da bolha para as ordens $O(De)$ e $O(De^2)$ e compará-las à solução numérica do problema.

A Figura 5.9 (a) ilustra a evolução temporal do raio da bolha para a solução numérica (linha cheia), $O(De)$ (pontilhada) e $O(De^2)$ (tracejada), enquanto 5.9 (b) representa o diagrama de fase. O número de Deborah utilizado foi $De = 0.05$ e nenhuma diferença entre as curvas pode ser notada, um resultado esperado, uma vez que Deborah assume um valor próximo de zero, e as curvas convergem para a mesma solução.

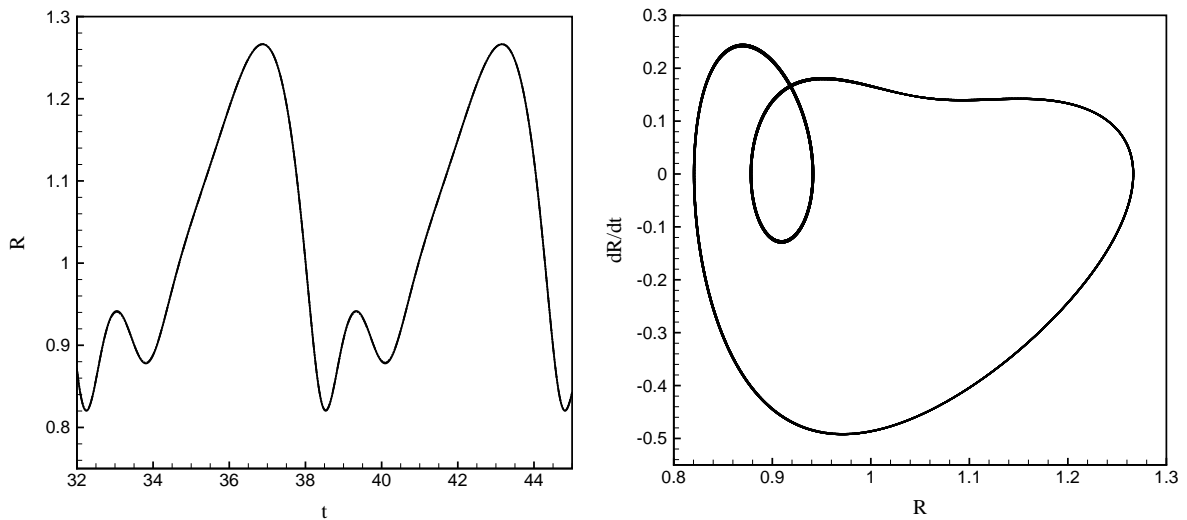


Figura 5.9: (a) Raio da bolha em função do tempo; (b) Diagrama de fase \dot{R} versus R , em que $De = 0.05$. Linha cheia denota solução numérica; linha pontilhada $O(De)$ e tracejada $O(De^2)$.

A Figura 5.10 ilustra o mesmo caso, agora utilizando $De = 0.2$. A partir de uma presença maior do efeito de elasticidade no fluido nota-se que a solução numérica já diverge da aproximação assintótica, afirmativa que se torna mais perceptível quando se visualiza o diagrama de fases.

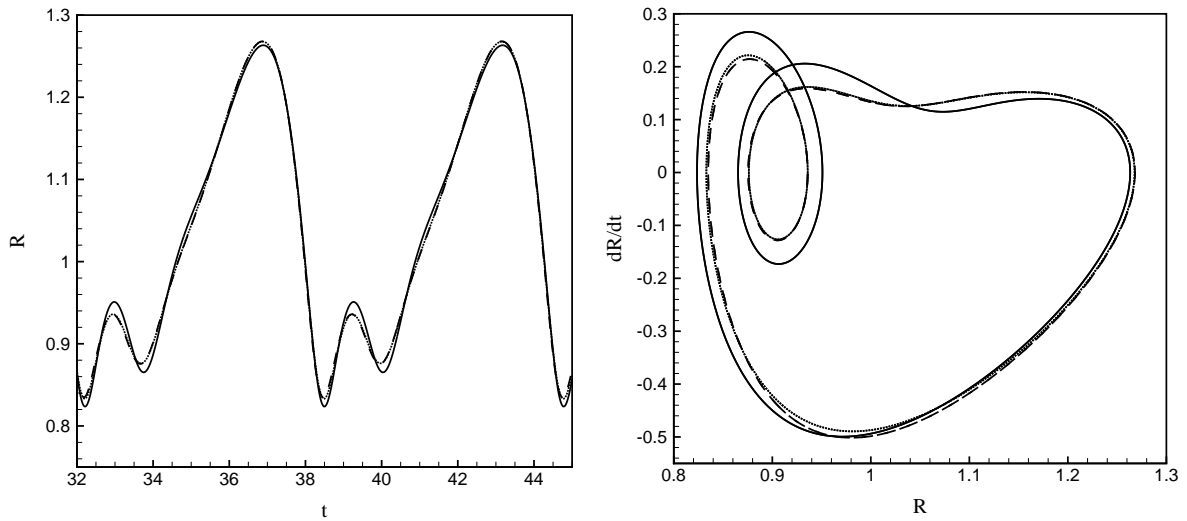


Figura 5.10: (a) Raio da bolha em função do tempo; (b) Diagrama de fase \dot{R} versus R , em que $De = 0.2$. Linha cheia denota solução numérica; linha pontilhada $O(De)$ e tracejada $O(De^2)$.

No entanto, cumpre observar que não existe uma diferença significativa na resposta entre as séries $O(De)$ e $O(De^2)$. Uma análise baseada no raio mínimo e máximo atingidos pela bolha auxilia na comparação entre as aproximações assintóticas. Na Figura 5.11 (a) apresenta as curvas para o raio máximo em função do número de Deborah, enquanto Fig. 5.11 (b) ilustra o raio mínimo da bolha em função do número de Deborah.

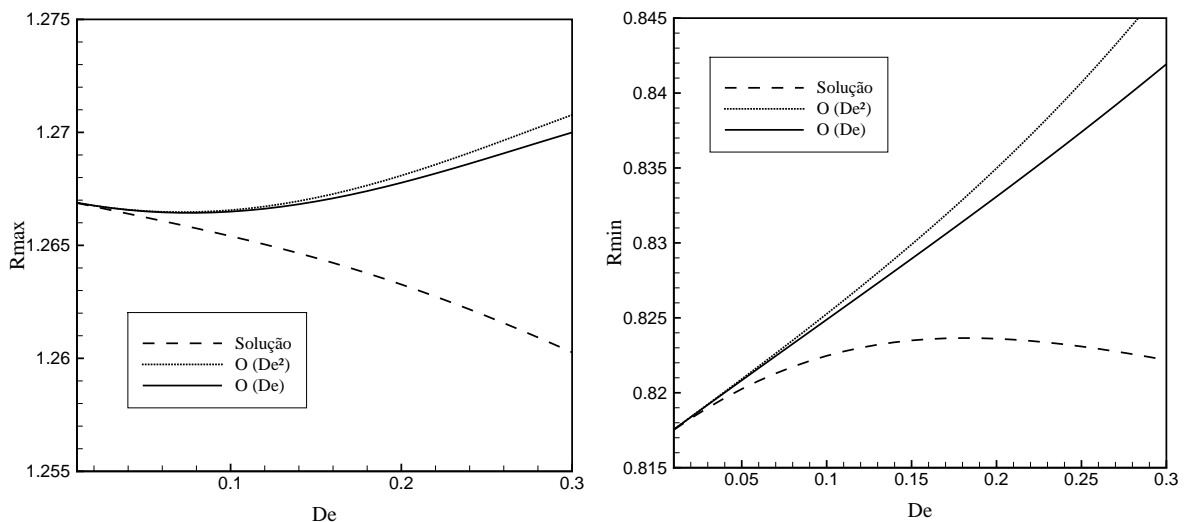


Figura 5.11: (a) Raio máximo atingido pela bolha em função do número de Deborah; (b) Raio mínimo da bolha em função do número de Deborah. Linha cheia denota $O(De)$; linha pontilhada solução numérica e tracejada $O(De^2)$.

Nota-se que as aproximações assintóticas divergem para maiores De , sendo que a expansão $O(De)$ apresenta valores mais próximos da solução numérica que a expansão $O(De^2)$. Portanto, a expansão é truncada em $O(De^2)$.

Para uma análise mais refinada da solução assintótica $O(De)$, pode-se representar a aproximação assintótica em termos da integral de convolução, I , determinada pela equação (5.21), agora representada por

$$I = \dot{R}R^2 De - (\ddot{R}R^2 + 2\dot{R}^2 R) De^2 . \quad (5.23)$$

A Figura 5.12 ilustra o comportamento da integral I em função do tempo, para De distintos. A linha cheia corresponde à solução numérica de I e a linha tracejada denota a curva para $O(De)$. Quando $De = 0.05$, como mostrado na Fig. 5.12 (a), a curva $O(De)$ e a curva para a solução numérica apresentam resultados semelhantes. O mesmo não pode ser dito quando De assume valores maiores, como mostra a Fig. 5.12 (b), em que $De = 0.1$.

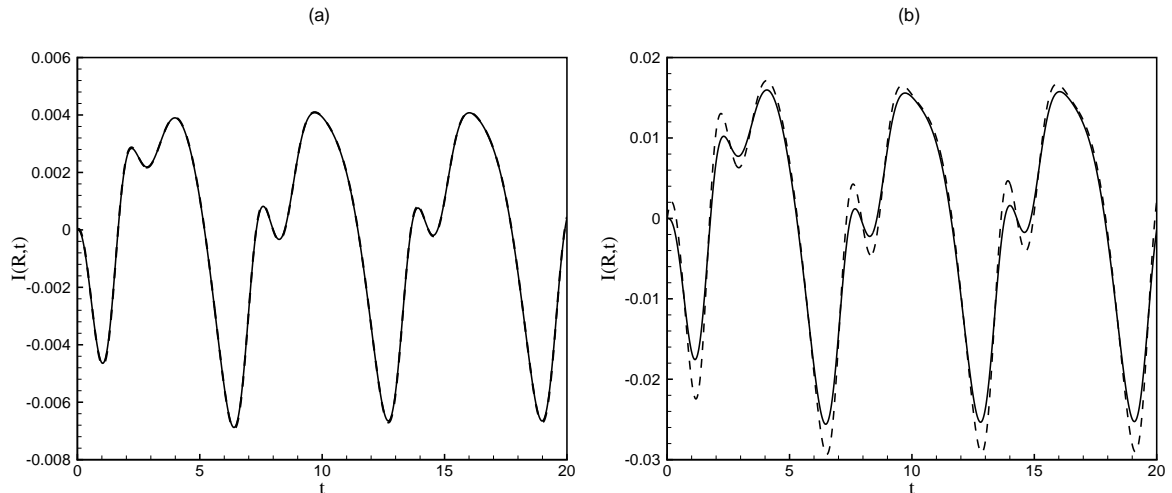


Figura 5.12: Comportamento da integral de convolução em função do tempo, para $\phi = 0.1\%$, razão de aspecto $\ell/a = 100$, $Re = 10$, $We = 1$ e $\varepsilon = 0.5$. (a) $De = 0.05$ e (b) $De = 0.2$. Linha cheia denota a solução numérica; linha tracejada corresponde à solução assintótica, $O(De)$.

Um forte indicativo para a discrepância entre a solução numérica e a aproximação de primeira ordem pode ser obtido a partir do erro Δ apresentado entre as mesmas.

O erro é calculado a partir da integração no espaço da função I . O erro associado entre a solução assintótica e $O(De)$ é menor que 2% para o caso mostrado na Fig. 5.12 (a). Para $De = 0.2$, conforme a Fig. 5.12 (b), este erro entre as soluções aumenta para $\Delta = 30\%$.

A Figura 5.13 mostra o erro entre $O(De)$ e I em função do número de Deborah. Os resultados indicam que, para $De \rightarrow 0$, a solução assintótica converge para o mesmo comportamento que I . No entanto, observa-se que para $De = 0.2$, a expansão $O(De)$ apresenta divergência clara do comportamento de I , com um erro da ordem de 30%. Assim, a solução assintótica apresenta valores coerentes quando $De < 0.1$, i.e. $\Delta < 5\%$.

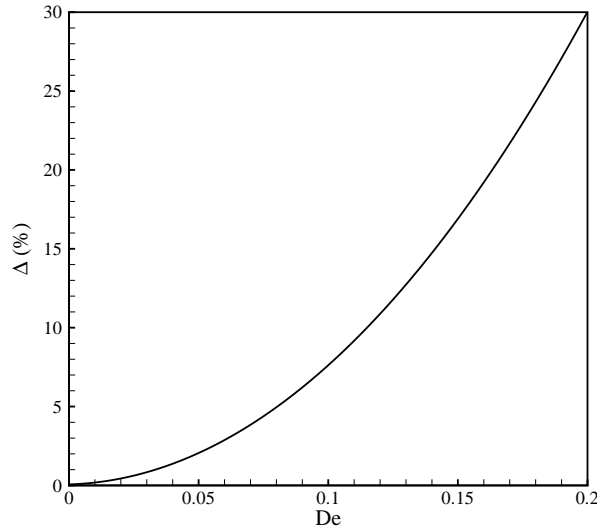


Figura 5.13: Erro $\Delta(\%)$ entre a solução assintótica e a integral de convolução em função do número de Deborah.

A equação governante adimensional da solução assintótica considerando o termo $O(De)$ assume, portanto, a forma:

$$\begin{aligned}
 R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 &= \frac{2}{We} \left(\frac{1}{R^{3n}} - \frac{1}{R} \right) - 1 - \varepsilon \text{sen}(\omega t) + \frac{1}{R^{3n}} - \frac{4\dot{R}}{\text{Re}R} \left(1 + \frac{\mu_e}{\mu} \right) \\
 &+ 4 \frac{\mu_e}{\mu} \frac{De}{\text{Re}} \left[\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{2\dot{R}^2}{R^2} \right]. \quad (5.24)
 \end{aligned}$$

6 RESULTADOS DO MODELO VISCOELÁSTICO NÃO-LINEAR

O presente capítulo apresenta a análise dos resultados do modelo viscoelástico não-linear Maxwell-Oldroyd, desenvolvido na seção 3.4. Conforme visto anteriormente para o referido modelo, faz-se necessário resolver um sistema de quatro equações ordinárias de primeira ordem, dadas por

$$\begin{cases} v = \dot{R} \\ \dot{v} = \frac{1}{R} \left(\frac{2}{\text{We}} \left(\frac{1}{R^{3n}} - \frac{1}{R} \right) - 1 - \varepsilon \text{sen}(\omega t) + \frac{1}{R^{3n}} - \frac{3}{2} v^2 - \frac{4}{\text{Re}} \frac{v}{R} + 3B \right) \\ \dot{B} = -\frac{3}{7} \frac{B}{De} + \frac{4}{7} \frac{\dot{R}}{\sigma} - \frac{4}{7} \frac{\mu_e}{\mu} \frac{S(R)}{\text{Re} De} \frac{\dot{R}}{R} \\ \dot{\sigma} = -\sigma \left(\frac{1}{De} - 4 \frac{\dot{R}}{R} \right) - 4 \frac{\mu_e}{\mu} \frac{S(R)}{\text{Re} De} \frac{\dot{R}}{R} \end{cases} \quad (6.1)$$

em que σ representa a componente radial do tensor de tensões extra analisado no raio da bolha, $\sigma_{rr}(R, t)$. Kim, 1994, explorou a dinâmica de bolhas em oscilações livres para um meio viscoelástico a partir de um método de elementos finitos. Allen & Roy, 2000b, utilizaram de métodos semelhantes, para oscilações forçadas de uma bolha em um fluido viscoelástico. Foteinopoulou & Laso, 2010, expandiram a discretização do espaço da suspensão para uma metodologia de elementos finitos visando analisar o comportamento de bolhas não-esféricas. Mais recentemente, Lind & Phillips, 2010 utilizam o método de elementos de contorno para examinar os efeitos viscoelásticos na dinâmica de bolhas em colapso.

No entanto, vale ressaltar que esses tipos de soluções representam um custo computacional muito elevado. No presente trabalho, a solução do sistema de equações proposto em (6.1) desconsidera a necessidade de discretizar o espaço e calcular as equações para cada ponto ou volume deste espaço. Desta forma, a metodologia numérica pro-

posta apresenta um menor custo computacional consiste em uma solução inédita para um modelo de viscoelasticidade não-linear. Outros autores utilizam de metodologia similar somente para um regime viscoelástico linear (e.g. Allen & Roy, 2000a).

Primeiramente, realiza-se considerações acerca do limite assintótico para alto número de Deborah, i.e. $De \sim 1$. Em seguida, a resposta do movimento da bolha é analisada em função dos efeitos elásticos e anisotrópicos provenientes dos aditivos (fibras ou macromoléculas) presentes no fluido ambiente. A dinâmica da bolha no domínio da frequência também é explorada, a partir do uso da transformada de Fourier, utilizando um sinal discreto no domínio temporal e transformando este sinal em uma representação discreta no domínio da frequência. O capítulo se encerra com uma comparação entre as soluções apresentadas para um modelo viscoelástico linear e não-linear, identificando a diferença fundamental de comportamento entre os mesmos.

6.1 O LIMITE ASSINTÓTICO: $De \sim 1$

Conforme descrito no capítulo 5, espera-se que o aumento do número de Deborah a partir de determinado valor gere uma solução de aditivos estirados, que se assemelha à condição inicial, $De = 0$, i.e., ao modelo anisotrópico inicial de viscosidade extensional, que, a partir deste ponto, é denotado como a solução de anisotropia inferior. Portanto, as duas contribuições de anisotropia se somam para promover uma estabilização ainda mais efetiva no movimento oscilatório da bolha.

No modelo viscoelástico linear, realizou-se uma primeira análise dos efeitos elásticos, para $De \sim O(10^{-1})$. Com a extensão do modelo de viscoelasticidade para uma formulação não-linear contendo uma derivada material Oldroyd, é possível examinar o comportamento da bolha na presença de efeitos elásticos mais significativos. Isto significa buscar configurações em que o tempo de relaxação dos aditivos é da ordem de um período de oscilação da bolha. Conseqüentemente, o movimento da bolha apresentará mais graus de liberdade vibracionais devido ao seu acoplamento com o efeito de relaxação dos aditivos.

Com a presente análise pretende-se encontrar o limite crítico superior para De_c que caracteriza uma situação assintótica, em que o aumento do tempo de relaxação dos aditivos (aumento de De) resulta exatamente neste regime de anisotropia superior. A linha sólida da Figura 6.1 ilustra a amplitude máxima do raio da bolha, R_{max} , de uma solução permanente em função de De (apresentado em escala logarítmica), utilizando-se os parâmetros $Re = We = 5$, $\phi = 0.3\%$ e $\varepsilon = 2$. A linha pontilhada refere-se ao valor R_{max} para o modelo puramente anisotrópico. Observa-se que, para $De \rightarrow 0$, o modelo viscoelástico não-linear recupera a resposta do modelo puramente anisotrópico, representado pela viscosidade extensional μ_e/μ .

O comportamento da curva é caracterizado por dois intervalos distintos: (i) quando $De \leq 1$, o valor de R_{max} decresce com o aumento de De , enquanto (ii) $De > 1$ resulta em um aumento de R_{max} com De , alcançando valores superiores ao valor de R_{max} apresentado pelo modelo puramente anisotrópico de viscosidade extensional. Cumpre-se observar que, na condição $De > 1$ o período de oscilação da bolha é muito menor do que qualquer escala de tempo relacionada aos aditivos. Assim, o movimento da bolha não “percebe” a presença dos aditivos, devido a grande diferença nas escalas de tempo. Portanto, para $De \gg 1$, R_{max} da bolha tenderia ao raio máximo de uma bolha imersa em um líquido Newtoniano, negligenciando a presença de aditivos no fluido ambiente.

Alguns trabalhos encontrados na literatura tratam de polímeros em regime randômico “*random coil regime*” com baixa razão de aspecto. São destacados a investigação de um Deborah crítico (Naude & Méndez, 2008, por exemplo) relacionados ao limite que define um comportamento caótico da bolha. No entanto, esses trabalhos não consideram uma viscosidade extensional representando os aditivos com razão de aspecto $\ell/a \gg 1$. Portanto, o Deborah crítico difere do caso proposto neste trabalho, uma vez que ambos limites assintóticos aqui estabelecidos retornam uma configuração de fibras estiradas no fluido ambiente (devido à anisotropia) ao invés de polímeros em regime randômico, cuja contribuição não é significativa na dinâmica da bolha.

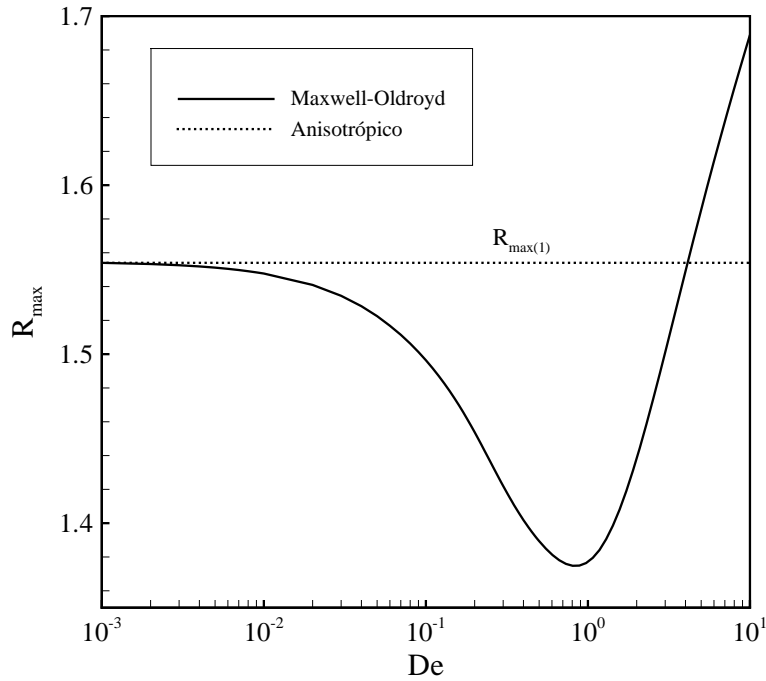


Figura 6.1: Amplitude máxima do raio da bolha R_{max} em função do número de Deborah, De , para $Re = We = 5$, $\phi = 0.3\%$ e $\varepsilon = 2$.

Espera-se que o limite De_c apresente um raio máximo menor que $R_{max(1)}$ do modelo anisotrópico. Em virtude dessas considerações, de acordo com o resultado do modelo viscoelástico não-linear (Fig. 6.1), conclui-se que o intervalo mais representativo para examinar o efeito de elasticidade dos aditivos sobre o movimento da bolha é $0 < De \leq 1$. Absi *et al.*, 2006, também descreve o limite assintótico superior anisotrópico dos efeitos elásticos para $De \sim 1$. Os autores representam a anisotropia por meio de uma viscosidade extensional que, no presente contexto, contribui para a diminuição da amplitude do movimento oscilatório da bolha, apresentando $R_{max(1)} > R_{max(2)}$, conforme pode ser observado na Figura 6.2, que consiste na ampliação da Fig. 6.1, agora no intervalo $0 < De \leq 1$.

O modelo viscoelástico não-linear utilizado não apresenta R_{max} constante para $De > De_c$ por não considerar o tamanho finito dos aditivos. Em trabalhos futuros será examinado o uso de um modelo FENE-Dumbbell, que considera a finitude dos aditivos. Absi *et al.*, 2006 demonstram um limite assintótico superior constante para altos números de Deborah a partir deste modelo.

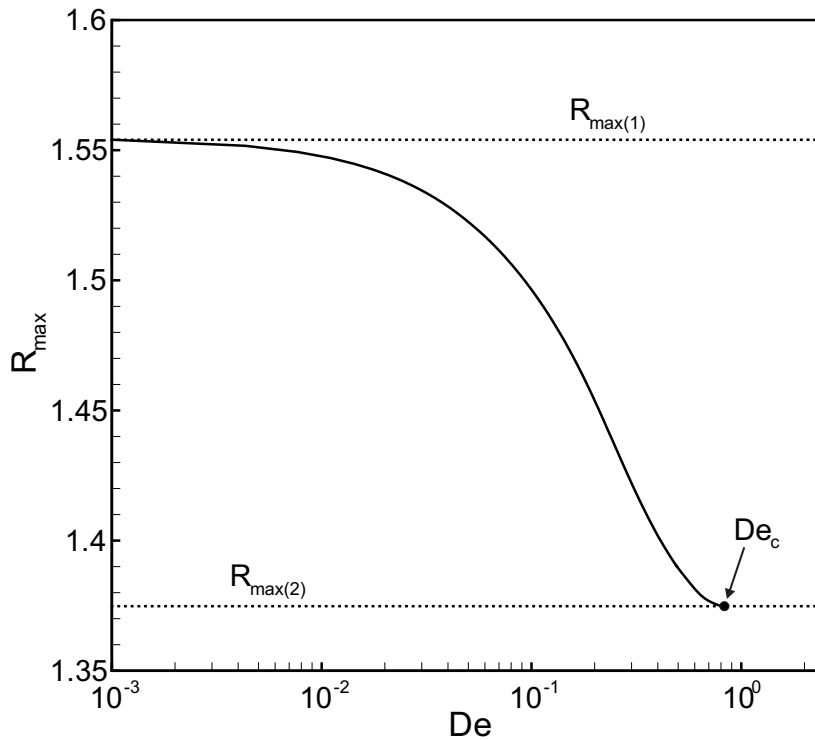


Figura 6.2: R_{max} vs De no intervalo explorado para o modelo não-linear Maxwell-Oldroyd. Parâmetros: $Re = We = 5$, $\phi = 0.3\%$ e $\varepsilon = 2$.

Nota-se que o modelo viscoelástico não-linear Maxwell-Oldroyd remete a resultados que possuem uma explicação física coerente, conforme descrito a seguir. Portanto, os modelos constitutivos aqui explorados atendem ao propósito desse trabalho.

6.2 EFEITOS ELÁSTICOS E ANISOTRÓPICOS

A Figura 6.3 mostra o movimento oscilatório permanente de uma bolha de acordo com os parâmetros físicos utilizados na Fig. 6.2, para o modelo puramente anisotrópico (traço-ponto) e para $De_c = 0.8$. Cumpre-se assinalar, preliminarmente, que a dinâmica da bolha apresenta-se distinta, apesar de ambas curvas apresentarem limites assintóticos superior (sólida) e inferior (traço-ponto) de anisotropia.

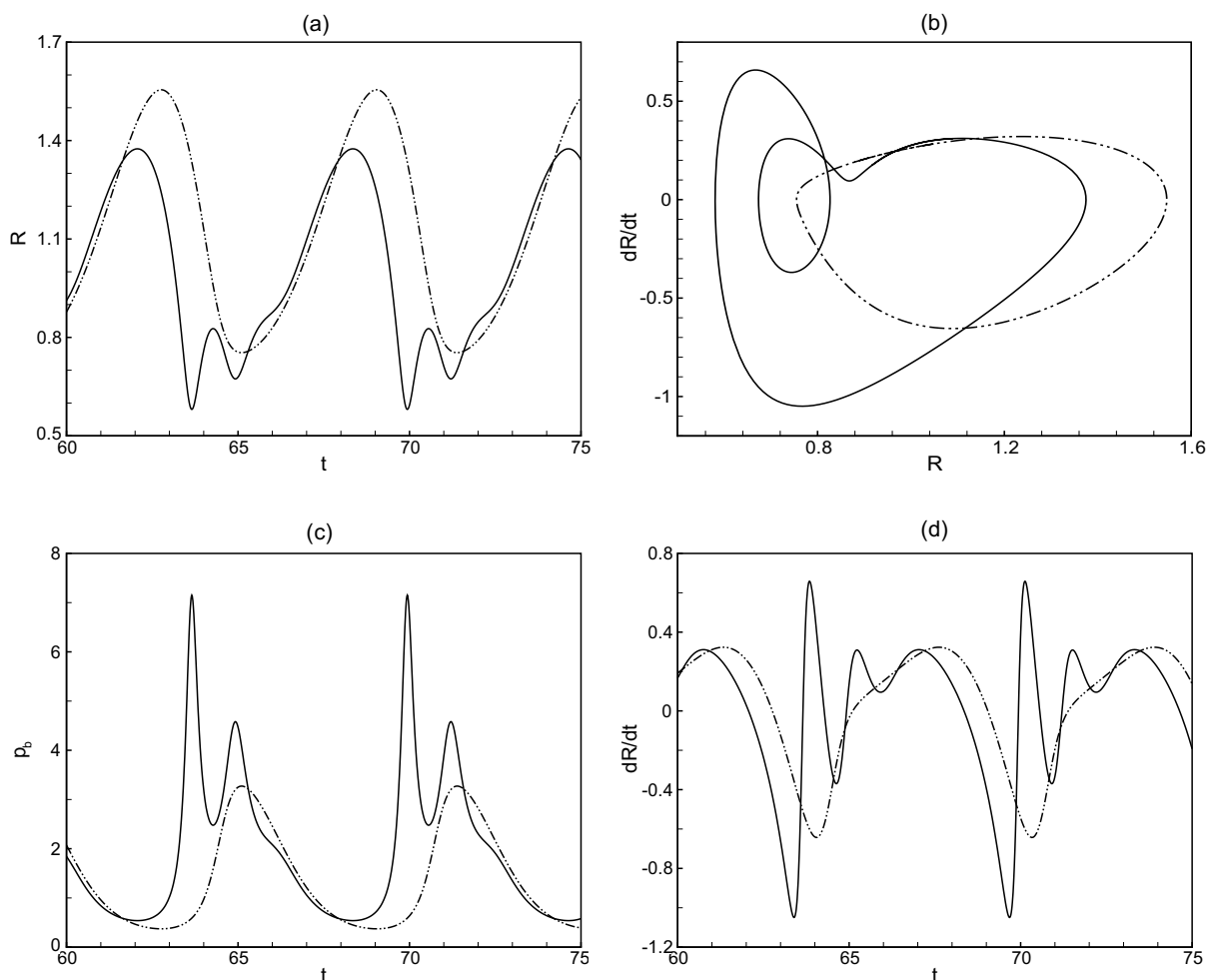


Figura 6.3: Evolução temporal da dinâmica da bolha para o modelo puramente anisotrópico (traço-ponto) e Maxwell-Oldroyd com $De_c = 0.8$ (sólida). Parâmetros da Fig. 6.2. (a) R vs t ; (b) \dot{R} vs R ; (c) p_b vs t e (d) \dot{R} vs t .

Observa-se pela evolução temporal da bolha e da velocidade da mesma (Fig. 6.3 (a) e (d)) que, apesar do raio máximo atingido no limite assintótico $De \sim 1$ apresentar menor valor que o modelo anisotrópico, a resposta da bolha é caracterizada por uma não-linearidade mais acentuada para um fluido ambiente viscoelástico não-linear (limite assintótico De_c).

O efeito elástico para um regime não-linear $De \sim 1$ atenua a amplitude do movimento oscilatório da bolha, no entanto produz oscilações com configurações mais instáveis. Na condição $De \sim 1$, nota-se uma resposta de oscilação com dois períodos característicos em contraste com um período encontrado na resposta de um modelo puramente anisotrópico, $De = 0$.

A instabilidade da bolha também é observada avaliando-se o diagrama de fase do raio da bolha, dado por \dot{R} em função de R (Fig. 6.3 (b)). Observa-se que a solução puramente anisotrópica apresenta um comportamento periódico que remete a um harmônico simples de oscilação, enquanto diferentes modos vibracionais são obtidos para $De \sim 1$, caracterizando uma não-linearidade devido a presença dos efeitos elásticos.

Tais afirmativas podem ser confirmadas a partir da análise da tensão extra radial avaliada no raio da bolha, $\sigma_{rr}(R)$. A Figura 6.4 (a) mostra a evolução temporal da tensão $\sigma_{rr}(R)$. É importante notar que a tensão $\sigma_{rr}(R)$ apresenta comportamento não-linear quando $De \sim 1$, enquanto o modelo puramente anisotrópico apresenta uma resposta da tensão com apenas um modo de vibração, também observado por meio de um diagrama de fases da tensão, $\sigma'_{rr}(R)$ em função de $\sigma_{rr}(R)$ na Fig. 6.4 (b).

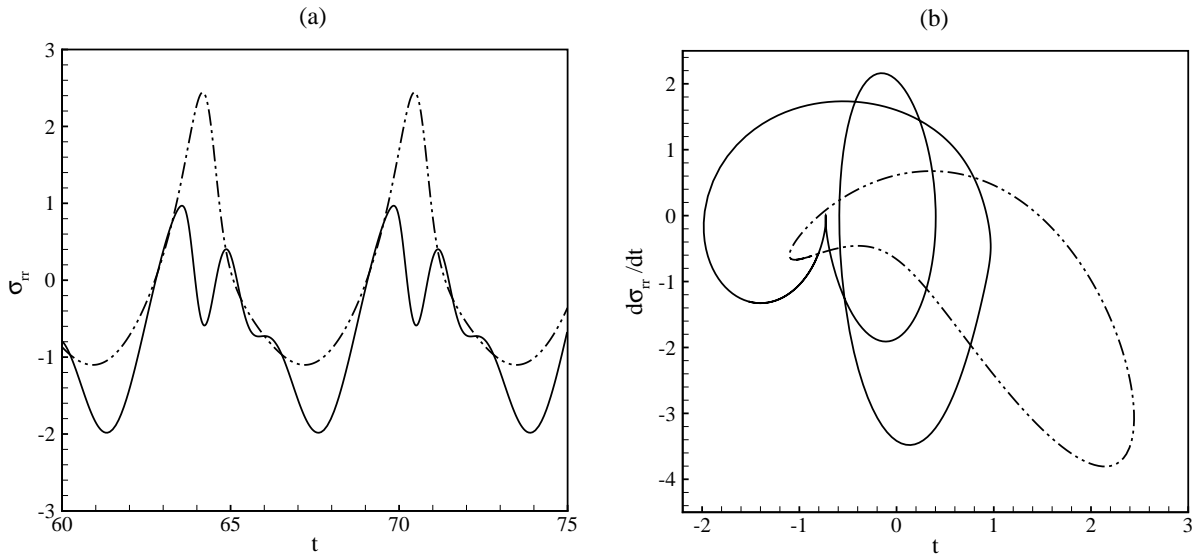


Figura 6.4: (a) Evolução temporal da tensão radial extra avaliada na superfície da bolha, $\sigma_{rr}(R)$; (b) Diagrama de fase de $\sigma'_{rr}(R)$ em função de $\sigma_{rr}(R)$ Parâmetros físicos semelhantes aos utilizados na Fig. 6.3.

Registra-se que a pressão interna da bolha, apresentada pela Fig. 6.3(c), é menor no modelo puramente anisotrópico, devido a um raio mínimo atingido pela bolha maior que o raio mínimo atingido com o modelo viscoelástico Maxwell-Oldroyd. Nota-se que o raio mínimo atingido pela bolha reflete diretamente na pressão p_b , uma vez que um raio mínimo menor caracteriza um movimento de compressão da bolha mais significativo, resultando em um maior valor da pressão interna.

Desta forma, a análise do raio mínimo é relevante na descrição do movimento de uma bolha e indica a tendência ao colapso. Em virtude dessas considerações, a Figura 6.5 apresenta o raio mínimo atingido pela bolha R_m em função do número de Deborah. Não se pode olvidar que R_m difere do raio mínimo R_{min} considerado como solução assintótica para descrever o colapso. Somente quando ocorre esse colapso, o raio mínimo da bolha corresponde ao raio mínimo proposto, $R_m = R_{min}$.

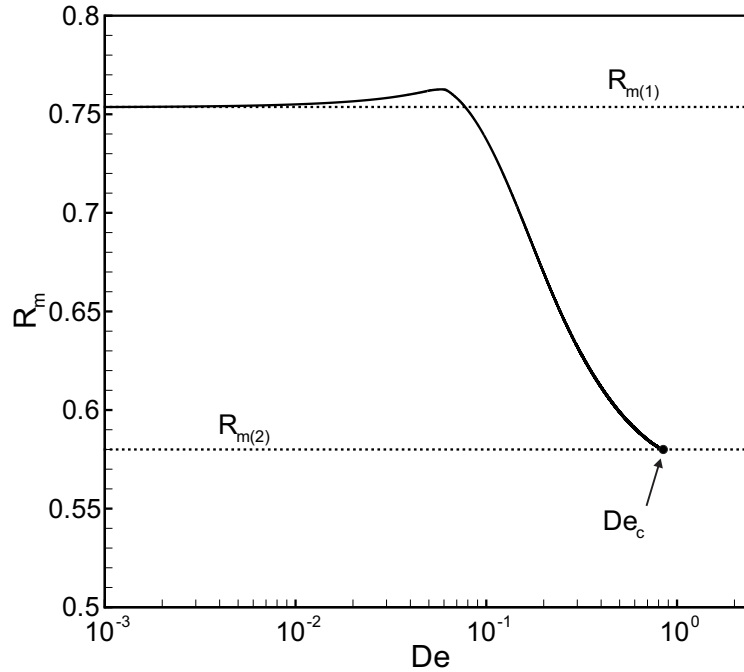


Figura 6.5: Raio mínimo atingido pela bolha R_m em função de De , para $Re = We = 5$, $\phi = 0.3\%$ e $\varepsilon = 2$.

Como pode-se verificar, a partir de $De \sim 0.1$, R_m decresce com o aumento de De , apresentando $R_{m(2)} \simeq 0.75R_{m(1)}$. Este decaimento ocorre em $De \sim O(10^{-1})$ devido a interação existente entre os efeitos elásticos e a oscilação da bolha, uma vez que o tempo de relaxação de aditivos apresenta-se na mesma escala de tempo da oscilação da bolha. Portanto, apesar do efeito elástico na condição $De \sim 1$ atenuar a expansão da bolha, i.e. $R_{max(2)} \simeq 0.85R_{max(1)}$, a bolha apresenta uma contração maior, ou seja, o raio mínimo atingido pela bolha diminui $R_{m(2)} < R_{m(1)}$. Consequentemente, caso seja mantido os parâmetros e aumentado os efeitos de inércia e, ou a amplitude de excitação da bolha, o colapso tende a ocorrer primeiramente para a condição viscoelástica não-linear $De \sim 1$, (limite De_c), quando comparado ao modelo puramente anisotrópico, $De = 0$.

Cumpramos examinar neste passo que conclusões acerca da vulnerabilidade do colapso de uma bolha em um modelo viscoelástico não-linear podem ser precipitadas. Por exemplo, caso a viscosidade extensional de aditivos (caracterizada pelos parâmetros ϕ e ℓ/a) seja alterada, outra dinâmica de bolha pode ser observada. A Figura 6.6 mostra a evolução temporal de uma bolha com fração volumétrica $\phi = 0.08\%$ para o modelo anisotrópico (traço-ponto) e viscoelástico não-linear Maxwell-Oldroyd, com $De_c = 1.1$ (sólida).

É sobretudo importante assinalar que, para o modelo viscoelástico não-linear, $R_m \simeq 0.25$, enquanto a solução puramente anisotrópica fornece $R_m \simeq 0.22$. Portanto, o raio mínimo atingido para o caso viscoelástico $De \sim 1$ é ligeiramente maior que R_m de um modelo puramente anisotrópico, situação esta que difere da apresentada na Fig. 6.5.

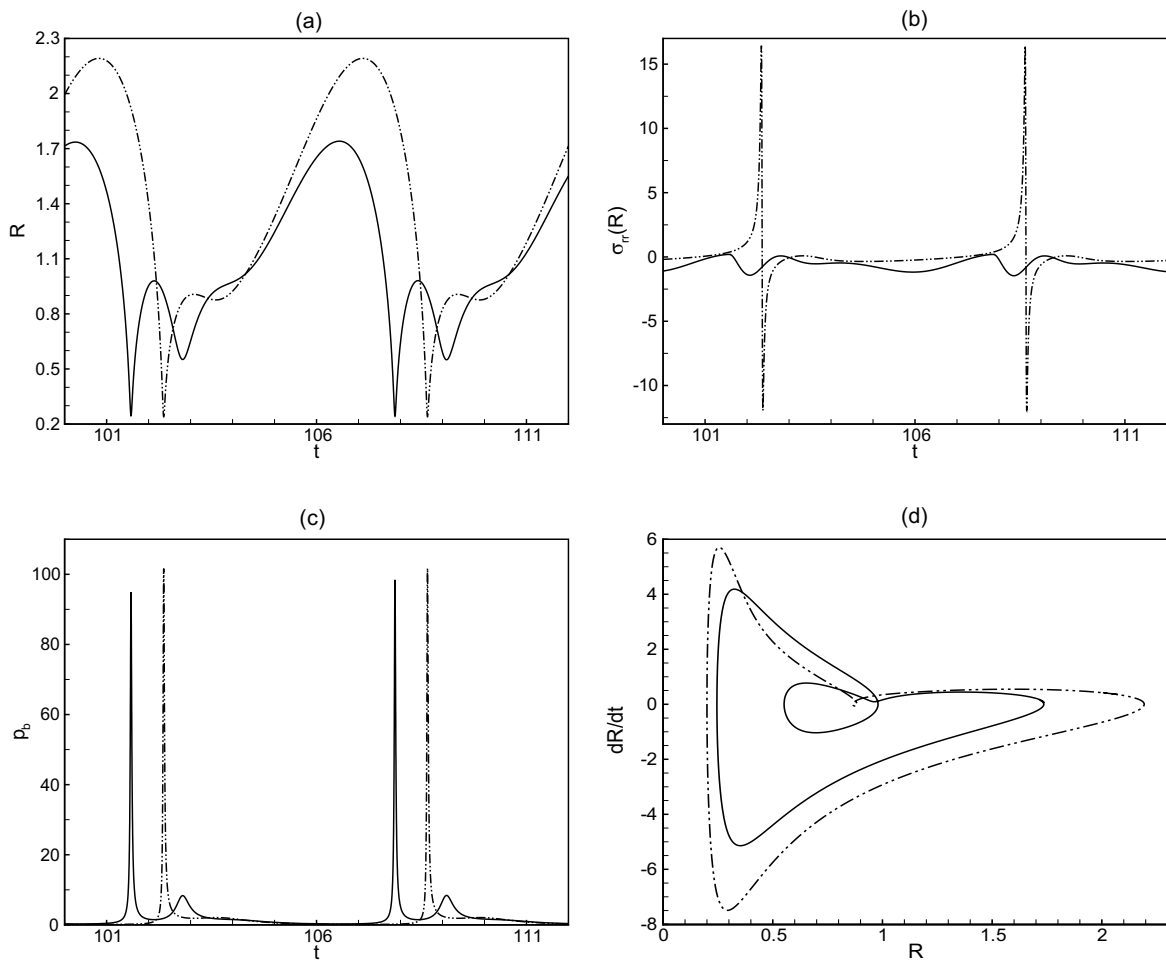


Figura 6.6: Dinâmica da bolha com $\phi = 0.08\%$ para o modelo anisotrópico (traço-ponto) e Maxwell-Oldroyd com $De_c = 1.1$ (sólida), parâmetros da Fig. 6.7. (a) R vs t ; (b) $\sigma_{rr}(R)$ vs t ; (c) p_b vs t e (d) \dot{R} vs R .

Esse aumento $R_{m(2)} > R_{m(1)}$ é refletido nos picos de amplitude de pressão interna da bolha apresentados, conforme ilustrado na Fig. 6.6 (c), em que $p_b \simeq 95$ ($De \sim 1$), e $p_b \simeq 105$ ($De = 0$). A amplitude do movimento para o modelo viscoelástico apresenta-se $\sim 25\%$ menor que a amplitude do modelo puramente anisotrópico, $R_{max(2)} < R_{max(1)}$. Novamente, a tensão radial $\sigma_{rr}(R)$, dado pela Fig. 6.6 (b), apresenta maior grau de não-linearidade para $De \sim 1$, no entanto maiores picos são observados para $De = 0$, devido à condição $R_{m(2)} > R_{m(1)}$.

Ressalte-se que, a partir de uma comparação direta entre os diagramas de fase das Figs. 6.3 (d) e 6.6 (d), esta última apresenta em ambas as curvas ($De = 0$ e $De = De_c$) um comportamento com mais modos vibracionais, uma vez que o efeito anisotrópico se torna menos significativo com uma fração volumétrica reduzida de aditivos. Portanto, o desenvolvimento dos efeitos elásticos resultou em um limite assintótico De_c que aumentou a não-linearidade do movimento oscilatório da bolha e também ocasionou uma diminuição do raio máximo, $R_{max(2)} < R_{max(1)}$ e aumento do raio mínimo $R_{m(2)} > R_{m(1)}$, atenuando seu movimento.

