

**PROCEDIMENTOS PROGRESSIVOS
ANALÍTICOS E NUMÉRICOS PARA ANÁLISE DE
BARRAGENS EM ARCO**

HENRIQUE SILVA CAMPOS JÚNIOR

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS
E CONSTRUÇÃO CIVIL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**PROCEDIMENTOS PROGRESSIVOS
ANALÍTICOS E NUMÉRICOS PARA ANÁLISE DE
BARRAGENS EM ARCO**

HENRIQUE SILVA CAMPOS JÚNIOR

ORIENTADOR: LINEU JOSÉ PEDROSO

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E
CONSTRUÇÃO CIVIL**

PUBLICAÇÃO: E.DM-007A/11

BRASÍLIA/DF: AGOSTO – 2011

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**PROCEDIMENTOS PROGRESSIVOS ANALÍTICOS E NUMÉRICOS
PARA ANÁLISE DE BARRAGENS EM ARCO**

HENRIQUE SILVA CAMPOS JÚNIOR

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.

APROVADA POR:

Prof. Lineu José Pedroso, Dr. Ing. (UnB)
(Orientador)

Prof. Luciano Mendes Bezerra, PhD (UnB)
(Examinador Interno)

Prof. Zenón José Guzmán Del Prado, DSc (UFG)
(Examinador Externo)

BRASÍLIA/DF, 30 DE AGOSTO DE 2011

FICHA CATALOGRÁFICA

CAMPOS JÚNIOR, HENRIQUE SILVA

Procedimentos progressivos analíticos e numéricos para análise de barragens em arco [Distrito Federal] 2011.

xxii, 184p. 210 x 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2011).

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1.Cascas cilíndricas

3.Método dos elementos Finitos

I. ENC/FT/UnB

2.Cascas abatidas

4.Barragens em arco

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

CAMPOS JUNIOR, H. S. (2011). Procedimentos progressivos analíticos e numéricos para análise de barragens em arco. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil. Publicação E.DM-007A/11, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 183p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Henrique Silva Campos Júnior

TÍTULO: Procedimentos progressivos analíticos e numéricos para análise de barragens em arco

GRAU: Mestre ANO: 2011

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Henrique Silva Campos Júnior
SQN 314, Bloco A, Apto. 504 – Asa Norte
70.767-010 Brasília - DF- Brasil
e-mail: camposjunior@unb.br

Dedicado aos meus pais, pelo apoio e carinho incondicional, e à minha namorada Mylane por compartilhar todos os momentos ao meu lado.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente à Deus, pelas bênçãos e saúde proporcionadas para a conclusão deste trabalho.

Ao meu pai, Henrique Silva Campos, exemplo de como podemos vencer na vida e crescer através dos estudos, e minha mãe, Vilma de Jesus Melo Campos, que me guiou e sempre guiará para o melhor, com dedicação e acima de tudo carinho e respeito para com todos.

À todos os meus tios, que sempre ajudaram a mim e aos meus pais, para que eu pudesse ter, da melhor forma, as melhores condições de educação.

Meu tio e padrinho Everaldo Melo e ao meu primo Fabiano Santana, companheiros de todas as horas.

À família Hortegal, por toda atenção e respeito, e em especial minha namorada Mylane Hortegal, companheira de todos os momentos nessa jornada fora da cidade natal, por compartilhar comigo as alegrias e dar força para superar tristezas, pelo amor, respeito, compreensão, paciência, amizade, e por sempre incentivar meu crescimento profissional.

Às minhas tias Onésia, Noca, Dudu, meus tios Osmar e Vandinho. Agradeço a todos pela excelente acolhida aqui em Brasília.

À minha tia Leila e o seu marido Edimar, pelo auxílio em minha chegada, quando mais precisei, e pelos vários fins de semana em família de muita alegria.

A todos os professores do Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil (PECC) da Universidade de Brasília, que contribuíram de forma direta e/ou indireta no meu crescimento profissional.

À CAPES pelo suporte financeiro.

À Eva Veloso, por todo o auxílio prestado ao longo dessa jornada.

Aos companheiros da UnB: Cecília, Jorge, Morgana, Sebastião, Abdala, Rogério, Iuri, Wallison, Alejandro, Patrícia, e a todos que contribuem para tornar nosso ambiente de trabalho o mais favorável possível. Em especial ao conterrâneo Ramon, companheiro nos estudos e pessoa que mais me ajudou nos primeiros meses de adaptação em Brasília.

E por fim, ao professor Lineu José Pedroso, pela amizade, paciência, dedicação e disponibilidade para contribuir de forma direta na composição deste trabalho dissertação de mestrado. E, principalmente por todos os ensinamentos, e por mostrar que sempre há algo a mais a ser buscado.

“Estou sempre alegre e essa é a melhor maneira de resolver os problemas da vida”
Charles Chaplin

RESUMO

PROCEDIMENTOS PROGRESSIVOS ANALÍTICOS E NUMÉRICOS PARA ANÁLISE DE BARRAGENS EM ARCO

Autor: Henrique Silva Campos Júnior

Orientador: Lineu José Pedroso, Dr. Ing.

Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasília, Agosto de 2011

Muitas soluções alternativas de geração de energia elétrica no Brasil vêm sendo estudadas, entretanto a produção hidroelétrica ainda apresenta uma maior relação custo-benefício para o país devido condições naturais de potencial hidráulico elevado. Neste contexto, as barragens desempenham um papel importante, e com a tendência ainda maior de demandas energéticas por aproveitamentos hidroelétricos, torna-se necessário o desenvolvimento de ferramentas de análise e metodologias de cálculo destinadas aos novos desafios do futuro. Com a restrição a barragens de grande porte devido elevado impacto ambiental, as Pequenas Centrais Hidroelétricas (PCH's) refletem a melhor alternativa de exploração de nosso potencial hidráulico. Desta forma, apresentam-se com destaque as barragens em arco. Feitas de concreto, estas estruturas de barramento são mais esbeltas, econômicas e seguras, visto que há redução significativa no consumo de concreto e os índices de acidentes registrados são os menores. Transmitem a maioria da carga de água para os lados do vale ou grandes blocos de concreto devido à sua curvatura, levando em conta o efeito de casca. Sendo assim, o presente trabalho tem como objetivo o estudo comparativo analítico e numérico utilizando-se de processos progressivos de análise vislumbrando o desenvolvimento de uma metodologia para o tratamento de barragens em arco de concreto com simples curvatura, utilizando os métodos clássicos de análise de cascas e técnicas numéricas baseadas no método dos elementos finitos com auxílio do programa ANSYS 11.0. Os esforços e deslocamentos ao longo da estrutura foram obtidos e validados para cada caso estudado, e os resultados obtidos, mostram um bom acordo entre si, evidenciando a validade dos procedimentos adotados, e a confiabilidade destes, que podem ser utilizados em futuras análises.

ABSTRACT

ANALYTICAL AND NUMERICAL PROGRESSIVE PROCEDURES FOR ARCH DAMS ANALYSIS

Author: Henrique Silva Campos Júnior

Supervisor: Lineu José Pedroso, Dr. Ing.

Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasília, August of 2011

Many alternatives to generate electricity in Brazil have been studied. However, the hydroelectric production still presents a major cost-benefit relation to the country due to natural conditions of high water potentials. In this context, dams play an important role, and with trend even higher energy demands for hydroelectric explorations, it becomes necessary the development of tools for analysis and computation methodologies for new challenges in the future. With the restriction to large dams due to high environmental impact, the Small Hydro Plants (SHP) reflect the best alternative for the exploration of brazilian hydro-potential. Thus, present especially the arch dams. Made of concrete, are more slender, economical and safer than large dams, as there is significant reduction in the consumption of concrete and accident rates are the lowest recorded. It transfers most of the water loads to the sides of the valley or to big blocks of concrete due to its curvature, taking into account the shell effect. Therefore, the goal of this work is study the analytical and numerical comparative processes using progressive analysis envisioning the development of a methodology for the treatment of concrete arch dams with simple curvature, using classical methods of analysis of shells and numerical techniques based on finite element method using ANSYS 11.0 program. Stresses and displacements along the structure were obtained and validated for each case studied, and the results shows a good agreement among them, demonstrating the validity of the procedures adopted, and the reliability of which, that can be used in future researchs.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	O PANORAMA ENERGÉTICO NACIONAL.....	1
1.2	JUSTIFICATIVAS	3
1.3	COLOCAÇÃO DO PROBLEMA	4
1.4	OBJETIVOS.....	4
1.4.1	Objetivos gerais.....	4
1.4.2	Objetivos específicos	4
1.5	METODOLOGIA	5
1.6	ABRANGÊNCIA E LIMITAÇÕES.....	7
1.7	DESCRIÇÃO E ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO	8
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA (ESTADO DA ARTE)	12
2.1	INTRODUÇÃO.....	12
2.2	HISTÓRICO E EVOLUÇÃO DAS BARRAGENS	12
2.3	ACIDENTES COM BARRAGENS	17
2.4	PRINCIPAIS ESTUDOS	24
2.5	CONSIDERAÇÕES E DESCRIÇÃO SOBRE AS BARRAGENS EM ARCO40	
2.5.1	Classificação das barragens	40
2.5.2	Cargas e combinação de cargas.....	42
2.5.3	Propriedades do concreto.....	44
2.5.4	Propriedades da fundação	46
2.6	MÉTODOS DE ANÁLISE.....	46
2.6.1	Método da Carga de Teste (<i>Trial Load Method</i>)	47
2.6.2	Teoria Flexional De Cascas Cilíndricas e Teoria Simplificada Aproximada.	49
2.6.3	Análise Via Elementos Finitos	49
3	DESENVOLVIMENTO TEÓRICO (FORMULAÇÃO TEÓRICA)	51
3.1	INTRODUÇÃO.....	51
3.2	CASCAS CILÍNDRICAS.....	51
3.2.1	Teoria de membrana	53
3.2.2	Teoria flexional de cascas cilíndricas	58
3.2.3	Método das forças no acoplamento entre cascas ou elementos especiais ..	62

3.2.4	Análise aproximada usando teoria de cascas cilíndricas	66
4	VALIDAÇÃO DE SOLUÇÕES ANALÍTICAS E NUMÉRICAS	73
4.1	INTRODUÇÃO.....	73
4.2	MODELOS E DADOS A CONSIDERAR NOS CASOS DE VALIDAÇÃO... ..	73
4.3	SOLUÇÕES ANALÍTICAS	78
4.4	MODELAGEM NUMÉRICA E ASPECTOS COMPUTACIONAIS.....	82
4.4.1	Elementos Utilizados	83
4.4.2	Modelos numéricos e critérios de análise	86
4.5	CALIBRAGEM E VALIDAÇÃO DE SOLUÇÕES NUMÉRICAS.....	94
5	RESULTADOS	113
5.1	INTRODUÇÃO.....	113
5.2	ANÁLISE DE RESULTADOS	113
6	CONCLUSÕES, PERSPECTIVAS E RECOMENDAÇÕES	149
6.1	SÍNTESE DA DISSERTAÇÃO E CONCLUSÕES GERAIS	149
6.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	152
	REFERÊNCIAS.....	154
	APÊNDICES	160
	APÊNDICE A - OBTENÇÃO DOS ESFORÇOS E DESLOCAMENTOS NO ESTADO DE MEMBRANA PARA CASCAS CILÍNDRICAS.....	161
	APÊNDICE B - MÉTODO DAS FORÇAS PARA CASCAS CILINDRICAS E ACOPLAMENTO ENTRE CASCAS E/OU ELEMENTOS ESPECIAIS	169
	APÊNDICE C – OBTENÇÃO DA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO GERAL DE CASCAS CILÍNDRICAS	181

LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1 - Os casos analisados neste trabalho e suas particularidades.....	9
Tabela 2.1 - Registro de falhas em barragens, desde 1860, e que mataram mais de 10 pessoas (Veról, 2010)	23
Tabela 2.2 - Deslocamentos “ u_y ” ao longo da altura da barragem (Lan e Yang, 1997).....	29
Tabela 3.1 – Esforços e deslocamentos para cascas cilíndricas em regime de membrana..	57
Tabela 4.1 - Modelo de obtenção de respostas analíticas de cascas cilíndricas Caso 1	80
Tabela 4.2 - Tabela Resumo de Esforços e deslocamentos em borda engastada	99
Tabela 4.3 - Relações de malhas, elementos e nós do Caso 9 – modelo sólido	101
Tabela 4.4 - Relações de malhas refinadas, elementos e nós do Caso 9 – modelo sólido	103
Tabela 4.5 - Relações de malhas, elementos e nós do Caso 9 – modelo de casca	105
Tabela 4.6 - Relações de malhas, elementos e nós do Caso 10 – modelo sólido	109
Tabela 4.7 - Relações de malhas, elementos e nós do Caso 11 – modelo sólido	111