A Figura 6.7 apresenta o raio máximo máximo (a) e mínimo (b) em função do número de Deborah para uma bolha imersa em uma suspensão de aditivos, mantendo-se os mesmos parâmetros físicos da Fig. 6.5, com uma fração volumétrica de aditivos diminuída para $\phi = 0.08\%$. Conforme visto na Figura 6.6, a combinação desses parâmetros apresenta um limite De_c caracterizado pela atenuação do movimento de contração e expansão da bolha com relação ao modelo puramente anisotrópico, ocasionando a atenuação do movimento da bolha e uma conseqüente diminuição do tempo de colapso.

É importante registrar, entretanto, que o raio mínimo atingido pela bolha apresenta uma variação na faixa $10^{-2} < De < 1$, cujo valor mínimo para R_m é alcançado para $De \sim 0.1$. Nessa faixa de observação, a elasticidade dos aditivos encontra-se acoplada com o movimento da bolha, que pode ser interpretado como uma interação entre a oscilação da bolha e a relaxação dos aditivos, favorecendo a condição de raio mínimo R_m menor que $R_{m(1)}$ e $R_{m(2)}$ e pode ocasionar a ocorrência de colapsos violentos, de acordo com os parâmetros físicos envolvidos (Allen & Roy, 2000b).

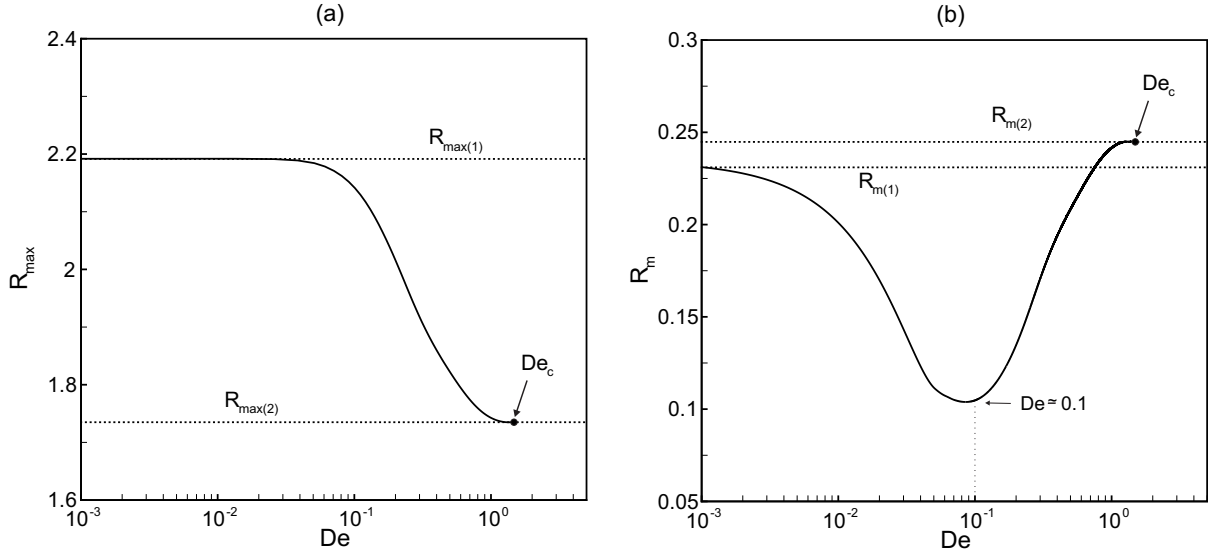


Figura 6.7: Raio máximo (a) e mínimo (b) atingido pela bolha em função de De , para $Re = We = 5$, $\phi = 0.08\%$ e $\varepsilon = 2$.

Cumprе ressaltar que, devido a diminuição dos efeitos anisotrópicos (i.e. da fração volumétrica de aditivos), a interação bolha-elasticidade na Fig. 6.7 é mais acentuada que a interação obtida na Fig. 6.5, inclusive observada também para o intervalo $10^{-2} < De < 10^{-1}$.

A Figura 6.8 apresenta o diagrama de colapso para De em função da amplitude de excitação ε . A região que se encontra abaixo da curva denota a combinação de valores entre De e ε que correspondem a uma condição de não-colapso, enquanto a região acima desta curva representa uma condição de colapso. Observa-se que o colapso do modelo puramente anisotrópico ($De = 0$) ocorre para uma amplitude maior que $\varepsilon_1 \simeq 3$. Nota-se que, para $\varepsilon \simeq 2.7$, o colapso ocorre somente quando a relaxação de aditivos assume um valor próximo a $De \simeq 0.1$, que corresponde ao ponto mínimo do diagrama.

Esse resultado fortalece, novamente, o fato que um efeito elástico $De \sim O(10^{-1})$ apresenta uma interação bolha-elasticidade mais acentuada em que há a diminuição do tempo de colapso. É importante notar que, para $De \geq 0.5$, a amplitude de excitação necessária para obter uma situação de colapso é maior que a amplitude limite ε_1 para $De = 0$. A amplitude máxima de excitação que fornece uma condição de não-colapso é apresentada para $De \sim 1$ e é da ordem $\varepsilon_2 \simeq 3.4$, que corresponde a uma amplitude $\sim 15\%$ maior que ε_1 .

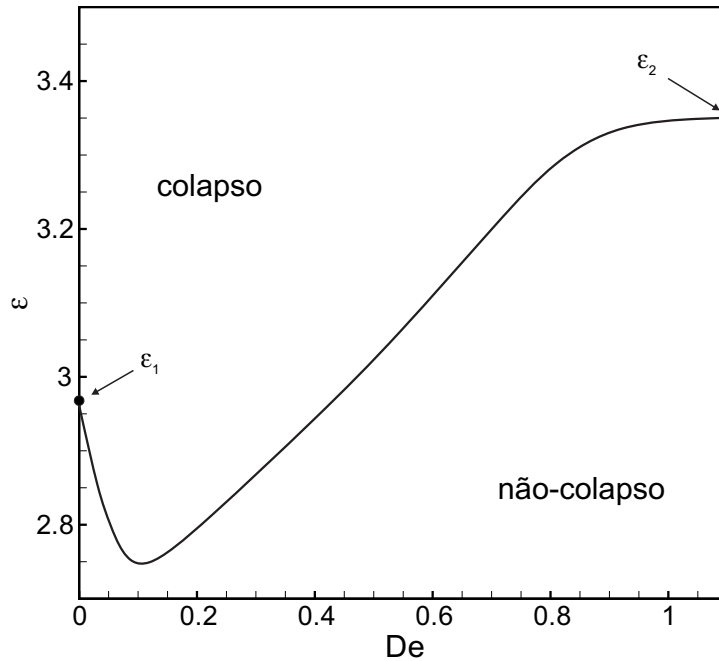


Figura 6.8: Diagrama de colapso para De em função de ε , para $Re = We = 5$ e $\phi = 0.08\%$.

O grau de não-linearidade do movimento da bolha na presença de um modelo viscoelástico não-linear também ocasiona uma solução transiente significativa do movimento oscilatório da bolha (e.g. Naude & Méndez, 2008 e Jiménez-Fernández & Crespo, 2005). A Figura 6.9 ilustra a evolução temporal da bolha para diferentes De , a partir dos parâmetros físicos da Fig. 6.7. Considerando o tempo inicial $t_0 = 0$, a Fig. 6.9 (a) remete ao modelo puramente anisotrópico, $De = 0$, (b) à condição $De = 0.3$ e (c) ao limite De_c do modelo viscoelástico não-linear Maxwell-Oldroyd. Salienta-se que a solução permanente em (a) é observado após o primeiro ciclo de oscilação, $t \simeq 15$. Em (b), o regime transiente se estende até um tempo $t \simeq 40$, enquanto em (c), o regime permanente é obtido somente quando $t \simeq 80$ (em torno de 12 ciclos de oscilação da bolha). Este resultado indica a influência do movimento transiente de relaxação dos aditivos (efeito elástico) sobre o movimento da bolha.

Pode-se também realizar a análise do movimento da bolha utilizando parâmetros físicos moderados, em que um melhor efeito elástico pode ser observado, favorecendo o modelo não-linear de viscoelasticidade proposto. A Figura 6.10 mostra o diagrama de colapso De em função de ε para uma menor força de inércia, em que $Re = We = 2$

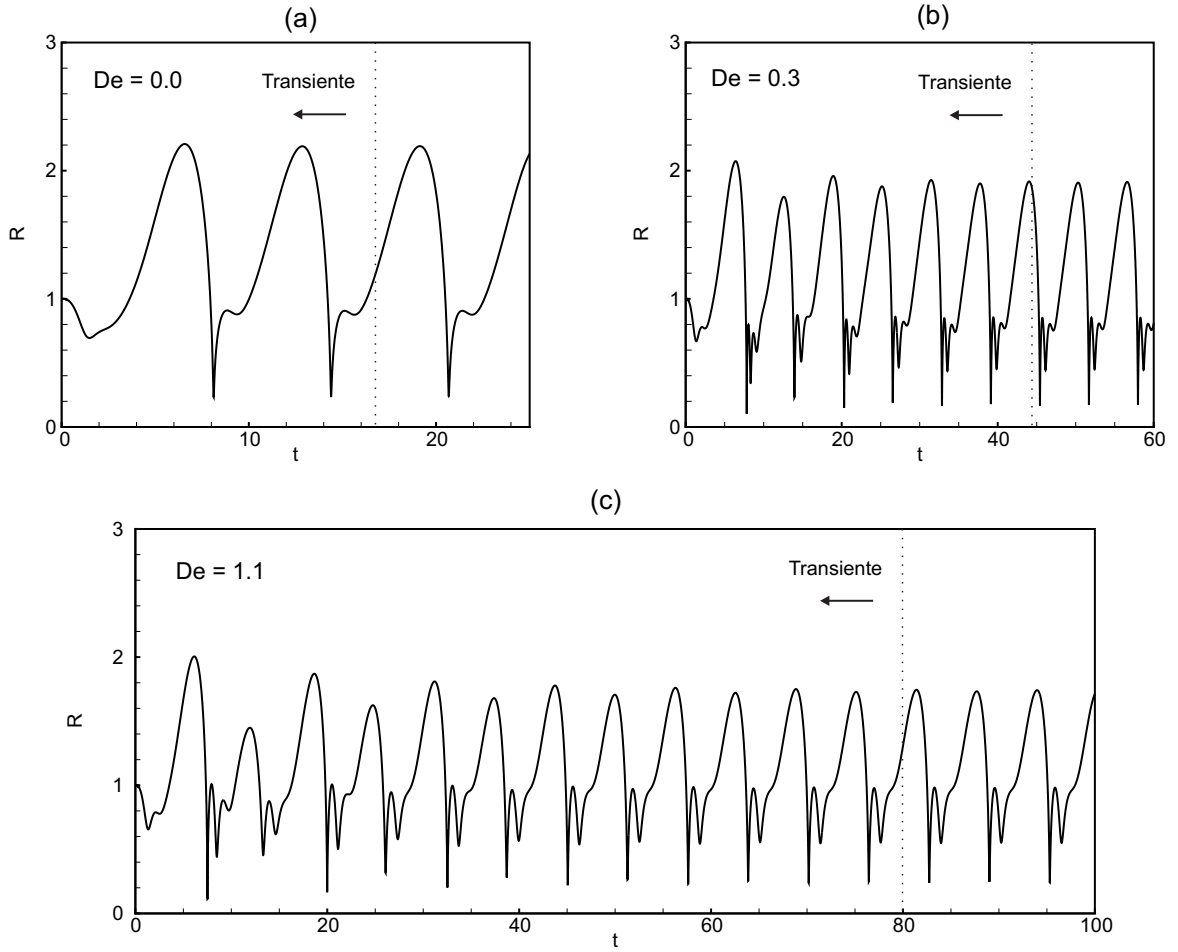


Figura 6.9: Evolução temporal do regime transiente do raio da bolha para (a) modelo puramente anisotrópico, $De = 0$; (b) $De = 0.3$; (c) $De = 1.1$ (limite De_c). Parâmetros físicos $Re = We = 5$, $\phi = 0.08\%$ e $\varepsilon = 2$, partindo de $t_0 = 0$.

e $\phi = 0.05\%$. Observa-se que $\varepsilon_1 \simeq 5$ (condição $De = 0$), enquanto $\varepsilon_2 \simeq 7.5$ (condição $De = 0$). Desta forma, a amplitude necessária para a condição de colapso em $De \sim 1$ é 50% maior que a amplitude que fornece uma condição de colapso para o modelo puramente anisotrópico, $\varepsilon_2 = 1.5\varepsilon_1$. Observa-se, portanto, uma maior contribuição da anisotropia adicional para a condição de saturação do efeito elástico dos aditivos, $De \sim 1$.

A Figura 6.11 apresenta o raio máximo (a) e mínimo (b) em função de De , para $Re = We = 1$, $\varepsilon = 12$ e diferentes frações volumétricas de aditivos. O raio máximo sempre decresce com o aumento do efeito elástico. Nota-se que essa redução no raio da bolha ocorre de maneira mais significativa quando a fração volumétrica de aditivos é menor.

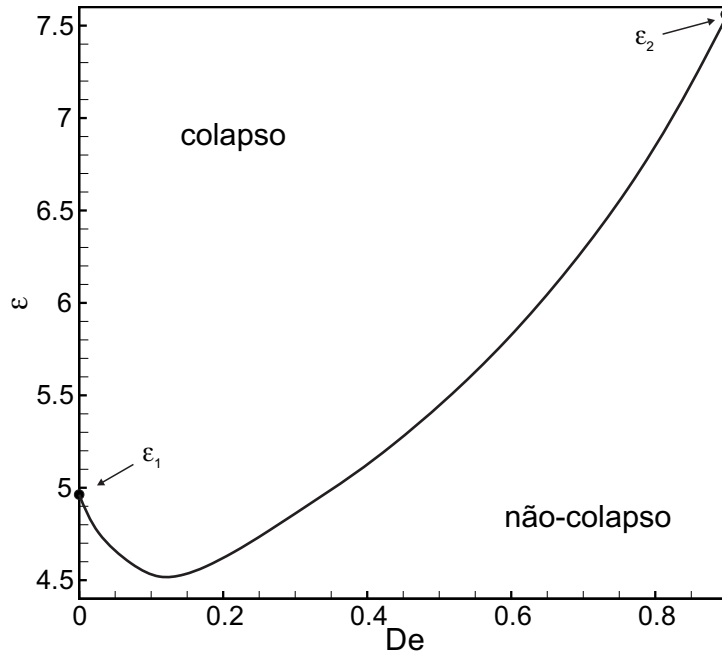


Figura 6.10: Diagrama de colapso para De em função de ε , para $Re = We = 2$ e $\phi = 0.05\%$.

Em virtude dessas considerações, observa-se que a interação entre os efeitos elásticos e o comportamento da bolha são evidenciados com uma fração volumétrica menor de aditivos, i.e. com menor grau de anisotropia inicial no líquido. Reafirma-se tal observação a partir da Fig. 6.11 (b), em que uma considerável variação do raio mínimo em função de De ocorre para $\phi = 0.1\%$.

Em compensação, a bolha encontra-se mais vulnerável ao colapso, uma vez que essa interação corresponde a um raio mínimo cada vez mais próximo do raio mínimo assintótico de colapso. Desta forma, aumenta-se a região que pode se encontrar suscetível ao colapso, conforme indicado na Fig. 6.11 (b).

Registra-se que, independente da fração volumétrica de aditivos, no limite De_c , as curvas para R_m apresentam valores próximos, $R_{m(2)} \simeq 0.6$. Assim, pode-se dizer que, quando parâmetros físicos moderados são considerados, o limite De_c resulta em uma atenuação significativa do colapso, comparado ao modelo anisotrópico, uma vez que $R_{max(2)} < R_{max(1)}$ e $R_{m(2)} \leq R_{m(1)}$.

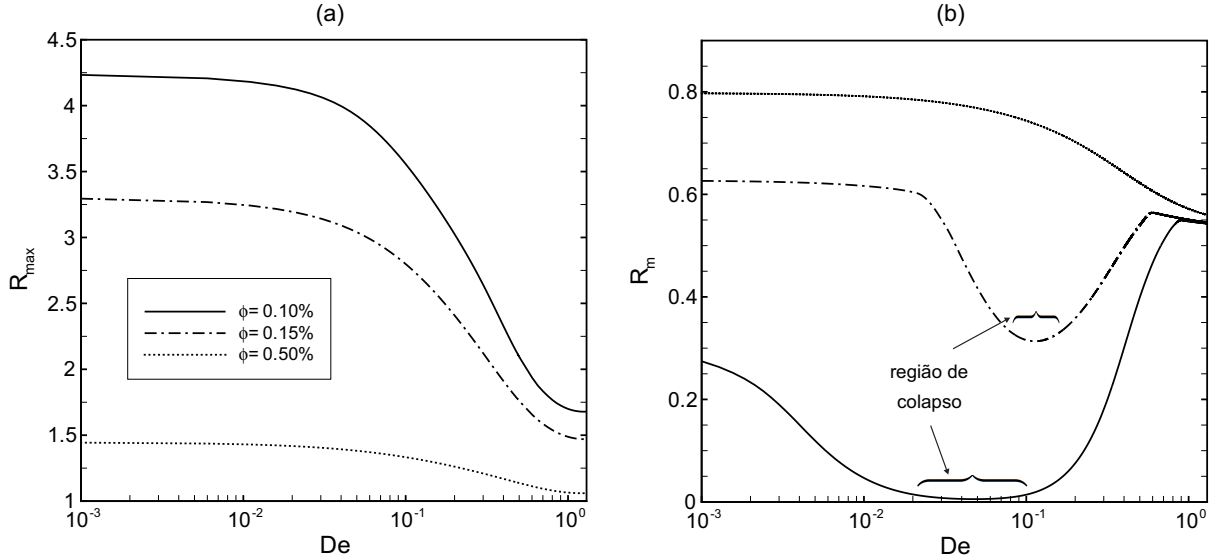


Figura 6.11: Raio máximo (a) e mínimo (b) atingido pela bolha em função de De , para $Re = We = 1$, $\varepsilon = 12$ e diferentes frações volumétricas de aditivos.

A Figura 6.12 ilustra a evolução temporal da bolha para a concentração $\phi = 0.1\%$ da Fig. 6.11. A curva sólida denota $De = 1$, curva pontilhada $De = 0.4$ e curva traço-ponto o modelo anisotrópico. Observa-se na Fig. 6.12 que o raio máximo do modelo anisotrópico é praticamente duas vezes o raio máximo apresentado em $De = 0.4$ e três vezes o raio máximo para $De_c = 1$, o que afeta diretamente na tensão extra radial da Fig. 6.12 (b) e na pressão interna da bolha, representada em 6.12 (c).

No entanto, nota-se que a pressão interna da bolha para $De = 0.4$ e modelo anisotrópico são semelhantes, uma vez que possuem raios mínimos próximos. Quando $10^{-2} < De < 10^{-1}$, a bolha encontra-se próxima do colapso para o modelo Maxwell-Oldroyd, conforme a Fig. 6.11 (b) anterior e a pressão interna é da ordem $p_b \sim 10^5$.

Apesar da atenuação da amplitude do movimento da bolha entre as curvas do modelo anisotrópico e do limite assintótico De_c apresentada na Fig. 6.12, observa-se que para a condição De_c o movimento da bolha possui um maior grau de não-linearidade ou modos vibracionais, conforme observado no diagrama de fase da Fig. 6.12 (d).

Conclui-se, portanto, que o aumento do efeito elástico no fluido ambiente na faixa $0 < De \leq 1$ sempre resulta em um grau de não-linearidade maior no comportamento oscilatório da bolha e na diminuição do raio máximo apresentado.

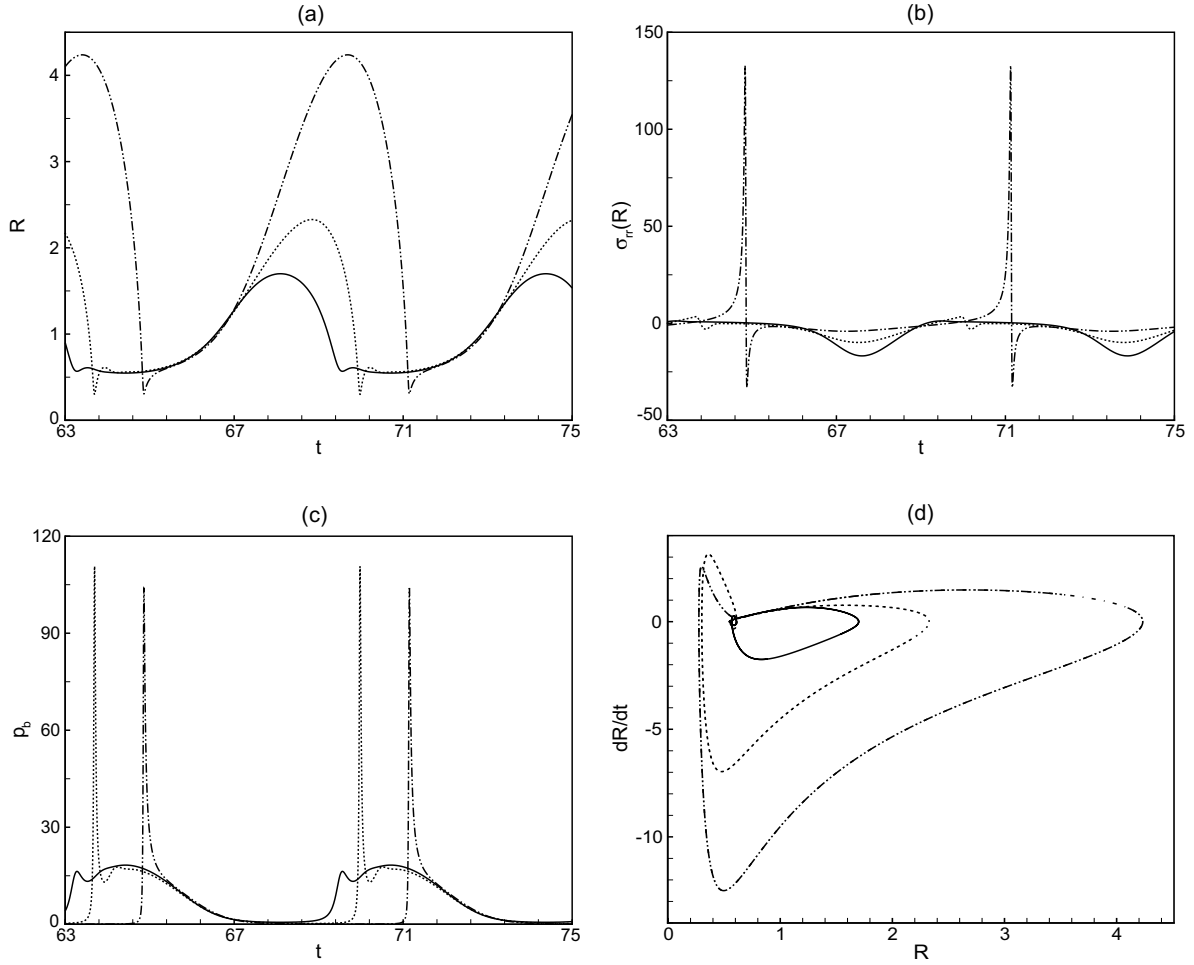


Figura 6.12: Dinâmica da bolha com $\phi = 0.1\%$ para o modelo anisotrópico (traço-ponto) e Maxwell-Oldroyd com $De_c = 1$ (sólida) e $De = 0.4$ (pontilhada), para $Re = We = 1$ e $\varepsilon = 12$. (a) R vs t ; (b) $\sigma_{rr}(R)$ vs t ; (c) p_b vs t e (d) \dot{R} vs R .

Foi verificado também uma tendência ao colapso para $De \sim O(10^{-1})$, em que ocorre uma maior interação entre os efeitos elásticos e o movimento oscilatório da bolha. Considerações acerca raio mínimo dependem da faixa de parâmetros explorados.

É preciso insistir no fato que, uma menor fração volumétrica de aditivos pode resultar em uma não-linearidade mais acentuada devido aos efeitos elásticos, uma vez que atenua-se a estabilização causada pelo efeito anisotrópico. No entanto, a anisotropia adicional no limite superior $De \sim 1$, i.e. De_c (devido ao comportamento rígido dos aditivos com o limite do efeito elástico) em parâmetros físicos moderados, principalmente na ausência de forças de inércia significativas, resulta em uma atenuação do movimento da bolha e, conseqüentemente, no aumento do tempo de colapso, podendo inclusive evitar a ocorrência do mesmo.

6.3 ANÁLISE DE FREQUÊNCIA

Geralmente observa-se um processo físico em um domínio de tempo, ou seja, a partir da evolução temporal de uma quantidade qualquer. No entanto, esta mesma quantidade ou sinal pode ser observado em outra perspectiva: no domínio da frequência. Esta mudança de domínio pode auxiliar na interpretação de resultados, uma vez que o domínio da frequência apresenta os modos vibracionais de um sinal. A quantidade e amplitude destes modos se encontram diretamente relacionados ao comportamento que o sinal apresenta. Um sinal não-linear é caracterizado por vários modos de vibração.

Pela transformada de Fourier, é possível representar qualquer função a partir de uma combinação linear de senos e cossenos. A função é apresentada no espaço de onda, em que os autovetores são determinados pelas amplitudes das autofunções e os autovalores pela frequência correspondente às respectivas amplitudes. A Figura 6.13 mostra um sinal que pode ser representado por duas ondas sinusoidais, em que cada uma possui sua respectiva frequência e amplitude. Convém notar que existe somente uma combinação de ondas senoidais para representar o sinal desejado.

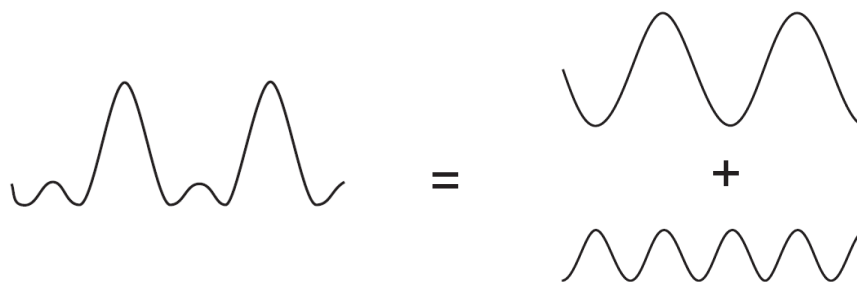


Figura 6.13: Um sinal qualquer, que consiste na combinação de duas ondas sinusoidais que possuem frequências e amplitudes distintas.

A Figura 6.14 (a) é uma representação tridimensional do sinal apresentado na figura anterior. Os eixos de amplitude e tempo são comuns ao domínio do tempo. O terceiro eixo consiste na frequência, que possibilita a visualização separada das ondas senoidais. A soma destas ondas senoidais ao longo do tempo redonda no sinal analisado, fornecendo a visão no campo do domínio temporal, conforme a Fig. 6.14 (b).

Porém, quando analisado ao longo do eixo do tempo, a Fig. 6.14 (a) apresenta o gráfico da Fig. 6.14 (c), agora no domínio da frequência. Cada onda senoidal é representada por uma reta vertical, cujo pico fornece o valor da amplitude correspondente à mesma. A posição da onda representa o valor de sua frequência. A representação no domínio da frequência de um sinal é comumente denominado como o espectro deste sinal.

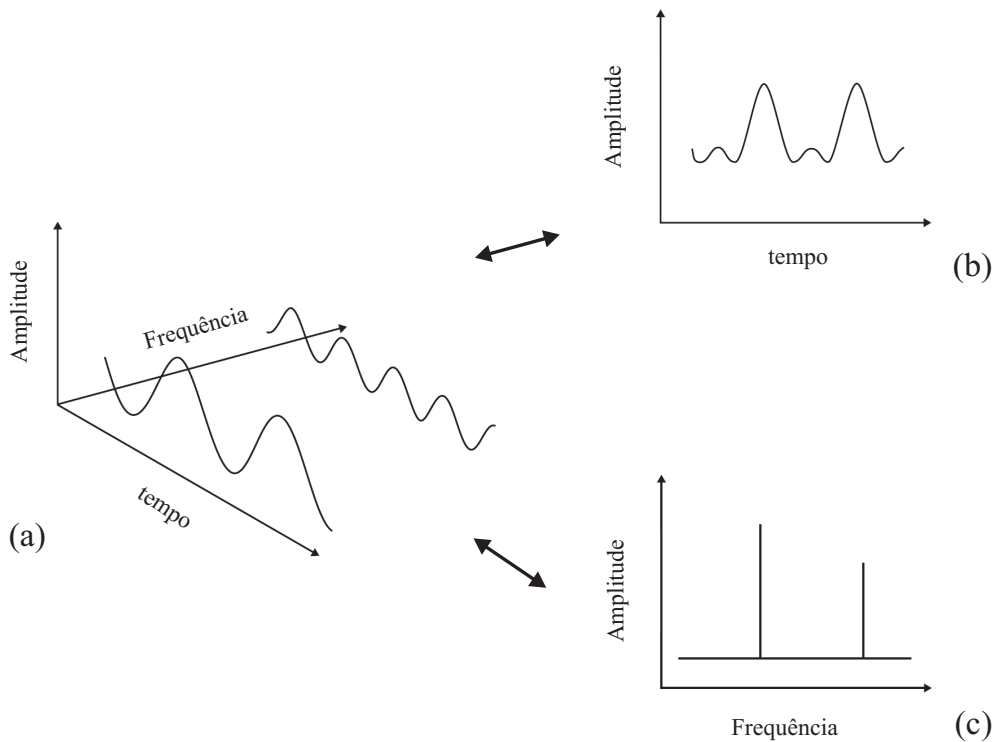


Figura 6.14: (a) Representação do sinal formado pela combinação de duas ondas senoidais nos eixos da amplitude, tempo e frequência; (b) Sinal no domínio do tempo; (c) Sinal no domínio da frequência.

É importante ressaltar que a troca entre o domínio do tempo e da frequência corresponde a diferentes representações de uma mesma função, ou seja, resulta em uma mudança de perspectiva, sem que ocorra a perda de informação quando o domínio muda de um para o outro. Algumas considerações acerca de conceitos e metodologias que envolvem a análise de um sinal no domínio da frequência são realizados na seção a seguir.

6.3.1 Considerações Iniciais

Considera-se uma quantidade h qualquer que varia de acordo com o tempo t , dada por $h(t)$. Admite-se que $h(t) = h_T(t)$ para o intervalo $-T \leq t \leq T$ e que $h_T(t)$ assume valor nulo quando não se encontra no intervalo proposto. Para analisar este mesmo sinal a partir de um domínio de frequência, considerando a amplitude H desta quantidade representada em função da frequência angular ω , dado por $H(\omega)$, utiliza-se a transformada de Fourier, obtendo

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_T(t)e^{i\omega t} dt = \int_{-T}^T h(t)e^{i\omega t} dt , \quad (6.2)$$

sendo a transformada inversa de Fourier dada por

$$h_T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{-i\omega t} d\omega . \quad (6.3)$$

Novamente, cumpre salientar que ambos domínios representam a mesma função, logo, a transformada de Fourier oferece somente outro ponto de vista acerca da série analisada. Nota-se que a amplitude pode se apresentar como um número complexo. Sendo o conjugado da amplitude $H(\omega)$ denotado por $H^*(\omega)$, a partir da equação (6.2), a seguinte relação pode ser obtida (Press *et al.*, 1992):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} H^*(\omega)H(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} H^*(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} h_T(t)e^{i\omega t} dt d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h_T(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} H^*(\omega)e^{i\omega t} d\omega . \end{aligned} \quad (6.4)$$

A transformada de Fourier para o conjugado da amplitude $H(\omega)$ é dada por

$$h_T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H^*(\omega) e^{i\omega t} d\omega . \quad (6.5)$$

Assim, utilizando da equação (6.5), a equação (6.4) assume a forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_T^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega . \quad (6.6)$$

A equação (6.6) é conhecida como o Teorema de Parseval (McQuarrie, 2000) e demonstra que a energia total de um sinal é a mesma tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência. Dividindo a equação (6.6) pelo intervalo total $2T$ e tomando o limite, obtém-se

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T h_T^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|H(\omega)|^2}{2T} d\omega = \bar{h}^2 , \quad (6.7)$$

em que \bar{h}^2 corresponde à média global da energia dada pela quantidade $h(t)$, ou potência média. Nota-se que $|H|^2$ denota a magnitude da potência da amplitude H . Definindo a densidade espectral de $h(t)$ como $S'(\omega)$

$$S'(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |H(\omega)|^2 . \quad (6.8)$$

Pode-se escrever \bar{h}^2 em termos da densidade espectral, ou espectro de potência, obtendo

$$\bar{h}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S'(\omega) d\omega . \quad (6.9)$$

A partir deste resultado, fica claro que a intensidade média de uma quantidade $h(t)$ é dada pela integração da densidade espectral apresentada ao longo das respectivas frequências correspondentes.

A função $h(t)$ em simulações numéricas é descrita a partir de amostras espaçadas em intervalos iguais de tempo, Δt . Cumpre-se observar, preliminarmente, que o passo de tempo utilizado consiste em um fator determinante para a análise no domínio da frequência.

De acordo com o Teorema de Nyquist, a quantidade de amostras por unidade de tempo de um sinal, chamada taxa ou frequência de amostragem, deve ser maior que o dobro da maior frequência contida no sinal a ser amostrado. A metade da frequência de amostragem é chamada frequência crítica de Nyquist, representada por f_c e corresponde ao limite máximo de frequência do sinal que pode ser reproduzido, dada por

$$f_c = \frac{1}{2\Delta t}. \quad (6.10)$$

A frequência crítica é essencial para que o sinal possa ser reproduzido integralmente com o mínimo de perda de informação, perda considerada erro de “aliasing”. Este erro consiste em densidades espectrais que se encontram fora do intervalo definido pela frequência de Nyquist, que são erroneamente traduzidas para o intervalo de frequência que não pertencem.

Normalmente, não se distingue entre frequências positivas e negativas quando se analisa a potência contida em um intervalo de frequência entre ω e $\omega + d\omega$, mas considera-se a frequência variando no intervalo 0 e $+\infty$, ou seja, entre 0 e $1/\Delta t$, ou a frequência de amostragem. Desta forma, define-se uma densidade espectral de potência unilateral.

A Figura 6.15 (a) mostra o gráfico de uma função $\varepsilon \text{sen}(\omega t)$ pelo tempo, cuja amplitude assume o valor $\varepsilon = 3$ e a frequência angular é igual a $\omega = 5$. O domínio da frequência é ilustrado na Fig. 6.15 (b), a partir de um espectro de potência, onde se observa a frequência de resposta (dada por $\tilde{\omega}$) em função da potência, representada por $H^2 = |\varepsilon|^2$. Não se pode olvidar que a frequência angular é definida como $\omega = 2\pi f$. Desta forma, a frequência angular de amostragem assume o valor $2\pi/\Delta t$, em que $\Delta t = 10^{-1}$.

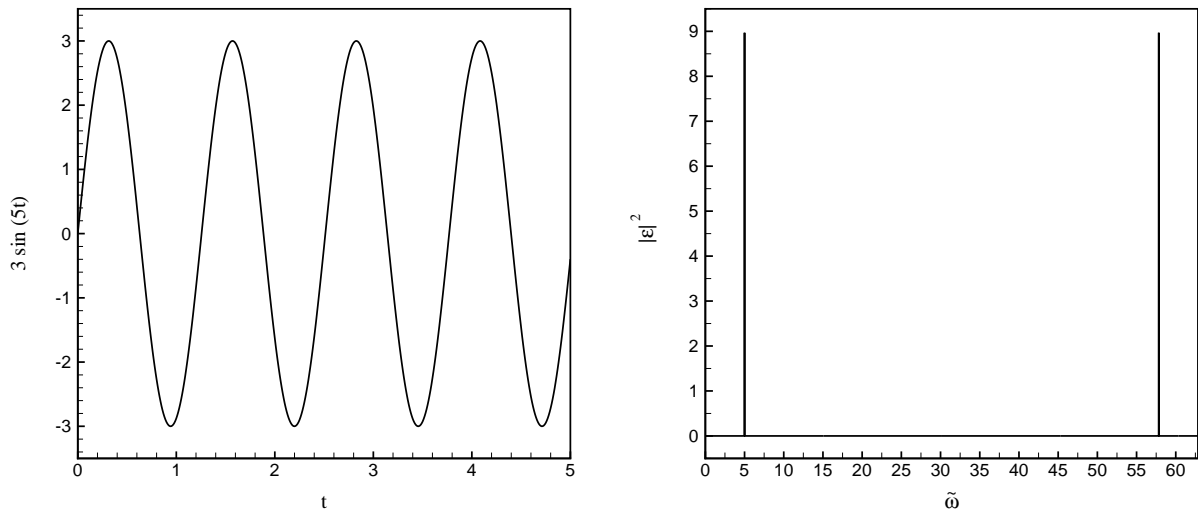


Figura 6.15: (a) Função $\varepsilon \sin(\omega t)$ em função do tempo t ; (b) Espectro de potência, em que $\tilde{\omega}$ representa a frequência de resposta ou modos de vibração do sinal.

Quando o intervalo unilateral da Fig. 6.15 (b) é analisado, fica claro identificar que existe simetria justamente na metade da frequência angular de amostragem, ou seja, na frequência definida por Nyquist. Assim, esta simetria fornece uma informação redundante do espectro de potência, sendo necessário analisar o domínio da frequência somente no intervalo 0 até a frequência (angular) crítica de Nyquist. Nota-se que, neste intervalo, ocorre um pico característico de amplitude no momento em que a frequência de resposta equivale à frequência de excitação, $\tilde{\omega} = \omega = 5$, conforme esperado.

Convém ressaltar que, caso a série analisada seja uma quantidade real, a amplitude da mesma assume a condição $H^*(\omega) = H(-\omega)$ e a densidade espectral $S'(\omega)$ consiste em uma função par da frequência ω . No caso, a função seno explorada anteriormente é real, assim como todas as simulações realizadas para o raio adimensional de uma bolha. A Figura 6.16 demonstra esta simetria com o eixo y , relativa ao sinal, em que o intervalo da frequência agora se encontra entre a $-f_c < f < f_c$. Todos os gráficos gerados neste trabalho no domínio da frequência são analisados, portanto, no intervalo $0 < f < f_c$.

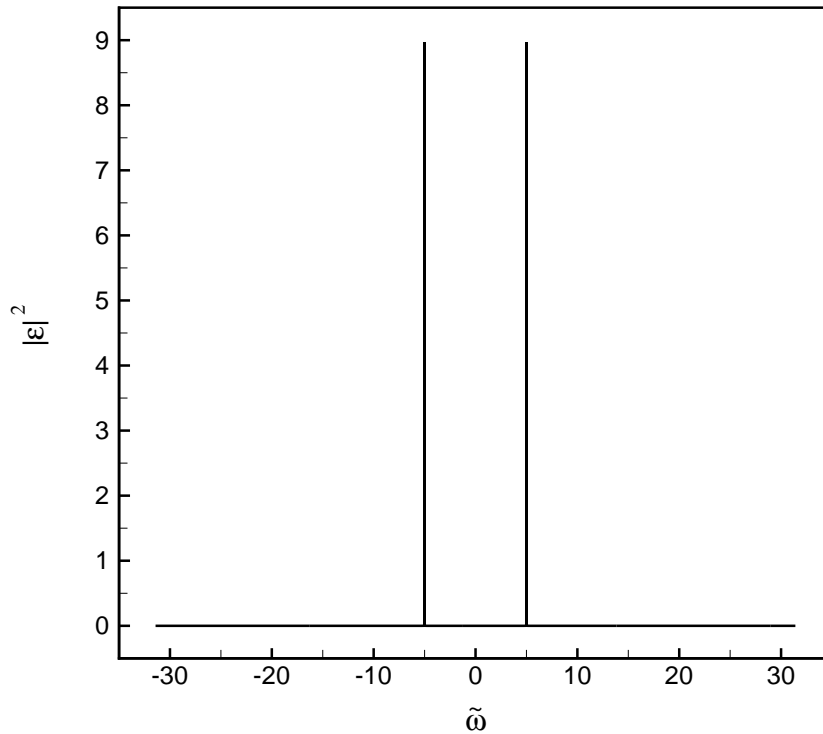


Figura 6.16: Domínio de frequência da função apresentada na Fig. 6.15, agora no intervalo positivo e negativo de frequência, demonstrando simetria devido ao fato da função ser real.

Outro ponto que cumpre salientar é o fato da precisão do espectro de frequência estar diretamente relacionado ao número de períodos presentes no sinal temporal a ser transformado, uma vez que a presença de poucos períodos pode alterar significativamente a resposta no domínio de frequência.

A Figura 6.17 ilustra curvas no espectro de potência contendo diferentes quantidades de períodos da função $3\text{sen}(5t)$, em que a linha cheia denota um sinal com 500 períodos, linha tracejada com 50 períodos e linha pontilhada contendo 5 períodos. Assim como uma maior quantidade de períodos resulta em uma resposta singular no domínio da frequência, o valor para a potência e a frequência de resposta do sinal apresenta um erro desprezível.

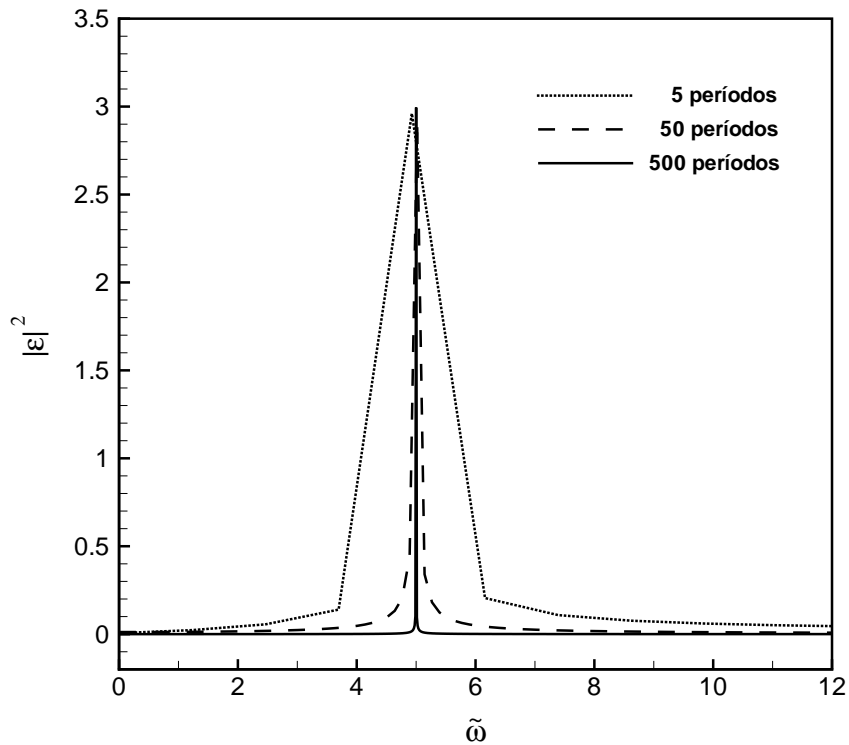


Figura 6.17: Domínio de frequência da função apresentada na Figura 6.15, para diferentes quantidades de períodos. Linha cheia denota um sinal com 500 períodos; linha tracejada com 50 períodos e linha pontilhada contém 5 períodos.

Portanto, a utilização de um número maior de períodos de um sinal resulta em uma maior precisão no espectro de potência. Da mesma forma, o resultado no domínio de frequência pode ser melhorado aumentando-se a frequência de amostragem, com a diminuição do passo de tempo, que resulta em uma mudança no número de pontos para realizar a transformada de Fourier, ou seja, discretizar mais o domínio de frequência.

6.3.2 Espectro de Amplitude da Bolha

Dado uma série temporal relativa à evolução do movimento unidirecional apresentado pela bolha, pode-se analisar a mesma em um domínio de frequência, a partir do uso de uma transformada de Fourier, utilizando um sinal discreto no domínio temporal e transformando este sinal em uma representação discreta no domínio de frequências, conforme visto anteriormente.

Aqui, tal transformação decorre da utilização de um código baseado na transformada rápida de fourier (FFT), que consiste em uma versão de convergência mais rápida da transformada de fourier, a partir da utilização de algoritmos mais eficientes. A rotina é realizada por meio do programa Matlab 2009, ferramenta responsável por gerar o espectro deste sinal.

Neste trabalho considera-se a análise de um espectro de amplitude do raio adimensional da bolha, em que a amplitude é dada pelo módulo do raio, $|R - R_0|$, uma vez que não existe preocupação de discernir entre componentes reais e imaginários. A frequência é apresentada no intervalo unilateral 0 a $+\infty$, utilizando uma frequência crítica de Nyquist $f_c \geq 500$ (i.e., $\Delta t \leq 10^{-3}$), visando anular qualquer erro de aliasing para a representação no domínio da frequência.

A evolução temporal do raio de uma bolha é apresentada na Figura 6.18 (a), cujos parâmetros físicos utilizados são $\varepsilon = 0.1$, $We = Re = 10$, $\phi = 0.2\%$, $\omega = 1$ e $De = 0$, i.e. modelo puramente anisotrópico. O respectivo sinal no domínio da frequência é apresentado na Fig. 6.18 (b). Observa-se que uma baixa amplitude de excitação ε reflete em uma oscilação harmônica simples da bolha, apresentando somente um período de oscilação.

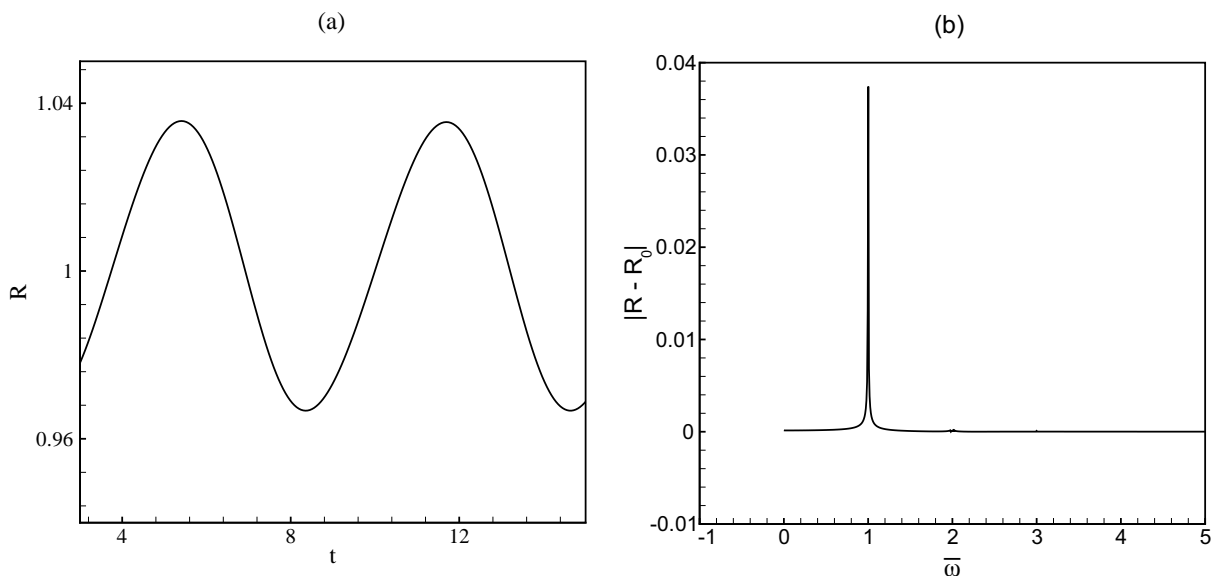


Figura 6.18: (a) Raio da bolha em função do tempo, para as condições $\varepsilon = 0.1$, $We = Re = 10$, $\phi = 0.2\%$, $\omega = 1$ e $De = 0$; (b) Domínio da frequência, em que a amplitude $|R - R_0|$ é representada em termos da frequência de resposta, $\bar{\omega}$.

Portanto, a frequência de resposta da oscilação da bolha equivale à frequência da pressão externa acústica, $\bar{\omega} = \omega = 1$, representando um regime linear de oscilação. A Figura 6.19 remete às mesmas condições consideradas na Fig. 6.18, mas agora a amplitude de excitação apresenta valor $\varepsilon = 1$. Uma interação da dinâmica do raio da bolha com o escoamento é obtida (a), e uma mudança no espectro de frequência também pode ser observado.

Cumprir registrar que, para o espectro de frequência observado, utiliza-se de um filtro passa baixa, que atenua a amplitude das frequências de resposta que apresentam maiores que uma frequência limite, que consiste em um “cutoff” da frequência, que varia de acordo com a maior amplitude $|R - R_0|$ apresentada pela bolha. Desta maneira, a Fig. 6.19 (b) apresenta 6 modos vibracionais, em que a maior frequência de resposta é dada por $\bar{\omega} = 6$. A mudança no espectro de potência e a consequente mudança da distribuição de energia das flutuações da bolha é refletida nos modos observados.

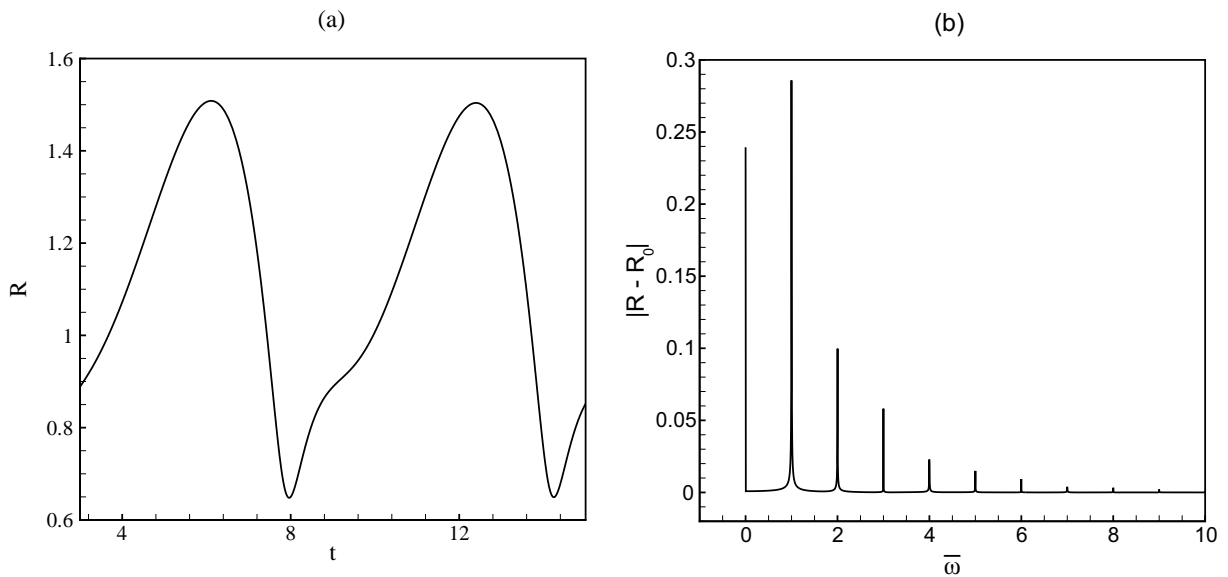


Figura 6.19: (a) R em função de t ; (b) Domínio da frequência com amplitude $|R - R_0|$ em função de $\bar{\omega}$. Parâmetros equivalentes à Fig. 6.18, com $\varepsilon = 1$.

Na presença de mais modos vibracionais, o movimento da bolha apresenta uma maior instabilidade, conforme pode ser observado na Figura 6.20, agora para uma condição $\varepsilon = 2$. Identifica-se a presença de mais graus de liberdade do movimento, em que a frequência de resposta é considerada até $\bar{\omega} = 15$. Essa condição equivale a uma presença mais acentuada de autovalores referentes à oscilação da bolha, representados a partir das frequências de resposta.

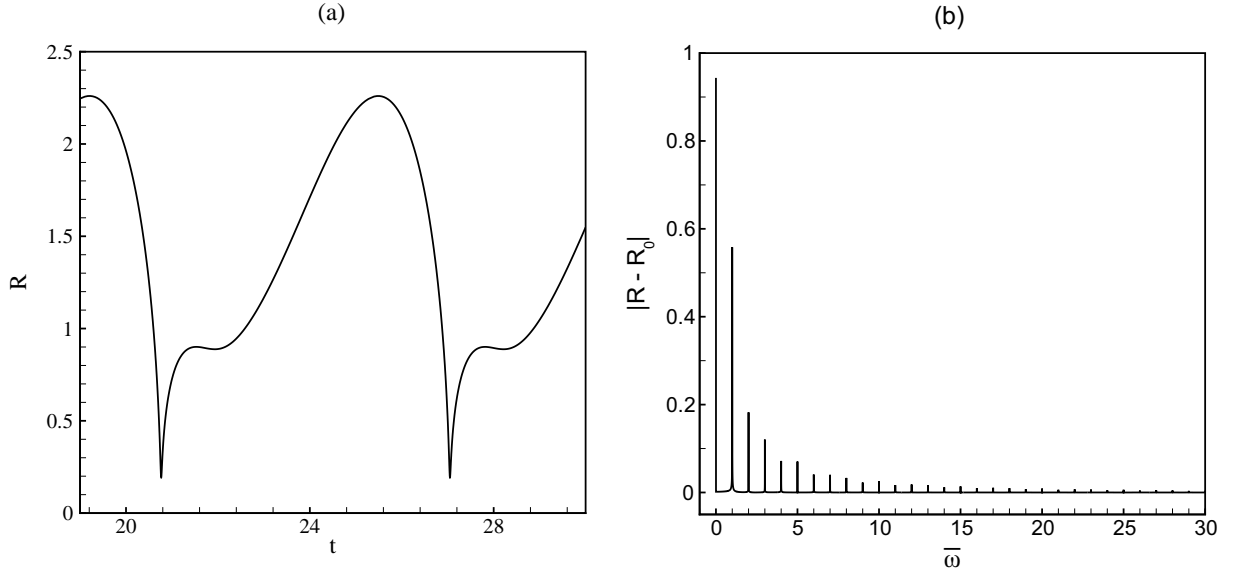


Figura 6.20: (a) R em função de t ; (b) Domínio da frequência com amplitude $|R - R_0|$ em função de $\bar{\omega}$. Parâmetros equivalentes à Fig. 6.18, com $\varepsilon = 2$.

Na seção seguinte apresenta-se a resposta não-linear de uma bolha no domínio da frequência em função dos efeitos elásticos, i.e. do número de Deborah. Diferentes frequências de excitação serão exploradas.

6.3.3 Frequência de Resposta e Efeitos Elásticos

A Figura 6.21 mostra $|R - R_0|$ em função de $\bar{\omega}$ para o limite anisotrópico inferior $De = 0$ (a) e superior $De = 1$ (b). Os parâmetros físicos utilizados são $\varepsilon = 12$, $We = Re = 1$, $\phi = 0.15\%$ e $\omega = 1$ e corresponde aos valores utilizados na Fig. 6.11. Comparando as Figuras 6.21 (a) e (b), observa-se a presença de 3 e 5 frequências de respostas, respectivamente. A presença de efeitos elásticos também indica uma redução da amplitude da bolha para os autovalores apresentados.

A resposta de diferentes frequências de resposta para representação do sinal da dinâmica da bolha requer uma análise do número de modos de vibração observados, de acordo com a amplitude de excitação considerada. A Figura 6.22 ilustra o número de modos de vibração N_ω , em função da amplitude de excitação ε , para diferentes valores de De , mantendo-se os parâmetros da Fig. 6.21.

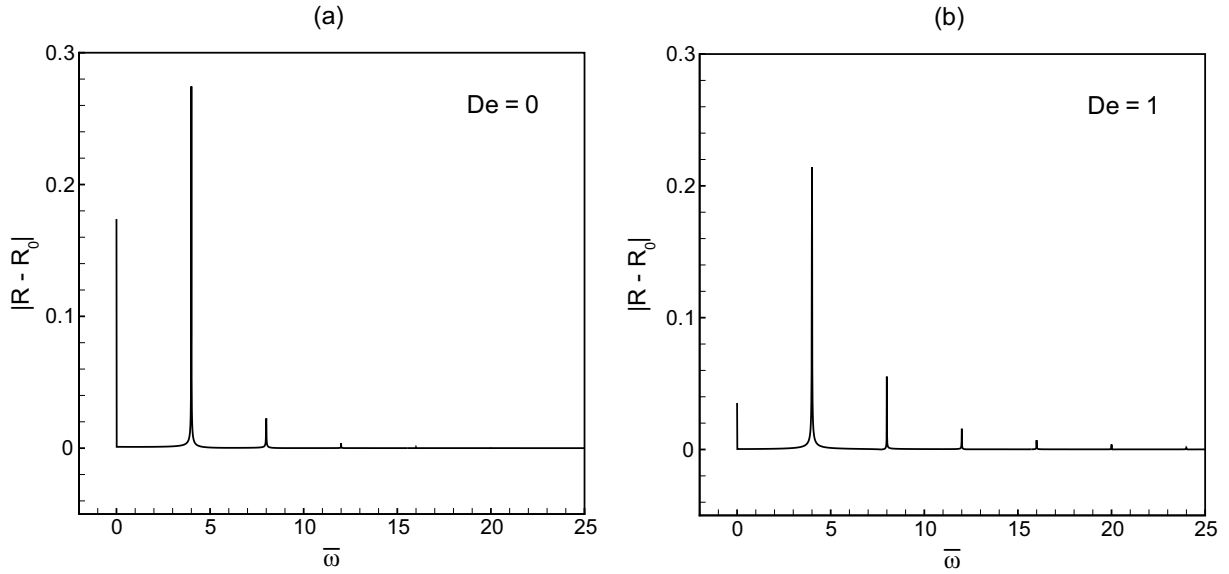


Figura 6.21: (a) $|R - R_0|$ em função de $\bar{\omega}$ para $De = 0$; (b) $|R - R_0|$ em função de $\bar{\omega}$ para $De = 1$, i.e. De_c . Parâmetros físicos semelhantes aos utilizados na Fig. 6.11, para uma fração volumétrica de aditivos $\phi = 0.15\%$.

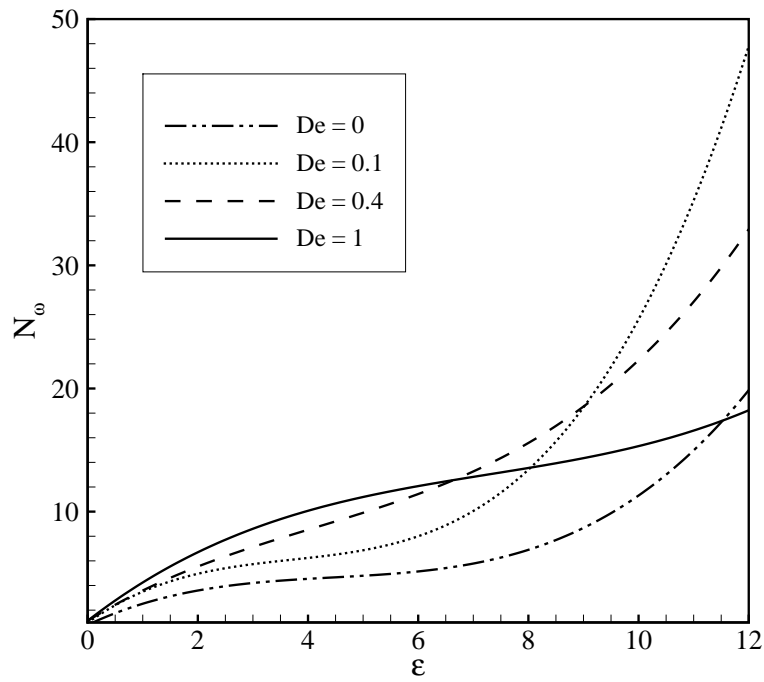


Figura 6.22: Número de modos de vibração N_ω em função da amplitude da excitação ε .

É importante notar que, para uma amplitude de excitação moderada, $\varepsilon < 6$, a condição de saturação dos efeitos elásticos $De \sim 1$ apresenta maior quantidade de modos N_ω e não ocorre interação da relaxação dos aditivos com o movimento da bolha para $De \sim (10^{-1})$.

No entanto, com o aumento da amplitude ε , essa interação fica cada vez mais significativa, uma vez que o tempo de relaxação dos aditivos é da ordem do tempo de oscilação da bolha e, para altas amplitudes de excitação, $De = 0.1$ apresenta modos vibracionais ~ 45 . Assim, obtém-se mais graus de liberdade com o aumento do número de Deborah, conforme visto em diagramas de fase explorados na seção 6.2. Para a condição $\varepsilon = 12$, $De = 1$ assume N_ω próximo ao N_ω apresentado para o modelo puramente anisotrópico, $De = 0$. Tal fato ocorre porque a anisotropia adicional (devido a saturação dos aditivos para $De \sim 1$) é mais significativa com o aumento da instabilidade do escoamento, causada, neste caso, com o aumento de ε .

A Figura 6.23 apresenta novamente N_ω em termos de ε , agora para (a) $De = 0$ e (b) $De = 1$ com diferentes frações volumétricas de aditivos. Registra-se que, a presença de efeitos anisotrópicos causa uma atenuação no movimento da bolha, que é refletida em menores valores de N_ω apresentados. Na Fig. 6.23 (a), $\phi = 0.3\%$ apresenta $N_\omega \simeq 5$ e para $\phi = 0.15\%$, $N_\omega \simeq 20$, i.e. uma redução significativa de modos de vibração. A condição inferior de anisotropia encontra-se mais dependente da fração volumétrica de aditivos, enquanto a condição superior de anisotropia apresenta um estiramento dos aditivos que não demonstra forte dependência com a fração volumétrica ϕ no fluido ambiente.

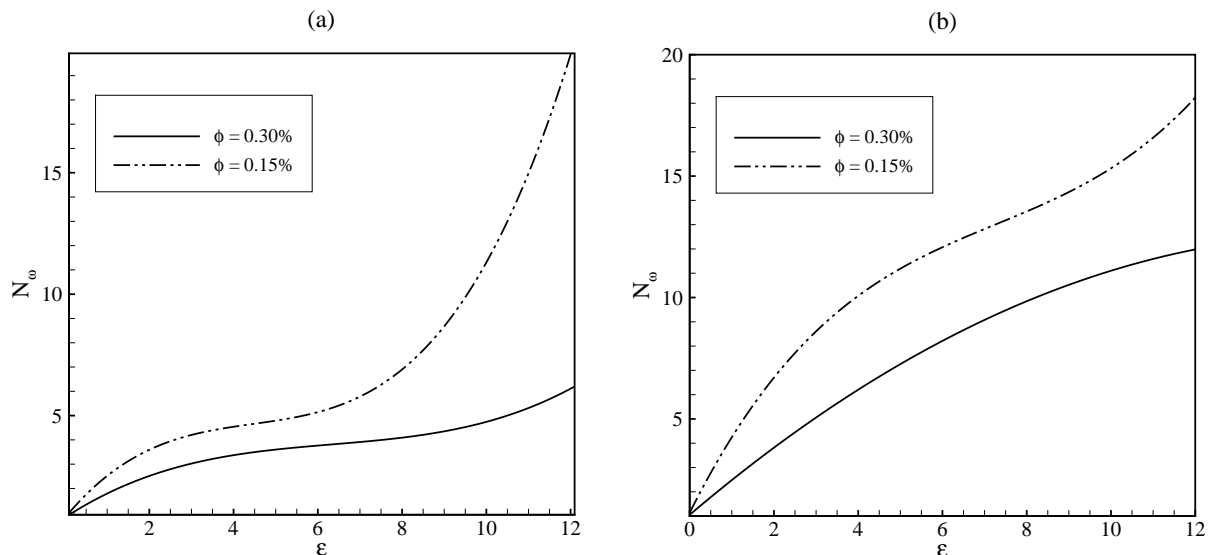


Figura 6.23: Número de modos de vibração N_ω em função da amplitude da excitação ε para (a) $De = 0$ e (b) $De = 1$.

Pode-se também relacionar a frequência de resposta com a frequência de excitação externa. A Figura 6.24 mostra R_{max} em termos de De , para diferentes frequências da pressão externa de excitação. Observa-se que uma frequência maior de excitação gera uma variação menor na redução de R_{max} com o aumento de De . Quando aumenta-se a frequência, a bolha não “enxerga” o escoamento, uma vez que a escala de tempo da oscilação da bolha é menor que a escala de tempo do escoamento e, conseqüentemente, a interação bolha-aditivos é menos significativa. No entanto, para uma frequência menor, da ordem $\omega \sim 10^{-1}$, uma forte interação ocorre entre os efeitos elásticos e o movimento da bolha, conforme ilustrado pela curva $\omega = 0.1$ (pontilhada), em que uma variação drástica na redução do raio máximo é observada, em que $R_{max(2)} = 0.4R_{max(1)}$.

Apesar das curvas para $\omega \geq 0.5$ apresentarem a princípio um comportamento constante, nota-se que existe uma redução da amplitude do raio da bolha com a saturação da relaxação dos aditivos, $R_{max(2)} < R_{max(1)}$ que, entretanto, não é significativa.

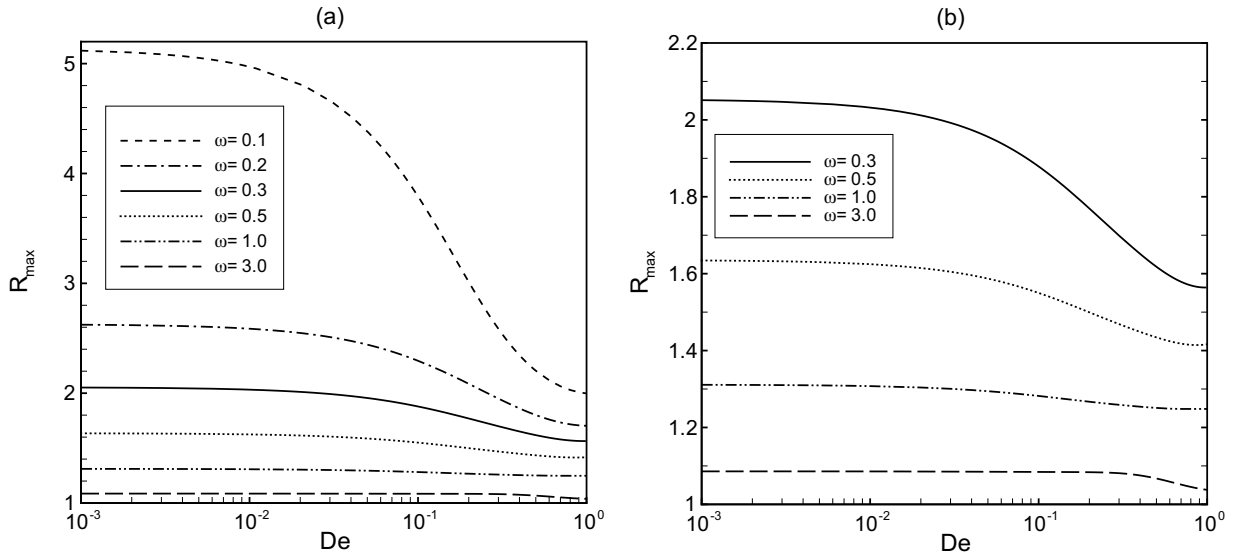


Figura 6.24: R_{max} vs De , para diferentes frequências da pressão externa de excitação. Parâmetros utilizados: $Re = We = 3$, $\phi = 0.3\%$ e $\varepsilon = 2$.

Atenta-se para um caso de frequência de excitação $\omega = 0.1$ na Figura 6.25, com os mesmos parâmetros da Fig. 6.24 e diferentes números de Deborah. Primeiramente, observa-se que para uma contribuição pequena da relaxação de aditivos $De = 0.05$ (a), o movimento da bolha apresenta uma quantidade de modos de vibração $N_w \simeq 8$, cujos autovalores apresentam amplitudes máximas $|R - R_0| \simeq 2$.

Com o aumento da relaxação de aditivos, ocorre uma diminuição da amplitude $|R - R_0|$, em que $De = 1$ apresenta $|R - R_0| \leq 1$. Esse comportamento é esperado, uma vez que o R_{max} sempre diminui com o aumento de De .

É importante registrar nesse passo que o aumento de De proporciona uma melhor distribuição dos modos vibracionais ou autovalores no espectro de frequência, em que frequências de resposta $\bar{\omega} > 0.5$ apresentam uma maior amplitude $|R - R_0|$. Desta maneira, as frequências maiores de respostas são consideradas e não são negligenciadas a partir do uso do filtro passa baixa e, a condição superior de anisotropia ~ 1 apresenta mais modos vibracionais.

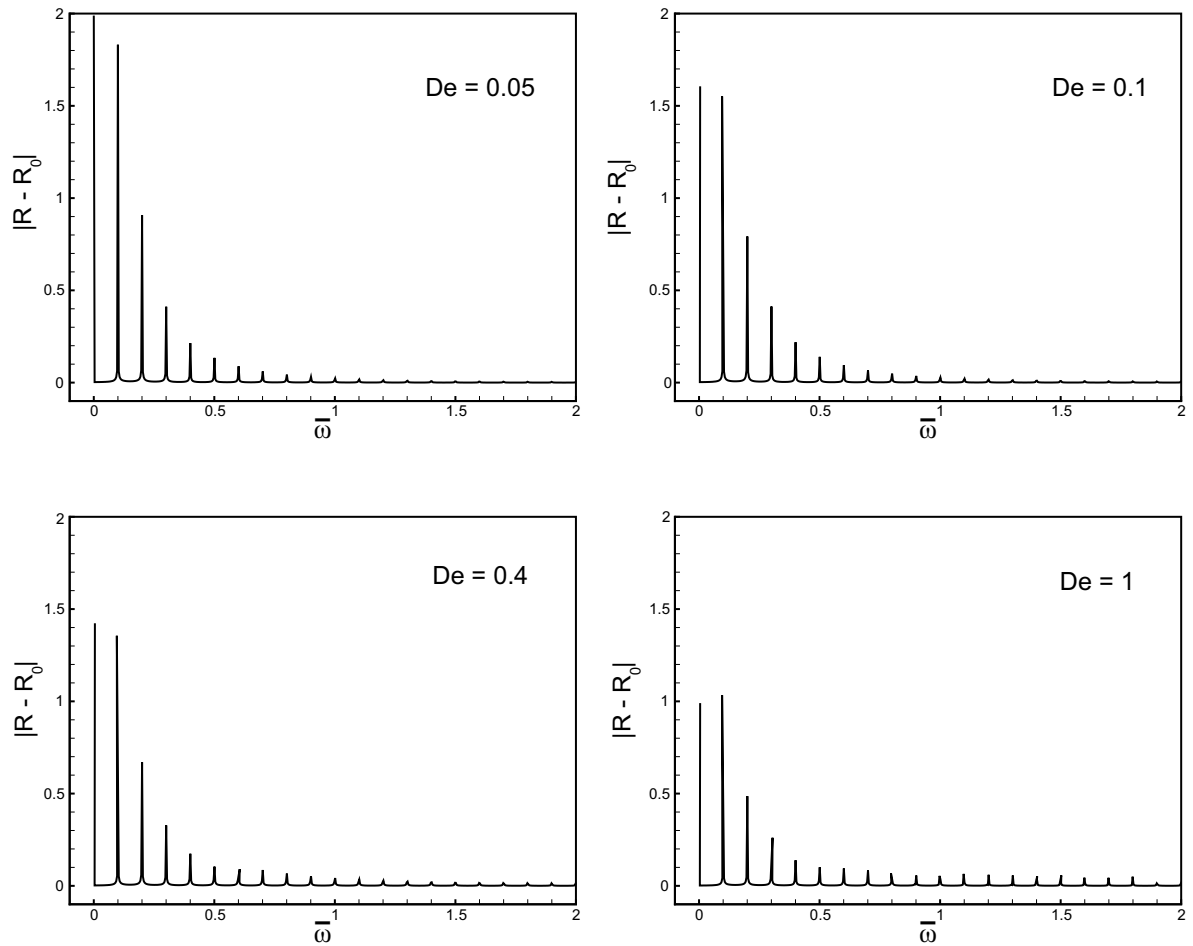


Figura 6.25: $|R - R_0|$ em função de $\bar{\omega}$, para $Re = We = 3$, $\varepsilon = 2$ e $\phi = 0.3\%$. (a) $De = 0.05$; (b) $De = 0.1$; (c) $De = 0.4$; (d) $De = 1$.

A frequência de resposta também pode ser relacionada à frequência de excitação, conforme apresentado na Figura , em que $Re = We = 3$, $\phi = 0.3\%$, $\varepsilon = 2$ e $De = 1$. A curva traço-ponto delimita os valores $\bar{\omega}$ apresentados, de acordo com a frequência de excitação utilizada. Observa-se que, para menores frequências de excitação, mais modos vibracionais são obtidos, em que $\omega = 1$ fornece $\bar{\omega} \leq 40$. Com o aumento da frequência de excitação ω , nota-se que a frequência de resposta diminui. Isso ocorre porque a interação bolha-aditivos se torna cada vez menor, resultado da diminuição do tempo do escoamento.

Para altas frequências, i.e. $\omega > 15$, a bolha não interage mais com o escoamento, e o espectro de frequência apresenta o maior autovalor $\bar{\omega} = \omega$, que consiste em um regime linear. Assim, da mesma forma que na condição $De \sim 1$, os efeitos elásticos não escalam com o tempo de oscilação da bolha, na condição $\omega \gg 1$, o tempo de oscilação da bolha é muito maior que o tempo do escoamento e a bolha não “enxerga” o escoamento.

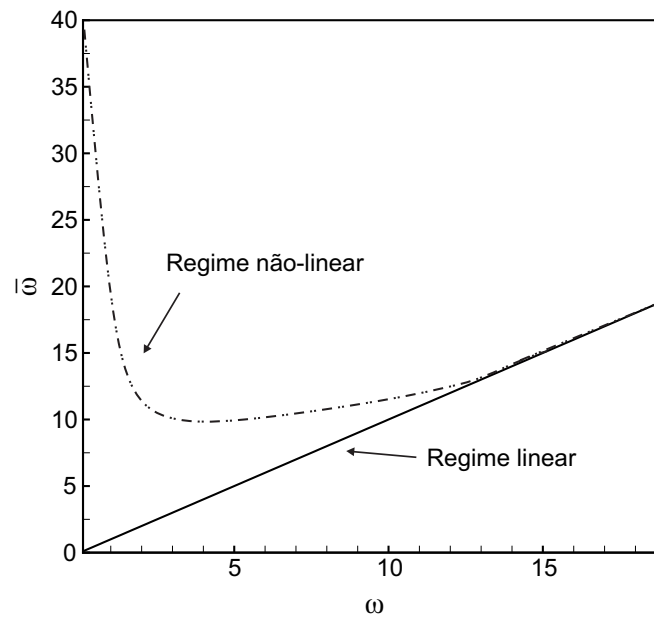


Figura 6.26: Frequência de resposta $\bar{\omega}$ em função da frequência de excitação ω , para a condição $De = 1$ da Fig. 6.24, i.e. $Re = We = 3$, $\phi = 0.3\%$ e $\varepsilon = 2$.

Registra-se que a reta sólida denota o regime linear da frequência de resposta. Este regime é obtido em duas situações: (i) quando a amplitude de excitação é moderada, a frequência de resposta apresenta-se cada vez mais próxima da frequência de excitação $\bar{\omega} \sim \omega$ e consiste em um regime linear que retorna a uma solução harmônica simples,

caracterizada por um período, em que o escoamento não interage com o movimento da bolha, conforme observado na Fig. 6.18; (ii) no caso de um regime de altas frequências analisado anteriormente. O regime não linear ocorre, portanto, quando há interação entre o escoamento e a dinâmica da bolha, i.e. $\omega \sim 1$.

A Figura 6.27 apresenta $\bar{\omega}$ em função de ω para uma força de inércia e anisotropia menos significativa. Observa-se que a região não-linear que delimita os valores máximos alcançados pela frequência de resposta $\bar{\omega}$ apresentam valores moderados ($\bar{\omega} \simeq 8$ para $\omega = 0.1$) quando comparados a Fig. 6.26. É importante assinalar que o regime linear para altas frequências também é obtido para uma menor frequência de excitação, $\omega \geq 9$, quando comparada à Fig. 6.26, mesmo com a redução da concentração de aditivos em 6.27, o que resultaria em uma maior não-linearidade do movimento da bolha.

Conclui-se, portanto, que uma redução nas forças de inércia apresenta menores graus de liberdade do movimento da bolha, apesar de acentuar a não-linearidade decorrente da relaxação de aditivos. Assim, atenta-se para o fato que a interação entre as forças de inércia e a relaxação dos aditivos apresenta mais modos vibracionais ou autovaleores para o movimento da bolha, de acordo com os parâmetros físicos utilizados.

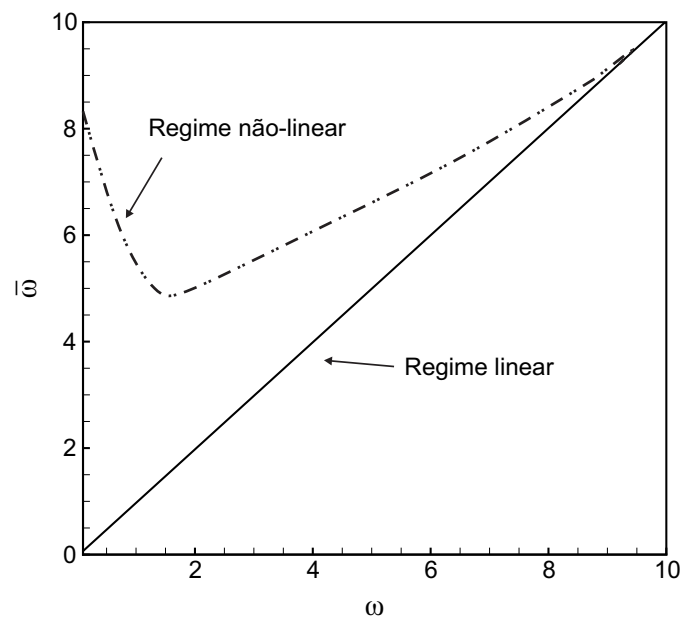


Figura 6.27: $\bar{\omega}$ em função de ω para $De = 1$ com redução das forças de inércia $Re = We = 1$ e redução da fração volumétrica $\phi = 0.15\%$.

6.4 COMPARATIVO ENTRE OS MODELOS VISCOELÁSTICOS

Esta seção encerra o capítulo com uma comparação direta entre o modelo viscoelástico linear de Maxwell (sempre apresentado por linhas traço-ponto) e o modelo viscoelástico não-linear Maxwell-Oldroyd (linhas sólidas). Primeiramente, realiza-se uma análise do raio máximo atingido pela bolha em função do número de Deborah, conforme apresentado na Figura 6.28, cujos parâmetros utilizados consistem em $Re = We = 2$, $\phi = 0.2\%$ e $\varepsilon = 3$.

Nota-se que ambos modelos recuperam o raio máximo da solução anisotrópica (pontilhada) para uma contribuição elástica praticamente desprezível, i.e. $De \rightarrow 0$. Constata-se que o modelo viscoelástico linear apresenta resultados em total concordância com o modelo não-linear na faixa $10^{-3} < De < 10^{-2}$. No entanto, na condição $De \sim O(10^{-1})$, o modelo linear já destoa da solução não-linear, em que o raio máximo apresentado aumenta na presença de maiores efeitos elásticos, ao invés de diminuir. Para o limite assintótico $De \sim 1$ a solução linear difere significativamente do comportamento não-linear observado.

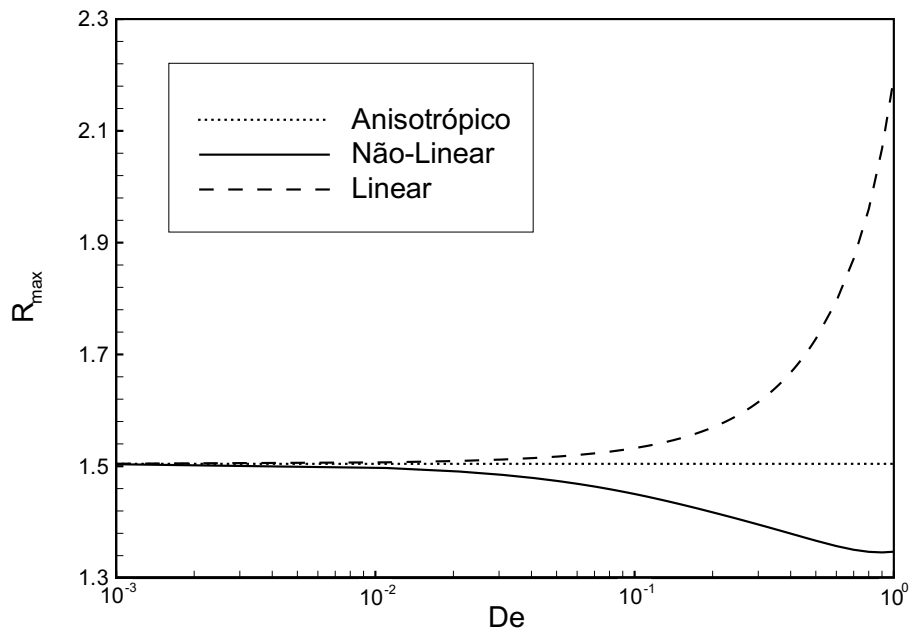


Figura 6.28: Amplitude máxima da bolha R_{max} em termos de De para todos modelos constitutivos explorados neste trabalho, com os seguintes parâmetros: $Re = We = 2$, $\phi = 0.2\%$ e $\varepsilon = 3$.

A Figura 6.29 ilustra a evolução temporal do raio da bolha (a) para o efeito elástico $De = 0.1$. Observa-se que o modelo linear apresenta solução próxima à solução não-linear, apesar da diferença entre os raios máximo e mínimo atingidos pela bolha.

A linha sólida da Fig. 6.29 (b) mostra $B(R)$ em função do tempo e a linha traço-ponto a evolução temporal da função $B_0(R)$. É importante lembrar que a função $B(R)$ representa a integral de convolução do modelo viscoelástico não-linear avaliada em toda a suspensão, $R < r < \infty$, conforme descrito na seção 3.4. Nesta seção também demonstrou-se que $B_0(R)$ denota a função equivalente ao modelo viscoelástico linear.

A diferença entre as funções está na função relaxação de aditivos, que caracteriza o acoplamento da relaxação dos aditivos com o movimento da bolha. Nota-se que $B_0(R)$ apresenta solução próxima de $B(R)$ conforme esperado, uma vez que $De = 0.1$ os aditivos não apresentam forte interação com o movimento da bolha e a função relaxação de aditivos do modelo viscoelástico não linear reduz-se ao módulo de relaxação linear, $M''1$.

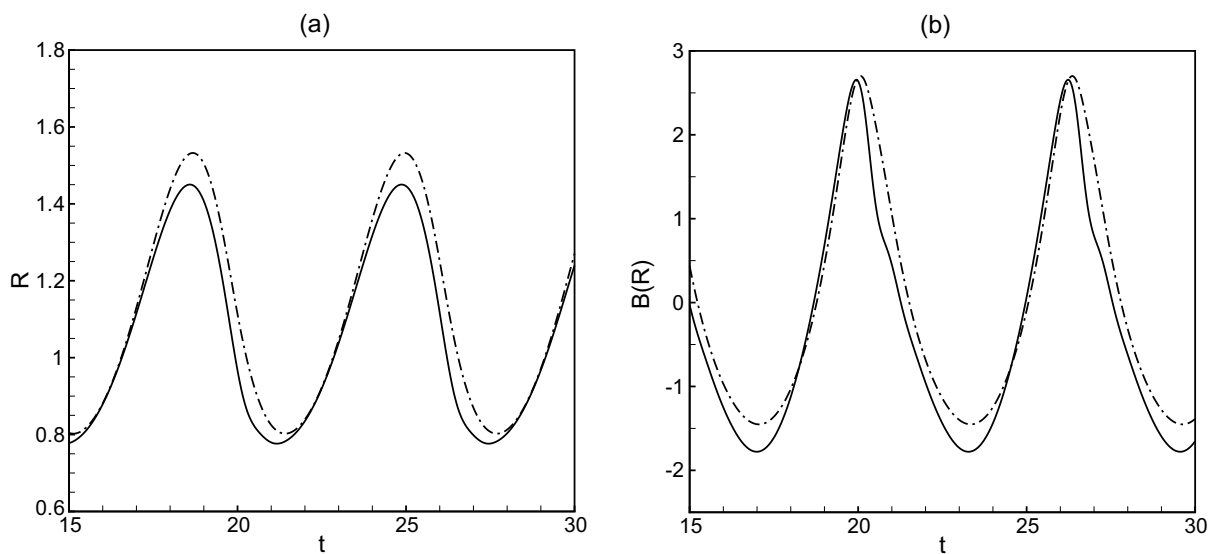


Figura 6.29: Comparativo entre o modelo viscoelástico linear (traço-ponto) e não-linear Maxwell-Oldroyd (cheia) para $Re = We = 2$, $\phi = 0.2\%$, $\varepsilon = 3$ e $De = 0.1$. (a) Evolução temporal do raio da bolha; (b) $B(R)$ (sólida) e $B_0(R)$ (traço-ponto) em função do tempo.

A Figura 6.30 ilustra o mesmo caso, agora para um número de Deborah $De = 1$, que consiste no limite assintótico De_c . A evolução temporal do raio da bolha (a) mostra de maneira mais clara a diferença de comportamento entre os modelos: o modelo li-

near indica uma não-linearidade vinculada aos efeitos elásticos no líquido ambiente que não se encontra presente no modelo não-linear, além um raio máximo consideravelmente maior. Tal fato é salientado pela Fig. 6.30 (b), em que o comportamento da tensão extra radial mostra um grau de não-linearidade maior para o modelo linear e, conseqüentemente, maiores picos podem ser observados.

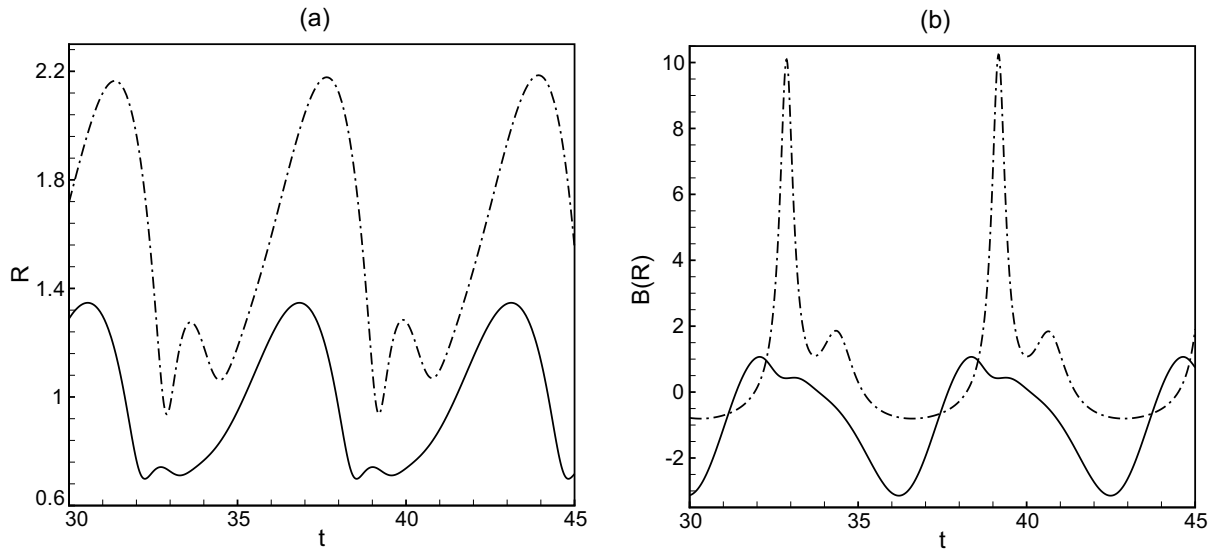


Figura 6.30: Comparativo realizado na Figura 6.29, agora para $De = 1$.