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Metodologia progressiva de análise de barragem em arco	6
Figura 2.1 - Barragem Vallon de Baume (http://simscience.org/cracks/advanced/arch_hist1.html).....	14
Figura 2.2 - Barragem de Monte Novo (http://simscience.org/cracks/advanced/arch_hist1.html).....	15
Figura 2.3 - Barragem de Kurit (http://simscience.org/cracks/advanced/arch_hist1.html). 15	
Figura 2.4 - (a) Barragem em arco Zola; (b) Barragem em arco Parramata (Meliço, 2010)16	
Figura 2.5 - Barragem de Malpasset, França - antes e após o acidente (Veról, 2010).....	20
Figura 2.6 - Seção longitudinal da barragem Vajont (Veról, 2010).....	21
Figura 2.7 - Barragem Vajont em 2009 (Veról, 2010)	22
Figura 2.8 - Tensão-deformação após abertura das primeiras fissuras (Lan e Yang, 1997) 29	
Figura 2.9 - Modelo em elementos finitos da barragem WLX (Lan e Yang, 1997)	29
Figura 2.10 - Relação deformação versus tempo em uma barragem em arco (modificado - Perner e Oberhuber, 2010).....	33
Figura 2.11 - Barragem em arco Zillerguendl (Perner e Oberhuber, 2010).....	34
Figura 2.12 - Especificações do protótipo a ser construído (Sevim <i>et al.</i> , 2010).....	34
Figura 2.13 - Protótipo de barragem construída para estudo dinâmico(Sevim <i>et al.</i> , 2010)35	
Figura 2.14 - Protótipo de barragem instrumentada com nível vazio e cheio (Sevim <i>et al.</i> , 2010).....	35
Figura 2.15 - Modelo de barragem em arco com simples curvatura (a) Geometria considerada; (b) Modelo de Cálculo (Zheng e Li, 2010).....	36
Figura 2.16 - Modelo de barragem em arco Kölnbrein (Feng <i>et al.</i> , 2011)	37
Figura 2.17 - Modelo em elementos finitos da barragem Xiaowan (Feng <i>et al.</i> , 2011).....	38
Figura 2.19 - Tipos de barragens de concreto (modificado – Oliveira, 2002)	41
Figura 2.20 - Relação entre a largura e profundidade do vale e o perfil da barragem adequado (Pedroso, 2002)	41
Figura 2.21 - Representação esquemática de formas comuns de vales (Meliço, 2010)	42
Figura 2.22 - Arcos e balanços verticais unitários no Método de carga teste (<i>Engineering Guidelines for the Evaluation of Hydropower Projects</i> ,1999).....	47
Figura 2.23 - Translações e rotações dos arcos e balanços verticais (<i>Engineering Guidelines for the Evaluation of Hydropower Projects</i> ,1999).....	48
Figura 3.1 – Esquema de Casca Cilíndrica: (a) Convenção de eixos; (b) Equilíbrio de Elemento Infinitesimal de Casca Cilíndrica (modificado – Timoshenko, 1959)55	
Figura 3.2 - Elemento infinitesimal de análise na direção z.....	56
Figura 3.3 - Equilíbrio de esforços em um elemento infinitesimal de casca cilíndrica (modificado – Timoshenko, 1959)	58

Figura 3.4 – Sistema de cascas: (a) Geometria; (b) Sistema submetido a pressão interna e deslocamentos de membrana (modificado – Baker <i>et al.</i> , 1972).....	64
Figura 3.5 - Deformações devido carregamentos unitários: (a)Esforço horizontal (b) Momento fletor (modificado – Baker <i>et al.</i> , 1972).....	65
Figura 3.6 - Curvatura vertical de uma barragem em arco (modificado – Herzog, 1999) ..	67
Figura 3.7 - Diminuição gradativa dos momentos e força cortante na direção meridional (Herzog, 1999).....	68
Figura 3.8 - Influência da espessura da barragem na diminuição gradativa dos momentos das ombreiras na direção horizontal do anel (Herzog, 1999)	69
Figura 3.9 - Parcela do deslocamento radial em razão momento horizontal de curvatura nas ombreiras (aproximação) (Herzog, 1999).....	72
Figura 4.1 - Modelo de casca cilíndrica e placa circular (modificado – Guimarães, 1995)	73
Figura 4.2 – Modelo de casca abatida (modificado – Zienkiewicz, 1967).....	74
Figura 4.3 – Casca abatida engastada nas bordas retas e livre nas bordas curvas (Lima Júnior, 2006).....	75
Figura 4.4 – Modelo de cilindro de base engastada e restrições radiais (modificado - Huang Wen-Xi, 1965)	75
Figura 4.5 – Modelo de Barragem em arco em perfil e em planta (Zheng e Li, 2010).....	76
Figura 4.6 - Modelo de Barragem em arco discretizada em elementos retangulares (Zienkiewicz, 1967).....	76
Figura 4.7 - Modelo de Barragem em arco em perfil e em planta com espessura variável.	77
Figura 4.8 - Barragem de teste de Stevenson Creek (Herzog, 1999)	77
Figura 4.9 - Barragem Stevenson Creek: (a) Em perfil; (b) Em planta.....	78
Figura 4.10 - Modelo de Planilha de Cálculo Analítico para o Caso 1	79
Figura 4.11 - Modelo de Planilha de Cálculo Analítico para metodologia Herzog (1999).	81
Figura 4.12 - (a) Geometria do elemento; (b) Tensões de saída do elemento SHELL 43 (Biblioteca ANSYS)	83
Figura 4.13 – (a) Geometria do elemento; (b) Tensões de saída do elemento SHELL 63 (Biblioteca ANSYS)	84
Figura 4.14 - (a) Geometria do elemento; (b) Tensões de saída do elemento SHELL 93 (Biblioteca ANSYS)	85
Figura 4.15 - (a) Geometria do elemento; (b) Tensões de saída do elemento SOLID 95 (Biblioteca ANSYS)	85
Figura 4.16 - Modelo de casca cilíndrica e linhas de análise	86
Figura 4.17 - Modelo de casca cilíndrica com placa e linhas de análise	87
Figura 4.18 - Modelo de casca abatida apoiada nas bordas: (a) Seções representativas; (b) Vista em perspectiva; (c) Vista em planta; (d) Vista frontal	88
Figura 4.19 - Modelo de casca abatida engastada: (a) Pontos representativos; (b) Condições de simetria e condições de contorno	89

Figura 4.20 - Modelo de casca para análise de barragem em arco: (a) Vista Frontal; (b) Vista em planta; (c) Malha e condições de contorno.....	89
Figura 4.21 - Malha e linhas de análise de deslocamentos (modificado - Huang Wen-Xi, 1965).....	90
Figura 4.22 - Metade de casca para análise de barragem em arco	90
Figura 4.23 - Um quarto de casca para análise de barragem em arco	91
Figura 4.24 - Barragem em arco com espessura constante em modelo sólido.....	92
Figura 4.25 - Barragem em arco com espessura variável em modelo sólido	93
Figura 4.26 - Geometria do modelo sólido da Barragem Stevenson Creek	94
Figura 4.27 - Discretização de malhas em elementos finitos para cascas abatidas	95
Figura 4.28 - Deslocamentos verticais (U_y) na seção central e longitudinais (U_z) na seção apoiada para malhas estudadas	96
Figura 4.29 - Momentos meridionais (M_ϕ) na seção central para malhas estudadas	96
Figura 4.30 - Momentos Tangencias (M_θ) na seção central para malhas estudadas	97
Figura 4.31 - Discretização de malha em elementos finitos para casca abatida engastada em borda reta	98
Figura 4.32 - Deslocamentos Transversais de referência em metros (Lima Junior, 2006) .	98
Figura 4.33 - Deslocamentos Transversais em metros de modelo em elementos finitos	99
Figura 4.34 - Discretização de malhas em elementos finitos	100
Figura 4.35 - Deslocamentos radiais para malhas estudadas com elementos casca espessa e elementos casca esbelta	100
Figura 4.36 - Validação de deslocamentos radiais com malhas em elementos finitos.....	102
Figura 4.37 - Validação de tensões verticais à montante com malhas em E.F.....	102
Figura 4.38 - Validação de tensões verticais à jusante com malhas em E.F.	103
Figura 4.39 - Validação dos deslocamentos radiais com malhas em elementos finitos refinados	104
Figura 4.40 - Validação de tensões verticais à montante com malhas em elementos finitos refinados	104
Figura 4.41 - Validação de tensões verticais à jusante com malhas em elementos finitos refinada	105
Figura 4.42 - Validação de deslocamentos radiais com malhas em elementos finitos SHELL 43	106
Figura 4.43 - Validação de tensões verticais à jusante com malhas em elementos finitos SHELL 43	106
Figura 4.44 - Validação de deslocamentos radiais com malhas em elementos finitos SHELL 63	107
Figura 4.45 - Validação de tensões verticais à jusante com malhas em elementos finitos SHELL 63	108

Figura 4.46 - Validação de deslocamentos radiais com malhas em elementos finitos barragem espessura variável	109
Figura 4.47 - Validação de tensões à montante à jusante com malhas em elementos finitos barragem espessura variável	110
Figura 4.48 - Validação de deslocamentos radiais com malhas em elementos finitos para a barragem Stevenson Creek	111
Figura 4.49 - Validação de tensões à montante e à jusante com malhas em elementos finitos na barragem Stevenson Creek	112
Figura 5.1 – Convenção de esforços e Malhas de elementos finitos utilizada (ANSYS) .	113
Figura 5.2 - Deslocamentos radiais (w) e Rotações (dw/dy) ao longo da altura da casca (Caso 1).....	114
Figura 5.3 - Esforço Normal Tangencial (N_{θ}) e Esforço Normal Meridional (N_{φ}) ao longo da altura da casca (Caso 1)	114
Figura 5.4 - Momento Meridional (M_{φ}) e Momento Tangencial (M_{θ}) ao longo da altura da casca (Caso 1).....	115
Figura 5.5 - Deslocamentos radiais (w) e Rotações (dw/dy) ao longo da altura da casca (Caso 2).....	116
Figura 5.6 - Esforço Normal Tangencial (N_{θ}) e Esforço Normal Meridional (N_{φ}) ao longo da altura da casca (Caso 2)	116
Figura 5.7 - Momento Meridional (M_{φ}) e Momento Tangencial (M_{θ}) ao longo da altura da casca (Caso 2).....	117
Figura 5.8 - Deslocamentos radiais (w) e Rotações (dw/dy) ao longo da altura da casca (Caso 3).....	118
Figura 5.9 - Esforço Normal Tangencial (N_{θ}) e Esforço Normal Meridional (N_{φ}) ao longo da altura da casca (Caso 3)	118
Figura 5.10 - Momento Meridional (M_{φ}) e Momento Tangencial (M_{θ}) ao longo da altura da casca (Caso 3).....	119
Figura 5.11 - Deslocamentos radiais (w) e Rotações (dw/dy) ao longo da altura da casca (Caso 4).....	120
Figura 5.12 - Esforço Normal Tangencial (N_{θ}) e Esforço Normal Meridional (N_{φ}) ao longo da altura da casca (Caso 4)	120
Figura 5.13 - Momento Meridional (M_{φ}) e Momento Tangencial (M_{θ}) ao longo da altura da casca (Caso 4).....	121
Figura 5.14 - Deslocamentos radiais (w) e Rotações (dw/dy) ao longo da altura da casca (Caso 5).....	121
Figura 5.15 - Esforço Normal Tangencial (N_{θ}) e Esforço Normal Meridional (N_{φ}) ao longo da altura da casca (Caso 5)	122
Figura 5.16 - Momento Meridional (M_{φ}) e Momento Tangencial (M_{θ}) ao longo da altura da casca (Caso 5).....	122
Figura 5.17 - Deslocamentos radiais (w) e Rotações (dw/dy) ao longo da altura da casca – placa com rigidez infinita	123

Figura 5.18 - Esforço Normal Tangencial (N_{θ}) e Esforço Normal Meridional (N_{ϕ}) ao longo da altura da casca - Placa com rigidez infinita	124
Figura 5.19 - Momento Meridional (M_{ϕ}) e Momento Tangencial (M_{θ}) ao longo da altura da casca - Placa com rigidez infinita	124
Figura 5.21 - Deslocamentos verticais – U_y (ft) – Caso 6	126
Figura 5.22 - Deformação de casca abatida - Caso 6	126
Figura 5.23 - Deslocamentos longitudinais – U_z (ft) – Caso 6	127
Figura 5.24 - Momentos Meridionais – M_{ϕ} (lb.ft/ft) – Caso 6	128
Figura 5.25 - Momentos Tangenciais – M_{θ} (lb.ft/ft) – Caso 6	128
Figura 5.26 - Malha de elementos finitos utilizada na análise de casca abatida biengastada (ANSYS).....	129
Figura 5.27 - Deslocamentos verticais – U_y (m) – Caso 7.....	130
Figura 5.28 - Momento fletor tangencial – M_{θ} (N.m/m) – Caso 7.....	130
Figura 5.29 - Esforço normal meridional – N_{ϕ} (N/m) em casca abatida com bordas retas engastadas.....	131
Figura 5.30 - Esforço normal tangencial – N_{θ} (N/m) em casca abatida com bordas retas engastadas.....	131
Figura 5.31 - Deslocamentos radiais em simulação de modelo Huang Wen-Xi (1967) ...	132
Figura 5.32 - Deslocamentos radiais (w) para diferentes condições de simetrias.....	133
Figura 5.33 - Deslocamentos radiais na seção central de barragem em arco – Modelo Sólido.....	134
Figura 5.34 - Tensões verticais (σ_y) na seção central de barragem em arco – Modelo Sólido.....	135
Figura 5.35 - Deslocamentos radiais na seção central de barragem em arco – Modelo Sólido e Modelo Shell	136
Figura 5.36 - Tensões verticais na seção central de barragem em arco – Modelo Sólido e Modelo Shell.....	136
Figura 5.37 – Momentos fletores M_{ϕ} e M_{θ} na seção central de barragem em arco – Modelo Shell.....	137
Figura 5.38 - Momento Fletor Tangencial (M_{θ}) à meia altura da barragem.....	138
Figura 5.39 – Deformada da estrutura de barragem em arco – Caso 9	139
Figura 5.40 - Deslocamentos totais da estrutura via elementos finitos	139
Figura 5.41 - Tensões verticais à montante (σ_{yM} – kPa) via elementos finitos.....	140
Figura 5.42 - Tensões verticais à jusante (σ_{yJ} – kPa) via elementos finitos.....	140
Figura 5.43 - Deslocamentos radiais na seção central de barragem em arco com espessura variável – Modelo Sólido.....	141
Figura 5.44 - Tensões verticais na seção central de barragem em arco com espessura variável – Modelo Sólido.....	142