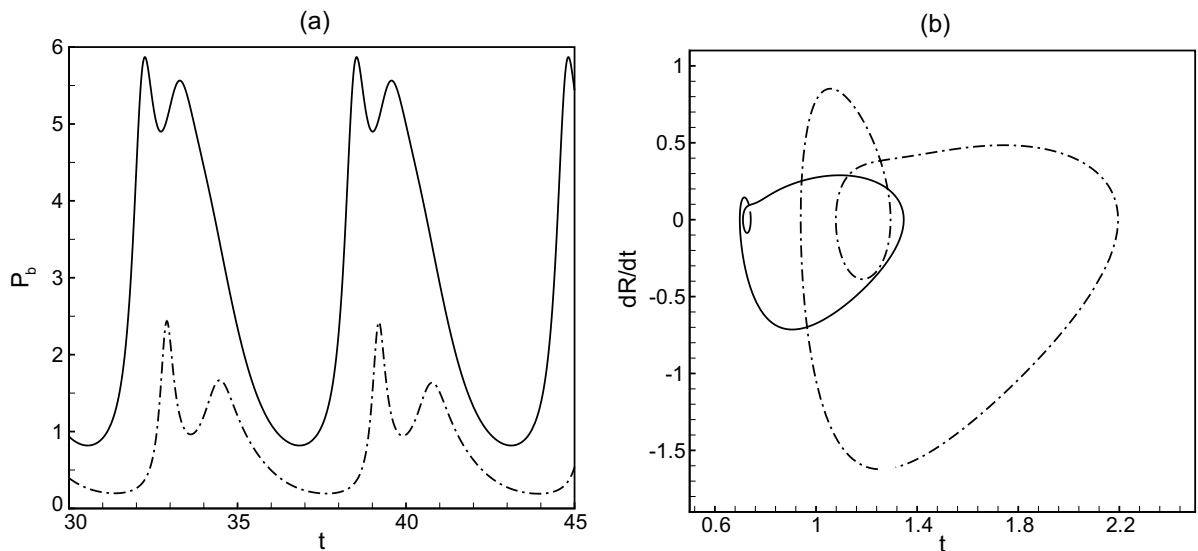


Figura 6.31: (a) Pressão interna da bolha em função do tempo com relação à Fig. 6.30; (b) diagrama de fase, \dot{R} vs R .

Além das curvas apresentarem um regime de raio (a) e tensão (b) diferentes, nota-se que o modelo linear não consegue prever o raio mínimo atingido pelo modelo não-linear, que resulta em um aumento da pressão interna da bolha, conforme a Fig. 6.31 (a).

O diagrama de fase \dot{R} em função de R , mostra como o modelo linear acentua a presença de um segundo harmônico no movimento da bolha. Desta forma, o uso de um modelo linear para $De \sim 1$ pode produzir uma dinâmica com grau de linearidade maior que o esperado, além de apresentar parâmetros de colapso não definidos pelo modelo não-linear.

Desta maneira, cumpre examinar neste passo que tais conclusões quanto às diferenças entre os modelos podem ser precipitadas. A partir de uma mudança dos parâmetros físicos, outra dinâmica pode ser observada. A Figura 6.32 ilustra o raio máximo em função de De utilizando os mesmos parâmetros da Fig. 6.28, aumentando-se agora a amplitude da pressão de excitação para $\varepsilon = 5$.

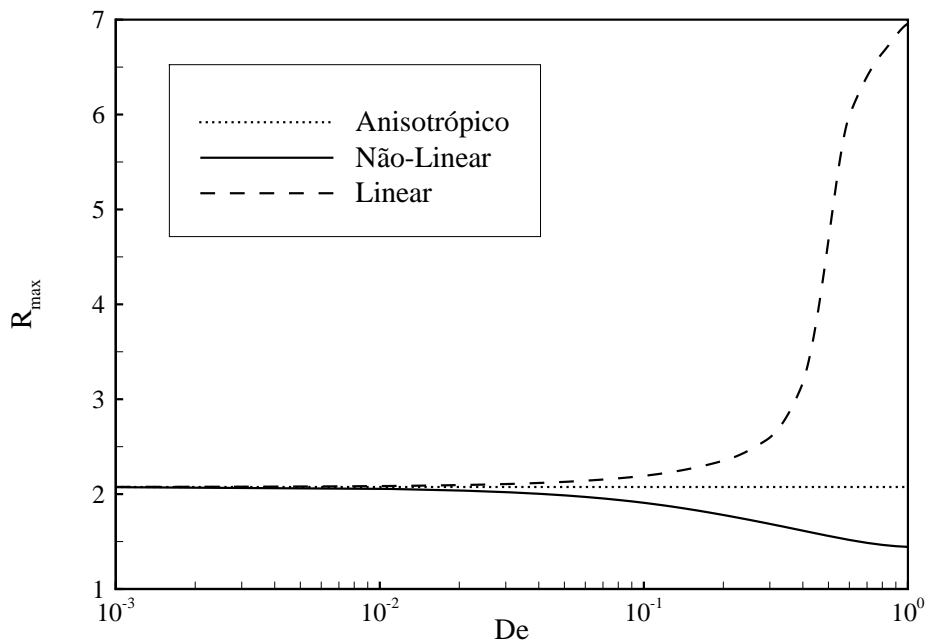


Figura 6.32: R_{max} em termos de De , com os seguintes parâmetros: $Re = We = 2$, $\phi = 0.2\%$ e $\varepsilon = 5$.

A princípio, as curvas mostram o mesmo comportamento obtido na Fig. 6.28, em que o aumento dos efeitos elásticos resulta em um aumento da amplitude máxima do raio da bolha no modelo viscoelástico linear e na diminuição de R_{max} para o não-linear. No entanto, convém notar que as características da evolução temporal do raio da bolha e da função B entre os modelos apresenta comportamento consideravelmente diferente mesmo para valores moderados da relaxação dos aditivos $De = 0.1$, conforme observado nas Figs 6.33 (a) e (b).

Não se pode olvidar que, para uma menor amplitude de excitação $\varepsilon = 3$, os modelos apresentam uma dinâmica da bolha similar (observado na Fig. 6.29). Agora, no entanto, devido ao acoplamento bolha-aditivos, o modelo não-linear mostra configuração distinta devido à contribuição elástica, enquanto a solução linear apresenta comportamento mais estável. A partir da Fig. 6.33 (b), observa-se que o módulo de relaxação dos aditivos, que representa fisicamente uma memória mais complexa do fluido, apresenta uma dinâmica não-linear, consequência direta do efeito não-linear da elasticidade.

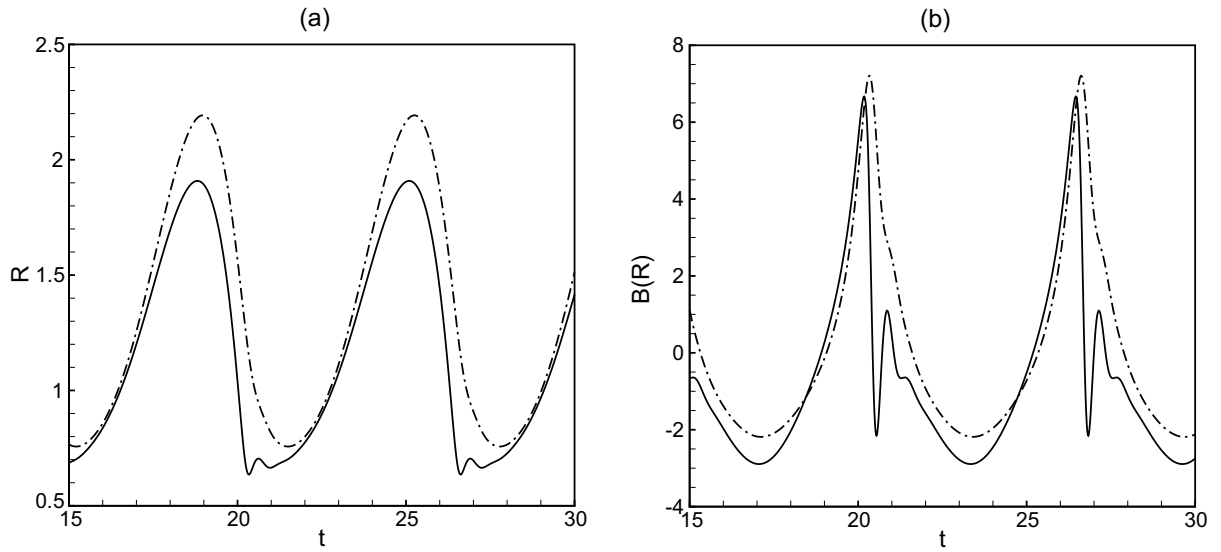


Figura 6.33: Comparativo entre modelo viscoelástico linear (traço-ponto) e não-linear Maxwell-Oldroyd (cheia) para $Re = We = 2$, $\phi = 0.2\%$, $\varepsilon = 5$ e $De = 0.1$. (a) R vs t ; (b) B vs t .

Novamente, a pressão interna da bolha é maior para o modelo não-linear (Figura 6.34 (a)). Entretanto, o modelo linear possui menos modos vibracionais, conforme a Fig. 6.34 (b), que difere do comportamento observado anteriormente quando a pressão de excitação acústica foi definida com um valor menor.

Aumentando-se o efeito elástico para $De = 1$, uma mudança drástica da evolução temporal do raio da bolha entre os modelos analisados é observada. A Figura 6.35 reflete essa análise: enquanto o modelo não-linear Maxwell-Oldroyd apresenta uma oscilação do movimento da bolha em regime permanente, com raio máximo $R_{max} \simeq 1.5$, a solução viscoelástica linear indica altas amplitudes do movimento da bolha, caracterizado por um raio máximo $R_{max} \cong 7$.

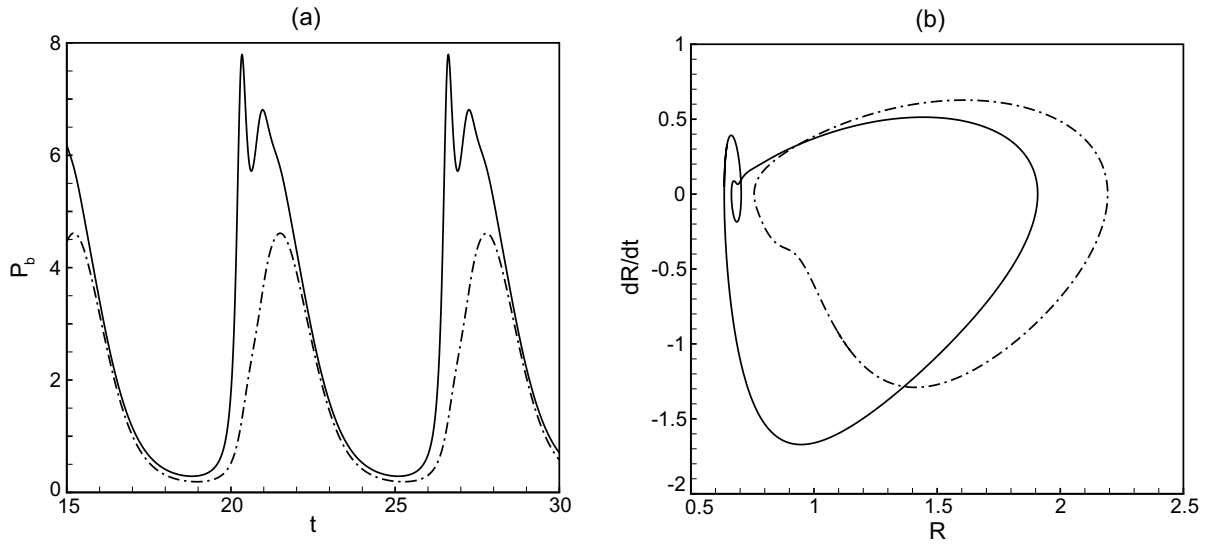


Figura 6.34: (a) p_b vs t , com relação à Fig. anterior; (b) diagrama de fase, \dot{R} vs R .

Cumprе registrar que o movimento da bolha apresenta um grau de não-linearidade elevado, em que o regime transiente do raio dura em média 20 ciclos de oscilação, alcançando uma solução permanente somente em $t \simeq 200$.

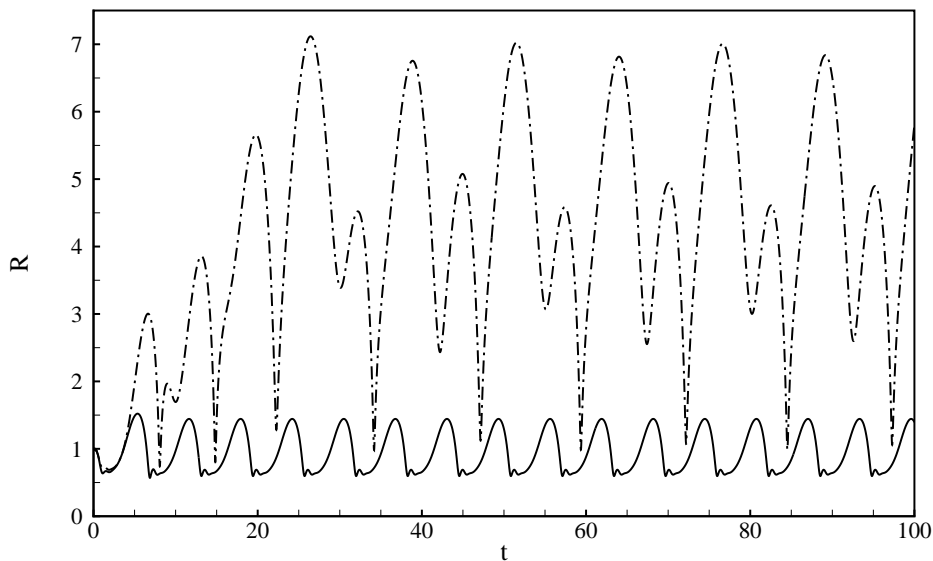


Figura 6.35: Evolução temporal do raio da bolha, seguindo os parâmetros da Figura 6.32, com $De = 1$. Curva traço-ponto – modelo linear; sólida – modelo Maxwell-Oldroyd.

Uma forma de revelar as diferenças entre os modelos pode ser apresentada em termos do erro que o raio máximo do modelo linear quando comparado ao raio máximo do modelo viscoelástico não-linear. A Figura 6.36 ilustra os erros relativos aos casos investigados nesta seção, cujas curvas denotam os erros correspondentes as Figs. 6.28 (traço-ponto) e 6.32 (sólida).

Observa-se que uma maior amplitude de excitação corresponde a um erro da ordem de 60% para De moderados ($De \sim 0.4$), enquanto uma menor amplitude de excitação apresenta erro da ordem $\sim 15\%$. Não se pode olvidar que uma análise do raio máximo representa somente um indicativo das diferenças presentes entre os modelos. Deve-se sempre analisar a evolução temporal da bolha para uma melhor análise do comportamento oscilatório da mesma.

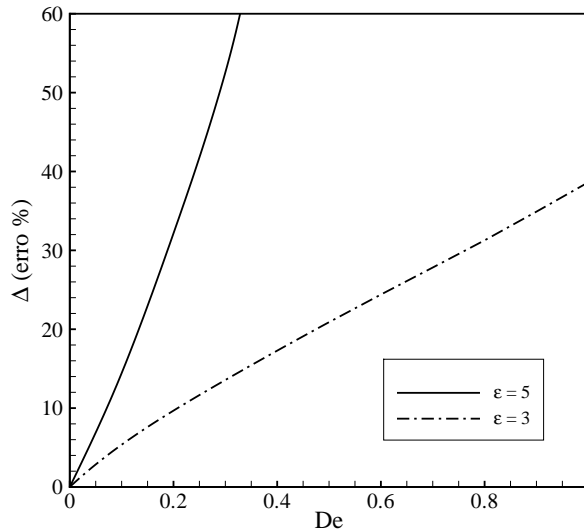


Figura 6.36: Erro apresentado entre os modelos viscoelástico linear e não-linear em função de De . Curva traço-ponto denota a Fig. 6.28 e curva sólida a Fig. 6.32.

Cumpre-se observar que uma redução da frequência de excitação também pode resultar em uma situação ainda mais crítica para o modelo linear. A Fig. 6.37 ilustra um caso em que $\omega = 0.5$. Uma diferença mais acentuada entre os modelos pode ser observada para $De = 0.1$, de acordo com a evolução temporal do raio da bolha na Fig. 6.37 (a), enquanto $De = 1$ já apresenta uma solução caótica do movimento da bolha para um modelo linear, que destoa consideravelmente do movimento oscilatório de uma bolha para o modelo Maxwell-Oldroyd.

Destaca-se, portanto, que as diferenças presentes entre os modelos são caracterizadas de acordo com os parâmetros físicos envolvidos: uma maior amplitude da pressão de excitação ou menor frequência de excitação, assim como uma redução da fração volumétrica de aditivos podem limitar o uso do modelo linear, assim como a presença de maiores efeitos de inércia e/ou efeitos elásticos.

Em virtude dessas considerações, geralmente deve-se explorar o modelo linear somente até $De \sim O(10^{-1})$, uma vez que este modelo consiste apenas em uma primeira contribuição do efeito elástico.

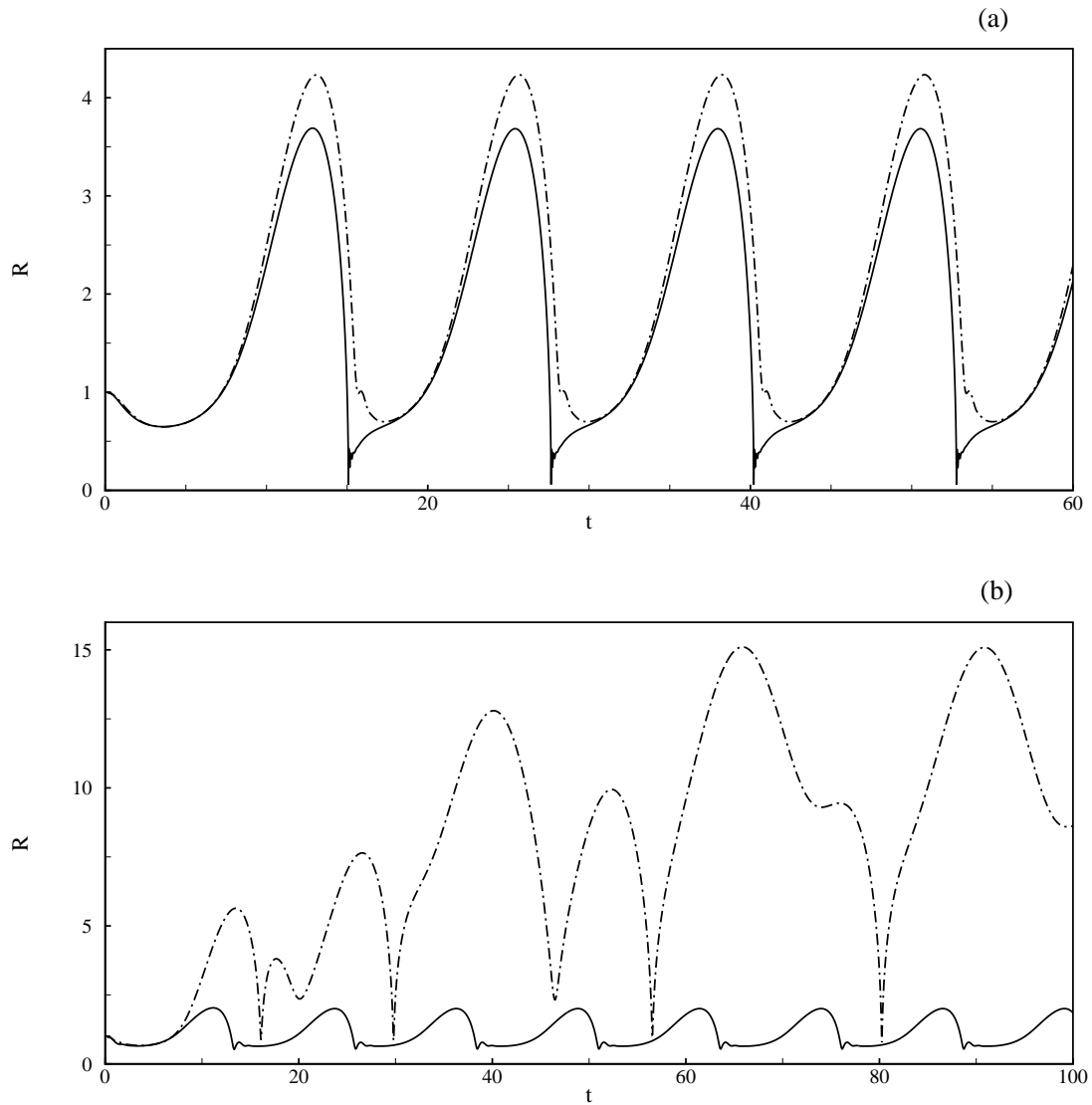


Figura 6.37: R vs t , para $De = 0.1$ (a) e $De = 1$ (b), com os parâmetros $Re = We = 2$, $\phi = 0.2\%$, $\omega = 0.5$ e $\varepsilon = 5$.

7 ORIENTAÇÃO DE ADITIVOS ANISOTRÓPICOS

Este capítulo apresenta uma investigação da influência que a orientação de aditivos anisotrópicos pode exercer na dinâmica de uma bolha imersa em um líquido no qual essas partículas encontram-se dispersas. Apesar do modelo proposto considerar um escoamento unidimensional na direção radial e uma distribuição homogênea dos aditivos presentes no líquido Newtoniano, o alinhamento desses aditivos na direção do escoamento resulta em uma solução permanente da orientação dos aditivos e consiste em uma aproximação que tende a favorecer a eficiência dos efeitos anisotrópicos na estabilização do movimento não-linear da bolha.

Em termos práticos, as fibras se distribuem inicialmente em direções aleatórias e em todo o domínio do líquido. A direção de cada fibra a cada instante depende de sua posição em relação à bolha e da dinâmica do escoamento. A evolução temporal da orientação dos aditivos é relevante para o presente problema e deve ser investigada, uma vez que a orientação das fibras altera o movimento oscilatório da bolha e vice-versa.

Em virtude dessas considerações e objetivando um modelo matemático que descreva a dinâmica de uma bolha na presença de aditivos de forma mais coerente e realista, faz-se necessário uma função orientação de aditivos anisotrópicos que relacione o acoplamento existente entre bolha-aditivos. A função que descreve a orientação dos aditivos é representada por $S(R) = \langle \cos^4(\theta) \rangle$, conforme visto no capítulo 3. A média global de orientação $\langle \cos^4(\theta) \rangle$ pode ser associada a uma média de probabilidade de aditivos no domínio da suspensão, na forma

$$S(R) = \langle \cos^4(\theta) \rangle = \int_R^\infty \int_0^{2\pi} \cos^4(\theta) P(r, R, \theta) dr d\theta , \quad (7.1)$$

em que $P(r, R, \theta)drd\theta$ é a probabilidade de um aditivo estar orientado entre θ e $\theta + d\theta$, dado que ele se encontra posicionado entre r e $r + dr$, para um raio R . Nota-se que o espaço em r é limitado entre (R, ∞) e o ângulo θ é limitado entre $(-\pi, \pi)$, uma vez que o termo $\cos^4(\theta)$ apresenta valores máximos tanto para $\theta = 0$ quanto $\theta = 2\pi$. A caracterização do alinhamento dos aditivos com o escoamento está condicionada ao ângulo de orientação $\theta = 0$, apresentando resultados incoerentes caso seja considerado duas condições de alinhamento.

Em outras palavras, $P(r, R, \theta)$ representa a função densidade de probabilidade condicional de todas as orientações de aditivos na suspensão, de acordo com o raio da bolha naquele instante, $R(t)$. É importante observar que a função densidade de probabilidade é função implícita do tempo quando depende do raio $R(t)$. A função $P(r, R, \theta)$ assume a seguinte propriedade:

$$\int_R^\infty \int_0^{2\pi} P^+(r, R, \theta)drd\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad P^+(r, R, \theta) \geq 0, \quad (7.2)$$

em que $P^+(r, R, \theta)$ denota a função densidade de probabilidade normalizada. Em seção subsequente, o cálculo de $P^+(r, R, \theta)$ como parte da solução do problema será explorado. Assim, a função orientação líquida dos aditivos é dada pela média de probabilidade da função orientação local $\cos^4\theta$, calculada nos limites de integração propostos e para uma densidade de probabilidade normalizada. Portanto, a equação (7.1) assume a seguinte forma

$$S(R) = \int_R^\infty \int_0^{2\pi} \cos^4(\theta)P^+(r, R, \theta)drd\theta \quad (7.3)$$

A orientação dos aditivos está diretamente relacionada à dinâmica do movimento da bolha. Desta forma, a descrição do efeito anisotrópico na presença de aditivos inseridos no fluido ambiente (fibras ou macromoléculas) depende, diretamente, da orientação dos aditivos representada pela função $\cos^4\theta$ com função densidade de probabilidade $P^+(r, R, \theta)$ a ser calculada em todo o domínio da suspensão, assim como da fração volumétrica de aditivos e da razão de aspecto dos mesmos.

7.1 DISTRIBUIÇÃO NORMAL DE ORIENTAÇÃO

Uma primeira abordagem da função orientação de aditivos remete ao caso em que a função densidade de probabilidade encontra-se em função do ângulo θ . Desta forma, a orientação de aditivos não é influenciada pelo movimento da bolha e vice-versa, i.e. $P(r, R, \theta) = P(\theta)$. Pode-se considerar uma distribuição normal gaussiana de probabilidade, em que

$$P(\theta) = \frac{1}{\sigma_\theta \sqrt{2\pi}} e^{-(\theta - \bar{\theta})^2 / (2\sigma_\theta^2)} , \quad (7.4)$$

o termo σ_θ denota a variância da distribuição de probabilidade e $\bar{\theta}$ representa o ângulo médio de orientação. Substituindo a equação (7.4) em (7.1), considerando a integral em dr igual à unidade, obtém-se que

$$S_0 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^4(\theta) \frac{1}{\sigma_\theta \sqrt{2\pi}} e^{-(\theta - \bar{\theta})^2 / (2\sigma_\theta^2)} d\theta , \quad (7.5)$$

em que S_0 denota a constante de orientação de aditivos a partir de uma função densidade de probabilidade $P(\theta) = P_0$. Desta forma, a função orientação de aditivos é constante para todo o domínio da suspensão de aditivos e não varia de acordo com a evolução temporal do escoamento, ou seja, não encontra-se acoplada ao movimento oscilatório do raio da bolha. A constante S_0 possui dependência quanto à variância e ângulo médio de orientação, $P_0(\sigma_\theta, \bar{\theta})$. Uma distribuição gaussiana de probabilidade apresenta, por definição, a seguinte propriedade

$$\int_{-\infty}^{\infty} P^+(\theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sigma_\theta \sqrt{2\pi}} e^{-(\theta - \bar{\theta})^2 / (2\sigma_\theta^2)} d\theta = 1 . \quad (7.6)$$

Portanto, a densidade de probabilidade normalizada consiste na própria distribuição normal de probabilidade, $P^+ = P_0(\sigma_\theta, \bar{\theta})$.

A Figura 7.1 mostra a variação da função orientação de aditivos S_0 em função do desvio padrão (σ_θ). Esta função pode ser interpretada no presente contexto como uma medida do grau de anisotropia no líquido que se encontra ao redor da bolha, como consequência da orientação média de aditivo suspensos no líquido ambiente. O erro associado com a integração numérica de S_0 é menor que 1%. Cada curva apresentada na Fig. 7.1 corresponde a um ângulo médio constante.

Nota-se que, para $\sigma_\theta = 0$, S_0 assume diferentes valores, que variam de acordo com a média do ângulo $\bar{\theta}$, uma vez que a distribuição normal de probabilidade é calculada junto ao termo $\cos^4(\theta)$. Nota-se que para o desvio padrão $\sigma_\theta = 0$, $S_0 = 1$ na condição de um ângulo médio de orientação dado por $\bar{\theta} = 0$, enquanto $S_0 = 0$ para $\bar{\theta} = \pi/2$. Esta primeira condição de orientação representa o caso limite superior, i.e. efeito anisotrópico total (partículas totalmente orientadas na direção radial). A segunda condição, $S_0 = 0$, representa uma configuração dos aditivos em que a orientação média é dada pelo ângulo $\pi/2$, ou seja, não ocorre a contribuição da anisotropia dos aditivos na estabilização do movimento oscilatório da bolha.

Registra-se que, para uma orientação $\theta = \pi/2$, o longo comprimento anisotrópico dos aditivos ℓ encontra-se orientado perpendicularmente à direção radial e apenas o comprimento da seção transversal dos aditivos, a , se apresenta alinhado com o escoamento. Naturalmente, esta orientação é imperceptível para o movimento da bolha devido ao efeito de uma viscosidade extensional no fluxo ser nula no caso em que o comprimento que fornece o efeito de anisotropia é dado pela seção transversal a . Desta forma, quando $S_0 = 0$, negligencia-se a presença de aditivos e a bolha apresenta comportamento semelhante ao caso em que esta encontra-se imersa em um fluido Newtoniano.

Cumprе ressaltar, no entanto, que uma configuração dos aditivos para $\bar{\theta} = \pi/2$ e $\sigma_\theta > 0$ representa uma condição mais favorável para atenuar o movimento bolha quando comparada à média de orientação $\pi/2$ e variância $\sigma_\theta = 0$. Essa situação ocorre porque com o aumento do desvio padrão, uma configuração de orientação cada vez mais randômica é obtida, proporcionando uma maior probabilidade de encontrar orientações diferentes da média $\pi/2$, que consiste na configuração mais desfavorável possível para

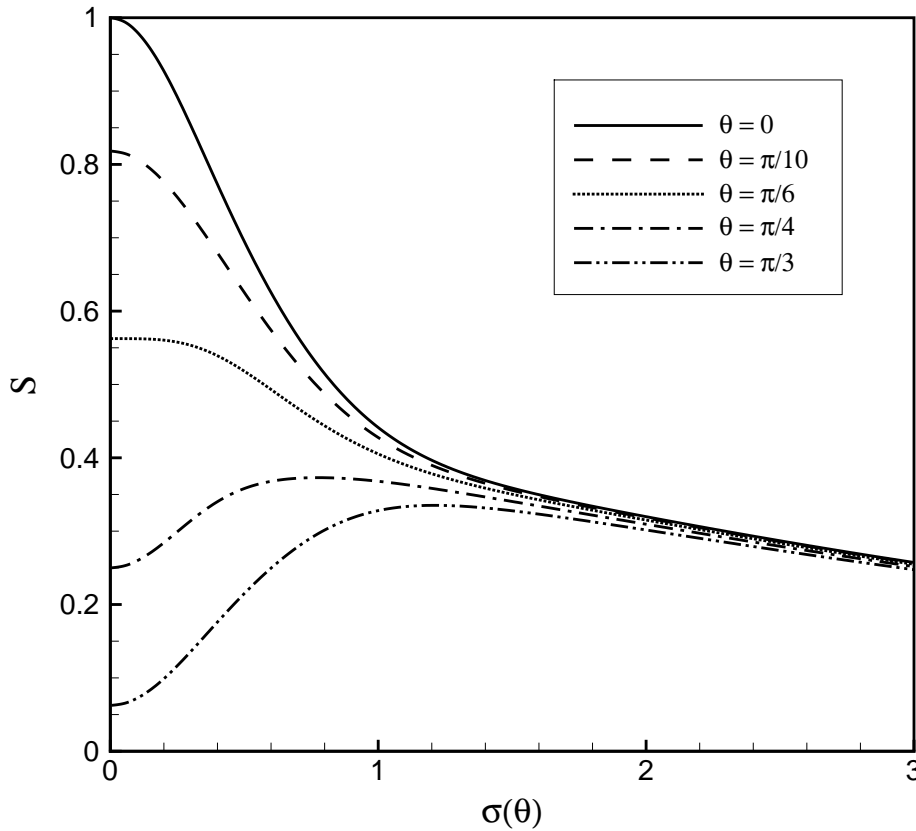


Figura 7.1: Variação da função de orientação S_0 em função do desvio padrão (σ_θ). Linha cheia: $\bar{\theta} = 0$ (limite superior); linha tracejada: $\bar{\theta} = \pi/10$; pontilhada: $\bar{\theta} = \pi/6$; tracejada com ponto: $\bar{\theta} = \pi/4$ e tracejada com pontos: $\bar{\theta} = \pi/3$.

descrever o efeito anisotrópico dos aditivos. Assim, adiciona-se ao fluido uma certa quantidade de anisotropia.

Atenta-se também para o ponto de inflexão da função S_0 , que ocorre em $\bar{\theta} = \pi/6$ (i.e. $\frac{d^2}{d\bar{\theta}^2} \cos^4(\theta) = 0$). Desta forma, de acordo com a representação de S_0 em termos do desvio padrão, dois comportamentos distintos são observados: para $\bar{\theta} < \pi/6$ é possível observar uma diminuição de S_0 com o aumento de σ_θ até um regime $\sigma_\theta \simeq 1$. O comportamento contrário é obtido quando $\bar{\theta} > \pi/6$. É importante observar que S_0 converge para um mesmo valor com o aumento do desvio padrão, independente do ângulo médio de orientação, uma vez que um desvio padrão significativo resulta em uma distribuição cada vez mais homogênea dos ângulos de orientação no intervalo de integração em θ , ou seja, π a $-\pi$.

7.1.1 Resultados da Distribuição Normal S_0

Analisa-se o comportamento oscilatório de uma bolha na presença de diferentes configurações de orientação, S_0 , que, mesmo apesar de se manter constante ao longo do escoamento e não interagir com o movimento da bolha, apresenta uma influência no efeito anisotrópico dos aditivos. A Figura 7.2 apresenta uma simulação da dinâmica de bolhas considerando um alinhamento radial dos aditivos, $S_0 = 1$ (linha sólida) e um caso em que $S_0 \cong 0.5$, caracterizada por um ângulo médio $\bar{\theta} = \pi/10$ com desvio padrão $\sigma_\theta = 1$, com os parâmetros físicos $We = Re = 15$, $\varepsilon = 1$, $\phi = 0,3\%$, $\ell/a = 100$, $De = 0$ e $\omega = 0.1$. A Figura 7.2 (a) mostra o raio da bolha R em função do tempo t . É possível observar maiores amplitudes do raio da bolha em $S_0 \cong 0.5$, consequência direta de uma não-linearidade mais acentuada quando comparada ao caso $S_0 = 1$.

A Figura 7.2 (b) apresenta o diagrama de fase, \dot{R} em função de R . É possível observar que a constante $S_0 = 0.5$, que apresenta uma configuração da orientação dos aditivos que difere da configuração de alinhamento radial de aditivos, muda drasticamente o cenário da dinâmica da bolha. O resultado aponta que a estabilização da movimento da bolha diminui quando se desvia o aditivo da direção radial. Importante notar que a diminuição dos efeitos anisotrópicos resulta na presença de mais modos vibracionais da oscilação da bolha, com diferentes períodos de oscilação (ou escalas de tempo).

É importante notar que o mesmo comportamento da curva $S_0 = 0.5$ pode ser obtido com aditivos anisotrópicos alinhados radialmente, porém com uma viscosidade extensional menor. Na equação governante de uma bolha na presença de aditivos, observa-se que a função S_0 multiplica a viscosidade extensional μ_e/μ .

Portanto, a condição $S_0 = 0.5$ resulta na diminuição do efeito anisotrópico e tem efeito análogo a uma viscosidade extensional equivalente, com aditivos alinhados radialmente em que $\mu_e/\mu' = S_0\mu_e/\mu$. A constante S_0 caracteriza o grau do efeito anisotrópico que uma viscosidade extensional apresenta, em que o efeito anisotrópico máximo é obtido para uma configuração de alinhamento radial dos aditivos, $S_0 = 1$.

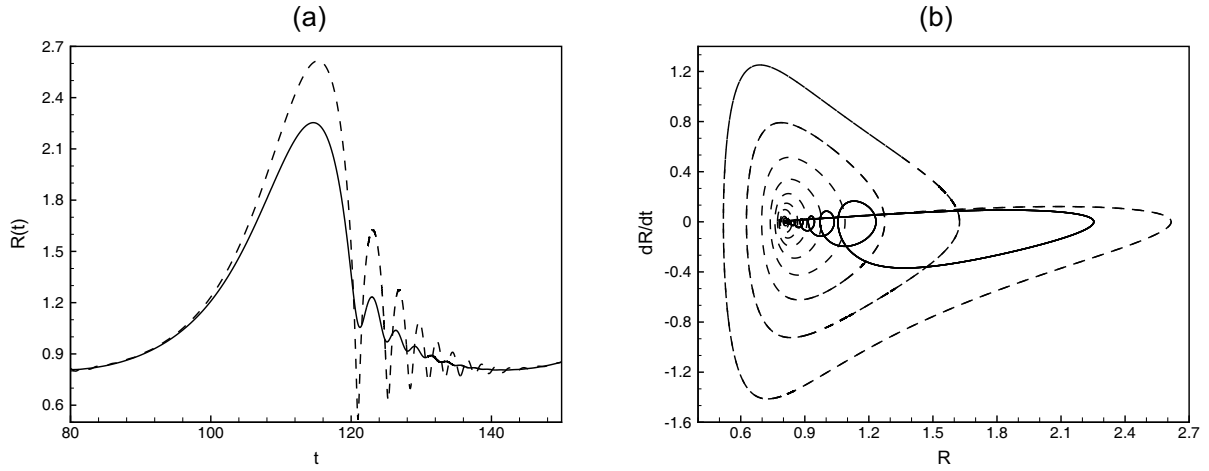


Figura 7.2: (a) $R \times t$, para $\phi = 0.3\%$, $\ell/a = 100$, $Re = 15$, $We = 15$, $\omega = 0.1$, $\varepsilon = 1$ e $De = 0$. Linha cheia: aditivos totalmente alinhados; tracejada $\sigma_\theta = 1$ e $\bar{\theta} = \pi/10$. (b) Diagrama de fase, $\dot{R} \times R$.

Os aditivos anisotrópicos tendem a resistir o estiramento causado pelo escoamento ao longo do seu eixo, i.e., da direção radial. Em virtude dessas considerações, constata-se que, configurações de aditivos cuja orientação difere da direção radial ($S_0 = 1$), resultam em uma diminuição do efeito anisotrópico que auxilia na atenuação do movimento não-linear da bolha.

A Figura 7.3 (a) mostra a amplitude do raio da bolha, R_{max} em função do desvio padrão σ_θ . Os parâmetros físicos utilizados são os mesmos da Fig. 7.2. Na Fig. 7.3 (a) o limite superior corresponde ao ângulo médio $\bar{\theta} = 0$ e o limite inferior $\bar{\theta} = \pi/2$. É possível observar que, com o aumento do desvio padrão no intervalo $0 < \sigma_\theta < 2$, a condição $\bar{\theta} = \pi/2$ apresenta uma diminuição da amplitude da bolha, uma vez que os efeitos elásticos são acentuados a partir de configurações que diferem do ângulo médio $\bar{\theta} = \pi/2$. Comportamento contrário é observado em $\sigma_\theta = 0$, já que o aumento do desvio padrão faz com que $S_0 < 1$, conforme observado na Fig. 7.1.

Ambas as curvas convergem para a mesma solução quando $\sigma_\theta > 2$, que representa uma condição de orientação randômica e independe do ângulo médio $\bar{\theta}$. Os resultados mostram que a condição de aditivos alinhados radialmente com o escoamento $S_0 = 1$, i.e. $\bar{\theta} = 0$ e $\sigma_\theta = 0$, superestima a tendência dos aditivos em estabilizar o movimento oscilatório de uma bolha.

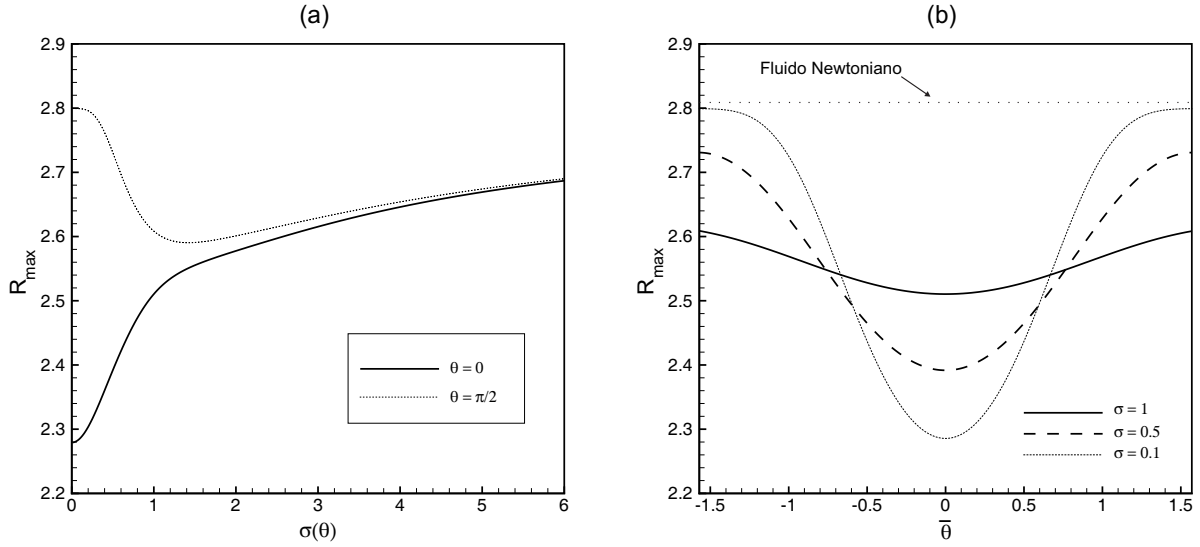


Figura 7.3: (a) R_{max} X σ_θ . Linha s3lida: $\bar{\theta} = 0$ (limite inferior); tracejada: $\bar{\theta} = \pi/6$; pontilhada $\bar{\theta} = \pi/2$. (b) R_{max} X $\bar{\theta}$, em que linha s3lida $\sigma_\theta = 1$; tracejada: $\sigma_\theta = 0.5$ e pontilhada: $\sigma_\theta = 0.1$.

A inibi33o da amplitude do raio da bolha 3 apresentada em termos da forte viscosidade extens3o associada com a alta resist3ncia para estirar o escoamento, consequ3ncia direta da presen3a de aditivos anisotr3picos orientados na dire33o radial. Para $\bar{\theta} = \pi/2$ o efeito geom3trico da anisotropia do aditivo (i.e. $\ell \gg a$), 3 completamente perdido, uma vez que o comprimento da se33o transversal a n3o ir3 produzir efeitos anisotr3picos percept3veis na dire33o radial do escoamento.

A Figura 7.3 (b) mostra R_{max} em fun33o do 3ngulo m3dio de orienta33o, $\bar{\theta}$. Na condi33o $\sigma_\theta \sim 0$, R_{max} apresenta maior valor para a condi33o $\bar{\theta} \sim \pi/2$, que consiste no caso mais desfavor3vel do efeito anisotr3pico de aditivos, i.e., as fibras encontram-se orientadas perpendicularmente 3 dire33o radial. Registra-se que quando a orienta33o m3dia global est3 pr3xima de um 3ngulo $\theta = \pi/2$, perpendicular 3 dire33o radial, o efeito anisotr3pico 3 praticamente nulo, uma vez que $S_0\mu_e/\mu \rightarrow 0$ e a bolha apresenta uma amplitude do raio pr3xima da amplitude quando imersa em um fluido Newtoniano na aus3ncia de aditivos (reta pontilhada). A menor amplitude da oscila33o da bolha 3 obtida para um 3ngulo m3dio de $\bar{\theta} = 0$, conforme esperado.

Cumprê salientar que S_0 representa uma constante que fornece a intensidade da anisotropia, descrita pela viscosidade extensional μ_e/μ . Portanto, uma mudança no desvio padrão e , ou no ângulo médio da função normal de probabilidade representa, de maneira análoga, uma mudança na fração volumétrica de aditivos e , ou razão de aspecto dos mesmos.

Os resultados mostram que a resposta não-linear do movimento da bolha é fortemente afetado pela orientação de aditivos, uma vez que S_0 multiplica a viscosidade extensional, que descreve o grau de anisotropia presente na suspensão, conforme visto anteriormente no capítulo 4. No entanto, quando a função orientação de aditivos representada pela constante S_0 , não existe acoplamento direto entre a orientação de aditivos e o movimento da bolha, assim como não existe um acoplamento dos efeitos elásticos com a orientação dos aditivos.