Figura 5.45 - Deformada da estrutura de barragem em arco com espessura variável.....	142
Figura 5.46 - Deslocamentos totais estrutura via elementos finitos (valores em metro)...	143
Figura 5.47 - Tensões verticais à montante (σ_{yM} – kPa) via elementos finitos barragem espessura variável	144
Figura 5.48 - Tensões verticais à jusante (σ_{yJ} – kPa) via elementos finitos barragem espessura variável	144
Figura 5.49 - Deslocamentos radiais (w) seção central Barragem Stevenson Creek	145
Figura 5.50 - Tensões verticais σ_{yM} e σ_{yJ} na seção central Barragem Stevenson Creek	146
Figura 5.51 - Deformada Barragem Stevenson Creek.....	147
Figura 5.52 - Deslocamentos totais via elementos finitos da Barragem Stevenson Creek	147
Figura 5.53 - Tensões verticais à montante (σ_{yM} – kPa) via elementos finitos da Barragem Stevenson Creek	148
Figura 5.54 - Tensões verticais à jusante (σ_{yJ} – kPa) via elementos finitos da Barragem Stevenson Creek	148
Figura A.1 - Convenções e eixos adotados na teoria de membrana	161
Figura A.2 - Casca cilíndrica com carregamento constante atuante.....	162
Figura A.3 - Casca cilíndrica com carregamento hidrostático atuante.....	164
Figura A.4 - Casca cilíndrica com carregamento constante atuante na borda.....	165
Figura A.5 - Casca cilíndrica com peso próprio atuante	167
Figura B.1 - Deformabilidade de tubos longos (Guimarães, 1995).....	169
Figura B.2 - Casca cilíndrica em estado de membrana e com hiperestáticos atuando (Caso 1).....	171
Figura B.3 - Casca cilíndrica em estado de membrana e com hiperestáticos atuando (Caso 2).....	173
Figura B.4 - Casca cilíndrica e placa em estado de membrana e com hiperestáticos atuando (Caso 3).....	175
Figura B.5 - Casca cilíndrica e placa em estado de membrana e com hiperestáticos atuando (Caso 4).....	177
Figura B.6 - Casca cilíndrica e placa em estado de membrana e com hiperestáticos atuando (Caso 5).....	179

LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURA E ABREVIACÕES

2D	- Duas dimensões
3D	- Três dimensões
a.C.	- Antes de Cristo
C. U.	- Carga Uniforme
C_i	- Constante de integração
D	- Coeficiente de rigidez flexional
d.C.	- Depois de Cristo
DRT	- <i>Deformation Reinforcement Theory</i> - Teoria de Reforço da Deformação
dw	- Diferencial da componente do deslocamento na direção normal a superfície média
dw/dx	- Rotações ao longo da parede da casca
dx	- Diferencial do comprimento do arco do meridiano
d θ	- Diferencial do comprimento do arco do paralelo
E	- Módulo de elasticidade
E_i	- Efeitos resultantes
E_i	- Módulo de elasticidade
h	- Espessura da casca
H	- Altura da parede da casca/reservatório ou Forças cisalhantes horizontais por unidade de comprimento uniformemente distribuída na borda da casca
Hidro	- Carregamento Hidrostático
i	- Número complexo
K_1, K_2, K_3	- Fatores de segurança
kN	- Kilonewton
KPa	- Kilopascal
M	- Momento fletor por unidade de comprimento uniformemente distribuído na borda da casca ou elevação da casca
MEF	- Método dos Elementos Finitos
MPa	- Megapascal
MW	- Mega Watts
M_x	- Momento fletor por unidade de comprimento ao longo do círculo paralelo
MX	- Momento fletor em torno do eixo X no elemento SHELL63
M_x^T	- Momento Fletor meridional devido variação de temperatura
M_x^w	- Momento Fletor meridional devido carregamento hidrostático

MX_Y	- Momento fletor torsional em torno do eixo Y no elemento SHELL
$M_{x\theta}$	- Momento torsional ao longo do círculo do meridiano
MY	- Momento fletor em torno do eixo Y no elemento tipo SHELL
M_{yA}^w	- Momento Fletor tangencial no apoio à altura média
M_y^T	- Momento Fletor tangencial devido variação de temperatura
M_θ	- Momento fletor tangencial e por unidade de comprimento ao longo do círculo meridiano
$M_{\theta x}$	- Momento torsional ao longo do círculo do paralelo
M_ϕ	- Momento fletor meridional
N_x	- Força normal por unidade de comprimento ao longo do meridiano
$N_{x\theta}$	- Força cisalhante por unidade de comprimento ao longo do paralelo
N_{ym}^T	- Força normal à altura média da barragem
N_y^w	- Força na direção horizontal à altura média da barragem
N_θ	- Força normal por unidade de comprimento ao longo do paralelo
$N_{\theta y}$	- Força cisalhante por unidade de comprimento ao longo do meridiano
P	- Carregamento constante distribuído ao longo da parede da casca
PP	- Peso Próprio
p_y	- Pressão hidrostática na direção radial à altura média da barragem
q	- Carregamento distribuído ao longo da borda livre da casca
Q_x	- Força cortante normal à direção y
Q_x^w	- Esforço cortante devido carregamento hidrostático
r	- Raio de curvatura da casca
R_{ym}	- Raio com referência à altura média da barragem
R_{yu}	- Raio com referência à base da barragem
SX	- Tensões aplicadas na face X do elemento
SY	- Tensões aplicadas na face Y do elemento
T	- Variação da temperatura
t_0	- Espessura da crista da barragem
t_m	- Espessura da barragem em sua altura média
t_u	- Espessura da barragem em sua base
TX	- Esforço normal ao longo da face do elemento SHELL
TY	- Esforço normal ao longo da face do elemento SHELL
UnB	- Universidade de Brasília
$USACE$	- <i>The United States Army Corps of Engineers</i>
$USBR$	- <i>United States Bureau of Reclamation</i>

UX	- Deslocamento em relação ao eixo X no elemento
UY	- Deslocamento em relação ao eixo Y no elemento
UZ	- Deslocamento em relação ao eixo Z no elemento
V	- Forças de cisalhamento vertical distribuídas na borda da casca
w	- Deslocamentos radiais ou normais
w_{mM}	- Parcela de deslocamento radial à meia altura da barragem devido momento fletor
w_{mN}^T	- Parcela de deslocamento radial à meia altura da barragem devido variação de temperatura
w_{mN}^W	- Parcela de deslocamento radial à meia altura da barragem devido pressão hidrostática
W_y	- Esforço normal devido carregamento hidrostático
x	- Segmento analisado ao longo da parede da casca
X	- Carregamento distribuído ao longo da parede da casca na direção x
Y	- Carregamento distribuído ao longo da parede da casca na direção y
Z	- Força normal aplicada na área do elemento ou Carregamento distribuído ao longo da parede da casca na direção z
α	- Ângulo entre a tensão principal de compressão e a vertical
β	- Constante arbitrária da equação geral de casca cilíndrica
β_H	- Rotação devido força H aplicada
β_M	- Rotação devido momento M aplicado
γ_a	- Peso específico da água
γ_c	- Peso específico do concreto
δ_H	- Deslocamento devido força H aplicada
δ_M	- Deslocamento devido momento M aplicado
ε_s	- Retração específica do concreto
ε_x	- Deformação linear específica do meridiano
ε_θ	- Deformação linear específica do paralelo
η	- Eficiência da barragem
θ	- Ângulo do círculo paralelo
λ_x	- Comprimento característico para a base da barragem na direção x
λ_y	- Comprimento característico para a altura média da barragem na direção y
ν	- Coeficiente de Poisson
$\sigma_{1,2}$	- Tensões principais
$\sigma_{1,2}$	- Tensões normais principais
σ_x	- Tensão normal horizontal na altura média da barragem

- σ_{x0} - Tensão normal vertical na linha central da barragem
- σ_y - Tensão normal vertical na base da barragem
- σ_{yJ} - Tensão vertical à jusante
- σ_{yM} - Tensão vertical à montante
- τ_x - Tensão cisalhante
- φ - Ângulo do círculo meridiano
- ω - Coeficiente de expansão térmica

1 INTRODUÇÃO

Dentre os múltiplos aproveitamentos da água dos reservatórios, um se destaca em importância, a geração de energia elétrica. O sistema elétrico brasileiro foi construído a partir dos anos 60 e fundamentado nas usinas hidroelétricas. Na época era um sistema inédito, pois aproveitava a grande abundância de chuvas no país. Até hoje as hidrelétricas representam a maior parcela da produção de energia brasileira, e por esse motivo os maiores investidores em construção de barragens estão neste setor (Pedroso, 2002).

As barragens brasileiras costumam ser bastante impactantes, pois os reservatórios em geral, são construídos em regiões relativamente planas, como no norte do país com as barragens de gravidade, provocando a inundação de grandes áreas, fato que tem consequências ecológicas e sociais, visto o maior número de desapropriações de terras necessárias para viabilizar o empreendimento. Assim, a formação de um reservatório altera completamente o comportamento de um rio e todo seu perímetro, mudando características de fluxo d'água, partículas sólidas e alterando principalmente as relações biológicas.

Ultimamente tem-se procurado soluções alternativas para continuar a viabilizar a produção de energia elétrica atendendo à legislação ambiental que é cada vez mais restritiva em relação às grandes barragens. Desta forma, as barragens em arco aparecem neste cenário como alternativa viável do ponto de vista estrutural, econômico e ambiental.

Para tanto, descrever-se-á de forma breve neste capítulo o conteúdo desta dissertação, citando o panorama energético nacional, justificativas, objetivos, abrangência e limitações, além de comentários sobre os capítulos subsequentes.

1.1 O PANORAMA ENERGÉTICO NACIONAL

O Brasil é um país com aproximadamente 191 milhões de habitantes, segundo estimativas do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística em 2010, e se destaca como a quinta nação mais populosa do mundo. Em 2008, cerca de 95% da população tinha acesso à rede elétrica. Segundo dados divulgados no mês de setembro pela Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL), o país conta com mais de 61,5 milhões de unidades consumidoras em 99% dos municípios brasileiros. Destas, a grande maioria, cerca de 85%, é residencial (ANEEL, 2008).

Veról (2010) cita que o Brasil possui um total de 2.224 empreendimentos de geração de energia, dentre os diversos tipos em operação no país, com capacidade de 107,8 mil MW de potência. Dentre estes, estavam em operação no ano de 2010: 316 Centrais Geradoras Hidrelétricas (CGH), com potência total de 180,5 MW; 167 Usinas Hidrelétricas (UHE), com uma capacidade total instalada de 75,7 mil MW; e 365 Pequenas Centrais Hidrelétricas (PCH), com capacidade instalada de 3,1 mil MW. Tais números indicam que atualmente mais de 70% da matriz energética brasileira é proveniente de fontes hidráulicas.

Os dez países mais dependentes da hidroeletricidade, em ordem são: Noruega, Brasil, Venezuela, Canadá, Suécia, Rússia, Índia, República Popular da China, Japão e Estados Unidos. Com pequenas variações em relação à posição no ranking anterior, eles também figuram na relação de maiores produtores, constando em ordem: República Popular da China, Canadá, Brasil, Estados Unidos, Rússia, Noruega, Índia, Japão, Venezuela e Suécia (ANEEL, 2008).

Segundo o Plano Nacional de Energia 2030, com base em dados de 2004, a China é o país que mais investe em energia hidrelétrica, possuindo um dos maiores potenciais tecnicamente aproveitáveis de energia hidráulica no mundo equivalendo a 13%. Outras regiões com grandes potenciais são: América do Norte, antiga União Soviética, Índia e Brasil, com 10%. Ainda de acordo com o estudo, na Índia também há grande expansão das hidrelétricas: em 2004 estavam em construção 10 mil MW, com 28 mil MW planejados para o médio prazo.

O Brasil é o país com maior potencial hidrelétrico do mundo, com 260 mil MW, segundo o plano 2015 da Eletrobrás. De acordo com o Plano Nacional de Energia 2030, o potencial aproveitável é cerca de 126.000 MW. Desse total, mais de 70% estão nas bacias do Amazonas e do Tocantins/Araguaia.

Ultimamente tem-se procurado muitas soluções alternativas de geração de energia elétrica no Brasil, entretanto a produção hidroelétrica ainda apresenta uma maior relação custo-benefício para o país devido às condições naturais de potencial hidráulico elevado.

Com a tendência ainda maior do crescimento de aproveitamentos hidrelétricos no mercado energético brasileiro, é necessário voltar à atenção para um item importante, que deve ser

analisado desde a concepção do projeto, englobando a segurança do empreendimento, com um adequado controle das barragens e suas estruturas associadas.

Neste contexto, as barragens em arco, sob certas condições, se inserem como alternativa interessante ao Brasil.

1.2 JUSTIFICATIVAS

O Brasil é o país com maior potencial hidrelétrico do mundo, atualmente correspondendo em mais de 70% da matriz energética brasileira proveniente de fontes hidráulicas. Com a tendência ainda maior de crescimento de aproveitamentos hidrelétricos no mercado energético brasileiro, é necessário voltar à atenção para a implantação de metodologias para o cálculo deste tipo de estrutura, em particular que seja acessível e eficiente para as pequenas empresas e *Bureaux* de projetos, pois se trata de procedimentos muito particulares pouco difundidos no país e que são restritos às grandes construtoras.

Com a restrição às grandes barragens devido ao maior impacto ambiental e riscos envolvidos nos períodos antes, durante e pós-construção (degradações de fauna e flora, acidentes de trabalho com riscos elevados e possíveis acidentes com a estrutura de barramento respectivamente) as pequenas centrais hidroelétricas – PCHs exploradas por estas empresas se tornam grandes aliadas fornecendo uma resposta imediata a este tipo de exploração alternativa, validando e permitindo a continuidade da exploração hidrelétrica com as barragens em arco em situações onde estas estruturas são recomendadas.

O conhecimento sobre projetos de barragens em arco tem sido pouco difundido na literatura técnica, onde os detentores deste conhecimento são na maioria empresas e projetistas de fora do país que não tem interesse em divulgar este capital adquirido ao longo de anos. É necessário que haja uma maior difusão destes conhecimentos por parte das universidades, colaborando para o desenvolvimento tecnológico do país.