7.2 FORMULAÇÃO DA FUNÇÃO ORIENTAÇÃO: ACOPLAMENTO BOLHA-ADITIVOS

No intuito de se compreender melhor a influência da orientação dos aditivos no comportamento dinâmico de uma bolha, define-se a densidade de probabilidade em termos do raio da bolha e da posição dos aditivos na suspensão, i.e. $P(r, R, \theta)$, conforme a equação (7.3). Desta forma, considera-se a interação entre o movimento oscilatório do raio da bolha e a orientação das fibras e vice-versa, definindo, portanto, a função orientação de acoplamento bolha-aditivo, $S(R)$.

É importante notar que, quando a probabilidade de orientação das fibras é analisada no sistema de referência da bolha, i.e., em coordenadas esféricas (r, ϑ, φ) , a função probabilidade é definida como $P(r, R, \vartheta, \varphi)$. Assim, encontra-se a probabilidade de um aditivo estar *presente* entre o ângulo azimutal ϑ e $\vartheta + d\vartheta$ e entre o ângulo polar φ e $\varphi + d\varphi$, dado o intervalo da posição observada r e $r + dr$. No sistema de referência das fibras adotado (coordenadas polares cilíndricas - r, θ, z), encontra-se a probabilidade de um aditivo estar *orientado* entre θ e $\theta + d\theta$, dado que o mesmo se encontra posicionado entre r e $r + dr$, para um raio R . Vale lembrar que θ denota o ângulo de orientação da fibra com relação a direção radial do escoamento.

Como o escoamento da suspensão de aditivos ocorre somente na direção radial (devido ao movimento unidimensional esférico da bolha), é viável considerar a orientação dos aditivos em coordenadas polares cilíndricas, uma vez que a coordenada radial é invariante nos dois sistemas de referência: esférico e do aditivo. Desta forma, apesar de ser puramente radial, a função orientação de aditivos pode ser investigada a partir de um modelo bidimensional (r, θ) , no sistema de coordenadas dos aditivos.

É possível também analisar o sistema de referência de orientação das fibras em coordenadas esféricas, o que resulta em um modelo tridimensional de orientação, gerando uma densidade matemática elevada. No presente contexto, a simplificação para um modelo bidimensional gera resultados consistentes, uma vez que o escoamento é unidi-

mensional e a função orientação é avaliada globalmente a partir da média de probabilidade de aditivos no domínio da suspensão (líquido + aditivos).

Um modelo tridimensional para a função de orientação seria mais relevante na presença de uma bolha não-esférica e, ou na descrição da dinâmica de uma fibra (Zhou & Lin, 2008).

O teorema do transporte de Reynolds postula que a taxa de variação para uma quantidade qualquer N em um sistema é equivalente à taxa temporal de N em um volume de controle somado à taxa líquida de fluxo da propriedade N ao longo da superfície de controle (Cunha, 2009), que corresponde a

$$\frac{D}{Dt} \int_V N dV = \int_V \left(\frac{\partial N}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}N) \right) dV , \quad (7.7)$$

em que \mathbf{v} consiste na velocidade do escoamento. A equação de balanço de um problema difusivo-convectivo é dada por

$$\frac{D}{Dt} \int_V G dV = - \oint_S \chi \cdot \hat{n} dS , \quad (7.8)$$

em que χ denota o fluxo da quantidade considerada. Utilizando o teorema da divergência e substituindo a equação (7.8) em (7.7), tem-se que

$$\int_V \left(\frac{\partial N}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}N) \right) dV = - \int_V \nabla \cdot \chi dV . \quad (7.9)$$

Considerando P uma distribuição de probabilidade de orientação de partículas não-brownianas em um volume V , tem-se:

$$P^* = \int_V P dV , \quad (7.10)$$

em que P^* denota a “massa” de probabilidade ou probabilidade total em um volume V e assume valor constante. Desta forma, a taxa de variação de P ao longo do tempo é nula, ou seja:

$$\frac{D}{Dt} \int_V P dV = 0 , \quad (7.11)$$

substituindo a quantidade N por P na equação (7.9), tem-se que

$$\int_{V(t)} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}P) + \nabla \cdot \chi \right) dV = 0 . \quad (7.12)$$

O teorema da localização define que, para uma quantidade qualquer N contínua, caso a integral desta quantidade analisada em um volume V seja nula, esta quantidade N é nula também em qualquer volume $\delta V'$ que esteja inserido em V , respeitando a hipótese de um meio contínuo utilizada na descrição matemática da Mecânica dos Fluidos. Baseando-se neste teorema, como a densidade de probabilidade P consiste em uma função escalar contínua e definida para todo volume $V(t)$, obtém-se da integral (7.12) uma equação diferencial parcial local (na escala do contínuo), dada por

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}P) + \nabla \cdot \chi = 0 , \quad (7.13)$$

para o escoamento examinado, além da partícula transladar com o escoamento \mathbf{u} , esta também pode apresentar velocidade de rotação $\dot{\mathbf{s}}$, em que:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \dot{\mathbf{s}} . \quad (7.14)$$

Dada a probabilidade P , tem-se que $\chi = D_r \nabla P$, em que o termo D_r denota o coeficiente de difusão browniano. Assim, reescreve-se a equação (7.13) como sendo

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot (P(\mathbf{u} + \dot{\mathbf{s}})) = -D_r \nabla P . \quad (7.15)$$

Utilizando a propriedade $\nabla \cdot (a\mathbf{A}) = (\nabla a) \cdot \mathbf{A} + a(\nabla \cdot \mathbf{A})$, obtém-se que

$$\frac{\partial P}{\partial t} + P\nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla P + P\nabla \cdot \dot{\mathbf{s}} + \dot{\mathbf{s}} \cdot \nabla P = -D_r \nabla P . \quad (7.16)$$

Agora, para um fluido incompressível, i.e. $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, a equação (7.16) reduz-se a:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla P + P\nabla \cdot \dot{\mathbf{s}} + \dot{\mathbf{s}} \cdot \nabla P = -D_r \nabla P . \quad (7.17)$$

A equação (7.17) pode ser escrita também em termos da derivada material D/Dt , assumindo a forma

$$\frac{DP}{Dt} = -\nabla_s \cdot (\dot{\mathbf{s}}P) + \nabla_s \cdot (D_r \nabla_s P) , \quad (7.18)$$

em que ∇_s denota o operador ∇ no espaço de configuração da fibra. Cumpre registrar que a equação (7.18) remete à forma linear mais simples da equação de Fokker-Planck (e.g. Chinesta *et al.*, 2003). A equação de Fokker-Planck é comumente utilizada para simular a distribuição de probabilidade em processos estocásticos. O número de Peclet, Pe , é utilizado para descrever esse fenômeno de transporte e é definido como a razão da taxa de advecção pela taxa difusiva, $Pe = u_c \ell_c / D_r$.

Caso a força browniana seja significativa, i.e. $Pe \ll 1$, o movimento browniano apresenta papel fundamental na dinâmica dos aditivos, uma vez que os ângulos de orientação permanecem randômicos com o tempo. Observa-se, no entanto, que aditivos com alta razão de aspecto $\ell/a \gg 1$, apresentam efeitos convectivos que dominam o escoamento, i.e. os efeitos difusivos são desprezíveis e $Pe \geq 1$. Assim, no presente contexto, a influência do movimento browniano não é relevante e a equação (7.18) assume a seguinte forma:

$$\frac{DP}{Dt} = -\nabla_s \cdot (\dot{\mathbf{s}}P) . \quad (7.19)$$

Portanto, utiliza-se a função de evolução da densidade de probabilidade de uma suspensão com muitas partículas apresentada na equação (7.19), que também pode ser encontrada em outros trabalhos, e.g. Evans, 1975.

7.2.1 Análise Dimensional da Equação de Evolução de P

É conveniente realizar uma análise dimensional, dada em termos de um tempo característico $t^* = t/t_c$, comprimento característico ℓ_c e velocidade característica, $u_c = \ell_c/t_c$. O vetor \mathbf{s} pode ser escrito em termos do seu módulo $|\mathbf{s}|$, sendo

$$\mathbf{s} = |\mathbf{s}| \hat{\mathbf{s}} = L_c \hat{\mathbf{s}} , \quad (7.20)$$

em que $\hat{\mathbf{s}}$ é o vetor unitário na direção do aditivo L_c denota um comprimento característico do aditivo, $|\mathbf{s}| = L_c$, que resulta no comprimento de um aditivo, $L_c = \ell$. Para fins de compatibilidade dimensional entre a equação da bolha e a equação da probabilidade, considera-se $L_c = \ell_c = |\mathbf{s}|$. Sabendo que o comprimento $|\mathbf{s}| = L_c = \ell$ é mantido constante para todos os aditivos que se encontram imersos no fluido ambiente, $\dot{\mathbf{s}}$ é apresentado como:

$$\dot{\mathbf{s}} = |\mathbf{s}| \dot{\hat{\mathbf{s}}} , \quad (7.21)$$

e, portanto, $\dot{\mathbf{s}}$ adimensional é dado por:

$$\dot{\mathbf{s}}^* = \frac{\dot{\mathbf{s}}}{|\mathbf{s}|} t_c = (\dot{\hat{\mathbf{s}}})^* , \quad (7.22)$$

sabendo que a função orientação $S(R)$ é adimensional e é descrita a partir da integração da função densidade de probabilidade P em $drd\theta$, determina-se que P adimensional assume a forma:

$$P^* = P|\mathbf{s}| . \quad (7.23)$$

Utilizando a nova notação para as variáveis adimensionais e as escalas típicas definidas, a equação relativa à dinâmica da evolução da densidade de probabilidade (7.17), é reescrita como sendo

$$\frac{\partial P^*}{\partial t^*} \frac{1}{|\mathbf{s}|t_c} + \frac{|\mathbf{s}|}{t_c} \mathbf{u}^* \cdot \nabla_s^* P^* \frac{1}{|\mathbf{s}||\mathbf{s}|} + P^* \nabla_s^* \frac{1}{|\mathbf{s}||\mathbf{s}|} \cdot (\hat{\mathbf{s}})^* \frac{|\mathbf{s}|}{t_c} + \frac{|\mathbf{s}|}{t_c} (\hat{\mathbf{s}})^* \cdot \nabla_s^* P^* \frac{1}{|\mathbf{s}||\mathbf{s}|} = 0, \quad (7.24)$$

multiplicando-se a equação (7.24) por $t_c|\mathbf{s}|$, esta assume a forma

$$\frac{\partial P^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla_s^* P^* + P^* \nabla_s^* \cdot (\hat{\mathbf{s}})^* + (\hat{\mathbf{s}})^* \cdot \nabla_s^* P^* = 0. \quad (7.25)$$

A utilização de asteriscos será suprimida deste ponto em diante, com o propósito de apresentar uma menor densidade de nomenclatura na escrita do texto. O gradiente de um escalar, no sistema de referência das fibras, i.e. em coordenadas polares cilíndricas, desconsiderando-se a direção z , é dado por

$$\nabla_s P = \frac{\partial P}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \hat{e}_\theta. \quad (7.26)$$

Sabendo que a velocidade é unidirecional $\mathbf{u} = u_r$ e utilizando a equação (7.26) em (7.25) obtém-se

$$\frac{\partial P}{\partial t} + u_r \frac{\partial P}{\partial r} + P \nabla_s \cdot \hat{\mathbf{s}} + \frac{\partial P}{\partial r} (\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{e}_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} (\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{e}_\theta) = 0. \quad (7.27)$$

Considera-se θ o ângulo formado entre a direção de orientação da fibra e a direção radial do escoamento, conforme ilustrado na Figura 3.2. A projeção do vetor unitário \hat{e}_r na direção do vetor unitário $\hat{\mathbf{s}}$ resulta em

$$\hat{e}_r \cdot \hat{\mathbf{s}} = |\hat{e}_r| |\hat{\mathbf{s}}| \cos \theta = \cos \theta, \quad (7.28)$$

da mesma forma, projeta-se o vetor unitário \hat{e}_θ na direção $\hat{\mathbf{s}}$, obtendo então

$$\hat{e}_\theta \cdot \hat{s} = |\hat{e}_\theta| |\hat{s}| \cos(90 - \theta) = \text{sen}\theta . \quad (7.29)$$

A descrição do movimento dos aditivos deve estar relacionada a uma equação que descreva a evolução da orientação local dos mesmos no escoamento. Aris, 1962 propôs uma equação cinemática que representa a evolução da orientação de aditivos, caracterizados por sua alta razão de aspecto. A equação é dada por

$$\dot{\hat{s}} = \mathbf{W} \cdot \hat{s} + k_0(\mathbf{D} \cdot \hat{s} - \hat{s}(\hat{s} \cdot \mathbf{D} \cdot \hat{s})) , \quad (7.30)$$

em que \mathbf{W} denota o tensor vorticidade (escoamento irrotacional, $\mathbf{W} = 0$) e k_0 é uma grandeza adimensional que depende da razão de aspecto das fibras, dada por

$$k_0 = \frac{(\ell/a)^2 - 1}{(\ell/a)^2 + 1} . \quad (7.31)$$

Considerando fibras longas, i.e. $\ell/a \gg 1$, a grandeza k_0 assume valor da unidade. Relembrando que, no presente contexto, o tensor taxa de deformação é dado por $\mathbf{D} = \partial u_r / \partial r \hat{e}_r \hat{e}_r$, a equação (7.30) é reescrita como sendo

$$\dot{\hat{s}} = \frac{\partial u}{\partial r} \hat{e}_r (\hat{e}_r \cdot \hat{s}) - \frac{\partial u}{\partial r} \hat{s} (\hat{s} \cdot \hat{e}_r) (\hat{e}_r \cdot \hat{s}) = \frac{\partial u}{\partial r} [\cos \theta \hat{e}_r - \cos^2 \theta \hat{s}] . \quad (7.32)$$

Agora, sabendo que $\partial u_r / \partial r = -2R^2 \dot{R} / r^3$, obtém-se que

$$\dot{\hat{s}} = -\frac{2R^2 \dot{R}}{r^3} \cos^2 \theta [\hat{e}_r - (\cos \theta) \hat{s}] . \quad (7.33)$$

Quando o vetor \hat{s} é projetado na direção radial \hat{e}_r , obtém-se a componente \hat{s}_r , dada por

$$\hat{s}_r = \hat{s} \cdot \hat{e}_r = -\frac{2R^2 \dot{R}}{r^3} \cos^2 \theta \text{sen}^2 \theta , \quad (7.34)$$

e, a projeção do vetor $\dot{\hat{s}}$ na direção angular \hat{e}_θ resulta na componente \hat{s}_θ , sendo

$$\hat{s}_\theta = \hat{s} \cdot \hat{e}_\theta = \frac{2R^2\dot{R}}{r^3} \cos^3 \theta \text{sen} \theta , \quad (7.35)$$

reescrevendo a equação (7.27) em termos de \hat{s}_r e \hat{s}_θ , obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + u_r \frac{\partial P}{\partial r} + P \nabla_s \cdot \hat{s} + \frac{\partial P}{\partial r} \left(-\frac{2R^2\dot{R}}{r^3} \cos^2 \theta \text{sen}^2 \theta \right) \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \left(\frac{2R^2\dot{R}}{r^3} \cos^3 \theta \text{sen} \theta \right) = 0 , \end{aligned} \quad (7.36)$$

negligenciando-se a direção z , o produto escalar $\nabla_s \cdot \hat{s}$ em coordenadas cilíndricas é dado por

$$\nabla_s \cdot \hat{s} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \dot{s}_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{s}_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial \dot{s}_r}{\partial r} + \frac{\dot{s}_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{s}_\theta}{\partial \theta} , \quad (7.37)$$

substituindo \dot{s}_r e \dot{s}_θ , a equação (7.37) assume a forma

$$\nabla_s \cdot \hat{s} = \frac{4R^2\dot{R}}{r^4} \cos^2 \theta \text{sen}^2 \theta - \frac{2R^2\dot{R}}{r^4} \cos^2 \theta \text{sen}^2 \theta + \frac{2R^2\dot{R}}{r^4} (\cos^4 \theta - 3 \cos^2 \theta \text{sen}^2 \theta) , \quad (7.38)$$

que resulta em:

$$\nabla_s \cdot \hat{s} = \frac{2R^2\dot{R}}{r^4} (\cos^4 \theta - 2 \cos^2 \theta \text{sen}^2 \theta) , \quad (7.39)$$

substituindo a equação (7.39) em (7.36), tem-se finalmente que

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial r} \left(\frac{R^2\dot{R}}{r^2} - \frac{2R^2\dot{R}}{r^3} \cos^2 \theta \text{sen}^2 \theta \right) + \frac{\partial P}{\partial \theta} \left(\frac{2R^2\dot{R}}{r^4} \cos^3 \theta \text{sen} \theta \right) \\ + P \left(\frac{2R^2\dot{R}}{r^4} (\cos^4 \theta - 2 \cos^2 \theta \text{sen}^2 \theta) \right) = 0 . \end{aligned} \quad (7.40)$$

Novamente, utiliza-se do método do fator integrante para encontrar a solução da equação (7.40), conforme descrito em detalhes no Apêndice E. Desta forma, obtém-se que

$$P(r, R, \theta) = P_0 e^{-\left\{ \frac{2}{3r^4} (\cos^2 \theta (3 \cos^2 \theta - 2)) (R^3 - R_0^3) \right\}}, \quad (7.41)$$

em que P_0 denota a função gaussiana, $P_0(\sigma_\theta, \bar{\theta})$, explorada na seção 7.1. Com o propósito de apresentar uma forma menos densa da eq. (7.41), os termos que dependem do ângulo θ podem ser representados por $Z(\theta) = \cos^2 \theta (3 \cos^2 \theta - 2)$ e, portanto, a equação (7.41) assume a forma:

$$P(r, R, \theta) = P_0 e^{-\left\{ \frac{2}{3r^4} Z(\theta) (R^3 - R_0^3) \right\}}. \quad (7.42)$$

Convém lembrar que a função orientação de aditivos, $S(R)$, é escrita em termos de uma média de probabilidade (média global) entre a função $\langle \cos^4 \theta \rangle$, a partir de uma densidade de probabilidade normalizada, $P^+(r, R, \theta)$ (que depende implicitamente do tempo, devido ao acoplamento com o movimento do raio da bolha $R(t)$), dada por

$$S(R) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_R^{\infty} \cos^4 \theta P^+(r, R, \theta) dr d\theta. \quad (7.43)$$

7.2.2 Normalização da Função de Orientação Bolha-Aditivo

Conforme já mencionado no início do capítulo 7, a integral em todo o espaço da solução (domínio do escoamento) da função densidade de probabilidade normalizada de orientação de aditivos na suspensão, $P^+(r, R, \theta)$, é igual à unidade, ou seja, tal que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_R^{\infty} P^+(r, R, \theta) dr d\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad P^+(r, R, \theta) \geq 0. \quad (7.44)$$

Para normalizar a função densidade de probabilidade $P(r, R, \theta)$, primeiramente realiza-se a integração da probabilidade no intervalo desejado, seguindo o mesmo procedimento de McQuarrie, 2000, em um contexto de mecânica estatística. Portanto,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_R^{\infty} P(r, R, \theta) dr d\theta = C_o , \quad (7.45)$$

em que C_o é o valor numérico (constante) da integral de $P(r, R, \theta)$ em todo o domínio do escoamento (ou suspensão). Agora, dividindo ambos os lados da equação (7.45) por C_o , obtém-se

$$\frac{1}{C_o} \int_{-\pi}^{\pi} \int_R^{\infty} P(r, R, \theta) dr d\theta = 1 , \quad (7.46)$$

sabendo que C_o é constante, a mesma pode ser inserida na integral, reduzindo a equação (7.46) para

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_R^{\infty} \frac{P(r, R, \theta)}{C_o} dr d\theta = 1 . \quad (7.47)$$

Comparando a equação (7.44) e (7.48), define-se a função densidade de probabilidade normalizada na forma

$$P^+(r, R, \theta) = \frac{P(r, R, \theta)}{C_o} . \quad (7.48)$$

Substituindo, portanto, a equação (7.48) em (7.43), tem-se

$$S(R) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_R^{\infty} \cos^4 \theta \frac{P(r, R, \theta)}{C_o} dr d\theta , \quad (7.49)$$

ou, utilizando a eq. (7.45), escreve-se (7.49) na forma final

$$S(R) = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \int_R^{\infty} \cos^4 \theta P(r, R, \theta) dr d\theta}{\int_{-\pi}^{\pi} \int_R^{\infty} P(r, R, \theta) dr d\theta} . \quad (7.50)$$

Destá maneira, a partir da função densidade de probabilidade expressa na equação (7.42), com a condição inicial de função densidade de probabilidade descrita por uma distribuição normal gaussiana, i.e. $P_0(\sigma_\theta, \bar{\theta})$, a equação (7.50) é reescrita conforme segue abaixo

$$S(R) = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \int_R^{\infty} \cos^4 \theta P_0 e^{-\left\{\frac{2}{3r^4} Z(\theta)(R^3 - R_0^3)\right\}} dr d\theta}{\int_{-\pi}^{\pi} \int_R^{\infty} P_0 e^{-\left\{\frac{2}{3r^4} Z(\theta)(R^3 - R_0^3)\right\}} dr d\theta} . \quad (7.51)$$

7.3 CAMADA LIMITE DE PROBABILIDADE

Cumpramos ressaltar neste passo que os aditivos encontram-se inicialmente orientados de acordo com uma distribuição normal de probabilidade, conforme discutido na seção 7.1. Com a evolução temporal do escoamento (ou do movimento oscilatório da bolha), os aditivos tendem a se orientar regidos pela função densidade de probabilidade $S(R)$. Função esta que leva em consideração o acoplamento bolha-aditivos, dado pela equação (7.51). Verifica-se, no entanto, que este acoplamento apresenta um decaimento exponencial do tipo e^{-1/r^4} .

Argumenta-se que, a partir de um volume V_{r^*} na suspensão, definido em termos de um raio r^* , o movimento oscilatório da bolha não afeta mais a orientação das fibras, i.e. não ocorre mais o acoplamento bolha-aditivos. Desta forma, aditivos que se encontram fora deste “raio de interação” bolha-aditivos (ou raio de influência) $r > r^*$ possuem orientação inicial regida pela função densidade de probabilidade P_0 , sendo a mesma a solução permanente para a função densidade de probabilidade de orientação. A densidade de probabilidade possui um comportamento dinâmico que decai exponencialmente com o aumento de r até alcançar a função densidade saturada P_0 , em $r = r^*$.

O intervalo de integração da equação (7.51) em dr é definido com $R \leq r < \infty$, que consiste basicamente a região da suspensão de aditivos. Caso a integral da equação (7.51) seja calculada em pontos fora da região de influência do movimento da bolha sob a orientação dos aditivos, esta passa a ser pouco significativa e a função $S(R)$ tende para valores próximos àqueles calculados com uma função densidade de probabilidade gaussiana P_0 . Neste caso, portanto, a região de interação bolhas-aditivos $R \leq r \leq r^*$ passa a representar uma contribuição pequena quando todo o intervalo de integração $R \leq r < \infty$ é considerado.

Pode-se realizar uma analogia da presente situação com o estudo da camada limite hidrodinâmica de um escoamento em torno de um corpo rígido em altos números de Reynolds.

Quando o escoamento é calculado para distâncias da parede do corpo muito maiores do que a espessura da camada limite, os efeitos viscosos no interior desta camada limite podem ser desprezados, uma vez que os efeitos de inércia dominam praticamente todo o domínio do escoamento para $Re \rightarrow \infty$.

Em virtude dessas considerações, convém explorar a função de orientação com acoplamento aditivo-bolha somente na escala em que esta interação ocorre. A proposta consiste em delimitar o intervalo de integração em dr entre o raio da bolha, $R(t)$ e o raio de interação, r^* . O comprimento deste raio de influência na suspensão, $r^* - R(t)$ é considerado como a espessura da camada limite de orientação, δ . Os efeitos de orientação são observados, portanto, entre $P^+(R, \theta)$ e $P^+(r^*, R, \theta)$, que resulta em $P^+(\delta, R, \theta)$, região considerada como a “camada limite de probabilidade”, conforme ilustrado na Figura 7.4 (remetendo novamente à semelhança com a camada limite hidrodinâmica).

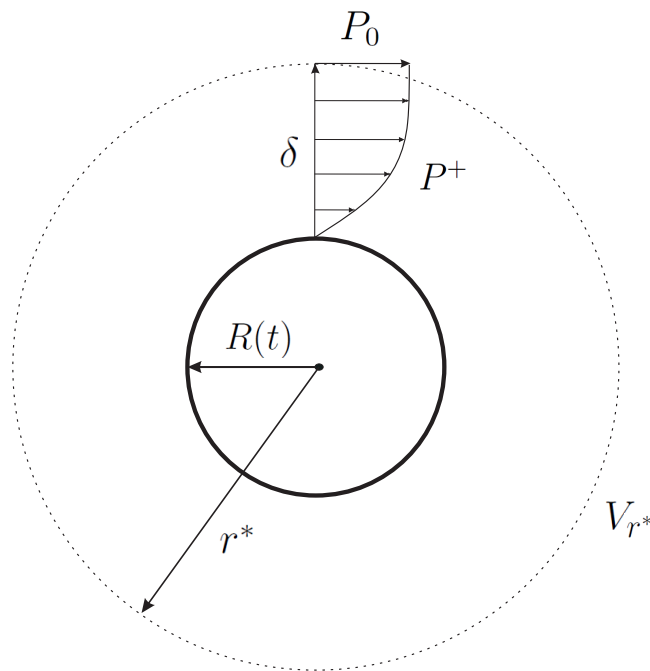


Figura 7.4: camada limite de probabilidade δ , região em que o acoplamento do movimento da bolha com a orientação de aditivos é relevante.

É importante conceber que, enquanto os efeitos convectivos estão associados à translação dos aditivos de acordo com u_r , os efeitos difusivos estão relacionados ao movimento de rotação dos aditivos, descrito em termos de \dot{s} . Ambos efeitos compõem o mecanismo de balanço na camada limite.

Assim como a espessura da camada limite hidrodinâmica é definida quando a velocidade interna na camada limite atinge 99% da velocidade do escoamento da corrente livre U_0 , a camada limite de probabilidade é considerada até $P(r, R, \theta)$ atingir 99% da orientação gaussiana inicial da suspensão, P_0 , expresso como

$$P_\delta \cong 0.99 \cdot P_0 . \quad (7.52)$$

em que P_δ representa a densidade de probabilidade $P(\delta, R, \theta)$ na interface da camada limite. Importante observar que P_δ representa a condição de parada da simulação numérica quando a integral da equação (7.51) é calculada.

7.3.1 Análise da Função Densidade de Probabilidade

O cálculo da integral dupla representada pela equação (7.51) é realizado a partir do método de integração do trapézio. O incremento de integração em r é da ordem $\Delta r = 10^{-3}$ e o incremento em θ é da ordem $\Delta \theta = 3 \times 10^{-3}$ radianos. O cálculo da integral apresenta um erro menor que 0,01%.

Primeiramente, é necessário encontrar a espessura da camada limite δ , quando $P_\delta \cong 0.99P_0$. Como ocorre o decaimento da probabilidade $\cos^4(\theta)P(r, R, \theta)$, $S(R)$ retorna à constante S_0 , definida na eq. (7.5). Pode-se analisar o comportamento da função densidade de probabilidade somente em termos do raio r . Considera-se que:

$$L(r, R) = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^4(\theta)P(r, R, \theta)d\theta}{\int_{-\pi}^{\pi} P(r, R, \theta)d\theta} , \quad (7.53)$$

em que $L(r, R)$ representa a função densidade de probabilidade após realizar a integração na variável θ . A Figura 7.5 apresenta $L(r)$ em função de r , para um raio da bolha mantido constante $R = 0.5$ e raio inicial $R_0 = 1$. A probabilidade inicial utilizada é $P_0(\sigma_\theta = 0.6, \bar{\theta} = \pi/6)$, que resulta em $S_0 \cong 0.5$. O raio de interação encontrado foi $r^* = 2.64$, resultando em um comprimento da camada limite $\delta = 2.14$.

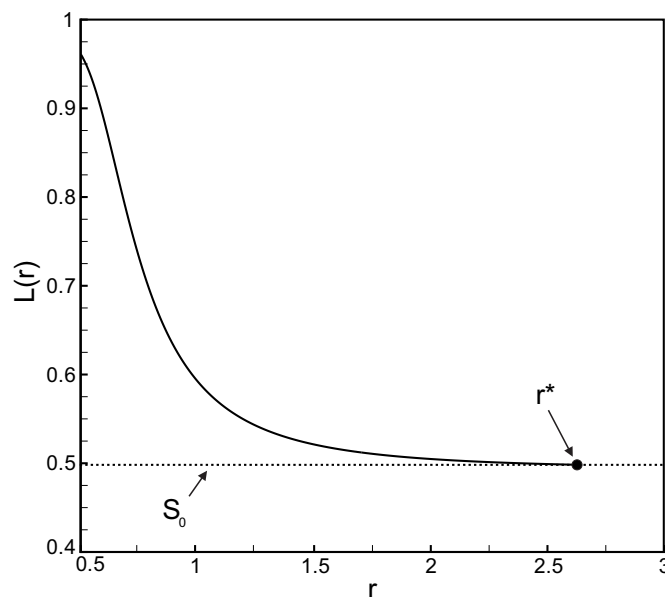


Figura 7.5: Função $L(r)$ em termos de r , para um raio inicial $R = 0.5$ e $S_0 \cong 0.5$.

É importante registrar que, com a mudança do raio da bolha R , altera-se também o raio de interação da função de orientação bolha-aditivos e conseqüentemente a espessura da camada limite. Pela Figura 7.6 é possível observar diferentes raios de interação para os raios da bolha $R_1 = 0.1$ (linha cheia), $R_2 = 0.5$ (traço-ponto) e $R_3 = 0.8$ (tracejada). Os comprimentos da camada limite de orientação apresentados possuem os valores: $\delta_1 = 2.65$, $\delta_2 = 2.14$ e $\delta_3 = 1.3$.

Nota-se que, quando $R = R_0$, a solução $S(R)$ retorna ao valor da orientação gaussiana inicial, S_0 , uma vez que a exponencial da densidade de probabilidade da equação (7.42) apresenta o valor da unidade, i.e. $P = P_0$ (conforme ilustrado na reta pontilhada da Fig. 7.6).

Para a condição $R > R_0$, cumpre examinar novamente a função densidade de probabilidade $P(r, R, \theta)$, equação (7.42). Analisando a exponencial em $P(r, R, \theta)$, existe uma troca de sinal no termo $(R^3 - R_0^3)$ quando $R > R_0$ e a exponencial da função densidade de probabilidade apresenta sinal positivo, melhor examinado a partir do comportamento da função $L(r)$, dado pela Figura 7.7.

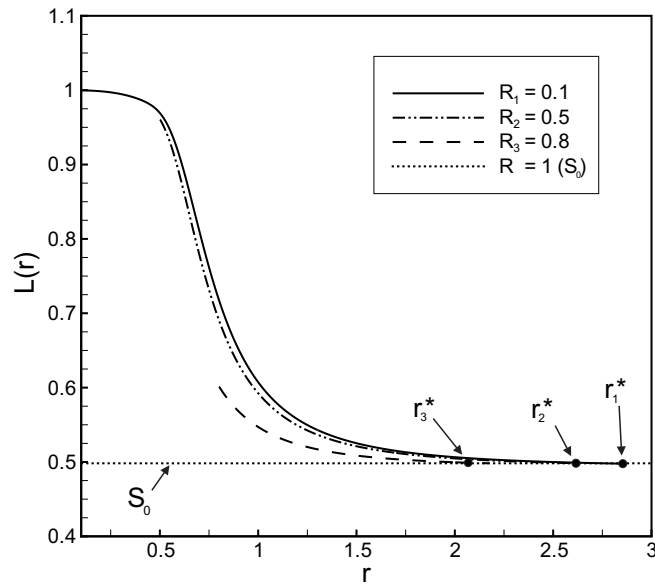


Figura 7.6: Função $L(r)$ em termos de r , para diferentes raios da bolha e $S_0 \cong 0.5$.

Desta forma, a função $L(r)$ apresenta comportamento contrário ao da Figura 7.6, que representa o caso em que $R < R_0$. Um aumento do raio R gera um valor inicial da função $L(r)$ que se afasta do valor constante da probabilidade inicial P_0 , o que favorece o aumento do raio de interação e, conseqüentemente, da espessura da camada limite de orientação.

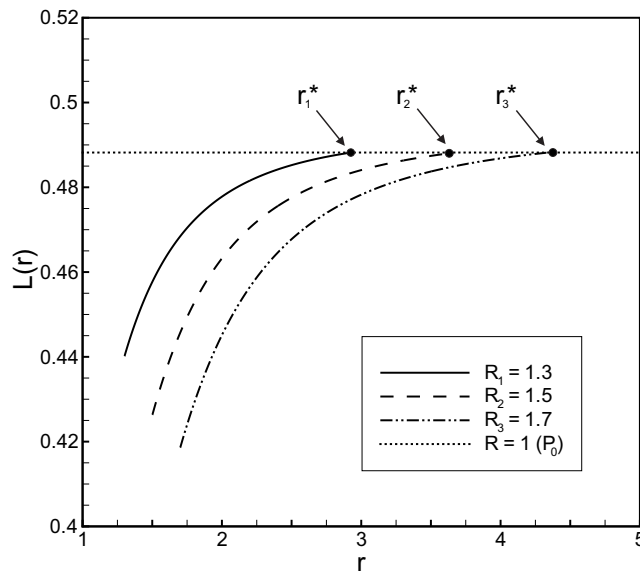


Figura 7.7: Função $L(r)$ em termos de r , para diferentes raios da bolha ($R > R_0$) e $S_0 \cong 0.5$.

Pode-se também avaliar a evolução da espessura da camada limite de orientação, δ , em função do raio R , conforme observado na Figura 7.8. Nota-se que a curva apresenta dois comportamentos distintos. Quando $R < R_0$, o raio de interação decai com o aumento do raio da bolha R , alcançando um mínimo para $R = R_0 = 1$, i.e., $\delta = 0$, uma vez que toda a suspensão de aditivos apresenta a mesma configuração dada pela condição inicial, $S(R) = S_0$. Quando $R > R_0$, o raio de interação aumenta com o raio da bolha, R , conforme observado na Fig. 7.7.

Na seção seguinte desenvolve-se uma solução assintótica para determinar a espessura da camada limite de probabilidade, a partir da função densidade de probabilidade P_δ^+ . Maiores considerações acerca do comportamento de δ serão realizados.

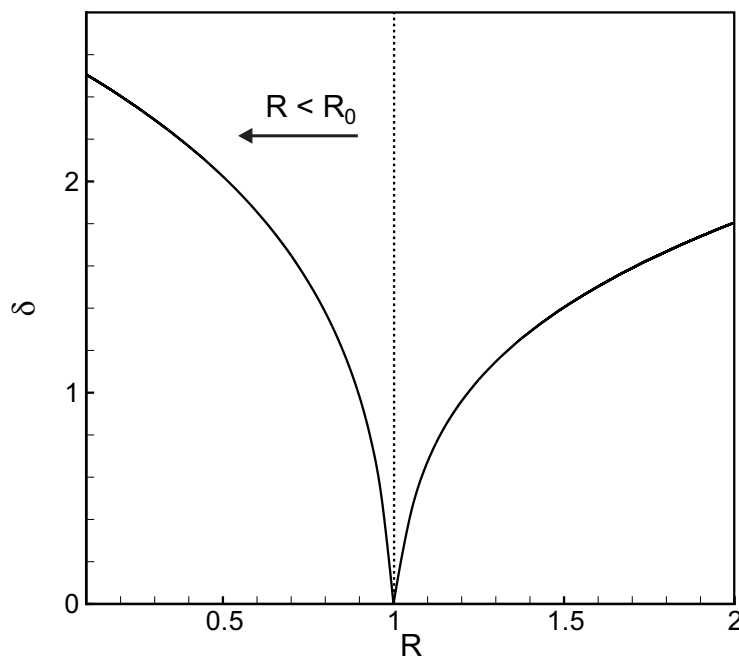


Figura 7.8: δ em função do raio da bolha R , para $R_0 = 1$.

7.3.2 Solução Assintótica da Espessura da Camada Limite de Probabilidade δ

Cumpre-se ressaltar neste passo que a função densidade de probabilidade obtida na equação (7.42) pode ser avaliada para o raio de interação, $r = r^*$, ou seja, para a espessura da camada limite de orientação, $r = R + \delta$, em que

$$P_\delta = P_0 e^{-\left\{ \frac{2}{3(R+\delta)^4} Z(\theta)(R^3 - R_0^3) \right\}} . \quad (7.54)$$

Nota-se que $P = P_\delta$. Para a condição $P_\delta \simeq 0.99P_0$, a equação (7.54) fornece então

$$C_\delta = e^{-\left\{ \frac{2}{3(R+\delta)^4} Z(\theta)(R^3 - R_0^3) \right\}} , \quad (7.55)$$

em que C_δ denota a constante de aproximação da solução da orientação inicial gaussiana, $C_\delta \simeq 0.99$. Pode-se integrar a equação (7.55) com relação a θ , em que

$$2\pi C_\delta = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\left\{ \frac{2}{3(R+\delta)^4} Z(\theta)(R^3 - R_0^3) \right\}} d\theta . \quad (7.56)$$

Apresenta-se que uma simplificação da nomenclatura por meio do termo $g(R, \delta)$, em que

$$g(R, \delta) = \frac{2(R^3 - R_0^3)}{3(R + \delta)^4} , \quad (7.57)$$

utilizando a equação (7.57), (7.56) reduz-se a:

$$2\pi C_\delta = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-(Z(\theta)g(R,\delta))} d\theta . \quad (7.58)$$

A partir do cálculo da integral em (7.58), para um raio da bolha R constante, determina-se o valor da espessura da camada limite de probabilidade referente ao mesmo. É importante notar que, analisando o raio da bolha utilizado, uma solução assintótica da equação (7.58) pode ser proposta.

Registra-se que uma função $f(x) = e^x$ pode ser escrita em termos de uma série de Maclaurin, dada por

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \quad (7.59)$$

Salienta-se que, quando o raio da bolha é da ordem do raio inicial, $R \sim R_0$, a quantidade $g(R, \delta)$ assume valores pequenos, devido ao termo $(R^3 - R_0^3)$. Em virtude dessas considerações e, representando a exponencial contida em (7.58) a partir de uma série de Maclaurin, obtém-se que

$$e^{-(Z(\theta)g(R,\delta))} \sim 1 - Z(\theta)g(R, \delta) , \quad (7.60)$$

em que somente os dois primeiros termos da série são considerados. Nesta condição, substitui-se a equação (7.60) em (7.58), sendo que

$$2\pi C_\delta = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta - \int_{-\pi}^{\pi} Z(\theta)g(R, \delta)d\theta , \quad (7.61)$$

que resulta em:

$$2\pi(C_\delta - 1) = -g(R, \delta) \int_{-\pi}^{\pi} Z(\theta)d\theta , \quad (7.62)$$

representa-se a integral em (7.62) pela constante C_θ . Portanto, tem-se que

$$g(R, \delta)C_\theta = 2\pi(1 - C_\delta) , \quad (7.63)$$

substituindo a equação (7.57) em (7.63), após algumas manipulações algébricas, tem-se que

$$\delta = \left\{ \frac{(R^3 - R_0^3)C_\theta}{3\pi(1 - C_\delta)} \right\}^{1/4} - R, \quad (7.64)$$

É importante observar que a constante C_δ consiste em uma constante de calibração da solução assintótica para δ , fornecida pela eq. (7.64). Analisa-se a solução assintótica para dois intervalos do raio da bolha. Primeiramente, a Figura 7.9 mostra uma comparação entre a solução assintótica (traço-ponto) e a numérica (sólida) para a condição $R < R_0$. A constante de calibração utilizada foi $C_\delta(R < R_0) = 0.9933$. Nota-se que ambas soluções apresentam a mesma resposta. No entanto, na região $R \cong R_0$, a solução assintótica mostra uma pequena divergência, conforme observado pelo encarte da Fig. 7.9.

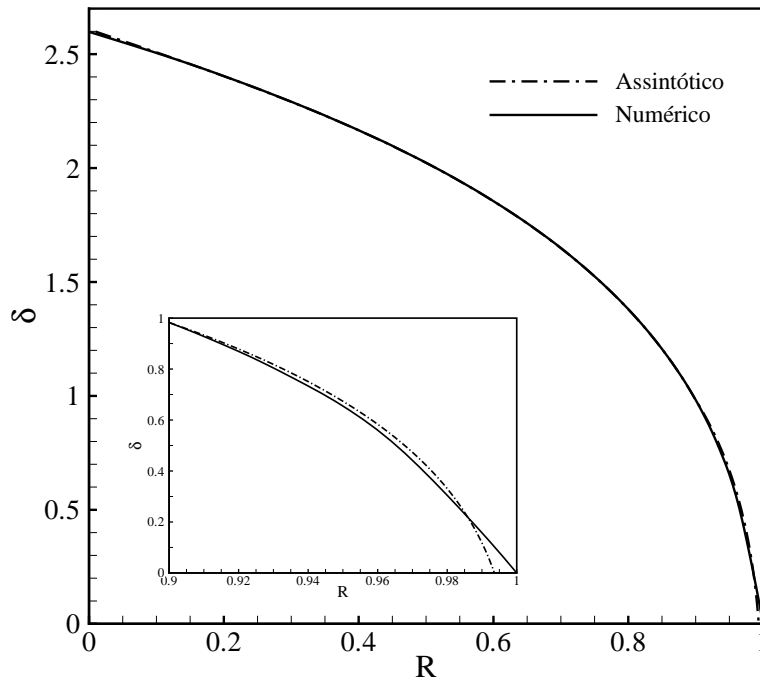


Figura 7.9: δ em função do raio da bolha R na condição $R < R_0$, em que $R_0 = 1$. Curva sólida: solução numérica e curva traço-ponto: solução assintótica.

Para $\delta = 0$, a diferença entre as soluções é $\simeq 0.6\%$ e não corresponde a um erro significativo. Este erro acontece porque, quando $R = R_0$, a equação (7.64) fornece um valor da espessura da camada limite $\delta = -R$. Nota-se que o valor da solução numérica é $\delta = 0$. A diferença apresentada tem origem na expansão da solução a partir da série desenvolvida, em que somente o primeiro termo da série de Maclaurin foi considerado.

A Figura 7.10 mostra a comparação entre a solução assintótica e numérica, agora na condição $R > R_0$. A constante de calibração é dada por $C_\delta(R > R_0) = 0.9897$. Novamente, nota-se que a solução assintótica apresenta resultados semelhantes à solução numérica, divergindo somente para o regime $R \cong R_0$, i.e. no intervalo $1 < R < 1.04$, apresentando um erro da ordem $\sim 1\%$.

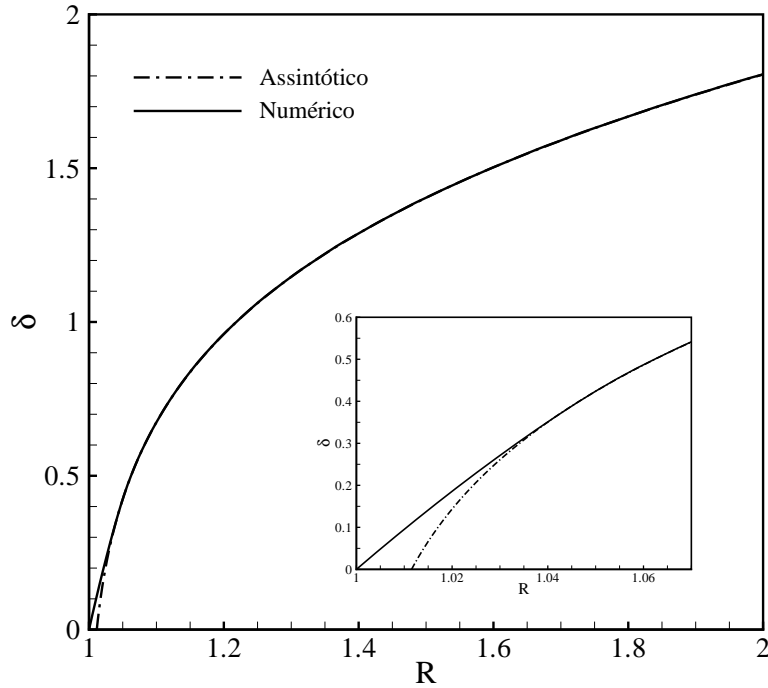


Figura 7.10: δ em função de R na condição $R > R_0$, em que $R_0 = 1$.

Conclui-se que, para regiões em que a camada limite δ é praticamente desprezível, i.e. $R \simeq R_0$, a solução assintótica apresenta um pequeno erro quando comparada à solução numérica. Pode-se diminuir ainda mais este erro, a partir da utilização de outros termos da série de Maclaurin para a solução assintótica de δ , uma vez que a aproximação realizada considera somente o primeiro termo da série, $O(g(R, \delta))$. No entanto, cumpre registrar que a solução assintótica apresentou resultados semelhantes à solução numérica, principalmente para os demais valores do raio da bolha, fora da região $R \simeq R_0$.

A equação (7.58) que remete à espessura da camada limite de orientação, também pode ser avaliada na condição $R \ll R_0$. Considerando uma função $f(x) = (1 + x)^n$,

em que x apresenta valor pequeno $x \ll 1$, pode-se apresentar esta função em termos de uma série binomial, dada por

$$(1+x)^n = 1 + nx + (n-1)\frac{x^2}{2!} + \dots \quad (7.65)$$

Observa-se que a equação (7.56), que denota a função $g(R, \delta)$, na condição $R \ll R_0$, pode ser reescrita como

$$g(R, \delta) = \frac{-2R_0^3}{3\delta^4(1+R/\delta)^4}, \quad (7.66)$$

e, para $R/\delta \ll 1$, a quantidade R/δ na equação (7.66) pode ser apresentada em termos de uma série binomial, obtendo

$$(1+R/\delta)^4 \sim 1 + 4R/\delta, \quad (7.67)$$

Na aproximação realizada pela equação (7.67), foi considerado o primeiro termo da série binomial. Substituindo a eq. (7.67) em (7.66), tem-se que

$$g(R, \delta) = \frac{-2R_0^3}{3\delta^4(1+4R/\delta)}, \quad (7.68)$$

Registra-se que, na condição $R \ll R_0$, tem-se que $R \ll \delta$, conforme pode ser observado pela Fig. 7.9. Em virtude dessas considerações, a função $g(R, \delta)$ assume a seguinte forma

$$g(\delta) = \frac{-2R_0^3}{3\delta^4} \rightarrow 2\pi C_\delta = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\left(\frac{2R_0^3}{3\delta^4} Z(\theta)\right)} d\theta. \quad (7.69)$$

Portanto, substituindo a equação (7.69) em (7.58), nota-se que, para o caso $R \ll R_0$, a determinação de uma espessura da camada limite de orientação independe do raio da bolha R e é função somente do raio inicial da bolha R_0 .

7.3.3 Análise da Função Orientação de Aditivos $S(R)$

Considerando as condições iniciais da bolha e da distribuição de probabilidade inicial, R_0 e S_0 , respectivamente, pode-se representar a função orientação de aditivos $S(R)$ em função do raio da bolha R , de acordo com o intervalo de integração em r situado entre R e o respectivo raio de interação bolha-aditivos, r^* , ou seja, em termos da espessura da camada limite de orientação δ . A Figura 7.11 (a) ilustra $S(R)$ em função de R , para as condições iniciais $S_0 \cong 0.5$ (curva pontilhada) e $R_0 = 1$.

Primeiramente, pode-se observar que a função $S(R)$ apresenta uma descontinuidade na região $R \simeq R_0$, explicada mais adiante. Nota-se também que dois limites assintóticos são observados. Um limite é obtido quando o raio da bolha possui um valor pequeno, $R < 0.4$, em que $S(R) \cong 1$. Esta condição indica um alinhamento radial das partículas, $S(R) \cong 1$.

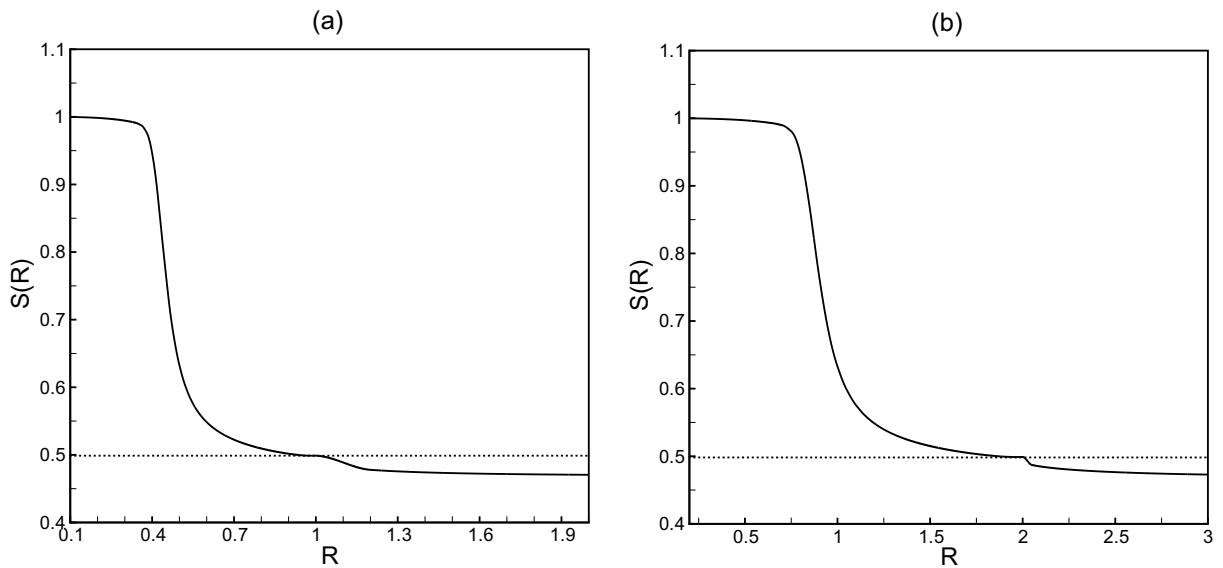


Figura 7.11: Função de orientação bolha-aditivos $S(R)$ em função do raio da bolha R , para $S_0 \cong 0.5$ e (a) Raio inicial $R_0 = 1$; (b) Raio inicial $R_0 = 2$.

Outro limite consiste em um raio $R > 1.6$, proveniente do comportamento da função $P(r, R, \theta)$ quando $R > R_0$, conforme analisado anteriormente. O limite assintótico em $R > 1.6$ apresenta uma orientação $S(R) < S_0$, i.e., partículas que se encontram em orientações mais randômicas que a condição gaussiana inicial de orientação.

Cumpramos registrar que a diferença entre a orientação inicial e a orientação neste limite assintótico $R > R_0$ é aproximadamente $S(R > R_0) \cong 0.94S_0$. Tal comportamento pode ser explicado utilizando novamente a Fig. 7.7, em que a faixa dos valores apresentados pela função $L(r)$ são similares à probabilidade inicial de orientação.

A Figura 7.11 (b) mostra novamente o comportamento da função orientação de aditivos $S(R)$ em função do raio da bolha R , para um raio inicial $R_0 = 2$. Ressalta-se que o aumento do raio inicial afeta de maneira significativa a faixa de valores dos limites assintóticos apresentados: para $R < R_0$, tem-se que uma condição de alinhamento dos aditivos com a direção radial para um raio da bolha $R < 0.7$. Para o limite $R > R_0$, a saturação da função $S(R)$ é obtida na condição $R > 2.5$.

A Figura 7.12 mostra $S(R)$ em função do raio R para diferentes condições iniciais S_0 . Como pode-se verificar, independente da condição inicial de orientação imposta, o limite assintótico em $R < R_0$ permanece o mesmo, i.e. partículas alinhadas com o escoamento. A determinação do limite $R > R_0$ é função da distribuição de probabilidade inicial, em que $S_0(\sigma_\theta = 0.8, \bar{\theta} = \pi/3) \cong 0.3$ possui limite assintótico com valor $S_0(R > R_0) \cong 0.94S_0$ e $S_0(0.5, 0) \cong 0.7$ possui limite $S(R > R_0) \cong 0.95S_0$.

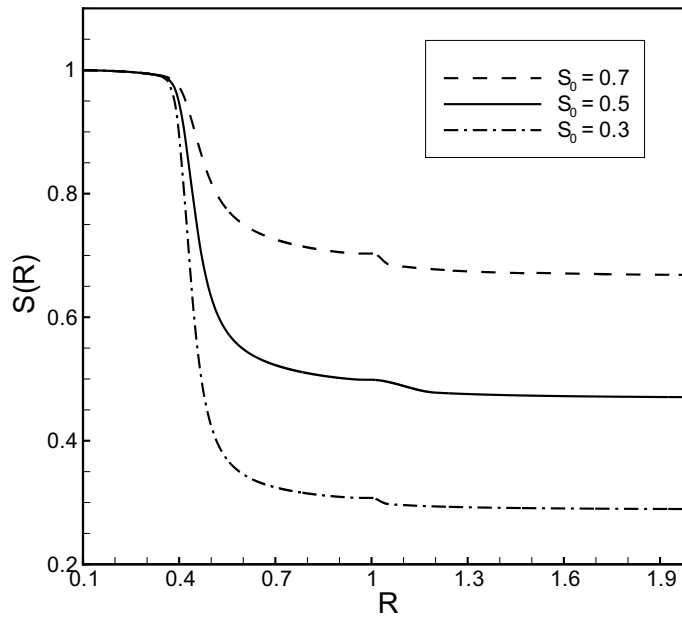


Figura 7.12: $S(R)$ em função do raio da bolha R , para $R_0 = 1$ e diferentes condições iniciais: $S_0 \cong 0.7$ (tracejada); $S_0 \cong 0.5$ (cheia) e $S_0 \cong 0.3$ (traço-ponto).

É importante também relacionar o comportamento da função orientação de aditivos $S(R)$ com a espessura da camada limite de probabilidade, δ . A Figura 7.13 mostra, qualitativamente, a relação entre δ e $S(R)$, de acordo com o raio da bolha R . Na condição (a), em que $R \ll R_0$ $S(R) \simeq 1$, a definição da espessura da camada limite de orientação independe do raio da bolha, conforme analisado na seção 7.3.2. Assim, as fibras que estão próximas da superfície da bolha apresentam-se alinhadas com a direção do escoamento e a região de influência de orientação é maior. Cumpre registrar que a própria espessura δ apresenta-se consideravelmente maior que o raio da bolha.

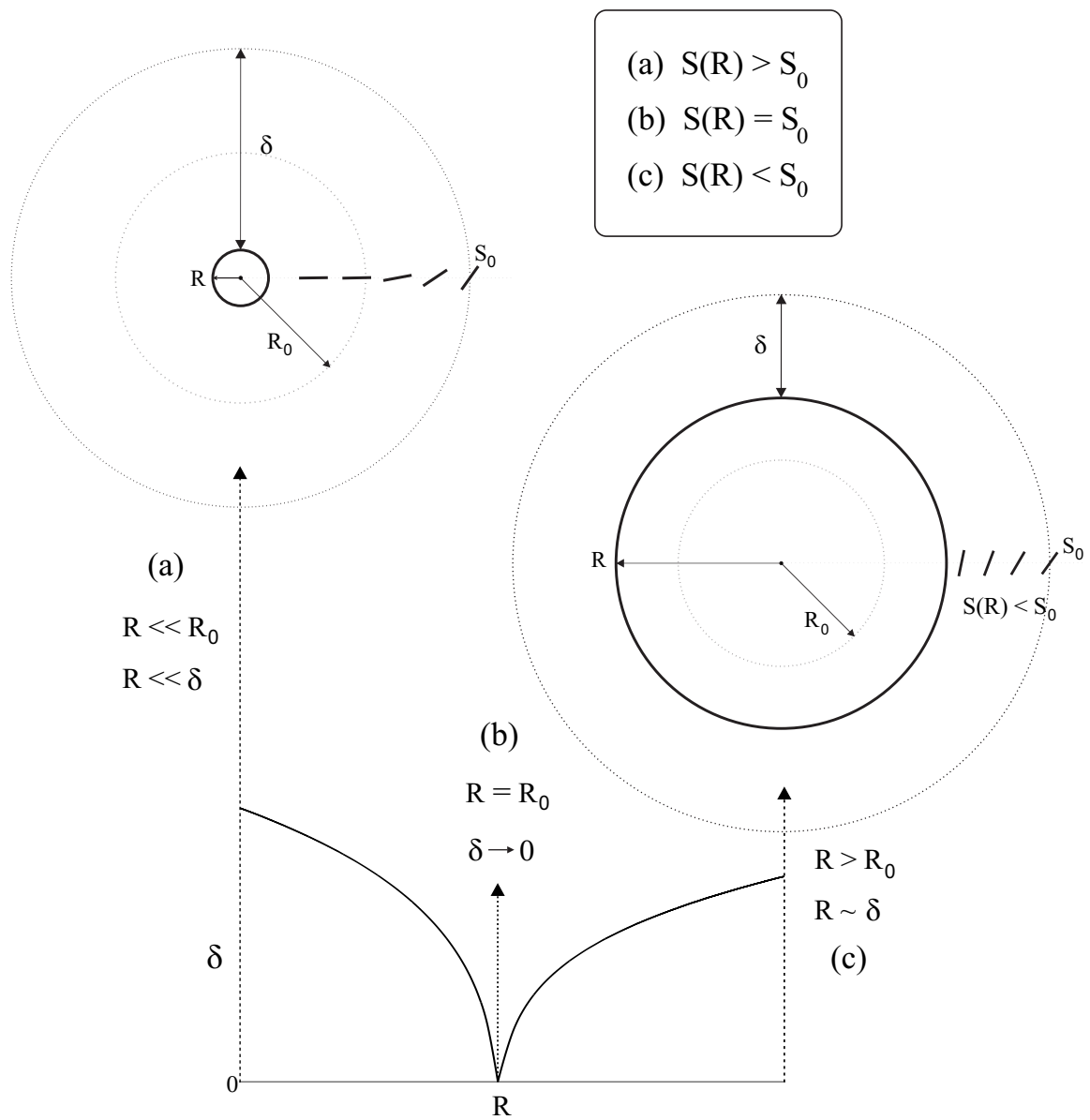


Figura 7.13: Camada limite de probabilidade δ associada à função orientação de aditivos $S(R)$, de acordo com o raio da bolha R .

Com o aumento do raio da bolha R , a espessura da camada limite de probabilidade diminui, assim como a função orientação $S(R)$ aproxima-se da probabilidade inicial de orientação, até atingir a condição $R = R_0$, representado em (b). Aqui, $S(R) = S_0$ e não existe camada limite, $\delta = 0$, uma vez que esta configuração é equivalente à assumida inicialmente, quando $t = 0$. A descontinuidade apresentada na espessura da camada limite de probabilidade δ também é refletida em uma descontinuidade em $S(R)$, conforme observado nas Figs. 7.11 e 7.12.

Na condição $R > R_0$, é possível observar um aumento do comprimento δ , enquanto a função orientação de aditivos apresenta valores menores que a orientação inicial, $S(R) < S_0$, representado por (c). A condição $R > R_0$ gera um desalinhamento das fibras, comparado com a orientação gaussiana inicial, o que não deixa de representar uma região de influência de orientação, ou seja, uma camada limite de orientação. Esta região cresce com o raio da bolha, uma vez que o desalinhamento também aumenta, assumindo uma relação $\delta \sim R$.

Conclui-se, portanto, que a função $S(R)$ apresenta dependência com a probabilidade inicial P_0 , com o raio inicial R_0 e o raio da bolha $R(t)$, que fornece diferentes valores da espessura da camada limite de probabilidade δ (necessária para definir a escala de influência bolha-aditivos). Todos estes parâmetros são relevantes para analisar a função orientação de aditivos. É preciso insistir também no fato que a espessura da camada limite de orientação, para $R \sim R_0$, é função do raio da bolha e, conseqüentemente, possui dependência implícita do tempo, $\delta(R(t))$.

7.4 RESULTADOS DO ACOPLAMENTO BOLHA-ADITIVOS

Nesta última parte do trabalho, resultados da interação bolha-aditivos são obtidos e analisados. Registre-se que para todas as simulações obtidas, os seguintes parâmetros foram mantidos constantes: razão de aspecto $\ell/a = 100$, frequência de excitação $\omega = 1$ e velocidade inicial $\dot{R}_0 = 0$.

Ao final da seção, explora-se a influência dos efeitos elásticos e da função orientação de aditivos no acoplamento bolha-aditivos. Observa-se que uma interação elasticidade-orientação irá refletir significativamente no comportamento oscilatório de uma bolha.

7.4.1 Evolução Temporal da função orientação $S(R)$ e Raio da Bolha

A função orientação de aditivos $S(R)$ depende explicitamente do raio da bolha e mostra uma dependência implícita do tempo. A cada intervalo de integração, deve-se atualizar o valor da função $S(R)$. No entanto, o custo computacional para o cálculo da integral dupla em $S(R)$ é consideravelmente maior que o custo computacional de um passo de tempo da integração do sistema de equações diferenciais para obter a resposta da dinâmica da bolha.

A maneira explorada para reduzir o custo computacional de uma simulação que envolve a função $S(R)$ consiste no cálculo de $S(R)$ em função de R , independente do tempo analisado, em que uma “tabela” de valores de $S(R)$ para os respectivos raios da bolha é realizada. Desta forma, a simulação carrega esta tabela e faz uma interpolação de acordo com o raio da bolha R calculado a cada passo de tempo. Cumpre ressaltar que, sabendo que a função $S(R)$ depende da condição inicial de orientação S_0 e raio inicial da bolha, R_0 , para cada valor que esses termos assumem uma nova “tabela” deve ser realizada.

Primeiramente, relaciona-se a função orientação de aditivos com o modelo constitutivo anisotrópico, explorando a influência que a função $S(R)$ representa na reologia do líquido e no movimento oscilatório de uma bolha. A Figura 7.14 ilustra a evolução temporal do raio da bolha R (a) e da função orientação $S(R)$ (b) em uma solução de regime permanente. As condições iniciais para a evolução de $S(R)$ são $R_0 = 1$ e $S_0 = 0.3$ (calculada a partir de uma distribuição normal gaussiana de probabilidade P_0). A curva pontilhada representa a condição inicial de orientação constante $S_0 = 0.3$, a curva traço-ponto uma condição de alinhamento radial de aditivos $S_0 = 1$ e a curva sólida a função orientação que depende do movimento da bolha e é calculada com uma função densidade de probabilidade mais realística do que a distribuição normal, denotada por S_0 .

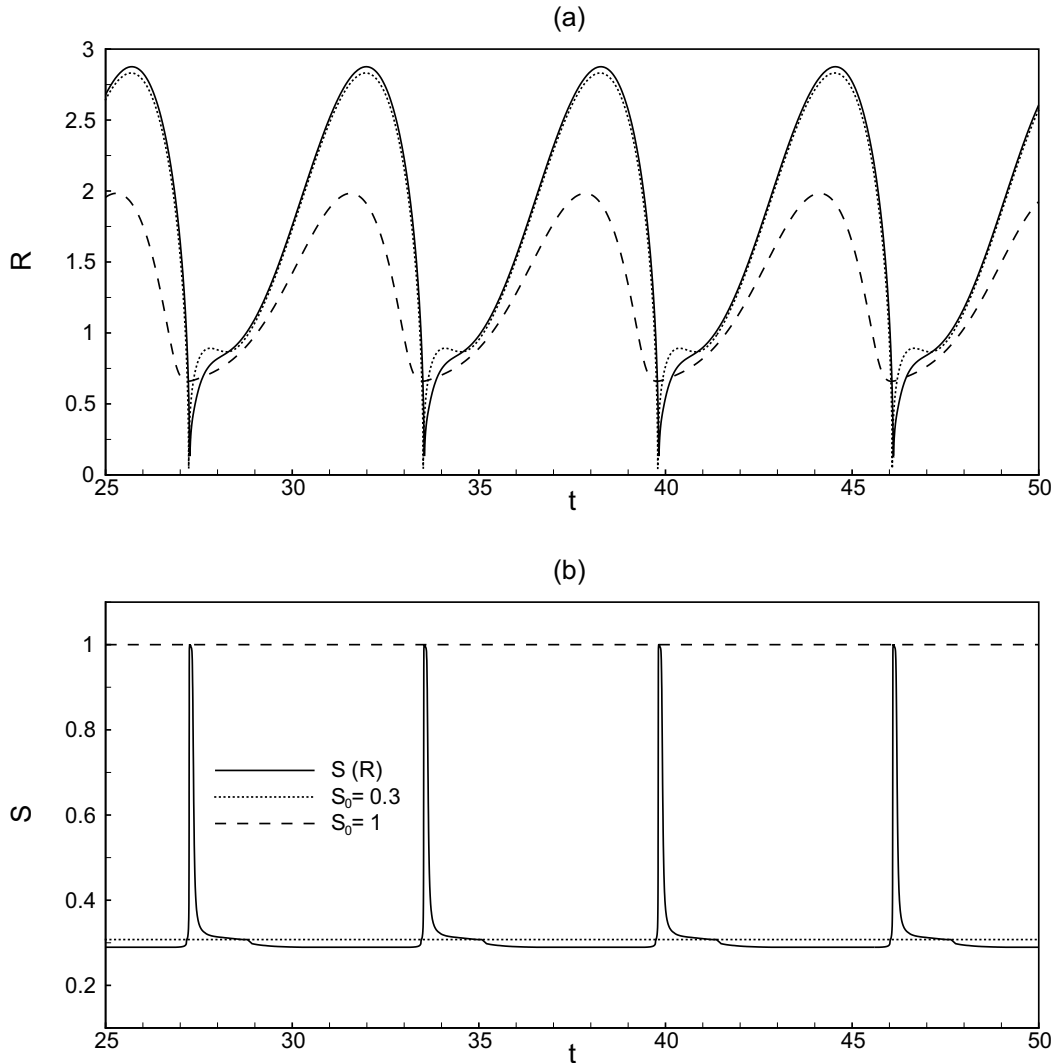


Figura 7.14: (a) R em função de t e (b) $S(R)$ em função de t , para: $Re = We = 5$, $\phi = 0.3\%$, $R_0 = 1$ e $\varepsilon = 3$.

Observa-se que $S(R)$ apresenta picos de amplitude que aproximam-se da unidade, caracterizando um alinhamento radial quando a bolha encontra-se em condições em que $R \ll R_0$. A curva da evolução temporal da bolha para $S(R)$ apresenta raio mínimo maior quando comparado à curva $R(t)$ para $S_0 = 0.3$, o que indica uma atenuação na dinâmica do movimento da bolha. No entanto, essa atenuação é moderada, principalmente quando compara-se as curvas do raio da bolha em $S(R)$ e $S_0 = 1$ (alinhamento total de aditivos), em que a condição de alinhamento radial das partículas gera uma resposta de movimento mais próximo de um comportamento periódico com apenas um modo de vibração (harmônico simples).

Uma forma de examinar a dinâmica da bolha em termos da função orientação $S(R)$ consiste em analisar a amplitude máxima do raio o valor de raio mínimo atingido pela bolha. A Figura 7.15 mostra R_{max} (a) e R_m (b) em função da amplitude de excitação, para os parâmetros físicos $Re = We = 10$, $R_0 = 1$ e $\phi = 0.1\%$. Novamente, compara-se as curvas quanto a condição inicial de orientação, $S_0 = 0.3$ (traço-ponto) e $S(R)$ (sólida). É importante notar que os raios máximo e mínimo associados a função orientação $S(R)$ apresentam valores semelhantes à orientação inicial quando a amplitude de excitação $\varepsilon \leq 1$. A justificativa pode ser encontrada nos valores apresentados pelo raio mínimo $R_m \cong 0.4$ para $S(R)$, uma vez que a função orientação de aditivos retorna a um alinhamento radial das partículas somente quando $R < 0.4$, independentemente da condição inicial de orientação (conforme observado na Fig. 7.12). Portanto, $\varepsilon \leq 1$ representa um regime linear de anisotropia e fornece efeitos anisotrópicos para $S(R)$ próximos da condição inicial de orientação S_0 .

Convém registrar que o aumento da amplitude de excitação ε resulta em raios R_{max} e R_m próximos dos valores referentes ao alinhamento radial de aditivos. Neste caso, o raio mínimo atingido com o acoplamento bolha-aditivos é $R_m \cong 0.1$ e a função orientação $S(R)$ apresenta uma contribuição maior da anisotropia quando comparada à orientação inicial, $S_0 = 0.3$. Uma maior amplitude de excitação gera um regime mais não-linear de oscilação da bolha e, da mesma forma que a bolha encontra-se sujeita a uma maior expansão, uma contração mais significativa também ocorre. Portanto, a condição de orientação mais próxima da direção radial é obtida, i.e. $S(R) \simeq 1$ para $R \ll R_0$, auxiliando na atenuação dos raios mínimo e máximo.

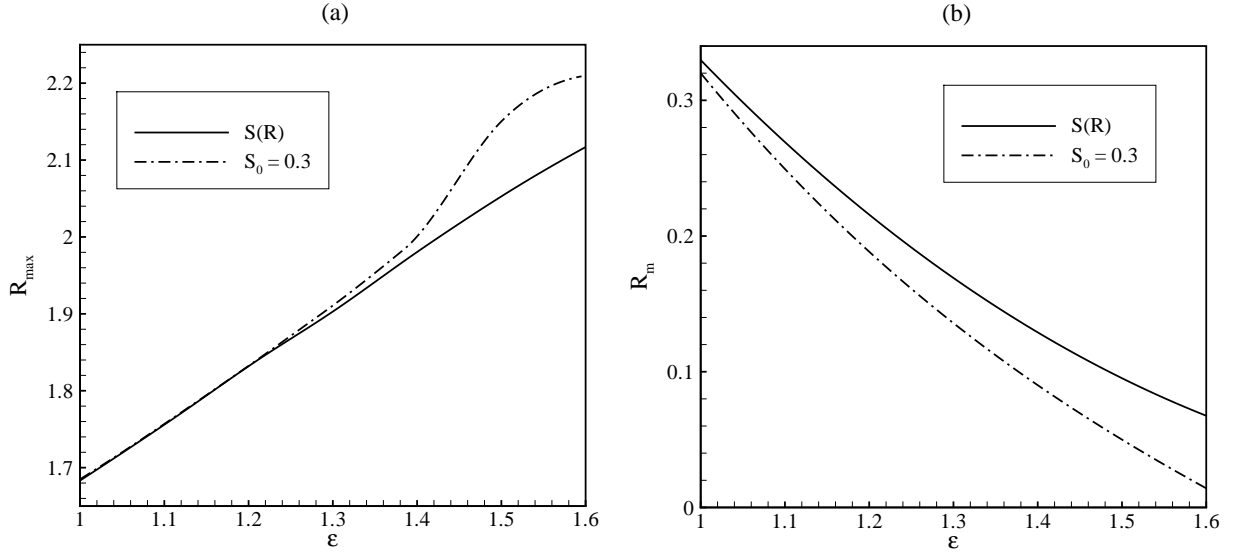


Figura 7.15: Comparação de R_{max} em função da amplitude de excitação (a) e R_m vs ε (b) entre a solução apresentada para $S_0 = 0.3$ (traço-ponto) e $S(R)$ (cheia) para $Re = We = 10$, $R_0 = 1$ e $\phi = 0.1\%$.

Essa contribuição pode ser melhor explorada observando a evolução temporal do comportamento da bolha utilizando a solução com orientação gaussiana inicial $S_0 = 0.3$ e a função orientação $S(R)$. A Fig. 7.16 ilustra a dinâmica de uma bolha de acordo com os parâmetros usados anteriormente, para uma amplitude de excitação $\varepsilon = 1.5$. Nota-se que o raio da bolha apresenta comportamento não-linear significativo para $S_0 = 0.3$, de acordo com a Fig. 7.16 (a). Enquanto a orientação inicial $S_0 = 0.3$ fornece dois períodos para o movimento da bolha, $R(t)$ obtido pela função $S(R)$ apresenta quatro períodos distintos da bolha, o que fortifica a presença de uma não-linearidade.

Salienta-se que a presença do acoplamento bolha-aditivos é traduzida em um raio mínimo maior que o raio apresentado pela condição inicial de orientação, devido ao alinhamento dos aditivos nas regiões em que $R \ll R_0$, de acordo com os picos de amplitude observados na evolução temporal da função $S(R)$, Fig. 7.16 (b). Tal ocorrência reflete-se diretamente na redução da pressão interna da bolha e na tensão radial da mesma, Figs. 7.16 (c) e (d) respectivamente. Enquanto a pressão interna da bolha para $S_0 = 0.3$ é da ordem $p_b \sim 10^4$, a pressão interna da solução $S(R)$ apresenta uma ordem de magnitude menor, $p_b \sim 10^3$.

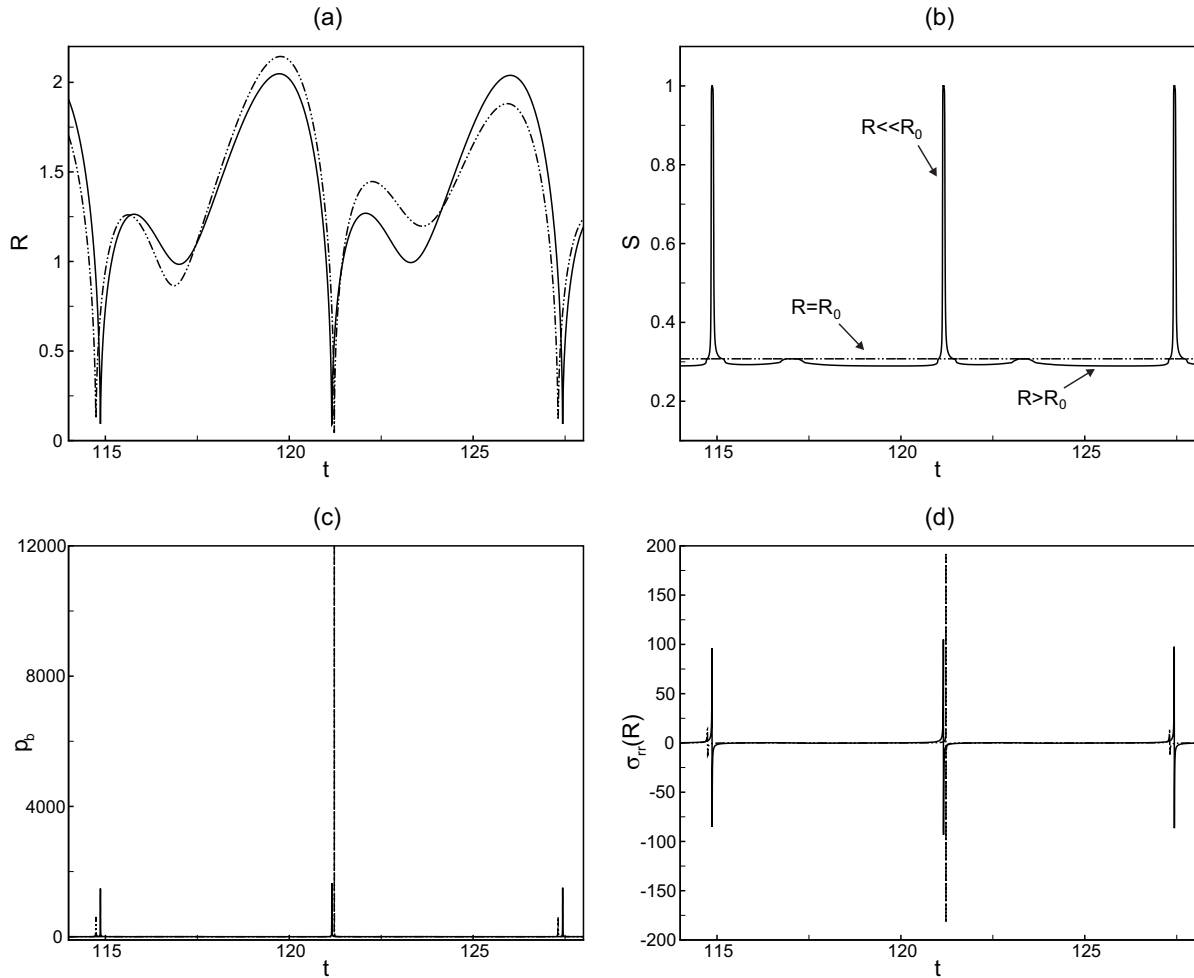


Figura 7.16: Dinâmica da bolha para um regime permanente, com $S_0 \cong 0.3$ e raio inicial $R_0 = 1$. Curvas $S_0 = 0.3$ (traço-ponto) e $S(R)$ (sólida), com parâmetros utilizados: $Re = We = 10$, $\phi = 0.1\%$, e $\varepsilon = 1.5$. (a) R vs t ; (b) S_0 vs t ; (c) p_b vs t e (d) $\sigma_{rr}(R)$ vs t .

A tensão radial extra da bolha é duas vezes menor quando $S_0 = S(R)$. Isto mostra que os picos correspondem às configurações de uma bolha com $R \ll R_0$ em que $S(R) \rightarrow 1$. Esta orientação radial de aditivos anisotrópicos produz uma anisotropia de tensões.

Devido ao acoplamento bolha-aditivos existente na função $S(R)$, pode-se observar que, ao longo da contração do movimento da bolha, quando o raio atinge valores inferiores a $R = 0.4$ para um raio inicial $R_0 = 1$, os aditivos se alinham com a direção do escoamento, momento em que os efeitos anisotrópicos se fazem mais presentes e auxiliam na linearização da dinâmica da bolha. No entanto, quando $R_0 = 2$, a condição de alinhamento acontece para $R \leq 0.7$, conforme visto anteriormente na Fig. 7.11.

A Figura 7.17 ilustra a diferença do comportamento de uma bolha entre um raio inicial $R_0 = 1$ (traço-ponto) e $R_0 = 2$ (sólida), para uma condição inicial de orientação $S_0 = 0.5$ e demais parâmetros $Re = We = 10$, $\phi = 0.5\%$ e $\varepsilon = 3$. Analisando a evolução temporal da função orientação $S(R)$ na Fig. 7.17 (b), observa-se que após o movimento de contração da bolha, os aditivos permanecem um tempo maior orientados radialmente para $R_0 = 2$, ocasionando uma diminuição do intervalo de oscilação da bolha (Fig. 7.17 (a)) e, conseqüentemente, uma redução na pressão interna da bolha (Fig. 7.17 (c)) e da tensão radial extra (Fig. 7.17 (d)).

Registre-se que, a partir da presença de fibras alinhadas com o escoamento por um período maior de tempo, a média temporal da função $S(R)$ é maior. Para a Fig. 7.17, a média \bar{S} da condição $R_0 = 2$ é de $\bar{S} \cong 0.63$, enquanto na condição $R_0 = 1$, a média é de $\bar{S} \cong 0.51$. Nota-se que, no momento de expansão do raio da bolha, o movimento gera um “desalinhamento” das partículas, obtendo a mesma orientação inicial quando $R = R_0$ ($S = S_0$) e condição ainda mais desalinhada para $R > R_0$, da ordem $S(R > R_0) \cong 0.95S_0$.

A curva que denota $S(R)$ na condição $R_0 = 2$ encontra-se acima da orientação inicial de aditivos, conforme mostra a Fig. 7.17 (b). O mesmo não pode ser dito quando $R_0 = 1$, em que grande parte do movimento de expansão encontra-se em $R > R_0$ e ocasiona uma diminuição da média temporal da função orientação, cancelando parte da contribuição favorável de alinhamento na contração da bolha, fornecendo uma média próxima do valor de orientação inicial de aditivos.

Não quer isto dizer, entretanto, que o movimento da bolha encontra-se desacoplado da orientação de aditivos somente porque a média temporal se aproxima do valor inicial de orientação, conforme constatado na Fig. 7.16, que também apresenta $\bar{S} \cong S_0 = 0.3$.

A média temporal não prediz explicitamente se ocorre uma atenuação do movimento da bolha na condição $\bar{S} \cong S_0$, porém pode se tornar um bom indicativo dessa linearização do movimento quando $\bar{S} > S_0$. Em virtude dessas considerações, a Figura 7.18 ilustra as médias temporais de $S(R)$ para diferentes condições iniciais de orientação em função da amplitude de excitação, ε , utilizando raio inicial $R_0 = 2$ (a) e $R_0 = 1$ (b).

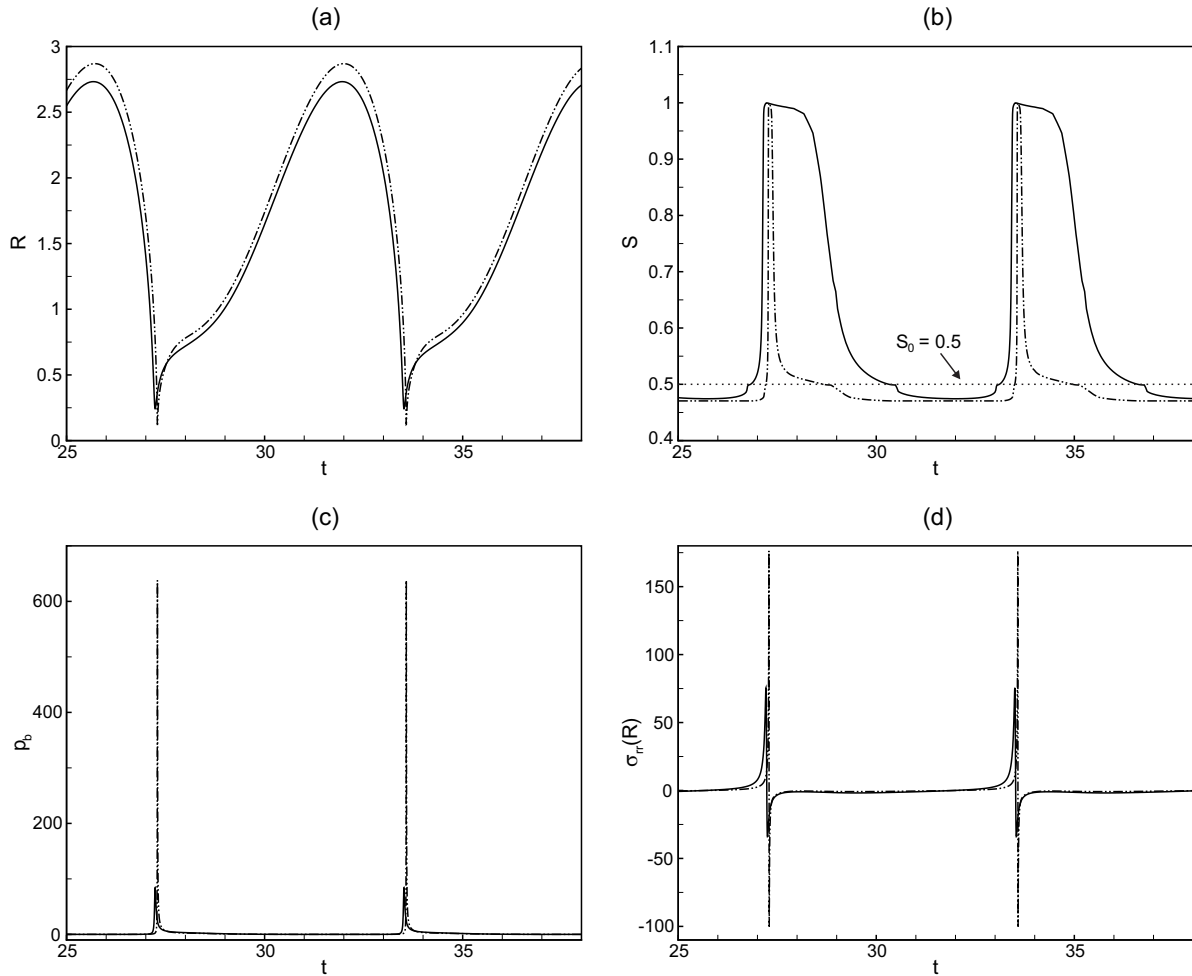


Figura 7.17: (a) R vs t ; (b) S_0 vs t ; (c) p_b vs t e (d) $\sigma_{rr}(R)$ vs t . $S_0 \cong 0.5$ com raio inicial $R_0 = 1$ (traço-ponto) e $R_0 = 2$ (sólida), parâmetros utilizados: $Re = We = 10$, $\phi = 0.5\%$ e $\varepsilon = 3$.

Cumpre-se observar, preliminarmente, que todas curvas em (b) apresentam $\bar{S} \cong S_0$, enquanto, em (a), $\bar{S} > S_0$, comportamento esperado quando há um maior alinhamento das partículas considerando-se $R_0 = 2$.

Na Fig. 7.18 (a), a curva que denota a função orientação de aditivos com a condição inicial de orientação mais randômica $S_0 = 0.3$ representa uma sensibilidade mais significativa quanto à amplitude de excitação. A Figura 7.19 (a) mostra R vs t para as condições iniciais $S_0 = 0.3$ e $R_0 = 2$, com amplitude de excitação $\varepsilon = 1.5$ (sólida) e $\varepsilon = 5$ (traço-ponto). em que um máximo de média de orientação ocorre para $\varepsilon \cong 1.5$. Nota-se que a oscilação da bolha em $\varepsilon = 1.5$ permanece sempre na condição $R < R_0$, enquanto uma maior amplitude de excitação $\varepsilon = 5$ apresenta oscilações com amplitudes ainda maiores, em que o raio da bolha atingido apresenta valores $R_{max} \cong 4$.

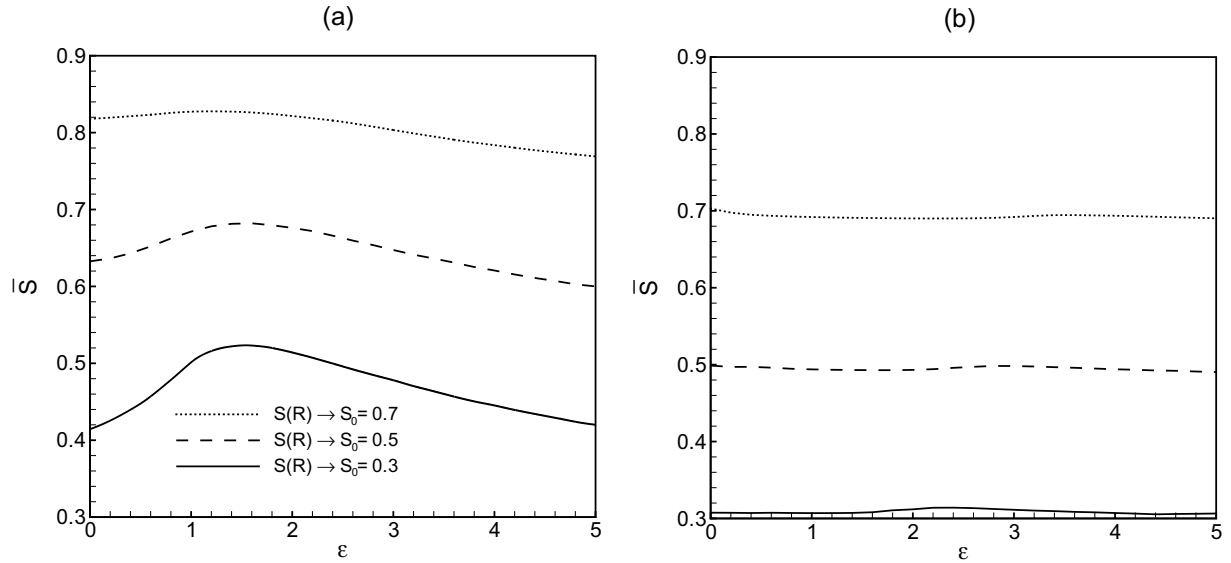


Figura 7.18: Média da função de orientação \bar{S} em termos da amplitude de excitação ε para diferentes condições iniciais de orientação, com parâmetros: $Re = We = 5$, $R_0 = 2$ e $\phi = 0.3\%$.

Desta forma, uma amplitude de excitação $\varepsilon = 5$ origina uma contribuição desfavorável na função orientação, i.e., $S(R)$ apresenta valores inferiores à orientação inicial, já que $R > R_0$, conforme ilustrado na Fig. 7.19 (b). É preciso também insistir no fato de uma situação em que $R \ll R_0$ e caracterizada por uma contração violenta e rápida do raio da bolha, resulta em um menor intervalo de tempo de orientação radial dos aditivos. Tais observações consistem em fatores determinantes na média temporal obtida, uma vez que $\bar{S} \cong 0.41$ para $\varepsilon = 5$ e $\bar{S} \cong 0.51$ para $\varepsilon = 1.5$.