A iniciativa do governo brasileiro com o Programa de Aceleração do Crescimento – PAC (envolvendo a construção de novas usinas hidrelétricas), a participação crescente de empreiteiras nacionais construindo obras deste tipo no Brasil ou mesmo em outros países, e a carência de estudos desta natureza em território nacional justificam a importância deste trabalho de pesquisa.

1.3 COLOCAÇÃO DO PROBLEMA

Quando tratamos de obras de arte de grande porte é sempre importante voltar à atenção aos cuidados no tratamento e na análise destas estruturas. Com relação às barragens, um importante item é o quesito de segurança deste tipo de estrutura, uma vez que qualquer tipo de dano ou acidente pode afetar a segurança de milhares de pessoas, além de trazer consequências materiais e prejuízos de grandes proporções.

No Brasil, a grande maioria das estruturas de barramento é do tipo gravidade, e até o presente momento apenas uma barragem em arco fora construída no Rio de Janeiro (Barragem do Funil). Entretanto, ressalta-se que estas barragens estão envelhecendo e os cuidados com a manutenção devem ser tomados, além disto, novas construções para atender a demanda de energia em nosso país visam alternativas a este tipo de estrutura e com isto as barragens em arco para pequenas PCHs podem e devem ser consideradas como alternativas mais viáveis do ponto de vista estrutural, econômico e ambiental, sendo este último, o fator principal que vem estimulando cada vez mais pesquisas de novas soluções que sejam menos agressivas.

Contudo, há dificuldades de se ter acesso a este tipo de literatura. Com o intuito de proporcionar uma contribuição a mais de conhecimento aos engenheiros de “*Bureaux*”, que nem sempre têm a disponibilidade de uma literatura detalhada e avançada, e/ou ao uso de ferramentas mais complexas de análise, é que inserimos o foco principal da contribuição deste trabalho na construção de um conhecimento mais acessível neste domínio.

1.4 OBJETIVOS

1.4.1 Objetivos gerais

Este trabalho visa a contribuição bibliográfica e descritiva acerca dos aspectos que envolvem o estudo de barragens em arco, tais como: modelos, métodos e hipóteses de cálculo apropriados, além da análise crítica das tensões e deformações na barragem.

1.4.2 Objetivos específicos

- Utilizar a teoria de cascas cilíndricas para obter resultados analíticos e validar resultados numéricos;

- Utilizar modelos numéricos clássicos de cascas abatidas para validar e tratar de forma segura os parâmetros envolvidos;
- Simular efeitos da fundação através da utilização de elementos de conexão (placas de fundo);
- Desenvolver processos progressivos de análise baseados na Teoria de Cascas e adequá-los ao problema de barragens em arco com simples curvatura.
- Entender o comportamento destas estruturas, assegurando o maior embasamento no tratamento e interpretação de resultados dos modelos de barragens;
- Analisar numericamente o comportamento de barragens em arco sob ação do carregamento hidrostático no corpo da barragem com o auxílio do programa ANSYS 11.0;
- Contribuir com o grupo de Dinâmica e Fluido-Estrutura, iniciando e incentivando o estudo de barragens em arco ainda pouco explorados em nosso país.

1.5 METODOLOGIA

Evoluindo-se por meio de uma análise progressiva, podemos ilustrar a metodologia de análise do problema através de processos analíticos, aproximados e numéricos. A Figura 1.1 ilustra como se dará o processo gradativo de conhecimento e evolução dos estudos, de modo a se chegar o mais próximo possível de uma análise criteriosa e aproximada da realidade, tendo base teórica e segurança necessárias ao tratamento de modelos de barragens em arco.

Iniciar-se-á cada etapa do processo com um estudo analítico utilizando-se soluções exatas e soluções aproximadas, e após cada caso efetuado, uma análise numérica será realizada através do método dos elementos finitos, de forma a se modelar mais precisamente cada problema, buscando-se condições que expliquem melhor os resultados. Em seguida, com o auxílio do software ANSYS, serão feitas validações numéricas com a solução analítica e/ou com a literatura.

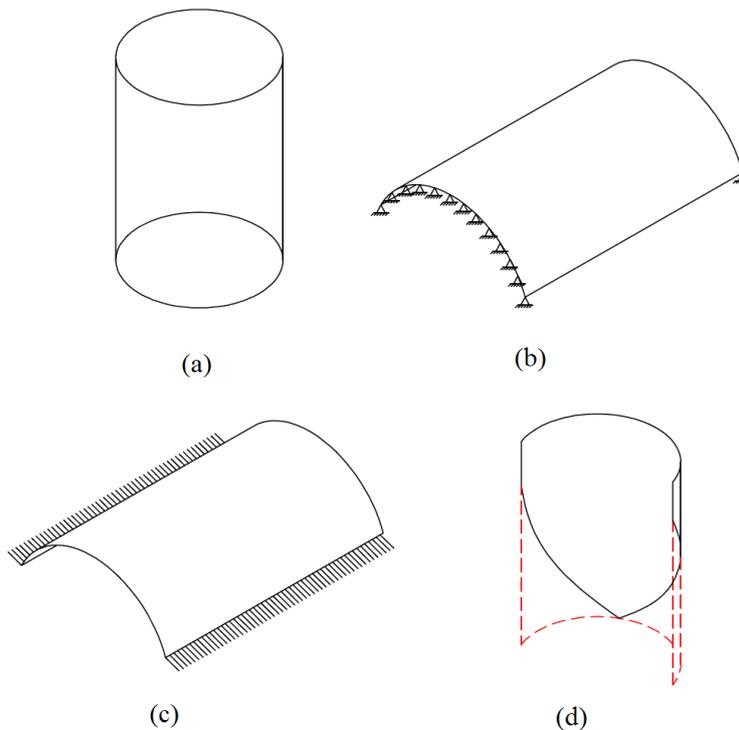


Figura 1.1 - Metodologia progressiva de análise de barragem em arco

Na sequência da Figura 1.1 a metodologia evolui seguindo a teoria de cascas. A priori utilizar-se-á da teoria de membrana e posteriormente a teoria flexional, aplicando-se ao esquema (a), com um estudo comparativo analítico – numérico. Neste caso, serão consideradas as variações das condições de contorno, de modo a simular melhor o comportamento das condições de borda e tratar de forma análoga a influência da futura representação da fundação, variando-se as restrições que inicialmente podem ser indeslocáveis (engaste perfeito) a deslocáveis, com um modelo de fundação rígida axialmente e com rotação livre, um modelo de ligação parede-fundação considerando a fundação axialmente elástica e sem base rígida, permitindo a rotação para tentar aproximar à realidade da fundação, que é deformável.

A partir do entendimento das cascas cilíndricas e da influência do acoplamento de elementos especiais nas bordas destas, o foco será dado às cascas abatidas seguindo esquemas (b) e (c), com o intuito de entender o comportamento estrutural, testar novos elementos da ferramenta computacional e dominar todos os parâmetros envolvidos, tais como: esforços e deslocamentos.

Ao se chegar às formas e condições de bordas que se aproximam da barragem real – esquema (d) – não se contam mais com soluções analíticas exatas, mas sim aproximadas e

numéricas. Desta forma, a análise será feita utilizando-se da teoria aproximada de cascas e soluções numéricas via elementos finitos.

1.6 ABRANGÊNCIA E LIMITAÇÕES

A essência do trabalho consiste no desenvolvimento de procedimentos gradativos de análise, fundamentado em estudos analíticos e numéricos de cascas cilíndricas e abatidas para aplicação final em barragens em arco. Contudo, algumas limitações são encontradas e/ou consideradas para dar um foco maior à pesquisa, das quais:

- Para todos os casos estudados o material é considerado como sendo homogêneo, isotrópico e linear elástico;
- As cascas cilíndricas são consideradas como sendo de espessura constante, esbeltas e longas, formadas por superfícies de revolução nas quais os carregamentos são axissimétricos e cuja fundamentação apresentada se baseia na teoria de cascas aproximada de 1ª ordem, submetidas ao carregamento hidrostático e peso próprio.
- As cascas abatidas envolvem a consideração do peso próprio atuante, quando apoiada nas bordas curvas, e carregamento distribuído constante ao longo da casca quando engastada nas bordas retas, sendo que somente estes dois casos foram considerados devido a maior facilidade de acesso aos resultados para validação. Em ambos os modelos, somente comparativos numéricos foram considerados, sendo obtidos da literatura clássica.
- Para análise de barragens reais, os modelos simulados apresentam simples curvatura de espessura constante (constituídos de elementos sólidos e elementos de casca) e de espessura variável (constituídos somente de elementos sólidos).
- Quanto às análises numéricas, suas principais limitações são:
 - I. Seções de cortes adotadas em pontos e linhas estratégicas em que são obtidos esforços e deslocamentos máximos;
 - II. Não consideração de efeitos de não linearidade e temperatura;
 - III. Não consideração da deformabilidade da rocha de fundação nos modelos de barragens.

1.7 DESCRIÇÃO E ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Este trabalho foi desenvolvido em seis capítulos, descrevendo a seguir o conteúdo dos mesmos.

O primeiro capítulo descreve os aspectos iniciais do trabalho, introduzindo o panorama energético nacional, e os motivos que levaram a esta pesquisa bem como os seus objetivos e a metodologia empregada.

A revisão da literatura e o estado da arte são apresentados no capítulo dois, em que são abordados: histórico e evolução das barragens, acidentes com barragens, principais estudos, considerações e descrições sobre as barragens em arco e os principais métodos de análise utilizados neste estudo.

O capítulo três apresenta o desenvolvimento teórico e respectivas equações utilizadas, de modo a possibilitar o embasamento e melhor entendimento do processo gradativo de conhecimento adotado nesta pesquisa.

No capítulo quatro constam os casos estudados, especificidades dos modelos numéricos, tais como: propriedades geométricas, elementos e malhas; além das validações de cada modelo fundamentado na literatura clássica.

Os resultados obtidos, as análises e as discussões são apresentados no capítulo cinco.

O capítulo seis apresenta as conclusões desta pesquisa e as sugestões para trabalhos futuros.

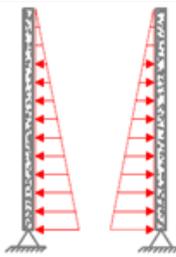
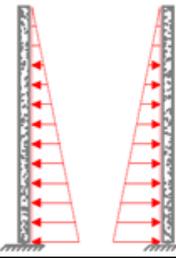
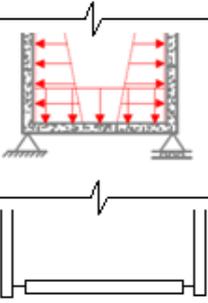
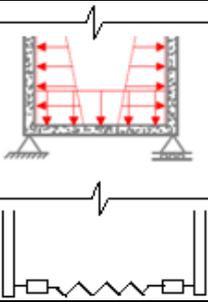
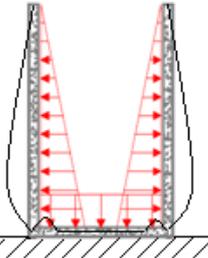
No Apêndice A são demonstradas as obtenções dos esforços normais e deslocamentos no estado de membrana para cascas cilíndricas.

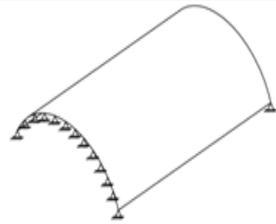
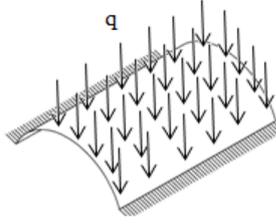
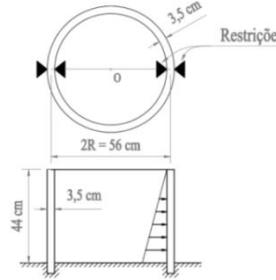
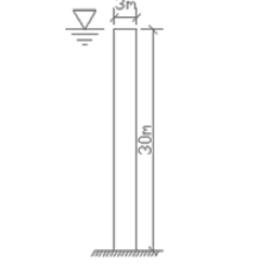
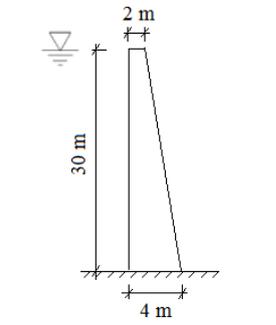
O Apêndice B mostra a aplicação do método das forças para cascas cilíndricas e acoplamento entre cascas e/ou elementos especiais, evidenciando a obtenção dos hiperestáticos de cada caso de casca cilíndrica estudado.

O Apêndice C demonstra a obtenção da solução da equação geral de cascas cilíndricas.

A Tabela 1.1 sumariza de forma ilustrativa os casos analisados neste trabalho, evidenciando suas principais particularidades: o esquema do modelo, carregamentos utilizados tipos de análise (analítica, numérica e/ou aproximada) e os objetivos de cada análise.

Tabela 1.1 - Os casos analisados neste trabalho e suas particularidades

Caso	Esquema	Análise	Carga	Observações
1		Analítica Numérica	Hidro P. P.	Aplicar o Método das Forças para obter os esforços e deslocamentos na estrutura; Iniciar o tratamento da problemática validando e dominando parâmetros do ANSYS V11 para utilização nos casos subsequentes; Comparar os resultados numéricos (ANSYS) com os analíticos.
2				
3				
4				
5				

Caso		Esquema	Análise	Carga	Observações
6	Casca Abatida		Numérica	P. P.	Fazer validação de resultados numéricos; Dominar os parâmetros envolvidos assegurando a base necessária para avançar nos casos que seguem.
7	Casca Abatida			C. U.	Fazer validação de resultados numéricos; Dominar os parâmetros envolvidos assegurando a base necessária para avançar nos casos que seguem.
8			Numérica		Fazer validação numérica e entender a proximidade de comportamento com barragens em arco.
9	Barragem em arco		Numérica Analítica (Aprox.)	Hidro	Estudar a formulação aproximada de Herzog (1999); Dominar o comportamento deste tipo de estrutura e validar numericamente os resultados obtidos (Deslocamentos e tensões).
10	Barragem em arco		Numérica Analítica (Aprox.)	Hidro	Testar a influência da variação da espessura usando a formulação aproximada de Herzog (1999) e analisar numericamente o comportamento da estrutura; Utilizar como passo intermediário para o estudo de caso final;

Caso		Esquema	Análise	Carga	Observações
11	Barragem em arco		Numérica Analítica (Aprox.)		Aplicar todo o conhecimento adquirido após validações e estudo de comportamento dos diversos tipos de estrutura. Analisar deslocamentos, tensões à montante e à jusante no corpo da barragem.

Legenda:

Hidro = carregamento hidrostático

P. P. = Peso próprio

C. U. = Carga uniforme

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA (ESTADO DA ARTE)

2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão apresentados os principais estudos desde os primórdios do tratamento e análise estrutural das barragens em arco de modo a se conhecer o estado da arte, as principais ideias e o que cada autor destaca em seu estudo. Trata-se, portanto, de um capítulo importante para o norteamento inicial deste estudo a fim de se chegar a conhecer as principais ideias aplicáveis às barragens em arco e possibilitar descrever todos os aspectos que envolvem o estudo destas, tais como: histórico, tipologias, carregamentos considerados, modelos, métodos e hipóteses de cálculo apropriadas. Deste modo, os principais métodos de análise serão ainda descritos, explicitando suas principais vantagens e desvantagens.

2.2 HISTÓRICO E EVOLUÇÃO DAS BARRAGENS

As primeiras barragens que se tem conhecimento foram usadas para o controle de cheias e para garantir água na irrigação e consumo humano. O historiador grego Herodotus foi o primeiro a registrar a existência de uma barragem. A barragem foi construída no Rio Nilo em 2900 a.C. para proteger a cidade de Memphis das cheias (Oliveira, 2002).

As barragens foram, desde o início da história da Humanidade, fundamentais ao desenvolvimento. A sua construção se devia, sobretudo, à necessidade de armazenamento de água para uso no período seco, feito em barragens executadas de forma mais ou menos empírica. Em nível mundial, algumas das barragens mais antigas de que se tem conhecimento situavam-se, por exemplo, no Egito, Oriente Médio e Índia. De acordo com Herzog (1999), as barragens mais antigas eram feitas de terra e enrocamento (construídas a seis mil anos atrás) devido a custos menores e tecnologia pouco sofisticada.

Descobertas arqueológicas recentes indicam que barragens simples de terra e redes de canais foram construídas em 2.000 a.C. para fornecer às pessoas, fontes confiáveis da água para a sua sobrevivência. A construção da barragem de Marib no Iêmen começou, aproximadamente, em 750 a.C. e levou 100 anos para ser concluída. Ela consistia em um maciço de terra de quatro metros de altura, com aberturas em pedra para regular as descargas para irrigação e uso doméstico. Em 1986, a barragem existente foi elevada à altura de 38 metros, criando um reservatório de 398 milhões de metros cúbicos de

água. Uma das barragens mais antigas ainda em uso é uma barragem de terra e enrocamento construída aproximadamente, em 1.300 a.C., na área que hoje corresponde à Síria. Na China, um sistema de barragens e canais foi construído em 2.280 a.C.. Várias barragens antigas, dos séculos XIII ao XVI, ainda estão em uso no Irã (ICOLD, 2008).

Uma das primeiras barragens construída foi a barragem Sadd-El-Kaffara no Egito (entre 2800 – 2600 a.C.), que traduzindo do árabe quer dizer “Barragem dos Pagãos”. A barragem era de gravidade, feita de terra e enrocamento com 11,28 m de altura, 106,07 m de comprimento de crista e 80,77 m no pé da barragem.

Um Segundo relato de barragem construída feita de terra foi a barragem Nimrod na Mesopotâmia em torno de 2000 a.C. (Yang *et al.*, 1999).

Devido ao grande tamanho e quantidade de material de construção necessário para construir essas barragens tradicionais, a barragem em arco foi concebida. Uma barragem em arco é dependente de sua forma para resistir aos esforços e exige menos material para ser construída, além de ser relativamente esbelta.

Os romanos construíram um sistema elaborado de barragens baixas para fornecimento de água. Entretanto, há poucos relatos de barragens em arco construídas pelos romanos, e uma das poucas construídas por estes é a barragem de Glanum, também conhecida como Barragem Vallon de Baume, na França, construída com o fim de abastecer a cidade vizinha com água. A barragem apresentava 12 m de altura, 18 m de comprimento, curvas com um raio de 14 metros e um ângulo central de 73°. Consistia em duas paredes de alvenaria, 1,30 metros de largura na subida e um metro no lado a jusante, com núcleo de terra média, conforme Figura 2.1. Há a hipótese de autores que o projeto de barragem em arco foi introduzido porque o local era favorável a uma barragem de alvenaria, mas os materiais de construção nas proximidades eram escassos.



Figura 2.1 - Barragem Vallon de Baume
 (http://simscience.org/cracks/advanced/arch_hist1.html)

A transferência de conhecimentos sobre a concepção da barragem em arco pode ter ocorrido a partir dos romanos para os iranianos. Após a derrota do exército de Valeriano em 260 d.C., 70.000 homens foram capturados e transportados para a Pérsia, onde eram forçados a trabalhar. Os prisioneiros romanos construíram pontes, açudes e barragens no Iran e algumas estruturas ainda estavam em uso quando os mongóis invadiram o Iran. Como o exército romano estava envolvido na construção da barragem, os mongóis estavam cientes das barragens em arco romano (Chanson e James, 2002).

Durante o século XIII, os mongóis invadiram e se estabeleceram no Irã, onde construíram várias barragens de grande porte. Por volta do século XIV, eles construíram também uma série de barragens em arco, sendo estas com paredes de arco de espessura significativamente maior que as barragens romanas.

Os mongóis construíram as primeiras barragens em arco desde os romanos. A primeira foi construída em 1300 perto de Quebar, Iran. A barragem Quebar possuía 26 m de altura, 55 m de comprimento, curva com um raio de 35 metros e um ângulo central de 40° apenas. O arco não entrava em contato com as paredes do vale, em vez disso, em ambos os lados do vale passavam alas em linha reta, como a barragem de Monte Novo, como pode ser observado na Figura 2.2.

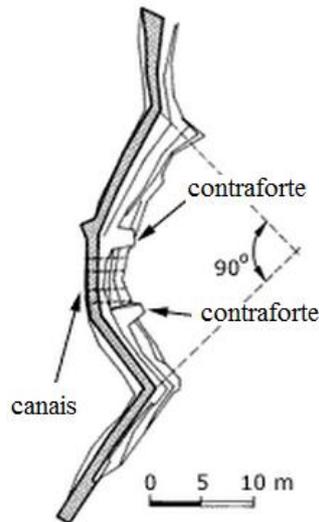


Figura 2.2 - Barragem de Monte Novo
 (http://simscience.org/cracks/advanced/arch_hist1.html)

Uma segunda barragem mongol em arco foi construída por volta de 1350 em Kurit, Iran. Esta é especialmente notável pela sua altura de 60 m. Após o aumento da altura em mais 4 m em 1850, a barragem Kurit (Figura 2.3) permanecera como a maior represa do mundo até o início do século XX. A barragem foi construída em um vale muito estreito e seu comprimento de crista atingiu apenas 44% da altura. Assim, manteve-se ereto.



Figura 2.3 - Barragem de Kurit (http://simscience.org/cracks/advanced/arch_hist1.html)

Ambas as barragens, romana e mongol no Irã foram marcos no desenvolvimento da barragem de arco. A partir do século XIV até o início do século XIX, o desenvolvimento da barragem abóbada estava difundido.

Depois da Era Romana, houve muito pouco desenvolvimento na área de construção de barragens, até o fim do século XVI, quando os espanhóis começaram a construir grandes

barragens para irrigação. Para Yang *et al.* (1999), no século XVII a construção civil espanhola foi superior a todas as outras civilizações. Um espanhol chamado Dom Pedro Bernardo Villarreal de Berriz escreveu o primeiro livro sobre projeto de barragens em 1736. Nesse tempo apenas dois tipos de barragens eram construídas: as barragens em arco de aberturas estreitas, onde as fundações tinham rochas sólidas, e as barragens de gravidade em que o vale era largo e raso. O livro de Dom Pedro sugeria como projetar corretamente barragens e introduziu novas ideias, como a barragem de arcos múltiplos. Dom Pedro sugeriu ainda que as barragens de arcos múltiplos possuíssem suportes artificiais ou contrafortes para suportar os arcos. Esta teoria indiretamente levaria à invenção da barragem de contrafortes.

Engenheiros europeus refinaram seus conhecimentos de projeto e construção no século XIX, o que resultou na capacidade de construir barragens com altura de 45 a 60 metros. Historicamente, as barragens eram planejadas e construídas para fins de fornecimento de água, irrigação e controle de enchentes. Com a Revolução Industrial, houve a necessidade de se construir inúmeras barragens, o que permitiu o progressivo aperfeiçoamento das técnicas de projeto e construção. Foi, portanto, somente no século XIX, com a demanda gerada em função do desenvolvimento industrial, que o número de barragens construídas aumentou de forma significativa.

Durante a primeira parte do século XIX o projeto de barragens em arco foi dominado por quatro grandes estruturas de barramento em arco: Meer Allum (Índia), Jones Falls (Canadá) construída entre os anos de 1827 e 1832, Zola (França) construída entre os anos de 1847 e 1854, e Parramata (Austrália) construída entre os anos de 1851 e 1856, sendo estas últimas ilustradas na Figura 2.4 a e Figura 2.4 b, respectivamente.



Figura 2.4 - (a) Barragem em arco Zola; (b) Barragem em arco Parramata (Meliço, 2010)

No fim do século XIX, a energia hidrelétrica e a navegação se tornaram objetivos adicionais das barragens. A recreação também tem sido uma função adicional muito benéfica aos projetos de barragens (ICOLD, 2008).

2.3 ACIDENTES COM BARRAGENS

A maioria das vítimas de todos os acidentes com ruptura de barragens em todo o mundo foi em decorrência de desastres ocorridos com barragens de menor porte, com altura até aproximadamente 30 metros.

Acidentes com barragens, em que há a propagação de uma onda gigantesca para a região de jusante, devastando e alagando toda a planície a ela associada, ocorrem desde os primórdios da humanidade. No entanto, a preocupação com este tipo de desastre se tornou crescente a partir da década de 1960, quando grandes acidentes deste tipo deixaram milhares de vítimas em todo o mundo. Associado à preocupação despertada por conta dos graves acidentes ocorridos, estão fatores como o envelhecimento de algumas barragens e o desenvolvimento de tecnologia relacionada com o projeto, a construção e a operação de barragens. Desde então, há uma tendência internacional de organização, aperfeiçoamento e institucionalização de sistemas de controle dessas obras (Veról, 2010).

A explosão nos empreendimentos no setor da construção contribui para o aumento do cenário de falhas e perdas. Empresas de pequeno e médio porte sem “*Know-How*” na área de barragens participam de um grande número de empreendimentos, fato este que diminui a qualidade do empreendimento devido inexperiência no ramo. Outro fator que pode ser considerado é a necessidade de profissionais habilitados nesta área, e a não existência desta oferta no mercado. Com o envelhecimento das barragens brasileiras, considerando que a capacidade portante não é a mesma de sua origem, a degradação natural dos materiais, o baixo controle de manutenção e de reavaliação do seu estado são fatores que agravam ainda mais as condições de segurança e estabilidade das obras de barramento (Pedroso, 2002).

Além das consequências com prejuízos diretos, como a perda de vidas humanas e os danos materiais na barragem e zonas inundadas, há ainda que se considerar os prejuízos indiretos resultantes da interrupção das atividades produtivas nas zonas afetadas e da

impossibilidade de exploração dos recursos hídricos, bem como os resultantes dos traumas psicológicos e físicos nos sobreviventes (Veról, 2010).

Segundo Menescal (2009), na maioria dos casos, as causas de ruptura podem ser atribuídas não apenas a falhas de projeto, mas devido à falta de fiscalização durante a construção. No primeiro caso, pode-se afirmar que o projeto não foi executado por um profissional experiente e, no segundo, que a construção não foi executada por uma empresa devidamente habilitada. Erros podem ser atribuídos a falhas humanas durante as fases preliminares de investigações para projeto, dados e critérios de projetos deficientes, fiscalização deficiente e fase pós-construtiva, devido negligência durante o primeiro enchimento/vertimento, operação e monitoramento inadequado, e erros de interpretação de dados de monitoramento e devido operação indevida de equipamentos.

Embora no exterior a questão de segurança de barragens já esteja em um estágio mais avançado, levando-se em conta a diminuição da quantidade de acidentes sérios nos últimos anos, no Brasil a situação ainda é preocupante. São inúmeras as barragens, entre pequenas, médias e grandes e com as mais diferentes finalidades, que não contam com um sistema de manutenção adequado e, muito menos, com um programa de gestão de segurança (Veról, 2010).

Contudo, já está em vigor a Lei Nº 12.334 de setembro de 2010, estabelecendo a Política Nacional de Segurança de Barragens, representando um primeiro passo para uma abordagem mais aprofundada e responsável a nível nacional.

Dentre os principais problemas que podem aparecer é importante ressaltar e conhecer os seguintes, conforme ilustra Veról (2009):

- *Overtopping* – também conhecido como galgamento, é resultante da incapacidade de liberação de grandes volumes de água pelos vertedouros e demais estruturas de descarga, podendo ser causado também pela ocorrência de onda de grandes proporções no reservatório, consequência de deslizamento de grande massa de terra para dentro do mesmo, ultrapassando assim a cota máxima da barragem.
- *Piping* – Consiste na erosão interna da barragem ou de suas fundações pela percolação da água. É mais notável em barragens de terra.