As ponderações anteriores também são relevantes e aplicáveis na análise da condição $R_0 = 1$, Fig. 7.19 (b). O aumento da amplitude ε corresponde a uma contribuição desfavorável $R > R_0$ cada vez maior e, ao mesmo tempo, raios mínimos atingidos cada vez menores, que levam a uma contribuição favorável do alinhamento das fibras em curtos intervalos de tempo. Com o cancelamento de ambas contribuições, obtém-se uma média temporal $\bar{S} \cong S_0$ para $R_0 = 1$, resultado que, para frequência $\omega = 1$, independe das condições iniciais utilizadas. Esse resultado é consequência direta do fato que, na condição $R = 1$ (i.e. $R = R_0$) a espessura da camada limite de probabilidade é nula, o que leva a uma probabilidade uniforme no domínio $R < \delta < \infty$.

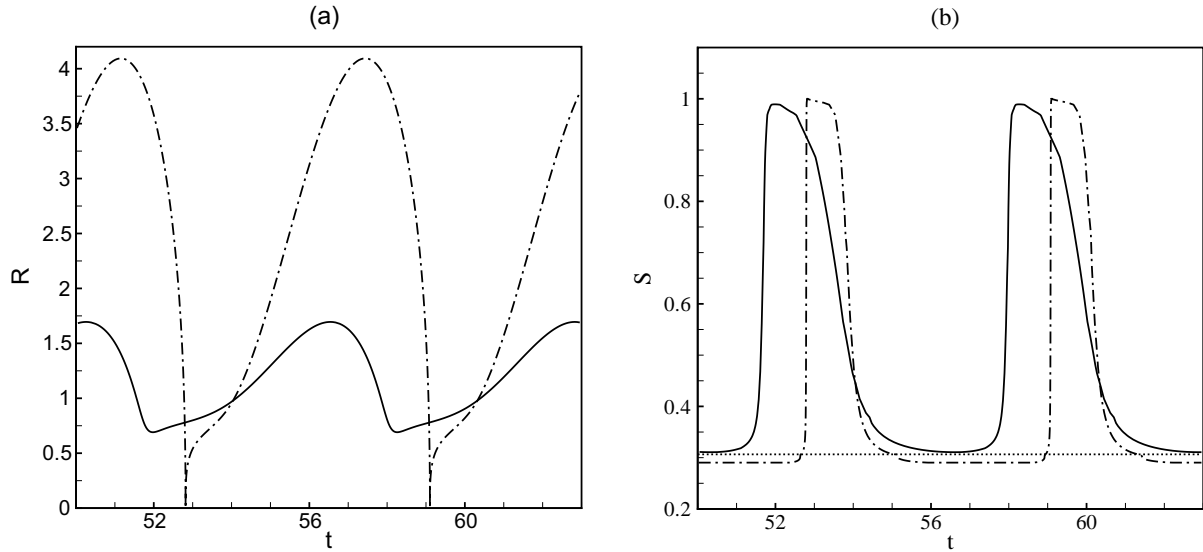


Figura 7.19: Comparativo entre $\varepsilon = 5$ (traço-ponto) e $\varepsilon = 1.5$ (sólida) para $S_0 = 0.3$, sendo (a) R vs t ; (b) S_0 vs t , em que linha pontilhada denota a solução $S_0 = 0.3$. Parâmetros da Fig. 7.18.

Outro parâmetro físico a ser examinado, a fração volumétrica de aditivos ϕ exerce influência significativa na caracterização do efeito anisotrópico. A Figura 7.20 mostra a média temporal da função orientação \bar{S} em termos de ϕ , novamente para uma condição de orientação praticamente randômica, $S_0 = 0.3$ e raio inicial $R_0 = 2$, para diferentes amplitudes de excitação. O aumento da fração volumétrica de aditivos leva a diminuição de R_{max} e R_m e, conseqüentemente, a atenuação do movimento da bolha quando a oscilação do raio da bolha encontra-se cada vez mais na região $R < R_0$. Assim, a média de orientação \bar{S} aumenta até um ponto ótimo em que o máximo de $\bar{S} = \bar{S}_{max}$ é atingido, com o raio da bolha encontrando predominantemente na condição $R < R_0$, com o maior intervalo de tempo possível de fibras orientadas radialmente com o escoamento.

Entretanto, o aumento da fração volumétrica a partir deste ponto resulta em uma atenuação ainda maior de R_{max} e R_m , e, apesar da bolha ainda apresentar-se no intervalo $R < R_0$, os raios mínimos atingidos não se encontram na região de alinhamento radial dos aditivos. Reduz-se, portanto, a contribuição positiva dos aditivos orientados radialmente e a média \bar{S} tende a um limite assintótico, uma vez que o aumento da concentração resulta em um intervalo de oscilação cada vez mais restrito e que se aproxima de um raio de equilíbrio da bolha.

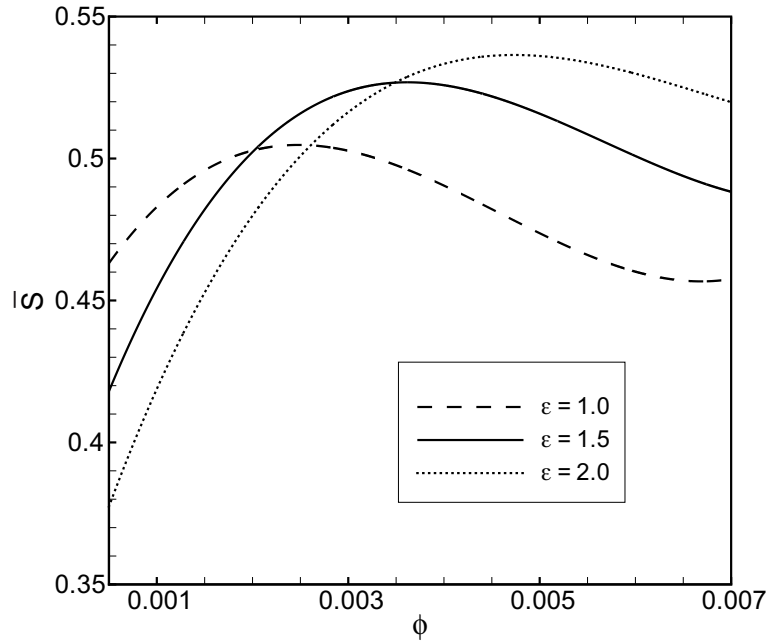


Figura 7.20: Média da função de orientação em termos da concentração ϕ para diferentes amplitudes de excitação, com parâmetros: $Re = We = 5$, $R_0 = 2$ e $S_0 = 0.3$.

Observa-se que, de acordo com a amplitude de excitação considerada, as curvas apresentam valores \bar{S}_{max} distintos e com diferentes frações volumétricas de aditivos. Não se pode olvidar que, quanto maior a amplitude de excitação, maior é a fração volumétrica de aditivos necessária para fornecer a anisotropia que permita a atenuação do movimento da bolha e, conseqüentemente, maior é a concentração para se obter o ponto em que $\bar{S} = \bar{S}_{max}$. Registre-se que uma maior amplitude de excitação também é convertida em \bar{S}_{max} com valor superior quando comparado a uma amplitude de excitação menor. Analisando-se a Fig. 7.20, nota-se que $\bar{S}_{max} \cong 0.5$ em $\phi \cong 0.2\%$, com amplitude $\varepsilon = 1$ e $\bar{S}_{max} \cong 0.54$ em $\phi \cong 0.5\%$, com amplitude $\varepsilon = 2$.

Cumprе registrar que, após \bar{S}_{max} , a média \bar{S} decai e assume diferentes valores quando $\phi = 0.7\%$. No entanto, antecipa-se que um aumento significativo da fração volumétrica de aditivos resulta no encontro de todas as curvas em um mesmo limite assintótico, que consiste no valor de $\bar{S} = S_0$ para o raio de equilíbrio da bolha. Registre-se que a análise de uma maior fração volumétrica de aditivos foge do escopo deste trabalho, devido a limitações quanto a viscosidade extensional, que considera um regime semi-diluído de aditivos.

7.4.2 Influência da Orientação e Efeitos Elásticos

O modelo viscoelástico não-linear Maxwell-Oldroyd é considerado para os resultados numéricos a seguir. Ressalte-se que a frequência, a velocidade inicial e a razão de aspecto dos aditivos são mantidas $\omega = 1$, $\dot{R} = 0$ e $\ell/a = 100$. O raio inicial $R_0 = 1$ é preterido, uma vez que os resultados na seção anterior se mostraram mais atraentes quando $R_0 = 2$.

A Figura 7.21 ilustra R_{max} (a) e R_m (b) em função do número de Deborah De , para uma orientação inicial $S_0 = 0.7$, utilizando os mesmos parâmetros da Fig. 6.11, que remete à análise do modelo viscoelástico não-linear. As curvas apresentam a função orientação $S(R)$ (sólida), alinhamento total de aditivos $S_0 = 1$ (pontilhada) e a condição de orientação inicial, $S_0 = 0.7$ (traço-ponto). É curioso assinalar que a curva para $S_0 = 0.7$, que corresponde a uma correção da constante material μ_e/μ definida a partir de uma concentração $\phi = 0.15\%$ (e assemelha-se à curva para uma concentração $\phi = 0.1$ da Fig. 6.11), resulta em efeitos não-lineares mais efetivos para a dinâmica da bolha quando comparada à condição de alinhamento, $S_0 = 1$.

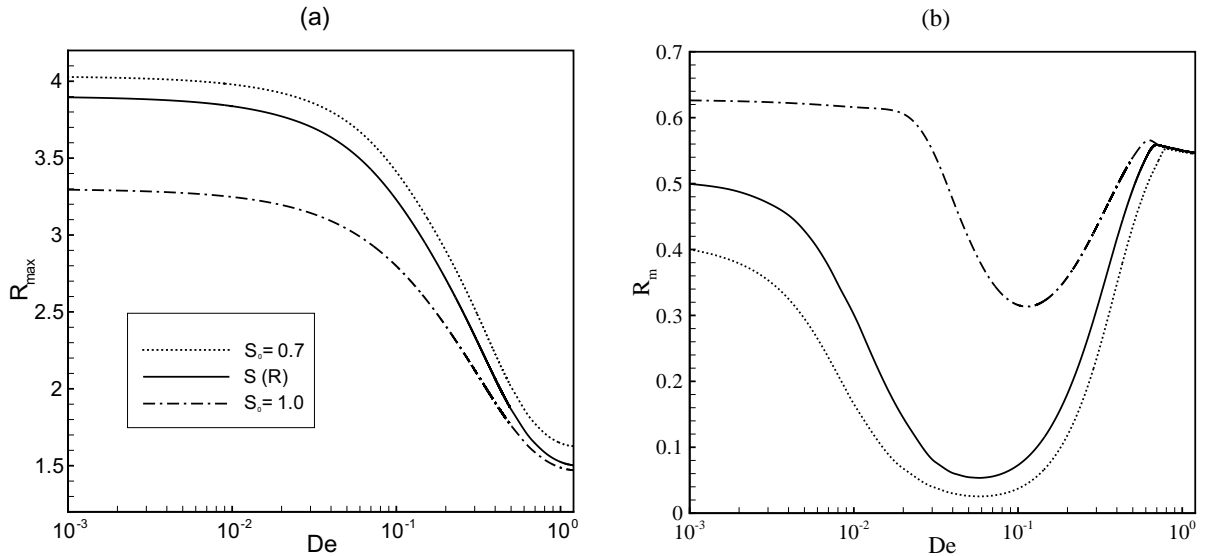


Figura 7.21: (a) R_{max} vs De ; (b) R_m vs De , em que linha pontilhada denota a solução $S_0 = 0.7$, traço-ponto $S_0 = 1$ e sólida $S(R)$. Parâmetros: $Re = We = 1$, $\varepsilon = 12$, $R_0 = 2$ e $\phi = 0.15\%$ (semelhante à Fig. 6.11).

Observa-se que, para o limite assintótico $De \rightarrow 0$, a função orientação de aditivos apresenta uma resposta semelhante à condição inicial de orientação e destoa da solução contendo partículas alinhadas. Com o aumento dos efeitos elásticos, atenta-se para a diminuição progressiva de R_{max} e R_m na faixa de interação entre os efeitos elásticos e o movimento da bolha ($\sim O(10^{-2})$ a $\sim O(10^{-1})$). No limite assintótico De_c , a solução $S(R)$ apresenta praticamente a mesma resposta que a solução $S_0 = 1$ (condição ideal de anisotropia).

A Figura 7.22 (a) apresenta resultados da média temporal \bar{S} em função de De . É possível constatar o aumento da contribuição positiva da função de orientação até atingir um limite assintótico para $De \sim 1$. A Fig. 7.22 (b) ilustra a evolução temporal de $S(R)$ para $De \sim 1$. A função $S(R)$ oscila entre a orientação inicial de aditivos e a condição de alinhamento radial, e é possível visualizar porque a média $\bar{S} \cong 0.9$ quando $De = De_c$.

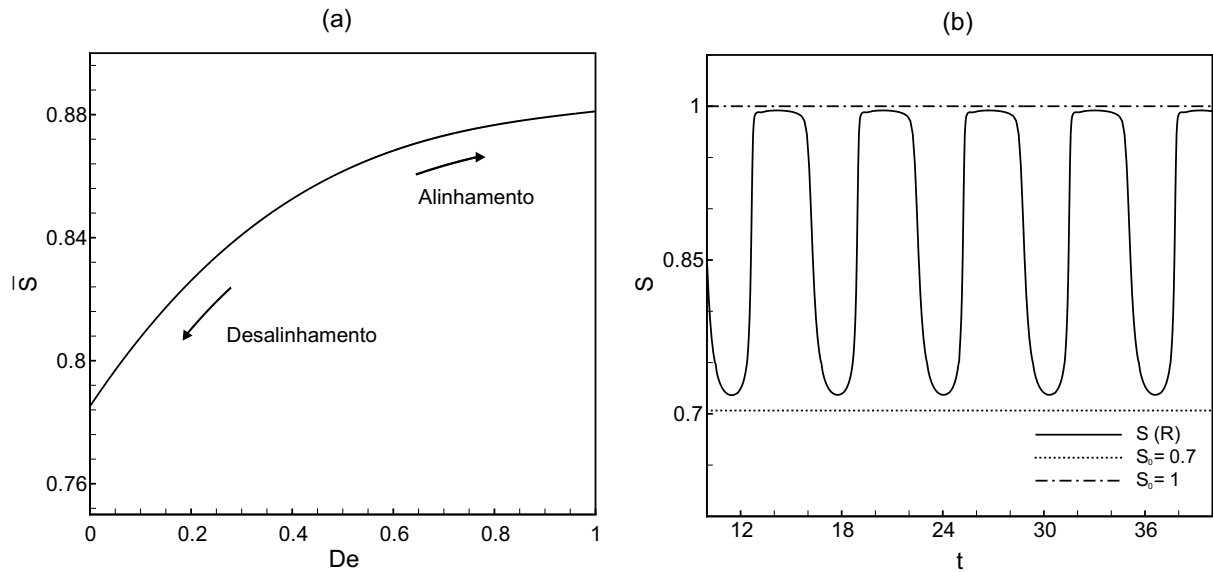


Figura 7.22: (a) Média da função orientação de aditivos em função de De para $S(R)$ da Fig. anterior. (b) Regime permanente da evolução temporal de $S(R)$.

É instrutivo comentar neste passo que o aumento da presença de efeitos elásticos, independente de considerações realizadas acerca da orientação de aditivos, auxilia na redução do raio máximo R_{max} e raio mínimo R_m atingido pela bolha (quando há interação entre esses efeitos e o movimento da bolha), conforme visto no capítulo 6. Lembra-se que o raio mínimo no limite assintótico $De \sim 1$ depende diretamente dos parâmetros físicos utilizados.

Em virtude dessas considerações, sabendo que diante de um R_{max} menor verifica-se a diminuição da contribuição negativa ($R > R_0$) da função orientação de aditivos e que a partir de um R_m menor ocorre o favorecimento da contribuição positiva ($R < R_0$) de $S(R)$ (em que os aditivos encontram-se cada vez mais próximos da condição de alinhamento com o escoamento), infere-se que o aumento do efeito elástico origina um aumento da média \bar{S} da função orientação de aditivos.

Na Fig. 7.21 foi possível observar que uma condição inicial de orientação $S_0 = 0.7$ resultou em uma solução próxima do alinhamento radial de partículas, $\bar{S} \cong 0.9$. A Figura 7.23 mostra a média da função orientação em termos de De , agora para diferentes condições iniciais de orientação e parâmetros que contém uma presença maior de efeitos de inércia. Novamente, o aumento de \bar{S} com os efeitos elásticos é constatado. Cumpre registrar que, mesmo para o limite assintótico $De \rightarrow 0$, a média temporal da função de aditivos para todas as curvas é superior à respectiva orientação inicial, principalmente quando a condição inicial apresenta-se de maneira mais randômica.

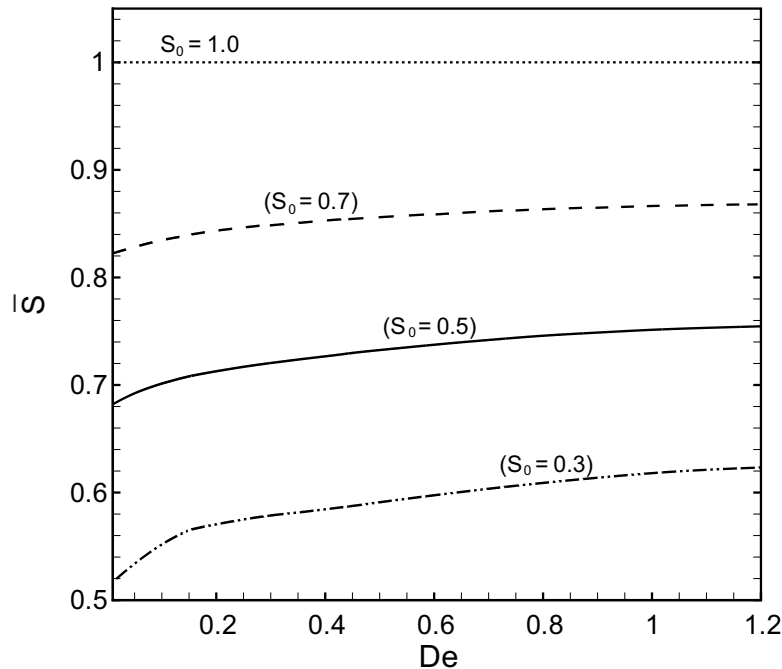


Figura 7.23: Média da função de orientação em termos de De para diferentes condições iniciais de orientação. Parâmetros: $Re = We = 2$, $R_0 = 2$, $\phi = 0.2\%$ e $\varepsilon = 3$.

A Figura 7.24 mostra o comportamento de R_{max} (a) e R_m (b) em função de De . A variação do raio máximo é mais significativa quando a função orientação apresenta uma orientação gaussiana inicial menor, $S_0 = 0.3$. Da mesma forma, a variação do raio mínimo é destacada na presença de aditivos randômicos, em que a interação elasticidade-bolha é mais fortemente observada, consequência direta do acoplamento bolha-aditivos, que exerce a função de diminuir a magnitude da constante material que caracteriza o efeito anisotrópico de aditivos, correspondendo a uma fração volumétrica equivalente, que varia de acordo com o raio da bolha. Como ambas interações são dependentes, pode-se dizer que ocorre, portanto, um acoplamento elasticidade-orientação.

Convém notar ainda que, comparando as Figs. 7.24 e 7.21, observa-se que a presença de efeitos de inércia comprometem a aproximação da solução $S(R)$ com orientação inicial $S_0 = 0.7$ da condição de alinhamento radial das partículas $S_0 = 1$ refletindo em uma média \bar{S} que se distancia da solução alinhada $S_0 = 1$, conforme mostra a Fig. 7.23.

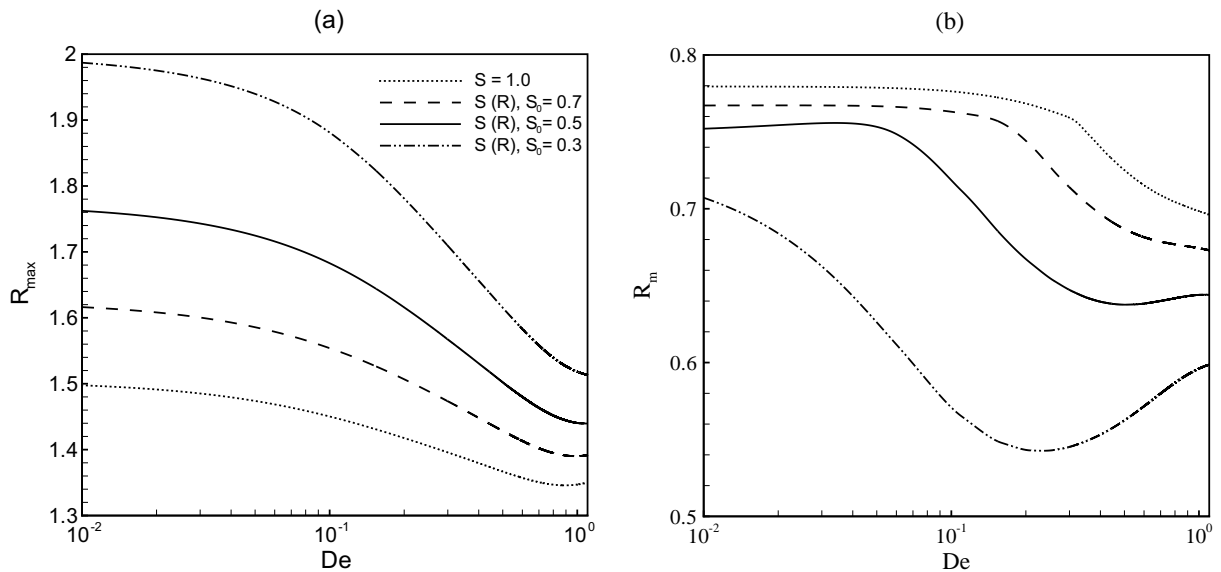


Figura 7.24: (a) R_{max} vs De ; (b) R_m vs De , Para diferentes condições iniciais de orientação. Parâmetros da Fig. 7.23.

Voltando as atenções à orientação inicial de aditivos que se apresenta mais randômica, $S_0 = 0.3$, a Fig. 7.25 explora a média temporal da função orientação \bar{S} em função de De , para diferentes amplitudes de excitação. Atenta-se para o fato que uma maior amplitude de excitação corresponde a uma maior interação elasticidade-orientação.

No limite assintótico $De \rightarrow 0$, a amplitude do raio da bolha R_{max} apresenta valor elevado, o que é traduzido como uma contribuição negativa da função orientação de aditivos, em que $\bar{S} \cong 0.49$, ainda assim $\bar{S} > S_0$. Com o aumento do efeito elástico, R_{max} e R_m diminuem, favorecendo a obtenção de uma média \bar{S} cada vez maior, com valor $\bar{S} \cong 0.67$ no limite assintótico $De_{(c)2}$, que representa mais do que o dobro da orientação inicial, $S_0 = 0.3$.

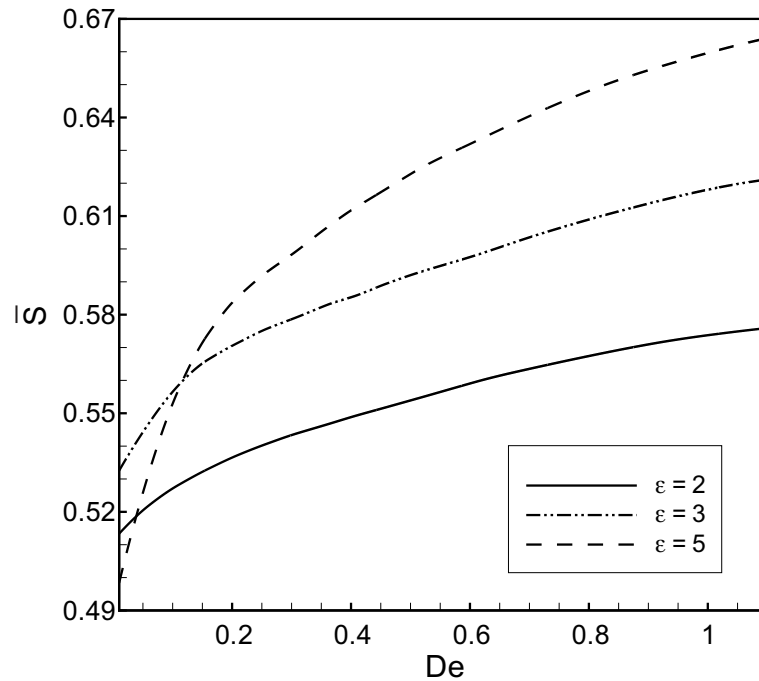


Figura 7.25: \bar{S} em função de De para diferentes amplitudes de excitação e orientação inicial $S_0 = 0.3$. Parâmetros: $Re = We = 2$, $R_0 = 2$ e $\phi = 0.2\%$.

A Figura 7.26 ilustra a evolução da média \bar{S} em termos da amplitude de excitação, com orientação inicial $S_0 = 0.3$, para os dois limites elásticos, $R_{max(1)}$ (traço-ponto), que corresponde à condição $De \rightarrow 0$ e $R_{max(2)}$ (sólida), ou De_c , que denota o limite $De \sim 1$. Registra-se que o limite $R_{max(2)}$ apresenta sempre um aumento da média temporal de $S(R)$ com o aumento da amplitude ε , enquanto o limite $R_{max(1)}$ apresenta um máximo em $\varepsilon \cong 3$ e decai com o aumento da amplitude de excitação.

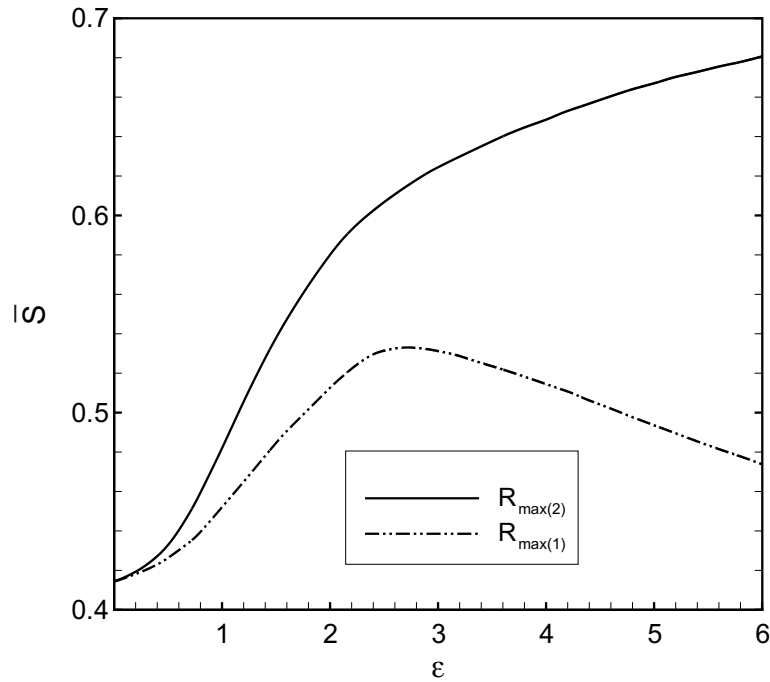


Figura 7.26: \bar{S} em função de ε para os limites assintóticos $R_{max(2)}$ (sólida) e $R_{max(1)}$ (traço-ponto), com orientação inicial $S_0 = 0.3$. Parâmetros: $Re = We = 2$, $R_0 = 2$ e $\phi = 0.2\%$.

Tal comportamento pode ser melhor compreendido a partir da Figura 7.27 (a), que mostra R_{max} vs ε . O limite De_c apresenta um raio máximo que se mantém constante para $\varepsilon > 3$. Convém notar que o aumento da amplitude de excitação caracteriza um comportamento que se aproxima cada vez mais de uma situação de colapso, o que reflete na diminuição do raio mínimo atingido pela bolha, R_m . Em virtude dessas considerações, o aumento da amplitude de excitação resulta em uma média \bar{S} maior, uma vez que não ocorre a contribuição negativa na evolução temporal da função orientação ($R > R_0$). Já para o limite $R_{max(1)}$ ($De \rightarrow 0$), a Fig. 7.27 (a) apresenta um raio máximo que cresce quase linearmente com o aumento da amplitude de excitação.

Portanto, no caso do limite $R_{max(1)}$, a contribuição desfavorável na função $S(R)$ é considerável quando ocorre o aumento da amplitude ε , e, apesar do raio mínimo atingido pela bolha consistir em valores cada vez menores, favorecendo o alinhamento radial das partículas, o intervalo de tempo que ocorre o alinhamento (contração da bolha) é reduzido, redundando em uma contribuição líquida que diminui a média \bar{S} a partir de $\varepsilon > 3$.

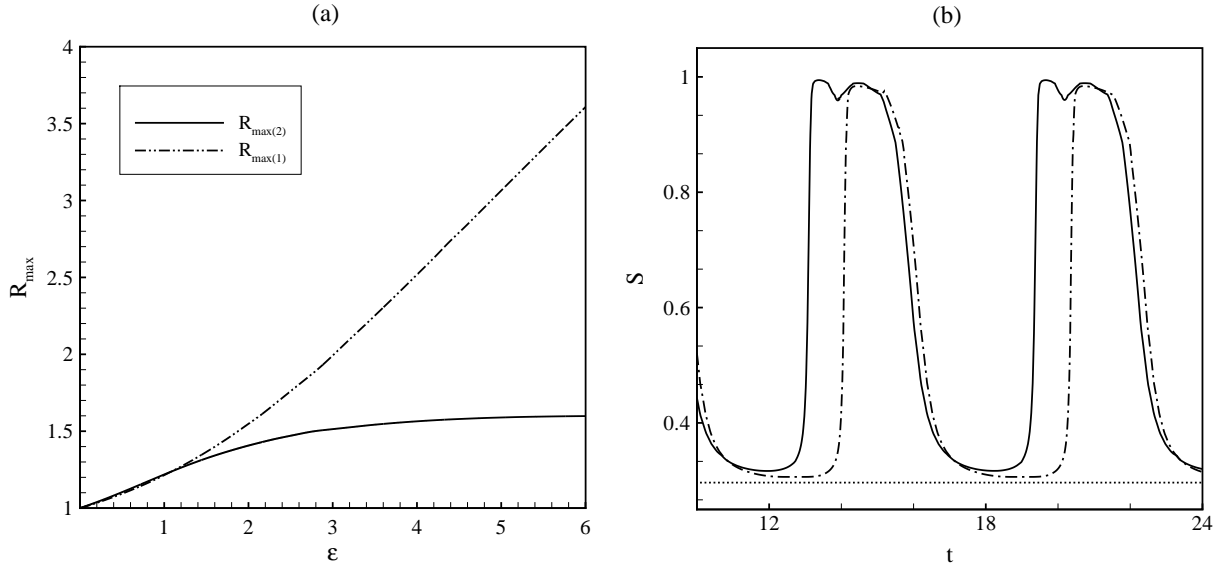


Figura 7.27: (a) R_{max} vs ε ; (b) Regime permanente da evolução temporal de $S(R)$ com $\varepsilon = 3$, para os limites assintóticos $R_{max(2)}$ (sólida) e $R_{max(1)}$ (traço-ponto), com orientação inicial $S_0 = 0.3$.

A Figura 7.27 (b) ilustra a evolução temporal da função $S(R)$ para os limites $R_{max(2)}$ (sólida) e $R_{max(1)}$ (traço-ponto), com uma amplitude de excitação $\varepsilon = 3$. Nota-se que a presença de um efeito anisotrópico extra devido a elasticidade na condição De_c apresenta um maior intervalo de tempo na influência de aditivos alinhados com o escoamento, originando um aumento da média temporal \bar{S} . É preciso insistir também no fato que a curva $S(R)$ para $R_{max(2)}$ apresenta um maior grau de não-linearidade, característico do limite assintótico para $De \sim 1$, conforme explorado no capítulo 6.

A presença de um comportamento não-linear da bolha pode ser observado também na Figura 7.28, que mostra a dinâmica de uma bolha, agora com $\varepsilon = 6$, para os mesmos limites $R_{max(2)}$ (sólida) e $R_{max(1)}$ (traço-ponto). O acoplamento elasticidade-orientação é intensamente destacado a partir da evolução temporal do raio da bolha (Fig. 7.28 (a)), uma vez que o limite De_c apresenta raio máximo consideravelmente menor, assim como R_m , que reflete em uma redução da pressão interna e da tensão extra de aditivos. A partir da evolução temporal de $S(R)$ (Fig. 7.28 (b)) fica evidente a maior influência do alinhamento radial das partículas na função orientação para o limite $R_{max(2)}$.

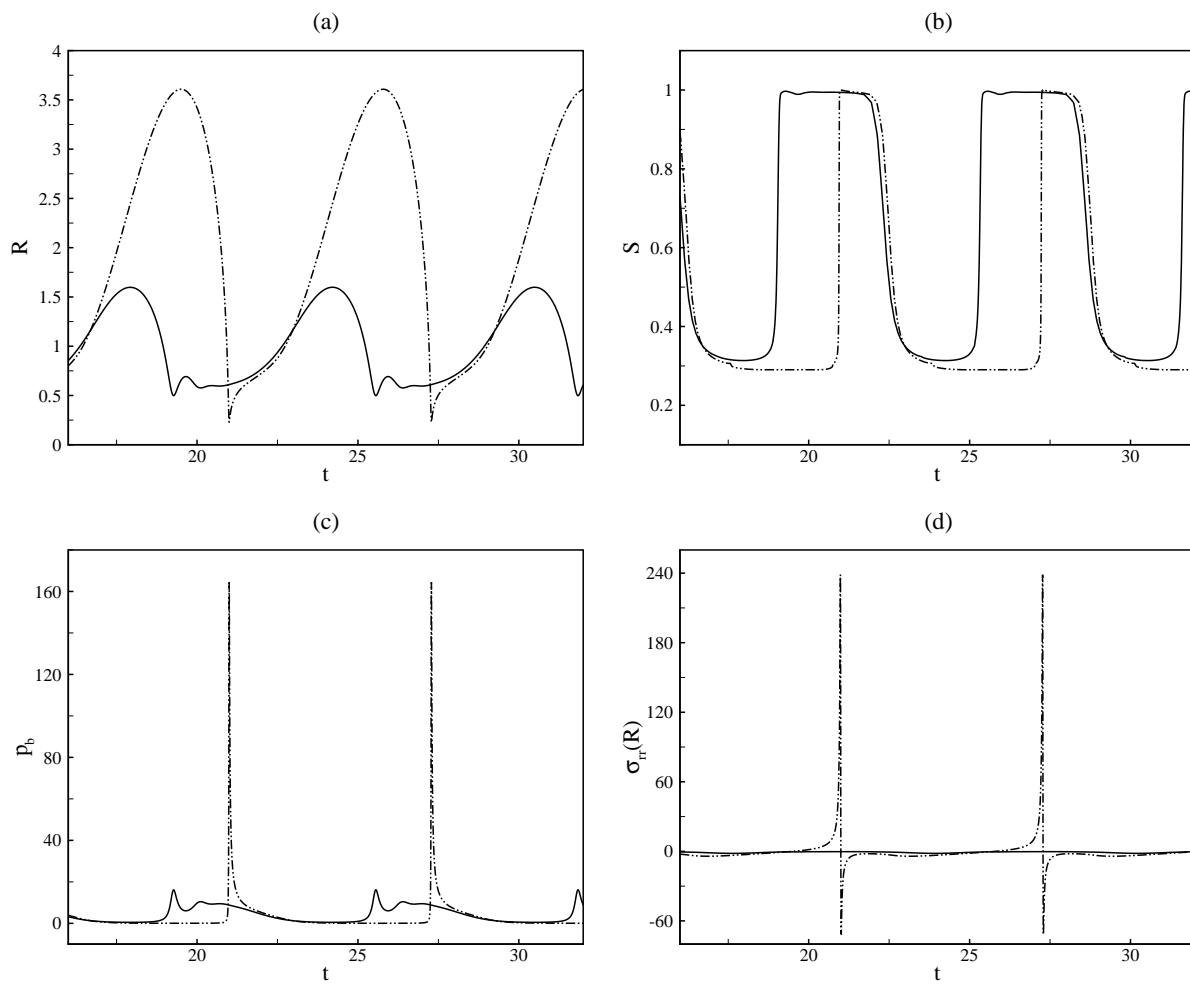


Figura 7.28: (a) R vs t ; (b) S_0 vs t ; (c) p_b vs t e (d) $\sigma_{rr}(R)$ vs t . Limites assintóticos $R_{max(2)}$ (sólida) e $R_{max(1)}$ (traço-ponto) para uma orientação inicial $S_0 \cong 0.3$. Parâmetros utilizados: $Re = We = 2$, $\phi = 0.2\%$, $\varepsilon = 6$ e raio inicial $R_0 = 2$.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho investigou-se a dinâmica de uma bolha imersa em um fluido contendo aditivos diluídos com uma alta razão de aspecto, $\ell \gg a$. Oscilações não-lineares de uma bolha esférica na direção radial do escoamento foram consideradas, a partir de uma excitação acústica externa. Diferentes equações constitutivas foram investigadas e desenvolvidas visando representar as diferentes características que os aditivos podem apresentar, resultando em uma versão modificada da equação de Rayleigh-Plesset para dinâmica de bolhas. utilizou-se do método Runge-Kutta de quinta ordem, com passos de tempo apropriados para a integração computacional e, de acordo com o sistema de equações dado pela equação constitutiva analisada, obteve-se a evolução do movimento da bolha.

Primeiramente, um modelo puramente anisotrópico foi proposto, caracterizado por uma viscosidade extensional, determinado a partir da fração volumétrica e razão de aspecto dos aditivos e que remete à contribuição viscosa da presença dos aditivos no escoamento. Atentou-se para o fato que o efeito anisotrópico dos aditivos favorece a atenuação do movimento da bolha, devido à forte anisotropia produzida pelo escoamento a partir do estiramento dos aditivos (macromoléculas ou fibras), conforme apresentado anteriormente pelo grupo Vortex no trabalho de Santos, 2005.

Foi desenvolvido um modelo viscoelástico linear para considerar um efeito elástico, i.e. da relaxação dos aditivos. Demonstrou-se a existência de uma limitação quanto ao uso do modelo viscoelástico linear, conforme esperado, uma vez que somente pequenas deformações podem ser investigadas criteriosamente a partir de um modelo linear de Maxwell. Este modelo não consegue prever um comportamento da função relaxação de aditivos que auxilia a atenuação do movimento da bolha, equivalente a uma anisotropia adicional ao fluido, denotado como o limite assintótico De_c que fornece uma solução de anisotropia superior, proveniente da saturação dos aditivos.

Assim, a contribuição elástica para um regime linear não deve se estender até a ordem $De \sim 1$, uma vez que o aumento da relaxação de aditivos para este modelo sempre caminha na direção contrária à estabilização da bolha e à respectiva solução anisotrópica adicional. A divergência entre os modelos viscoelásticos não-linear e linear também foi explorada.

Uma solução assintótica para a integral de convolução do modelo linear de viscoelasticidade foi proposta a partir do método de integração por partes. Uma solução assintótica para o raio mínimo de colapso também foi desenvolvido, apresentando uma estimativa do raio mínimo que a simulação pode alcançar, considerando-se a condição mais adversa possível do escoamento. Tal solução foi realizada visando a diminuição do custo computacional da simulação numérica, favorecendo a investigação de um maior intervalo de parâmetros relevantes no comportamento dinâmico da bolha.

Um modelo viscoelástico não-linear Maxwell-Oldroyd foi desenvolvido, considerando o uso de um referencial que gira, deforma e translada com o escoamento, i.e. uma derivada material convectiva Oldroyd. Cumpre ressaltar a originalidade da formulação deste modelo não-linear no contexto de dinâmica de bolhas na corrente literatura, assim como a contribuição a partir da forma desenvolvida para a solução do mesmo, uma vez que não se faz necessário o cálculo de todo o domínio do escoamento a cada instante, conforme consta em diversos trabalhos publicados nesta área. A partir deste modelo, foi possível a análise do aumento do efeito elástico no fluido ambiente na faixa $0 < De \leq 1$, uma vez que a função relaxação de aditivos encontra-se acoplada com o movimento da bolha. Representou-se, portanto, uma memória mais complexa do fluido, devido ao efeito não-linear da elasticidade.

Os resultados demonstraram que um aumento dos efeitos elásticos sempre resulta em um grau de não-linearidade maior no comportamento oscilatório da bolha. Foi verificada também uma tendência ao colapso para $De \sim O(10^{-1})$, em que ocorre uma maior interação entre os efeitos elásticos e o movimento do raio da bolha. Observou-se uma anisotropia adicional no limite superior $De \sim 1$, i.e. número de Deborah crítico De_c (devido ao comportamento rígido dos aditivos com o limite do efeito elástico).

Utilizando parâmetros físicos moderados, principalmente na ausência de forças de inércia significativas, o limite anisotrópico superior $De \sim 1$ resulta em uma atenuação do movimento da bolha e, conseqüentemente, no aumento do tempo de colapso, podendo inclusive evitar a ocorrência do mesmo.

Constatou-se que uma menor fração volumétrica de aditivos pode resultar em uma não-linearidade mais acentuada na presença dos efeitos elásticos dos aditivos, principalmente para $De \sim O(10^{-1})$, uma vez que diminui-se a estabilização causada pelo efeito anisotrópico. O sinal no domínio da frequência do movimento da bolha também foi avaliado. Registra-se que o espectro da amplitude do raio adimensional da bolha, dado pelo módulo ($|R|$), foi apresentado em termos dos autovalores ou modos vibracionais da bolha. A relação entre a frequência de excitação e a frequência de resposta também foi investigada, em que concluiu-se que uma redução nas forças de inércia apresenta menores graus de liberdade do movimento da bolha, apesar de acentuar a não-linearidade decorrente da relaxação de aditivos. Assim, atenta-se para o fato que, de acordo com os parâmetros físicos utilizados, a interação entre as forças de inércia ($Re = We \simeq 2$) e os efeitos elásticos dos aditivos apresenta mais modos vibracionais ou autovalores para o movimento da bolha.

Apesar do modelo proposto ter considerado um escoamento unidimensional na direção radial devido à esfericidade da bolha e uma distribuição homogênea dos aditivos presentes no líquido Newtoniano, considerar um alinhamento desses aditivos na direção do escoamento (a partir de uma solução permanente da orientação dos aditivos) é uma aproximação que tende a favorecer a eficiência dos efeitos anisotrópicos na estabilização do movimento não-linear da bolha. Os aditivos, em termos práticos, são distribuídos inicialmente em direções aleatórias e em todo o domínio do líquido. A direção de cada aditivo a cada instante depende de sua posição em relação à bolha e da dinâmica do escoamento. A evolução temporal da orientação dos aditivos foi de fundamental importância para o presente problema e foi minuciosamente investigado, uma vez que a orientação das fibras apresenta forte influência no movimento oscilatório da bolha e vice-versa.

Um modelo matemático para a função orientação de aditivos $S(R)$ foi desenvolvido, descrevendo o acoplamento entre a dinâmica de uma bolha e a presença de aditivos de forma mais coerente e realista, a partir de uma função densidade de probabilidade que decai exponencialmente com o raio $\sim 1/r^4$. Visando investigar a região de interação bolha-aditivos, delimitou-se um raio de influência entre o raio da bolha e o raio de interação, cujo comprimento foi considerado como a espessura da camada limite de orientação, δ , determinada de maneira análoga a camada limite hidrodinâmica. Dessa maneira, os efeitos de orientação foram observados para uma função densidade de probabilidade normalizada que depende da condição inicial de orientação, do raio da bolha e da espessura da camada limite de probabilidade, $P^+(\delta, R, \theta)$.

Salienta-se que uma solução assintótica da espessura δ foi proposta, a partir da expansão em uma série de Maclaurin considerando somente a correção do primeiro termo, apresentando resultados satisfatórios cuja utilização é limitada somente na condição $R_0 \cong R$. Para o limite inferior anisotrópico, os raios máximo e mínimo foram relacionados à função orientação de aditivos e uma interação orientação-elasticidade foi observada. Investigou-se $S(R)$ em termos de uma contribuição desfavorável à condição inicial $S(R) < S_0$ (desalinhamento de aditivos) e da contribuição favorável $S(R) > S_0$, em que $R \ll R_0$ caracteriza um alinhamento radial dos aditivos com o movimento da bolha.