- Deslizamento das fundações ou do enrocamento - Pode ocorrer, em geral, em fundações com resistência não satisfatória a tensões ou que apresentem ligações compostas de materiais como argila, por exemplo. A utilização de materiais impermeáveis com juntas de ligação pode também contribuir no deslizamento, se a infiltração através desses materiais não for monitorada para controle.
- Efeitos sísmicos ou terremotos - Podem afetar diretamente a estrutura da barragem ou gerar ondas no reservatório que se propagam em direção à barragem, com poder destrutivo.
- Falha no projeto e/ou construção - Subdimensionamento dos dispositivos de descarga, análise não criteriosa dos materiais constituintes da obra, falha nas fundações, dentre outros.
- Ações de guerra - Condicionado à localização da barragem e aos temas políticos e religiosos envolvidos. As barragens são um alvo fácil em caso de guerra; uma bomba ao atingir uma barragem pode levá-la a colapsar rapidamente, causando danos irreparáveis.

Vários são os exemplos de barragens que já sofreram falhas, seja no durante ou após a execução destas obras, desde as barragens de terra e enrocamento, passando por barragens de gravidade, contrafortes e até as barragens em arco, sendo estas últimas as que têm menores índices de acidentes históricos se comparados com as demais.

Em 1959 ocorreu a ruptura da barragem em arco Malpasset no Vale Reyran próximo a Fréjus no sudeste da França no rio Le Reyran. A barragem, em arco, com 61 metros de altura, está localizada na região sudeste da França. Em 2 de dezembro de 1959, com o nível d'água subindo de 100 para 100,12 metros, foram abertas as comportas. No entanto, apenas 0,03 metros do nível d'água baixaram. A barragem (Figura 2.5) sofreu deslizamento de parte da rocha de fundação movendo-se 2 m horizontalmente e sem movimentos verticais notáveis e rompeu naquele mesmo dia, horas mais tarde, causando mais de 421 mortes e um prejuízo estimado em 68 milhões de dólares. A onda de cheia percorreu mais de 11 quilômetros ao longo do rio Le Reyran.

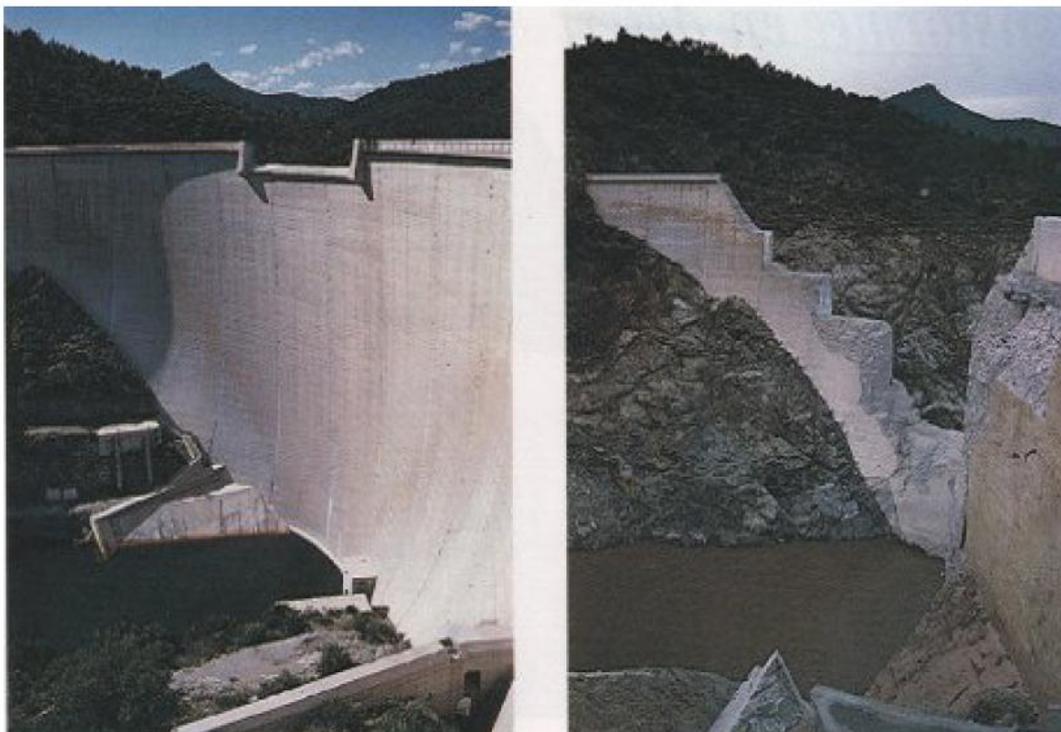


Figura 2.5 - Barragem de Malpasset, França - antes e após o acidente (Veról, 2010)

A barragem em arco Vajont (Figura 2.6) de 267 m, em 1963, sofreu galgamento e causou perda de 3000 vidas. Vajont estava experimentando o primeiro enchimento quando um volume imenso de massa rochosa de um talude, aproximadamente 200 milhões de metros cúbicos, deslizou rapidamente sobre o reservatório, que naquele dia acumulava 150 milhões de metros cúbicos de água. Poucos habitantes de Longarone sobreviveram, muitos ficaram sós, após perder toda a família, e convivem até hoje com a dor e as lembranças do pesadelo que viveram.

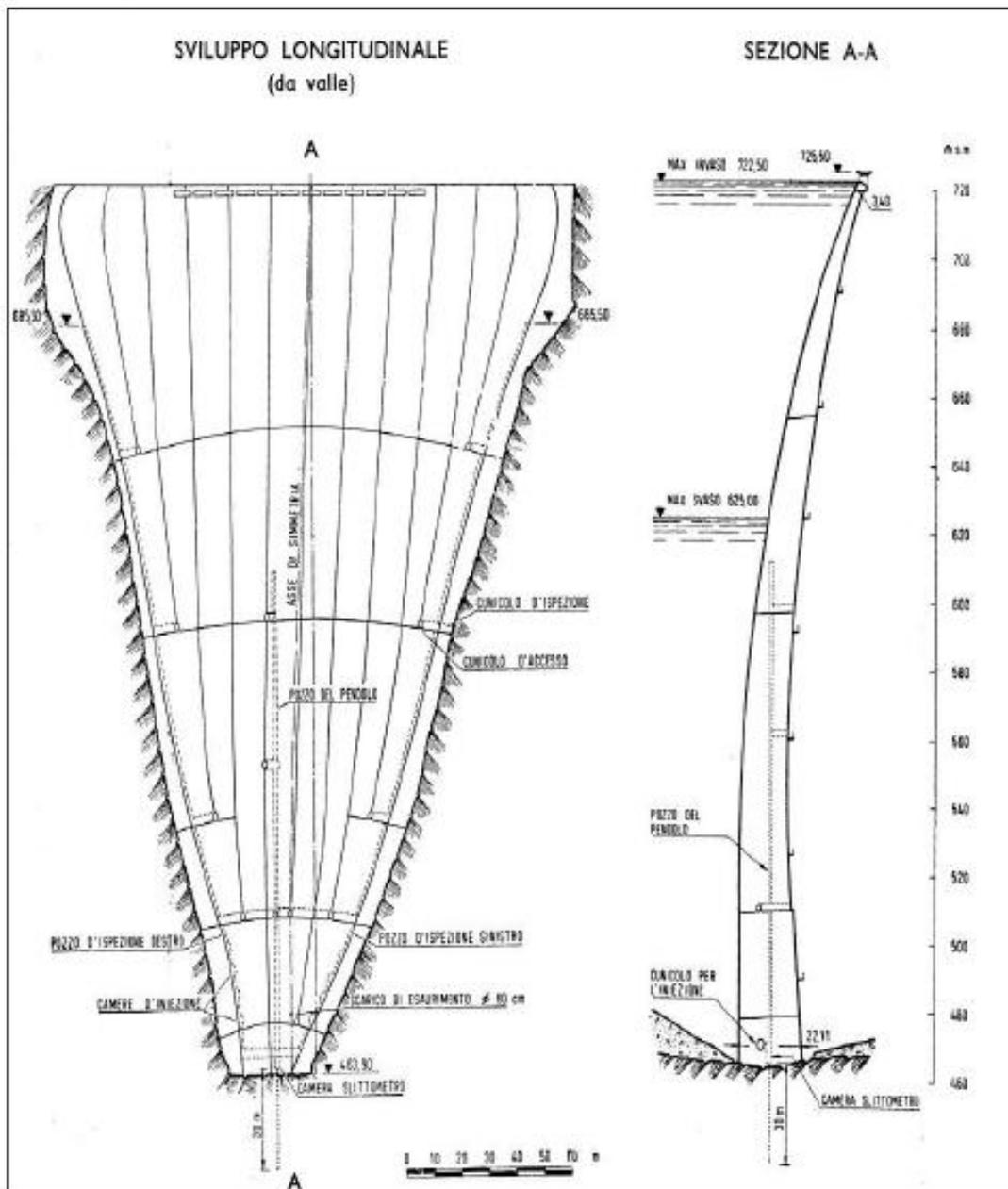


Figura 2.6 - Seção longitudinal da barragem Vajont (Veról, 2010)

A Figura 2.7 ilustra como se encontra esta barragem atualmente, onde se pode notar que há do lado direito da crista, o único dano que a barragem sofreu foi um ligeiro desgaste na parte superior. A barragem está intacta e nunca chegou a funcionar de fato.



Figura 2.7 - Barragem Vajont em 2009 (Veról, 2010)

Veról (2010) *apud* Mccully (2001) constata que o maior desastre mundial relacionado com ruptura de barragens ocorreu em 1975 na China, na província de Henan. Há indícios de que o rompimento das barragens de regularização de cheias de Banquiao, no rio Ru, e Shimatan, no rio Hong provocaram a morte de mais de 230.000 pessoas (85.000 diretamente e 145.000 em consequência de uma série de problemas que se seguiram, como fome e epidemias). Tal fato fora ocultado pelo governo chinês por cerca de 20 anos, quando, por ocasião de um relatório do Observatório de Direitos Humanos, que investigava e denunciava a violação de direitos humanos associada à implantação do mega projeto *Three Gorges* de controle de cheias e geração de energia na bacia do rio Yang-Tsé, o caso veio à tona em toda sua extensão. Em 1979 ocorreu a ruptura por flexão da barragem em arco Zeuzier de 156 m na Suíça.

A seguir é ilustrada a Tabela 2.1 que ilustra em ordem cronológica informações a respeito dos acidentes ocorridos com barragens. São relacionados: tipo da barragem, altura, motivo do acidente, ano, local e número de mortos.

Tabela 2.1 - Registro de falhas em barragens, desde 1860, e que mataram mais de 10 pessoas (Veról, 2010)

Local	Barragem	Tipo	Altura (m)	Inauguração	Falha	Causa	Mortes
Inglaterra	Dale Dyke (Bradfield)	T	29	1858	1864	FE	250
Japão	Iruhaike	T	18	1868	1868	G	>1000
EUA	Mill River	T	13	1874	1874	FE	143
Argélia	El Habra	E	36	1881	1881	G	209
Chile	Valparaíso	T	17	1888	1888	FE	>100
EUA	South Fork (Johnstown)	T	22	1889	1889	G	2209
EUA	Walnut Grove	E	34	1890	1890	G	150
França	Bouzey	CG	15	1895	1895	FE	150
EUA	Austin	CG	15	1911	1911	FE	80
EUA	Lower Otay	E	4	1916	1916	G	30
Tchecoslováquia	Bila Desna	T	17	1916	1916	FE	65
Índia	Tigra	CG	24	1917	1917	G	>1000
Itália	Gleno	AM/CG	44	1923	1923	FE	600
País de Gales	EigiausCoedty	CG	11	1908	1925	P	16
		T		1924		G	
EUA	Saint Francis	A	62	1826	1928	FE	450
Itália	Allá Sella Zerbino	CG	12	1923	1935	G	>100
Espanha	Veja de Terra (Ribadelago)	C	34	1957	1959	FE	145
França	Malpasset (Fréjus)	A	61	1954	1959	F	421
Brasil	Orós	T	54	1960	1960	G	1000
Ucrânia	Babii Yar	T	54	N/D	1961	G	145
Índia	Panshet Khadakwasla	T	42	1961	1961	FE/G	>1000
		E		1879		G	
Coréia do Sul	Hyokiri			N/D	1961		250
Malásia	Kuala Lumpur			N/D	1961		600
Itália	Vajont	A	261	1960	1963	G	2600
Colômbia	Quebrada La Chapa			N/D	1963		250
EUA	Swift			N/D	1964		19
Bulgária	Zgorigrad (Vratza)	R	12	N/D	1966	G	>96
Índia	Nanaksagar	T	16	1962	1967	FE/G	100
Indonésia	Sempor	E	54	1967	1967	FE/G	200
Argentina	Frias	E	15	1940	1970	G	>42
EUA	Buffalo Creek	R	32	1972	1972	G	125
EUA	Canyon Lake	T	6	1938	1972	G	237
China	Banqiao, Shimantan e outras 60	T		1950	1975	G	230000
EUA	Teton	T	90	1976	1976	FE	11-14
EUA	Laurel Run			N/D	1977		39
EUA	Kelly Barnes (Toccoa Falls)	T	13	1899	1977	FE	39
Índia	Machhu II	T	26	1972	1979		>2000
Índia	Gopinathan			1980	1981		47
Espanha	Tous	E	77	1980	1982		20
Itália	Stava	R		Década de 60	1985		269
Sri Lanka	Kantalai	E	15	1952	1986		82
Tadjikstão	Sargazon			1980	1987		19
Romênia	Belci	T	18	1962	1991	G	48
China	Gouhou	E	71	1987	1993	P	342
Rússia	Tirlyan	T	10	<1917	1994	G	19-37
África do Sul	Virginia n. 15	R	47	N/D	1994		39
EUA	Lake Blckshear Project	T	<15	N/D	1994	G	15
	Flint River Dam	T	<15			G	
Filipinas	N/D	N/D	N/D<	N/D	1995	N/D	30

Tipos de barragem:

T - Terra E - Enrocamento CG - Concreto e Gavidade AM - Arcos Múltiplos
C - Contrafortes A - Arcos R - Rejeitos

Tipos de Falhas:

G - Galgamento P - Piping FE - Falha Estrutural F - Falha Geológica

É importante ressaltar que os acidentes ocorridos devem sempre ser lembrados com o intuito inclusive de estimular e justificar todo e qualquer estudo a respeito de barragens, e mesmo sendo as barragens em arco as que apresentam o menor índice de acidentes registrados, deve-se elevar o conhecimento a fim de evitar novos acidentes e aperfeiçoar parâmetros de projeto a serem considerados.