O alinhamento radial das partículas ocorre geralmente para maiores amplitudes de excitação ε e, ou menor fração volumétrica de aditivos. A função $S(R)$ favorece a diminuição ainda mais significativa da amplitude da bolha na condição de anisotropia superior $De \sim 1$ quando comparada à solução anisotrópica inferior, $De = 0$. A média temporal da função orientação \bar{S} , demonstrou forte indicação quanto a ocorrência da atenuação do movimento da bolha, uma vez que o aumento de \bar{S} reflete diretamente na obtenção de um maior intervalo de tempo na influência de aditivos alinhados com o escoamento, originando um aumento da condição de alinhamento radial de aditivos. Para essa configuração cada vez mais próxima de fibras alinhadas com o escoamento, maior é a contribuição da anisotropia inferior e, principalmente, da anisotropia superior (saturação de aditivos elásticos).

Não se pode olvidar que a curva $S(R)$ para a condição De_c ($De \sim 1$) apresenta sempre um maior grau de não-linearidade, característico do limite superior anisotrópico $De \sim 1$, uma vez que a presença de efeitos elásticos resulta em uma maior quantidade de modos vibracionais que caracterizam o movimento não-linear oscilatório de uma bolha.

8.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Este trabalho apresentou diversas maneiras de se explorar a dinâmica de uma bolha a partir da caracterização de uma suspensão de aditivos no fluido ambiente. Diversos parâmetros são relevantes para esse problema e investigou-se a maior faixa possível de combinações, examinando como cada parâmetro físico pode influenciar na dinâmica da bolha. No entanto, devido a vasta combinação que pode ser realizada, algumas questões ainda podem ser exploradas e, ou expandidas.

Uma primeira proposta consiste em investigar a dinâmica de bolhas na presença de um modelo constitutivo FENE-dumbbell, que delimita uma finitude da extensão dos aditivos. Registra-se que este modelo já foi utilizado em outra dissertação pelo grupo de Escoamentos Complexos Vortex-UnB, proporcionando a publicação de trabalhos relacionados ao tema (e.g. Absi *et al.*, 2006). Neste modelo, a relaxação de aditivos encontra-se relacionada à razão de aspecto do aditivo e, portanto, ocorre um acoplamento mais direto entre o efeito elástico e o efeito anisotrópico. É importante assinalar que o estudo do efeito elástico desse modelo pode ser comparado com a solução do modelo viscoelástico não-linear Maxwell-Oldroyd desenvolvido nesse trabalho.

Outra possibilidade consiste na expansão da função orientação de aditivos considerando um referencial em coordenadas esféricas para a configuração da fibra, ou seja, uma dependência da função densidade de probabilidade em termos dos ângulos φ e ϑ . Desta forma, objetiva-se uma descrição ainda mais realística do problema, uma vez que o acoplamento bolha-aditivos é mais acentuado.

Diversas são as possibilidades de se analisar matematicamente o comportamento de uma bolha em um fluido não-Newtoniano. Cunha *et al.*, 2002 exploraram a dinâmica de uma bolha na presença de um fluido magnético, a partir de uma equação constitutiva que considera o campo magnético e a magnetização do escoamento. Os parâmetros relevantes a serem investigados são o coeficiente de pressão magnético e a razão de permeabilidade magnética. O efeito magnético é uma consequência direta da tensão normal extra produzida no fluido polarizado sobre a ação do campo magnético, com implicações diretas no estudo de fluidos criogênicos e na prevenção do colapso em turbinas.

A presente análise da dinâmica de bolhas em fluidos não-Newtonianos também pode ser utilizada como ponto de partida para simulações numéricas diretas (DNS) do movimento caótico de bolhas em fluidos complexos para escoamentos tridimensionais não-isotérmicos, em que as bolhas não necessariamente permaneçam esféricas durante o movimento oscilatório. Da mesma forma, pode-se considerar a presença de surfactantes, o que gera a presença de uma não-linearidade mais acentuada e quebra a simetria radial do escoamento. Um método de integral de contorno pode ser viável para capturar a evolução da interface da bolha a cada instante de tempo.

Salienta-se que outras combinações de parâmetros físicos do presente modelo também podem ser exploradas, e podem levar a respostas da dinâmica da bolha com vários graus de liberdade vibracionais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abramowitz, M., Stegun, I. A., 1964, Handbook of Mathematical functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, *Dover Publications*, New York.
- Absi, F. S., Oliveira, T. F., Cunha, F. R., 2006, A Note on the Extensional Viscosity of Elastic Liquids under Strong Flows, *Mechanics Research Communication*, Vol. 33, 401–414.
- Albernaz, D. L., 2007, Comportamento Dinâmico de Bolhas em Fluidos Viscoelásticos, Projeto de Graduação, *Universidade de Brasília*.
- Albernaz, D. L., Cunha, F. R., 2011, Bubble Dynamics in a Maxwell Fluid with Extensional Viscosity, *Mechanics Research Communication*, 1–11, Accepted for Publication.
- Albernaz, D. L., Cunha, F. R., 2010, The Motion of an Oscillating Spherical Bubble in a Complex Fluid, *Applied Mathematics & Computation*, 1–15, Under Review.
- Albernaz, D. L., Cunha, F. R., 2009, On the Motion of an Oscillating Bubble in an Elastic Liquid, *Proceedings of COBEM*, ABCM.
- Albernaz, D. L., Cunha, F. R., 2009, Computer Simulation of Bubble Dynamics in Liquids with Elastic-Anisotropic Additives, *Proceedings of CILAMCE*.
- Allen, J. S., Roy, R. A., 2000, Dynamics of Gas Bubbles in Viscoelastic Fluids. I. Linear Viscoelasticity, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 107 (6), 3167–3178.
- Allen, J. S., Roy, R. A., 2000, Dynamics of Gas Bubbles in Viscoelastic Fluids. II. Nonlinear Viscoelasticity, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 108 (4), 1640–1650.

- Andreotti, M., Cunha, F. R., 2007 A study of the Effect of Polymer Solution in Promoting Friction Reduction in Turbulent Channel Flow, *Journal of fluids engineering*, Vol. 129, 491–505.
- Aris, R., 1962, Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics, *Dover Publications*, New York.
- Bark, F. H., Hinch, E. J., Landahl, M. T., 1975, Drag Reduction in Turbulent Flow due to Additives: a Report on Euromech 52, *J. Fluid Mech.*, Vol. 68, 129–138.
- Batchelor, G. K., 1970, Slender-body theory for particle of arbitrary cross section in Stokes flow, *J. of Fluid Mechanics*, Vol. 44, 419–440.
- Batchelor, G. K., 1971, The stress Generated in a Non-dilute Suspension of Elongation Particles by Pure Straining, *J. of Fluid Mechanics*, Vol. 46, 813–829.
- Beal, R. E., 1986, Engine Coolant Testing: 2nd Symposium, *ASTM STP 887*, American Society for Testing and Material, Philadelphia.
- Bird, R. B., Armstrong, R. C., Hassager, O., 1987, Dynamics of Polymeric Liquids, *John Wiley & Sons*, Vol. 1 Fluid Dynamics.
- Benjamin, T. B., Ellis, A. T., 1966, The Collapse of Cavitation Bubbles and the Pressures thereby Produced against Solid Boundaries, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, London, Ser. A, Vol. 260, 221–240.
- Besant, W. H., 1859, A Treatise on Hydrostatics and Hydrodynamics, *Deighton Bell*, Cambridge, 170–171.
- Blake, J. R., Gibson, D. C., 1987, Cavitation Bubbles near Boundaries, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 19, 99–124.
- Brennen, C. E., 1995, Cavitation and Bubble Dynamics, *Oxford University Press*.
- Brenner, M. P., Hingenfeldt, S., Lohse, D., 2002, Single-bubble Sonoluminescence, *Review of Modern Physics*, Vol. 84, 425–484.
- Brujan, E. A., 1999, A First-order Model for Bubble Dynamics in a Compressible Viscoelastic Liquid, *J. non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 84, 83–103.

- Burrill, L. C., 1951, Sir Charles Parsons and Cavitation, *Trans. Inst. of Marine Engineers*, Vol. 63, 149–167.
- Cash, J. R., Karp, A. H., 1990, *ACM Transactions on Mathematical Software*, Vol. 16, 201–222.
- Ceccio, S. L., 2010, Friction Drag Reduction of External Flows with Bubble and Gas Injection, *Ann. Rev. of Fluid Mech.*, Vol. 42, 183–203.
- Chandrasekharaiah D. S., Debnath, L., 1994, Continuum Mechanics, *Academic Press*, New York.
- Chahine, G. L., Fruman, D. H., 1979, Dilute Polymer Solution Effects on Bubble Growth and Collapse, *Phys. Fluids*, Vol. 22, 1406–1407.
- Chahine, G. L., Tanguay, M., Loraine, G., 2009, Acoustic Measurements Bubbles in Biological Tissue, *Journal of Hydrodynamics*, Vol. 21, 47–64.
- Chinesta, F., Chaidron, G., Poitou, A., 2003, On the Solution of Fokker-Planck Equations in Steady Recirculating Flows Involving Short Fiber Suspensions, *J. of non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 113, 97–125.
- Chmiel, H., Walitza, E., 1980, On the Rheology of Human Blood and Synovial Fluids, *Research Studies*, Chichester.
- Choi, J. J., Pernot, M., Brown, T. R., Small, S. A., Konofagou, E. E., 2007, Spatio-temporal Analysis of Molecular Delivery through the Blood-brain Barrier using Focused Ultrasound, *Phys. Med. Biol.*, Vol. 52, 5509–5530.
- Chomas, J. E., Pollard, R. E., Sadlowski, A. R., Griffey, S. M., Wisner, E. R., Ferrara, K. W., 2003, Contrast-enhanced US of Microcirculation of Superficially implanted Tumors in Rats, *Radiology*, Vol. 229, 439–446.
- Commander, K. W., Prosperetti, A., 1989, Linear pressure waves in bubbly liquids - comparison between theory and experiments, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 85, 732–7346.
- Crum, L. A., 1979, Surface oscillations and jet development in pulsating bubbles, *J. Physique*, Vol. 41, 285–288.

- Crum, L. A., Sonoluminescence, *Phys. Today*, Vol. 47, 22–29.
- Cunha, F. R., 1995, Hydrodynamics Dispersion in Suspension (PhD Thesis) - *Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics (DAMPT)*, University of Cambridge.
- Cunha, F. R., Sousa, A. J., Morais, P. C., 2002, The Dynamic Behavior of a Collapsing Bubble in a Magnetic Fluid, *J. of Magnetism and Mag. Mat.*, Vol. 252, 271–275.
- Cunha, F. R., Andreotti, M. A., 2007, A Study of the Effect of Polymer Solution in Promoting Friction Reduction in Turbulent Channel Flow, *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 129, 491–505.
- Cunha, F. R., 2008, Notas de Aula do Curso Dinâmica de Fluidos não-Newtonianos, Departamento de Engenharia Mecânica - Universidade de Brasília.
- Cunha, F. R., 2009, Notas de Aula do Curso Mecânica dos Meios Contínuos, Departamento de Engenharia Mecânica - Universidade de Brasília.
- Dahi, E., 1982, Perspective of Combination of Ozone and Ultrasound, *Ozonization Manual for Water and Wastewater Treatment*, John Wiley and Sons.
- Dayton, P. A., Ferrara, K. W., 2002, Targeted Imaging using Ultrasound, *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, Vol. 16, 362–377.
- Doktycz, S. J., Suslick, K. S., 1990, Interparticle Collisions Driven by Ultrasound, *Science*, Vol. 247, 1067–1069.
- Ellis, A. T., Hoyt, W. J., 1968, Some Effects of Macromolecules on Cavitation Inception, *ASME Cavitation Forum*.
- Ericksen, J. L., 1960, Transversely Isotropic Fluids, *Kolloid-Z.*, Vol. 173, 117–122.
- Evans, J. G., 1975, Theoretical Rheology, *Applied Science Publishers*, London.
- Ferrara, K., Pollard, R., Borden, M., 2007, Ultrasound Microbubble Contrast Agents: Fundamentals and Application to Gene and Drug Delivery, *Annu. Rev. Biomed. Eng.*, Vol. 9, 415–447.

- Ferrara, K. W., Borden, M. A., Zhang, H., 2009, Lipid-Shelled Vehicles: Engineering for Ultrasound Molecular Imaging and Drug Delivery, *Accounts of Chemical Research*, Vol. 42, 881–892.
- Fogler, H. S., Goddard, J. D., 1970, Collapse of Spherical Cavities in Viscoelastic Fluids, *Phys. Fluids*, Vol. 13, 1135–1141.
- Foteinopoulou, K., Laso, M., 2010, Numerical Simulation of Bubble Dynamics in a PTT liquid: Non-linear Shape and Size Oscillatory Response under Periodic Pressure, *Ultrasonics*, Vol. 50, 758–776.
- Frenzel, H., Schultes, H., 1934, *Z Phys. Chem.*, Vol. 27B, 421.
- Gale, G. W., Busnaina, A. A., 1995, Removal of Particulate Contaminants using Ultrasonics and Megasonics: A review, *Particulate Science and Technology*, Vol. 13, 197–211.
- Gedanken, A., 2004, Using Sonochemistry for the Fabrication of Nanomaterials, *Ultrasonics Sonochemistry*, Vol. 11, 47–55.
- Gilmore, F. R., 1952, The growth or collapse of a spherical bubble in a viscous compressible liquid, *Hydrodynamics Laboratory* (Pasadena: California Institute of Technology).
- Gyr, A., Bewersdorff, H. -W., 1995, Drag Reduction of Turbulent Flows by Additives, *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht.
- Hara, S. K., Schowalter, W. R., 1984, Dynamics of nonspherical bubbles surrounded by viscoelastic fluid, *J. non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 14, 249–264.
- Hinch, E. J., Leal, L. G., 1976, Constitutive Equations in Suspension Mechanics, Part 2. Approximate Forms for a Suspension of Rigid Particles Affected by Brownian Rotations, *J. Fluid Mech.*, Vol. 76(1), 187–208.
- Hinch, E. J., 1991, Perturbation Methods, *Cambridge University Press*, Cambridge.
- Ichihara, M., Ohkunitani, H., Ida, Y., Kameda, M., 2004, Dynamics of Bubble Oscillation and Wave Propagation in Viscoelastic Liquids, *J. of Volcanology and Geothermal Research*, Vol. 129, 37–60.

- Jiménez-Fernández, J., Crespo, A., 2005, Bubble Oscillation and Inertial Cavitation in Viscoelastic Fluids, *Ultrasonics*, Vol. 43, 643–651.
- Jiménez-Fernández, J., Crespo, A., 2006, The Collapse of Gas Bubbles and Cavities in a Viscoelastic Fluid, *International J. of Multiphase Flow*, Vol. 32, 1294–1299.
- Kafiabad, H. A., Sadeghy, K., 2010, Chaotic Behavior of a Single Spherical Gas Bubble Surrounded by a Giesekus Liquid: a Numerical Study, *J. non-Newt. Fluid Mech.*, Vol. 165, 800–811.
- Kamath, V., Prosperetti, A., 1989, Numerical-integration methods in gas-bubble dynamics, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 85, 1538–1548.
- Khismatullin, D. B., Nadim, A., 2002, Radial Oscillations of Encapsulated Microbubbles in Viscoelastic Liquids, *Phys. of Fluids*, Vol. 14 (10), 3534–3557.
- Kim, C., 1994, Collapse of Spherical Bubbles in Maxwell Fluids, *J. non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 55, 37–58.
- Kodama, T., Takayama, K., 1998, Dynamic Behavior of Bubbles During Extracorporeal Shock-wave Lithotripsy, *Ultrasound in Med. & Biol.*, Vol. 24, 723–738.
- Kulkarni, A. A., Joshi, J. B., 2005, Bubble Formation and Bubble Rise Velocity in Gas-Liquid Systems: A Review, *Ind. Eng. Chem. Res.*, Vol. 44, 5873–5931.
- Larson, R. G., 1988, Constitutive Equations for Polymer Melts and Solutions, *AT&T Bell Laboratories*.
- Lauterborn, W., Parlitz, U., 1988, Methods of Chaos Physics and their Application to Acoustics, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 84(6), 1975–1993.
- Leighton, T. G., 1994, The Acoustic Bubble, *Academic Press*, London.
- Lind, S. J., Phillips, T. N., 2010, Spherical bubble collapse in viscoelastic fluids, *J. Non-Newt. Fluid Mech.* Vol. 165, 56–64.
- Lindner, J. R., Song, J., Jayaweera, A. R., Sklenar, J., Kaul, S., 2002, Microvascular Rheology of Definity Microbubbles following Intra-arterial and Intravenous Administration, *J. Am. Soc. Echocardiogr.*, Vol. 15, 396–403.

- Lindner, J. R., 2004, Microbubbles in Medical Imaging: Current Applications and Future Directions, *Nature Review Drug Discovery*, Vol. 3, 527–532.
- Liu, I. -S., 2002, Continuum Mechanics, *Springer*, Berlin/Heidelberg.
- Lokhandwalla, M., Sturtevant, B., 2000, Fracture Mechanics Model of Stone Comminution in ESWL and Implications for Tissue Damage, *Phys. Med. Biol.*, Vol. 45, 1923–1940.
- Lugli, F., Zerbetto, F., 2007, An Introduction to Bubble Dynamics, *Phys. Chem. Chemical Phys.*, Vol. 9, 2447–2456.
- Marmottant, P., Hilgenfeldt, S., 2004, A Bubble-driven Microfluidic Transport Element for Bioengineering, *PNAS*, Vol. 101, 9523–9527.
- Mason, T. J., 1999, Sonochemistry, *Oxford University Press*, New York.
- Mason, T. J., Lorimer, J. P., 2002, Applied Sonochemistry: the uses of Power Ultrasound in Chemistry and Processing, *Wiley - VCH*.
- Maxwell, J. C., 1867, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, Vol. A 157, 49–88.
- McQuarrie, D. A., 2000, Statistical Mechanics, *University Science Books*, California.
- Naude, C. F., Ellis, A. T., 1961, On the Mechanism of Cavitation Damage by non-hemispherical Cavities in Contact with a Solid Boundary, *ASME. J. Basic Eng.*, Vol. 83, 648–656.
- Naude, J., Méndez, F., 2008, Periodic and Chaotic Acoustic Oscillations of a Bubble Gas Immersed in an UCM Fluid, *J. of non-Newt. Fluid Mech.*, Vol. 155, 30–38.
- Newton, I., 1704, Optiks, *Dover Publications*, New York, 207.
- Oldroyd, J. G., 1950, *Proc. Roy. Soc. A200*, 523.
- Parini, M. R., Pitt, W. G., 2006, Dynamic Removal of Oral Biofilms by Bubbles, *Colloids and Surfaces B: Biointerfaces*, Vol. 52, 39–46.
- Parsons, C. A., 1906, The Steam Turbine on Land and at Sea, *Lecture to Royal Institution*.

- Plesset, M. S., 1949, Trans ASME, *J. Appl. Mech.*, Vol. 71, 277.
- Plesset, M. S., Prosperetti, A., 1977, Bubble Dynamics and Cavitation, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 9, 145–185.
- Pozrikidis, C., 1992, Boundary Integral and Singularity Methods for Linearized Viscous Flow, *Cambridge University Press*, Cambridge, UK.
- Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., 1992, Numerical Recipes in Fortran 77, *Cambridge University Press*.
- Prosperetti, A., 1987, The Equation of Bubble Dynamics in a Compressible Liquid, *Phys. Fluids*, Vol. 30, 3626–3628.
- Prosperetti, A., Crum, L. A., Commander, K. W., 1988, Nonlinear Bubble Dynamics, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 83, 502–514.
- Qin, S., Caskey, C. F., Ferrara, K. W., 2009, Ultrasound Contrast Microbubbles in Imaging and Therapy: Physical Principles and Engineering, *Phys. Med. Biol.*, Vol. 54, 27–57.
- Rayleigh, L., 1917, On the Pressure Developed in a Liquid During the Collapse of a Spherical Cavity, *Phil. Magazine* (series 6), Vol. 34, 94–98.
- Reynolds, O., 1873, The Causes of the Racing of the Engines of Screw Steamers Investigated Theoretically and by Experiment, *Trans. Inst. Naval Arch.*, Vol. 14, 56–67.
- Salas, F. M. A., 2006, Modelagem Microestrutural de Líquidos Elásticos em Escoamentos, Dissertação de Mestrado, *Universidade de Brasília*.
- Santos, R. A. M., 2005, Comportamento Dinâmico de Bolhas em Fluidos Complexos, Tese de Mestrado, *Universidade de Brasília*.
- Saveth, K. J., Klein, S. T., Robbins and Myers Inc., 1989, The Progressing Cavity Pump: Principle and Capabilities, *SPE Production Operations Symposium*, Oklahoma.
- Shaqfeh, E. S. G. & Frederickson, G. H., 1990, The Hydrodynamic Stress in a Suspension of Rods, *Phys. Fluids A*, Vol. 2, 7–24.

- Shima, A., Tsujino, A., Oikawa, Y., 1988, The collapse of bubbles in viscoelastic Fluids, *Inst. High Speed Mech. Tohoku University*, Vol. 55, 17–34.
- Schoenburg, M., Kraus, B., Muehling, A., Taborski, U., Hofmann, H., Erhardt, G., Hein, S., Roth, M., Vogt, P. R., Karliczek, G. F., Kloevekorn, W. P., 2003, The Dynamic Air Bubble Trap Reduces Cerebral Microembolism during Cardiopulmonary Bypass, *Journal of Thoracic and Card. Surgery*, Vol. 126, 1455–1460.
- Shohet, R. V., Chen, S. Y., Zhou, Y. T., Wang, Z. W., Meidell, R. S., Unger, T. H., Grayburn, P. A., 2000, Echocardiographic Destruction of Albumin Microbubbles directs Gene Delivery to the Myocardium, *Circulation*, 101, 2554–2556.
- Shulman, Z. P., Levitsky, S. P., 1992, Heat/mass Transfer and Dynamics of Bubbles in High-polymer Solutions - I: Free oscillations, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 35, 1077–1084.
- Singh, S., Houston, J., van Swol, F., Brinker, C. J., 2006, Superhydrophobicity - Drying transition of confined water, *Nature*, Vol. 442, 526.
- Stride, E. P. Coussios, C. C., 2010, Cavitation and Contrast: the use of Bubbles in Ultrasound Imaging and Therapy, *Proceedings of the Inst. of Mech. Eng., Part H: Journal of Eng. in Med.*, Vol. 224, 171–191.
- Suslick, K. S., 1990, Sonochemistry, *Science*, Vol. 247, 1439–1445.
- Suslick, K. S., Price, G. J., 1999, Applications of Ultrasound to Materials Chemistry, *Annual Review of Materials Science*, Vol. 29, 295–326.
- Taleyarkhan, R. P., West, J. S., Cho, R. T., Lahey, Jr, Nigmatulin, R. I., Block, R., C., *Science*, Vol. 295, 1868.
- Tanasawa, I., Yang, W. J., 1970, Dynamic Behavior of a Gas Bubble in Viscoelastic Liquids, *J. Appl. Phys.*, Vol. 41, 4526–4531.
- ter Haar, G., 2010, Ultrasound Bioeffects and Safety, *Proceedings of the Inst. of Mech. Eng., Part H: Journal of Eng. in Med.*, Vol. 224, 363–373.
- Ting, R. Y., 1978, Characteristics of Flow Cavitation in Dilute Solution of Polyethylene Oxide and Polyacrylamide, *Phys. Fluids*, Vol. 21, 898–901.

- Thomas, J. E., 2004, Fundamentos de Engenharia de Petróleo, *Interciência: Petrobrás*, 2 Ed., 248–253.
- Toms, B. A., 1948, Some Observations on the Flow of Linear Polymer Solutions through Strait Tubes at Large Reynolds Numbers, *Proc. 1st Int. Rheological Congress*, North Holland, Amsterdam, Vol. 2, 135–141.
- Truesdell, C., Toupin, R. A., 1960, The Classical Field Theories, *Encyclopedia of Physics* (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1960), ed. by S. Flügge, Vol. III/1.
- van den Berg, T. H., Luther, S., Lathrop, D. P., Lohse, D., 2005, Drag Reduction in Bubbly Taylor-Couette Turbulence, *Phys. Review Letters*, Vol. 94, 044501.
- van den Berg, T. H., van Gils, D. P. M., Lathrop, D. P., Lohse, D., 2007, Bubbly Turbulent Drag Reduction Is a Boundary Layer Effect, *Phys. Review Letters*, Vol., 98, 084501.
- van der Meer, S. M., Dollet, B., Voormolen, M. M., Chin, C. T., Bouakaz, A., de Jong, N., Versluis, M., Lohse, D., 2007, Microbubble Spectroscopy of Ultrasound Contrast Agents, *J. of the Acoustical Soc. of America*, Vol. 121, 648–656.
- van der Sluis, L. W. M., Versluis, M., Wu, M. K., Wesselink, P. R., 2007, Passive Ultrasonic Irrigation of the Root Canal: a Review of the Literature, *International Endodontic Journal*, Vol. 40, 415–426.
- Versluis, M., Schmitz, B., Heydt, A. von der, Lohse, D., 2000, How Snapping Shrimp Snap: Through Cavitating Bubbles, *Science*, Vol. 289, 2114–2117.
- Wang, Y., Li, X., Zhou, Y., Huang, P., Xu, Y., 2010, Preparation of Nanobubbles for Ultrasound Imaging and Intracellular Drug Delivery, *International Journal of Pharmaceutics*, Vol. 384, 148–153.
- Weyl, H., 1939, The Classical Groups, *Princeton University Press*, Princeton.
- Wu, S. H., Leong, T., Kentish, S., Ashokkumar, M., 2009, Frequency Effects during Acoustic Cavitation in Surfactant Solutions, *J. of Physical Chemistry B*, Vol. 113, pp. 16568–16573.

Young, F. R., 1989, Cavitation, *McGraw-Hill*, London.

Zhang, A. M., Yao, X. L., Feng, L. H., 2009, The Dynamic Behavior of a Gas Bubble near a Wall, *Ocean Engineering*, Vol. 36, 295–305.

Zhou, K., Lin, J., 2008, Three Dimensional Fiber Orientation Distribution in Two Dimensional Flows, *Fibers and Polymers*, Vol. 9, 39–47.

APÊNDICES

A MÉTODO DO FATOR INTEGRANTE

O método do fator integrante é utilizado quando uma equação diferencial ordinária apresenta uma forma semelhante à seguinte equação

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x) , \quad (\text{A.1})$$

em que multiplica-se todos os termos por um fator integrante caracterizado por $i = i(x)$ tal que:

$$i(x)y'(x) + i(x)p(x)y(x) = i(x)q(x) . \quad (\text{A.2})$$

Importante conceber que o termo à direita da equação (A.2) pode representar a derivada da função $i(x)y(x)$, ficando, portanto,

$$i(x)y'(x) + i(x)p(x)y(x) = \frac{d}{dx} [i(x)y(x)] , \quad (\text{A.3})$$

para que tal proposta seja válida, em que $y = y(x)$ é considerado não-nulo, tem-se que:

$$i'(x) = -i(x)p(x) , \quad (\text{A.4})$$

obtendo primeiramente a solução para a equação diferencial na equação (A.4), encontra-se:

$$\ln [i(x)] = \int_0^x p(k)dk . \quad (\text{A.5})$$

Uma mudança na variável de integração foi utilizada, visando evitar erros na obtenção da função. Assumindo que a integral da Eq. (A.5) apresente a forma $P(x)$, tem-se

$$i(x) = \exp [P(x)] . \quad (\text{A.6})$$

Substituindo a equação (A.6) em (A.2), obtém-se

$$\exp [P(x)] y'(x) + p(x) \exp [P(x)] y(x) = q(x) \exp [P(x)] . \quad (\text{A.7})$$

Observe que os termos à esquerda das equações (A.3) e (A.7) são iguais, logo:

$$\frac{d}{dx}(y(x) \exp [P(x)]) = q(x) \exp [P(x)] , \quad (\text{A.8})$$

integrando a equação (A.8), obtém-se, finalmente, uma expressão para $y(x)$

$$y(x) = \exp [-P(x)] \int q(k) \exp [P(k)] dk + C . \quad (\text{A.9})$$

Nota-se que a equação (3.36), obtida na seção 3.3.1, o termo $p(x)$ é representado por $1/\alpha$ e, da mesma forma, $y(x) = \sigma$ e $q(x) = \mu\dot{\gamma}/\alpha$. Em virtude dessas considerações, sabendo que $x = t$, o fator integrante resultante da equação (A.5) assume a seguinte forma

$$i(t) = e^{t/\alpha} . \quad (\text{A.10})$$

É importante observar que a constante C referente à equação (A.9) é zero neste caso, uma vez que no instante inicial $t = 0$, a tensão é nula.

B FÓRMULA DE LEIBNIZ

Definindo $G(\mathbf{x}, t)$ como uma quantidade de uma propriedade física de um material contínuo por unidade de volume. A quantidade total desta propriedade presente em um volume finito V do material é obtida por:

$$\int_V G(\mathbf{x}, t) dV \quad (\text{B.1})$$

supor que esta propriedade está sendo transportada pela ação do escoamento do material com velocidade \mathbf{u} . O teorema do transporte de Reynolds (TTR) estabelece que:

$$\frac{d}{dt} \int_V G(\mathbf{x}, t) dV = \int_V \frac{\partial G(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV + \int_S G(\mathbf{x}, t) \mathbf{u} \cdot \hat{n} dS \quad (\text{B.2})$$

portanto, a taxa de variação total de uma propriedade extensiva qualquer $G(\mathbf{x}, t)$ no volume do material equivale à integral de volume da variação instantânea de $G(\mathbf{x}, t)$ ocorrendo no volume somada à integral de superfície da taxa com que $G(\mathbf{x}, t)$ está sendo transportado através da superfície S_0 . Usando o teorema da divergência, a equação (B.2) pode ser escrita também na forma:

$$\frac{d}{dt} \int_V G(\mathbf{x}, t) dV = \int_V \frac{\partial G(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot (G(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}) dV \quad (\text{B.3})$$

para o caso unidimensional $\mathbf{x} = x \rightarrow G = G(x, t)$:

$$\frac{d}{dt} \int_{a(x)}^{b(x)} G(x, t) dx = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial G(x, t)}{\partial t} dx + \int_{a(x)}^{b(x)} \nabla \cdot (G(x, t) u) dx \quad (\text{B.4})$$

em um intervalo determinado entre $[a(t), b(t)]$, obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} G(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} G(x, t) dx + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial x} (G(x, t)u) dx \quad (\text{B.5})$$

por definição $u = dx/dt$. Logo:

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} G(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} G(x, t) dx + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dx}{dt} G(x, t) \right) dx \quad (\text{B.6})$$

do Teorema Fundamental do Cálculo (Leibniz) obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} G(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} G(x, t) dx + G(b, t) \frac{db}{dt} - G(a, t) \frac{da}{dt} \quad (\text{B.7})$$

C OBJETIVIDADE DA DERIVADA OLDROYD

O princípio da Invariância Material ou Objetividade das derivadas materiais convectivas Oldroyd é apresentado nesta seção. Primeiramente, relembra-se que a derivada temporal em um sistema de coordenadas convectivo pode ser representado como (Bird *et al.*, 1987)

$$\frac{\delta_+ \boldsymbol{\sigma}}{\delta t} = \frac{D\boldsymbol{\sigma}}{Dt} + \nabla \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T , \quad (\text{C.1})$$

que corresponde à derivada convectiva Oldroyd baixa. É importante salientar que o gradiente da velocidade que pode ser definido em termos dos tensores taxa de deformação \mathbf{D} e taxa de rotação \mathbf{W} , em que $\nabla \mathbf{u} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$ e o transposto deste tensor é $(\nabla \mathbf{u})^T = \mathbf{D} - \mathbf{W}$. Desta forma, reescreve-se a equação (C.1), obtendo

$$\frac{\delta_+ \boldsymbol{\sigma}}{\delta t} = \frac{D\boldsymbol{\sigma}}{Dt} + \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W} . \quad (\text{C.2})$$

Na seção 2.1 demonstrou-se que o tensor simétrico \mathbf{D} satisfaz a lei de transformação e corresponde a um tensor objetivo, uma vez que

$$\mathbf{D}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^T , \quad (\text{C.3})$$

enquanto o tensor anti-simétrico \mathbf{W} é uma quantidade não-objetiva, conforme a seção 2.1, sendo

$$\mathbf{W}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{Q}^T + \frac{1}{2} (\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^T - \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T) . \quad (\text{C.4})$$

A derivada material também não representa uma quantidade objetiva, uma vez que

$$\frac{D'\boldsymbol{\sigma}'}{Dt} = \mathbf{Q} \cdot \frac{D\boldsymbol{\sigma}}{Dt} \cdot \mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^T . \quad (\text{C.5})$$

Para verificar se a equação (C.2) respeita o princípio da Invariância Material, considera-se uma transformação homogênea de referencial, em que

$$\frac{\delta'_+\boldsymbol{\sigma}'}{\delta t} = \frac{D'\boldsymbol{\sigma}'}{Dt} + \mathbf{D}' \cdot \boldsymbol{\sigma}' + \boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{D}' + \mathbf{W}' \cdot \boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{W}' , \quad (\text{C.6})$$

e, substituindo as equações (C.3), (C.4) e (C.5) em (C.6), encontra-se que

$$\begin{aligned} \frac{\delta'_+\boldsymbol{\sigma}'}{\delta t} = & \mathbf{Q} \cdot \frac{D\boldsymbol{\sigma}}{Dt} \cdot \mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^T + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T \\ & + \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^T + \left[\mathbf{Q} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{Q}^T + \frac{1}{2} (\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^T - \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T) \right] \cdot \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T \\ & - \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \left[\mathbf{Q} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{Q}^T + \frac{1}{2} (\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^T - \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T) \right] , \quad (\text{C.7}) \end{aligned}$$

a partir das propriedades do tensor ortogonal $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$ e também $\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^T = -\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T$, a equação (C.7) assume a forma

$$\begin{aligned} \frac{\delta'_+\boldsymbol{\sigma}'}{\delta t} = & \mathbf{Q} \cdot \frac{D\boldsymbol{\sigma}}{Dt} \cdot \mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^T + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T \\ & + \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T - \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{Q}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T) \\ & - \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{Q}^T - \frac{1}{2} (\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^T + \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^T) , \quad (\text{C.8}) \end{aligned}$$

e, após algumas manipulações algébricas, tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\delta'_+ \boldsymbol{\sigma}'}{\delta t} = & \mathbf{Q} \cdot \frac{D\boldsymbol{\sigma}}{Dt} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^T \\ & - \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T, \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

a equação (C.10) pode ser rearranjada na forma

$$\frac{\delta'_+ \boldsymbol{\sigma}'}{\delta t} = \mathbf{Q} \cdot \left(\frac{D\boldsymbol{\sigma}}{Dt} + \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W} \right) \cdot \mathbf{Q}^T, \quad (\text{C.10})$$

e, finalmente, considerando a equação (C.2), a equação (C.10) resulta em

$$\frac{\delta'_+ \boldsymbol{\sigma}'}{\delta t} = \mathbf{Q} \cdot \frac{\delta_+ \boldsymbol{\sigma}}{\delta t} \cdot \mathbf{Q}^T, \quad (\text{C.11})$$

conclui-se que a equação (C.11) obedece ao Princípio de Invariância Material e, portanto, consiste em uma equação objetiva. Convém notar que a verificação da derivada Oldroyd Alta quanto ao Princípio de Invariância Material pode ser constatada de maneira análoga, seguindo os mesmos cálculos desenvolvidos acima.

D SOLUÇÃO PARA O TEMPO DE COLAPSO DE RAYLEIGH

Este apêndice descreve matematicamente a proposta de Rayleigh, 1917 para o colapso de uma cavidade de vácuo, que resulta em uma solução analítica para o cálculo do tempo τ_c de colapso total da cavidade, partindo de uma condição de raio inicial até o instante em que o raio é nulo.

Define-se \dot{R} como a velocidade, R o raio da fronteira da bolha para um tempo t e \dot{r} a velocidade do escoamento em qualquer distância r a partir do centro da cavidade. É necessário lembrar a equação (2.49), obtida a partir da equação da continuidade, em que

$$\frac{\dot{r}}{\dot{R}} = \frac{R^2}{r^2} . \quad (\text{D.1})$$

Utilizando a relação acima, a energia cinética total do líquido pode ser expressa por:

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} = \frac{1}{2}\rho \int_R^\infty \dot{r}^2 4\pi r^2 dr = -8\pi\rho R^3 \dot{R}^2 , \quad (\text{D.2})$$

em que ρ representa a massa específica do líquido. Nota-se que R é constante nesta integração. Considera-se a pressão hidrostática no líquido, onde a pressão ambiente do líquido P_0 é igual à pressão do líquido no infinito P_∞ , i.e. $P_0 = P_\infty$. Em virtude dessas considerações, se R_0 denota o raio inicial da bolha para o tempo $t = 0$, o trabalho realizado pela pressão hidrostática é representado por:

$$\int_{R_0}^R P dV = \frac{4}{3}\pi P_0(R^3 - R_0^3) , \quad (\text{D.3})$$

em que V representa o volume da cavidade em um determinado tempo. Assume-se uma compressão isotérmica. Importante observar que o trabalho realizado pela pressão hidrostática equivale à energia cinética devido ao movimento da cavidade. Assim, utilizando as Eqs. (D.2) e (D.3), o balanço de energia resulta em

$$-8\pi\rho\dot{R}^2 R^3 = \frac{4}{3}\pi P_0(R^3 - R_0^3) . \quad (\text{D.4})$$

Isolando-se \dot{R} , obtém-se

$$\dot{R}^2 = \frac{1}{6} \frac{P_0}{\rho} \left(\frac{R_0^3}{R^3} - 1 \right) . \quad (\text{D.5})$$

Sabe-se que $\dot{R} = dR/dt$, rearranjando a equação (D.5) e expressando a mesma em termos do tempo, tem-se

$$dt = dR \sqrt{\frac{\rho}{6P_0 (R_0^3/R^3 - 1)}} \Rightarrow dR \sqrt{\frac{\rho}{6P_0} \left(\frac{R^3}{R_0^3 - R^3} \right)} . \quad (\text{D.6})$$

Integrando-se a equação (D.6), obtém-se a seguinte forma

$$t = \sqrt{\frac{\rho}{6P_0}} \int_R^{R_0} \frac{R^{3/2} dR}{(R_0^3 - R^3)^{1/2}} . \quad (\text{D.7})$$

Com a realização de uma simples mudança de variável $\alpha = R/R_0$, a integral em (D.7) resulta em

$$t = R_0 \sqrt{\frac{\rho}{6P_0}} \int_\alpha^1 \frac{\alpha^{3/2} d\alpha}{(1 - \alpha^3)^{1/2}} . \quad (\text{D.8})$$

O tempo τ_c de colapso é obtido para a condição $\alpha = 0$. Novamente, com uma mudança de variável $Z = \alpha^3$, encontra-se

$$\int_0^1 \frac{\alpha^{3/2} d\alpha}{(1 - \alpha^3)^{1/2}} = \int_0^1 Z^{-1/6} (1 - Z)^{-1/2} dZ . \quad (\text{D.9})$$

A equação (D.9) remete à forma

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1 - t)^{w-1} dt , \quad (\text{D.10})$$

em que a equação (D.10) é definida como a função beta ($B(z, w)$), que pode ser resolvida em termos da função especial Gamma $\Gamma(x)$, sendo

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z + w)} . \quad (\text{D.11})$$

Realizando uma substituição da Eq. (D.11) na Eq. (D.9), o tempo de colapso pode ser determinado pela seguinte expressão matemática:

$$\tau_c = R_0 \sqrt{\frac{1}{6} \frac{\rho}{P_0}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} . \quad (\text{D.12})$$

Substituindo os valores numéricos de $\Gamma(5/6)$, $\Gamma(1/2)$ e $\Gamma(4/3)$, os quais podem ser obtidos a partir de uma tabela (e.g. Abramowitz & Stegun, 1964), encontra-se finalmente o tempo de colapso total da cavidade de vácuo, que assume a forma

$$\tau_c = 0,915 R_0 \sqrt{\frac{\rho}{P_0}} , \quad (\text{D.13})$$

que em termos adimensionais resulta em:

$$\frac{\tau_c}{R_0 \sqrt{\rho/P_0}} = 0,915 . \quad (\text{D.14})$$

E EQUAÇÃO DA FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE

Utiliza-se o método do fator integrante para encontrar a solução de uma equação diferencial, neste caso, da equação de evolução da densidade de probabilidade, P . Multiplicando a equação (7.40) pelo fator integrante β , determina-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t}\beta + \frac{\partial P}{\partial r}\beta \left(\frac{R^2\dot{R}}{r^2} - \frac{2R^2\dot{R}}{r^3} \cos^2\theta \operatorname{sen}^2\theta \right) + \frac{\partial P}{\partial \theta}\beta \left(\frac{2R^2\dot{R}}{r^4} \cos^3\theta \operatorname{sen}\theta \right) \\ = -P\beta \left(\frac{2R^2\dot{R}}{r^4} (\cos^4\theta - 2\cos^2\theta \operatorname{sen}^2\theta) \right) . \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

quando a função densidade de probabilidade P é contínua e diferenciável, obtém-se

$$dP = \frac{\partial P}{\partial t}dt + \frac{\partial P}{\partial r}dr + \frac{\partial P}{\partial \theta}d\theta , \quad (\text{E.2})$$

ao realizar uma comparação entre as equações (E.1) e (E.2), com relação ao termo $\partial P/\partial t$ determina-se que

$$\frac{\partial P}{\partial t}dt = \frac{\partial P}{\partial t}\beta , \quad (\text{E.3})$$

o que leva a concluir que $\beta = dt$. Relacionando as equações (E.1) e (E.2), agora com relação ao termo $\partial P/\partial r$, obtém-se

$$dr = dt \left(\frac{R^2\dot{R}}{r^2} - \frac{2R^2\dot{R}}{r^3} \cos^2\theta \operatorname{sen}^2\theta \right) , \quad (\text{E.4})$$

considerando $dr/dt = \dot{r}$, a equação (E.4) reduz-se a

$$\dot{r} = \frac{R^2 \dot{R}}{r^2} \left(1 - \frac{2}{r} \cos^2 \theta \text{sen}^2 \theta \right) . \quad (\text{E.5})$$

agora, relacionando as eqs. (E.1) e (E.2) e analisando o termo $\partial P / \partial \theta$, tem-se:

$$\dot{\theta} = \frac{2R^2 \dot{R}}{r^4} \cos^3 \theta \text{sen} \theta . \quad (\text{E.6})$$

Cumprе registrar neste passo que as equações (E.5) e (E.6) remetem à derivada temporal da posição do aditivo observado e do ângulo existente entre a orientação do aditivo e a direção radial do escoamento, respectivamente. Comparando finalmente as equações (E.1) e (E.2), conclui-se que dP assume a seguinte forma

$$dP = -P \left(\frac{2R^2 \dot{R}}{r^4} (\cos^4 \theta - 2 \cos^2 \theta \text{sen}^2 \theta) \right) dt , \quad (\text{E.7})$$

sendo $\dot{R} = dR/dt$, a equação (E.7) reduz-se a

$$\frac{dP}{P} = -\frac{2}{r^4} (\cos^4 \theta - 2 \cos^2 \theta \text{sen}^2 \theta) R^2 dR , \quad (\text{E.8})$$

integrando P no intervalo entre P e P_0 (condição inicial da densidade de probabilidade na suspensão, $t = 0$) e R no intervalo entre R e R_0 (raio inicial para $t = 0$), resulta em

$$\int_{P_0}^P \frac{dP}{P} = -\frac{2}{r^4} (\cos^4 \theta - 2 \cos^2 \theta \text{sen}^2 \theta) \int_{R_0}^R R^2 dR , \quad (\text{E.9})$$

em que, após algumas manipulações algébricas, a equação (E.9) assume a forma

$$P(r, R, \theta) = P_0 e^{-\left\{ \frac{2}{3r^4} (\cos^2 \theta (3 \cos^2 \theta - 2)) (R^3 - R_0^3) \right\}} . \quad (\text{E.10})$$