2.4 PRINCIPAIS ESTUDOS

Segundo Herzog (1999), em 1889, 24 anos antes do trabalho de Ritter (*Die Berechnung von bogenförmigen Staumauern* - O cálculo das barragens curvas) de 1913, que é considerado o precursor do método na Europa, Vischer e Wagoner publicaram *On strains in curved masonry dams* em que descrevem a respeito do ajuste de deslocamentos radiais de uma barragem em arco, assumindo vários arcos horizontais e apenas um balanço vertical. Este método foi aplicado pela primeira vez em 1904 na análise das barragens Pathfinder e Buffalo Bill nos Estados Unidos. Em 1919, Stucky analisou a barragem Montsalvens construída na Suíça usando ajustes radiais de quatro arcos e nove balanços verticais.

A partir de 1920, o dimensionamento das barragens abóbada ganhou um impulso com o método de ajuste dos deslocamentos dos arcos e dos consolos, desenvolvido pelo engenheiro suíço Alfred Stucky, que envolvia a consideração de diversos balanços verticais e não apenas o balanço central. Estava-se então a um passo do "trial-load" (método iterativo ou de tentativas de distribuição das cargas, considerando um modelo de grelha tridimensional). Este método foi estendido nos Estados Unidos em 1923 com ajustes tangenciais e torcionais e apresentado em 1929 como o Método de carga de teste (*Trial Load Method*), um método de cálculo desenvolvido simultaneamente na Europa e nos Estados Unidos, no início dos anos 30, e que foi usado até ao final da década de 60 (Meliço, 2010).

Beajoint (1965) cita que o método de carga de teste, permite a consideração mesmo que aproximada de todos os modos de resistência da barragem, considerando a composição justaposta de arcos unitários e balanços verticais considerando a distribuição dos carregamentos e buscando identificar os deslocamentos nos pontos de interseção dos elementos da rede. Ressalta ainda que a maior dificuldade encontrada em projetos de

barragens não é a análise, mas a mensuração correta dos fatores que não são considerados no cálculo devido às próprias limitações impostas.

O método de carga de teste consistiu em um avanço significativo para a análise de tensões e deformações em barragens, contudo as maiores dificuldades recaíram sobre o cálculo manual que de fato era extenso e trabalhoso na época. Zerna (1965) cita que este método encontra soluções com um grau de precisão muito satisfatório, principalmente com auxílio de computadores.

Copen (1965) apresenta as premissas básicas do método de análise de carga de teste e ilustra aplicações do método para uma barragem em arco esbelta e de dupla curvatura. Esta análise permite obter deslocamentos lineares e angulares dividindo as cargas de forma radial, tangencial e de torção. Este método tem sua teoria baseada nos princípios da teoria da elasticidade com algumas considerações para tornar este método prático. Com uma aplicação adequada e com o advento do computador a aplicação desta teoria pode ser feita em várias formas de arcos, tipos de carregamento (estáticos, dinâmicos ou transientes), além de comparações com medidas de protótipos confirmando a adequação deste método.

Zerna (1965) lista uma série de artigos apresentados em um simpósio a respeito da teoria das barragens em arco, dos quais: Rodrigues e Cruz (1965), que apresentam um estudo de análise de barragens em arco com ajustes radiais tangenciais e torcionais. Para isto, todas as formulações vindas da teoria da resistência dos materiais são repassadas em forma de matriz para a programação e aplicação em computador.

A tarefa de solucionar os problemas deste tipo de barragem ainda hoje é de fato muito trabalhosa. Várias pesquisas também foram feitas considerando-se a teoria de cascas. As complexidades envolvidas se dão devido à forma irregular da casca originada não somente pelo raio de curvatura, mas também pela seção de espessura variável, e o efeito da fundação e a interface de contorno. Para obter soluções numéricas e analíticas possíveis, simplificações são introduzidas. Herzog (1962) descreve um novo método de solução para a época com barragens de ângulo constante. Ganev (1965) demonstra em seu trabalho que as barragens em arco podem ser calculadas pela redução de soluções a solução de placas sem variação de espessura e um sistema de arcos horizontais.

Os efeitos da interface barragem fundação e da própria fundação também são objetos de grande atenção e estudos desenvolvidos. Stamenkovic (1965) cita que a firmeza ou estabilidade entre a barragem e a rocha de fundação depende principalmente das propriedades elásticas de ambos os materiais, as quais afetam as forças internas da barragem e sua distribuição. Swaminathan (1965) estuda os efeitos da elasticidade da fundação e a influência desta nas tensões de compressão e tração da barragem em arco.

A partir de então, análises em três dimensões baseando-se na teoria de cascas cilíndricas, cascas abatidas (caso de dupla curvatura), e métodos numéricos passam a ter uma maior utilização com a própria evolução da tecnologia de computadores, que apoiados nos métodos das diferenças finitas e elementos finitos, possibilitam análises mais rápidas e eficazes no tratamento deste tipo de problema.

Tottenham e Desai (1965) limitam o estudo de barragem utilizando a teoria de cascas, carregamento hidrostático e fundação rígida. Duas técnicas são consideradas usando o método de redução de equações diferenciais parciais para um conjunto de equações diferenciais ordinárias. As equações diferenciais ordinárias são então solucionadas usando a técnica de progressão de matrizes. Os métodos de redução de equações diferenciais parciais são: método variacional, também denominado de método combinado ou método de tentativa de soluções com funções indeterminadas; e método das diferenças finitas.

Ansah (1993) mostra uma teoria de barragem em arco baseada na teoria completa de cascas, incluindo efeito de deformação devido cisalhamento transversal, analisando e comparando com os resultados em elementos finitos. Os carregamentos hidrostáticos, peso próprio e variação de temperatura são abordados. Os resultados encontrados entre a teoria completa de cascas e a análise por elementos finitos apresentam diferenças intrínsecas, de modo que, para as tensões máximas, estas são geralmente pequenas, com exceção à base da barragem, em que na análise por elementos finitos de casca e 3D se mostraram com valores de tensão consideravelmente menores que a consideração de arcos e consolos. Além disto, o pico de deslocamentos transversais determinado pela análise de elementos finitos são cerca de 10% menores em relação à teoria completa.

Herzog (1999) apresenta um método de cálculo aproximado utilizando a teoria de cascas e uma série de aproximações, das quais considera a base fixa, quando na verdade ela é

elasticamente engastada na rocha de fundação, e a flexão na direção horizontal é considerada na altura média com uma formulação empírica. Deste modo, vários testes de tal metodologia foram feitos para um grande número de barragens de diferentes formas e tamanhos com resultados muito satisfatórios.

Em virtude das dificuldades encontradas na aplicação da teoria de cascas, a grande evolução no estudo das barragens em arco ocorreu com a utilização do método dos elementos finitos aliado ao computador, onde podemos destacar Clough e Tocher (1965) que analisam barragens em arco delgadas, e Zienkiewicz e Cheung (1965) que analisam barragens em arco comparando o método dos elementos finitos com diferenças finitas.

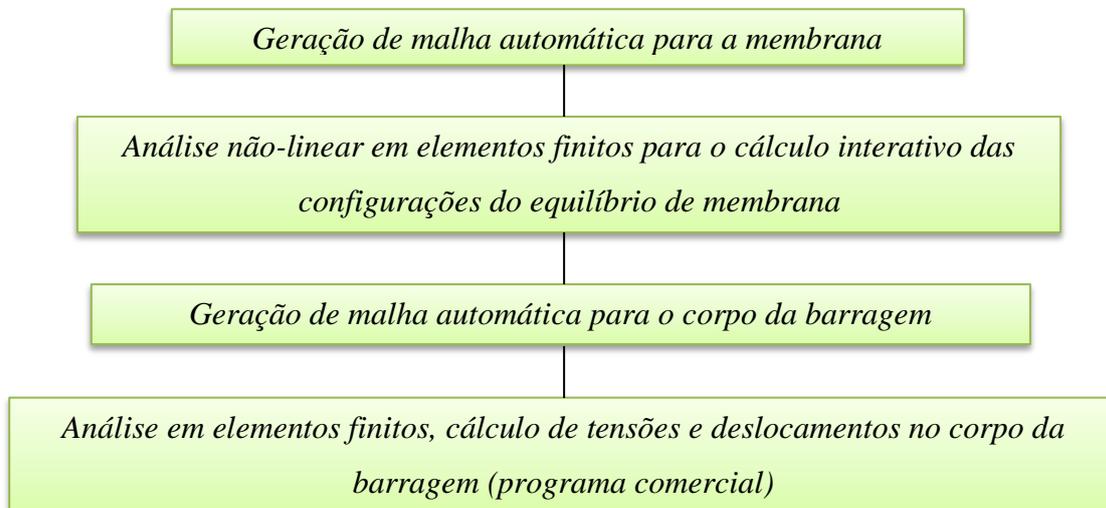
O método dos elementos finitos na análise estrutural permitiu um grande desenvolvimento na análise de sistemas estruturais complexos. O conceito fundamental na idealização do método é a consideração de um número finito de elementos individuais, interconectados com um número finito de pontos nodais (Clough e Tocher, 1965).

Com o advento computacional, muitas pesquisas já foram e ainda estão sendo realizadas com o intuito de se obter a melhor resposta na análise destas estruturas e buscar os melhores critérios de análise na segurança de barragens. Pesquisas mais recentes apresentam ainda como base o método dos elementos finitos. Contudo, diferentes metodologias são adotadas em busca de uma melhor aproximação entre os resultados e a realidade dos projetos de barragens. Os estudos a seguir demonstram um pouco desta evolução.

Muitas relações de condições de contorno são mostradas na literatura para resolver problemas de simulações de fundação das barragens em arco, e estas podem ser enquadradas em dois grupos: locais e não-locais. Utilizando-se de um modelo em elementos finitos para a análise dinâmica do modelo barragem – reservatório, Li *et al.* (1996) mostram uma efetiva e com elevada acurácia condição de contorno não-local que pode ser usada em modelos de reservatórios com extensão infinita. Tal condição se mostrou apropriada mantendo a simetria das equações algébricas resultantes.

Dias da Silva e Júlio (1997) descrevem técnicas numéricas para simulação computacional da forma da barragem e posterior análise de tensões de barragens em arco através do

método de membrana. Este método é baseado na deformação não linear de membrana usando a técnica dos elementos finitos. Um programa computacional é desenvolvido pelo Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Coimbra para determinação automática da forma da barragem e posterior análise estrutural, que consiste nos módulos representados a seguir:



O problema é descrito pela formulação lagrangeana. A busca das equações de equilíbrio é realizada através do método de Newton-Raphson, e a análise estrutural é feita usando elementos sólidos de isoparamétricos de 20 nós.

Com os resultados encontrados, a metodologia mostrou-se satisfatória para encontrar a forma ideal da barragem tanto para vales simétricos como não-simétricos, e sem grandes dificuldades para ambos os casos.

Lan e Yang (1997) com o objetivo de melhorar critérios de projeto e reduzir custos, analisaram de forma não-linear as barragens em arco. Neste estudo, modelos de fissuração do concreto são investigados e introduzidos na análise não linear em elementos finitos. Na análise não-linear destas barragens a relação tensão deformação e a fissuração do concreto são consideradas, sendo as fissuras representadas em modelos discretos de fissuração, representado por duas superfícies de elementos adjacentes, e modelos distribuídos de fissuração, que considera que as fissuras são inúmeras, micro, paralelas e contínuas umas as outras. Na Figura 2.8, tem-se o gráfico tensão-deformação para o concreto fissurado, onde após a abertura da primeira fissura o valor da tensão reduz 20%, representando o

valor máximo de tensão admissível, e os demais passos após a abertura das demais fissuras estão representados.

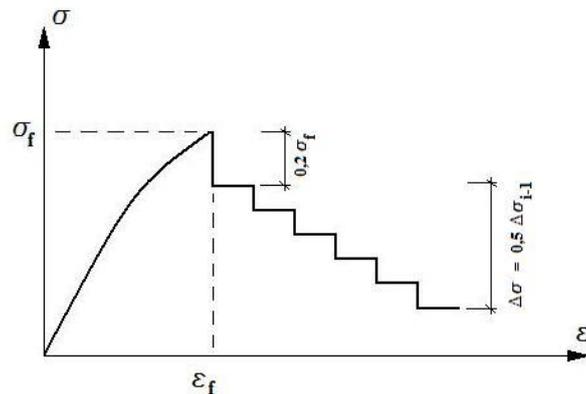


Figura 2.8 - Tensão x deformação após abertura das primeiras fissuras (Lan e Yang, 1997)

Para o estudo, a barragem WLX, construída no Rio Yellow na China, com dupla curvatura, modelada conforme Figura 2.9 foi estudada na aplicação desta metodologia considerando as seguintes condições de carregamento: Pressão da água + ação da gravidade + mudanças de temperatura, cujo modelo em elementos finitos apresenta 1704 elementos e 2320 nós.

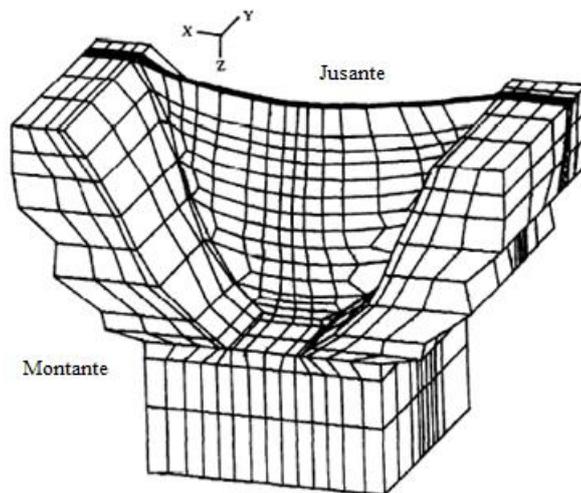


Figura 2.9 - Modelo em elementos finitos da barragem WLX (Lan e Yang, 1997)

Os valores dos deslocamentos u_y (em direção à jusante) para análise linear (LMEF) e não linear (NMEF) são ilustrados na Tabela 2.2 a seguir:

Tabela 2.2 - Deslocamentos “ u_y ” ao longo da altura da barragem (Lan e Yang, 1997)

H (m)	250	220	190	150	110	70	30	10	0
LFEM	157,5	136,2	116,5	92,8	69,3	45,1	20,9	9,4	3,7
NFEM	167,7	142,6	120,7	95,6	71,4	46,6	21,1	8,0	4,6

Foi observado que as primeiras fissuras ocorrem na base da face à montante da barragem quando se tem aproximadamente 0,8 da carga de serviço. A profundidade da fissura está em torno de um oitavo da largura da barragem. Assim, abordagem destes modelos de fissuração se mostraram mais adequados e efetivos para a análise não-linear de estruturas grandes e complexas como as barragens em arco.

Em décadas passadas, muitas relações constitutivas de concreto submetidos à diversas condições de carregamento foram relatadas em teorias planas, não linear elástica, elastoplástica, mecânica da fratura, viscoelástica, etc. Entretanto nem todas obtiveram respostas satisfatórias. Na atualidade é muito difícil, e quase impossível, propor uma relação constitutiva entre o concreto e os diversos estados de tensão sem particularidades. Para isto, Lan e Yang (1997) pesquisaram modelos constitutivos de concreto através da análise não-linear em elementos finitos, que é a mais largamente utilizada. Concluiu-se que os modelos constitutivos de concreto existentes pesquisados não apresentam consistência em seus resultados, além de uma previsão deficiente para a compressão triaxial e no estado de tensão à tração.

Kottenstette (1997) apresenta um método e exemplos com um conjunto de programas, denominados (B05, B02, B16 e B11) de Teoria de Bloco, para analisar estaticamente a estabilidade e deslizamento de fundações em barragens em arco existentes. O método consiste nos seguintes passos: (1) definir os blocos de fundação, (2) calcular as resultantes das forças, (3) determinar os modos de deslizamento, (4) estimar a resistência ao cisalhamento, (5) checar o fator de segurança. Os quatro programas usados se mostram muito eficientes tanto para a análise de estabilidade quanto para o projeto de sistema de drenagens, locação de blocos de fundação e cálculo de forças de subpressão. Assim, mostrou-se que estas são práticas e efetivas ferramentas para análise de estabilidade de fundação das barragens.

Li *et al.* (2000) afirma que mesmo após 60 anos de surgimento do *Trial Load Method*, que fora desenvolvido pelo Bureau americano em 1930, este ainda segue sendo utilizado para análise de segurança de projeto de barragens em arco. Contudo muitas implementações e desenvolvimentos são ainda feitos, tal como é apresentado por estes autores um novo método e um programa computacional para o cálculo dos deslocamentos e tensões em barragens em arco, que leva em consideração: (a) cálculo de parâmetros mecânicos para os

balanços verticais; (b) cálculo de parâmetros mecânicos para os arcos; (c) cálculo de recorrência; (d) cálculo de substituição. Os resultados obtidos com a barragem LJX, à montante do Rio Yellow, na China, sugerem que o uso de funções cúbicas spline e método de integração de Gauss aumentam a acurácia da análise, que pode ser feita para as várias formas de barragens em arco.

Chen *et al.* (2003) utilizam o método de carga de teste (*Trial Load Method*) e o método dos elementos de bloco com descontinuidades elasto-viscoplásticas para análise de barragens abóbada. Para isto, a barragem em arco é considerada como um sistema de arcos e balanços, e a fundação como um sistema de elementos em bloco. Os estados de tensão e deformação, tanto no corpo da barragem quanto na fundação são determinados. Além disto, os fatores de estabilidade, segurança da fundação e das ombreiras são calculadas ao mesmo tempo. Desta forma, é proposto um método de análise acoplada para a análise de barragens abóbada onde a fundação é considerada como elemento de bloco, enquanto os elementos de arcos e balanços são utilizados para a barragem. A desvantagem deste método é que todos os carregamentos são considerados constantes e calculados pelo método de carga de teste.

Yu *et al.* (2005) apresentaram um estudo de estabilidade das ombreiras da barragem de arco-gravidade Houhe. A análise acoplada de elementos finitos e teoria de bloco é feita para avaliar as medidas efetivas de engenharia. Deste modo, uma análise elastoplástica 3D de elementos finitos foi realizada para se obter de forma mais realista a distribuição de tensões. Os resultados indicaram que os fatores de segurança utilizados nas ombreiras são maiores que 3,88, e a combinação destes dois métodos trata-se de uma aplicação simplificada e satisfatória no processo de análise de estabilidade de barragens.

Mgalobelov (2008) analisa os resultados da investigação de variações no estado de tensão-deformação do sistema barragem em arco/fundação (leito rochoso) com a abordagem do primeiro estado limite (perda da capacidade portante do sistema) representando cinco cenários:

Cenário 1: Redução virtual nos parâmetros de resistência ao cisalhamento ao longo dos planos dos contornos da barragem

Cenário 2: Redução virtual nos parâmetros de resistência ao cisalhamento ao longo do contato entre barragem e o leito rochoso;

Cenário 3: Redução virtual da resistência do concreto da barragem, que é pressionada contra o leito rochoso nas áreas de contato do contorno;

Cenário 4: Redução virtual da resistência do concreto da barragem;

Cenário 5: Incremento virtual do carregamento da face à montante da barragem.

De um modo geral, os resultados obtidos sugerem uma alta capacidade portante do sistema barragem/leito rochoso, que é significativamente maior que o valor normalizado.

Para Qiang *et al.* (2008) na análise de limite clássico, dada a sobrecarga, a estrutura tem uma capacidade de carga única final. Assim a análise de limite clássico não pode lidar com os fenômenos de falhas generalizadas após a ocorrência de falhas locais. Neste contexto elaboraram e propuseram a teoria do reforço da deformação (Deformation Reinforcement Theory – DRT) com uma nova definição de instabilidade em que uma estrutura elastoplástica não é instável se não puder satisfazer simultaneamente as condições de equilíbrio, admissibilidade cinemática e equações constitutivas sob a prescrição de carga, usando a teoria geral elastoplástica para reconstituir o quadro teórico da DRT, de modo a avaliar a estabilidade global da estrutura. É então observado que a energia plástica complementar determina a direção da evolução de um sistema estrutural complexo e pode ser utilizado para avaliar a estabilidade global de barragens em arco.

Delgado e Marquez (2009) afirmam que nas barragens em arco, a forma desempenha um papel fundamental: o seu próprio peso é uma consequência do volume resultante, não sendo, portanto uma necessidade fundamental, como no caso das barragens de gravidade. Neste contexto, a fim de determinar a forma geométrica da barragem é assumida que a estrutura, em termos de cálculos, pode ser considerada como constituída de uma série de arcos horizontais submetidos à pressão hidrostática variável, de acordo com a profundidade do arco, sendo cada arco de um metro. É utilizada a técnica de *lofting*, que permite gerar estas superfícies por uma série de curvas. Os algoritmos permitiram gerar superfícies muito apropriadas para o desenho geométrico de barragens em arco. Notou-se

que depois de um certo número de pontos por interpolação do arco, a interpolação polinomial não é aconselhável em virtude do aparecimento de oscilações indesejáveis. Nesse caso, a interpolação por meio de algum outro tipo de função mais suave poderia ser recomendada, como exemplo, funções spline.

Para Perner e Oberhuber (2010) prever deformações regulares de uma barragem para as condições usuais e compará-las com as deformações observadas é uma parte essencial da fiscalização e segurança de barragens. Em muitos casos, previsão e comparação são realizadas automaticamente e um alarme é acionado em caso de maiores desvios.

As principais contribuições para as deformações em barragens são a carga de água e a variação da temperatura do concreto. Em geral, as deformações apresentam uma parte elástica instantânea, sendo uma parte reversível dependente do tempo e uma parte irreversível, de acordo com a Figura 2.10.

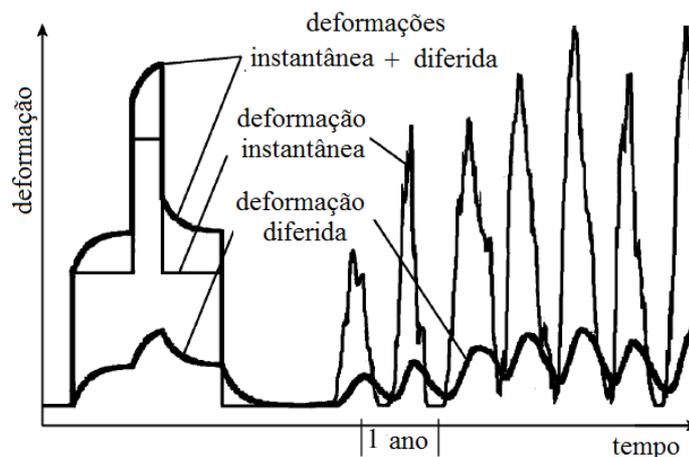


Figura 2.10 - Relação deformação versus tempo em uma barragem em arco (modificado - Perner e Oberhuber, 2010)

Neste contexto, analisando-se as deformações na barragem em arco Zillerguendl (Figura 2.11), com altura de 186 m, um modelo híbrido foi adotado, partindo de uma análise combinada entre um modelo determinístico, cuja análise estrutural é feita para identificar as relações físicas entre o carregamento hidrostático, variação de temperatura e suas respectivas deformações, usando relações baseadas nas leis da física, geometria e leis de materiais além do método dos elementos finitos, e um modelo estatístico, que aproxima as medições (deformações neste caso) por meio de relações conhecidas através da

experiência com significado físico, sendo que este método requer medições ao longo de um período adequado e com qualidade adequada. Deste modo, usando um pequeno número de parâmetros e sentidos físicos, combinado com o método da regressão linear para medir as deformações, bons resultados são obtidos, possibilitando ainda a separação das várias influências para a deformação da barragem: instantânea devido carga da água, e efeito da variação térmica.



Figura 2.11 - Barragem em arco Zillertal (Perner e Oberhuber, 2010)

Sevim *et al.* (2010) por meio de um protótipo de sistema barragem – fundação – reservatório efetuaram testes de vibração ambiente para o reservatório nas condições vazia e cheia para estimar características dinâmicas. Foi utilizada a análise modal operacional (AMO) que é um método popular de obtenção das características dinâmicas que utiliza os sinais de respostas da vibração ambiente, e este estudo determinou ainda as frequências naturais, e taxas de amortecimento usando Enhanced Frequência Decomposição de Domínio (EFDD).

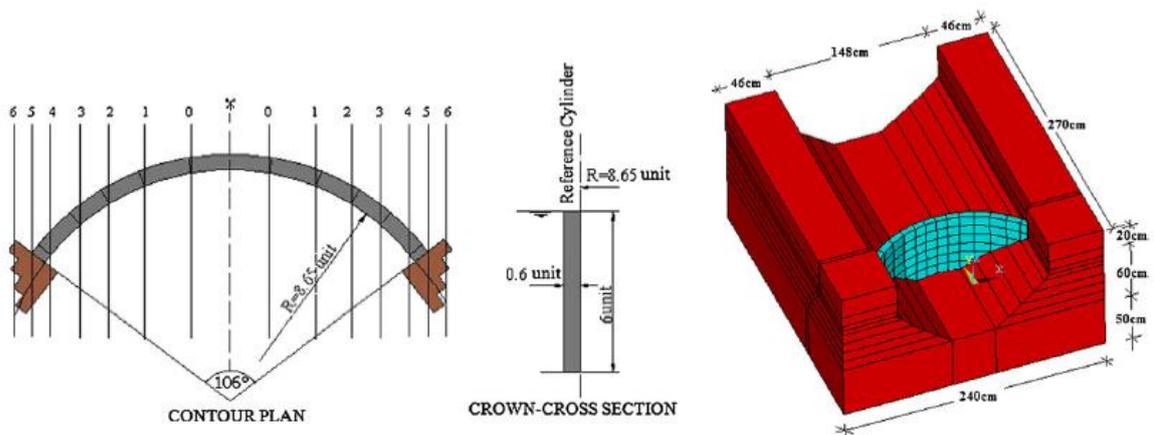


Figura 2.12 - Especificações do protótipo a ser construído (Sevim *et al.*, 2010)

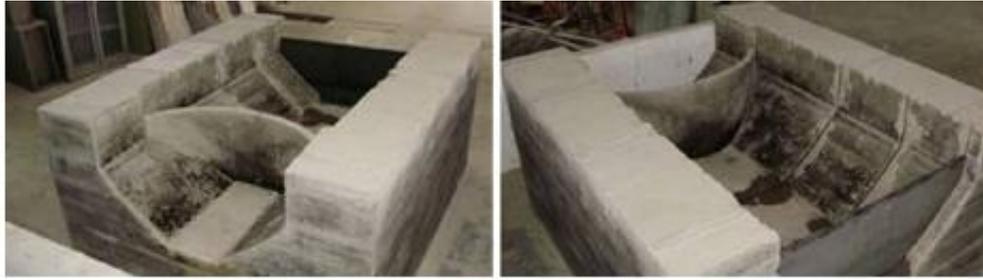


Figura 2.13 - Protótipo de barragem construída para estudo dinâmico(Sevim *et al.*, 2010)

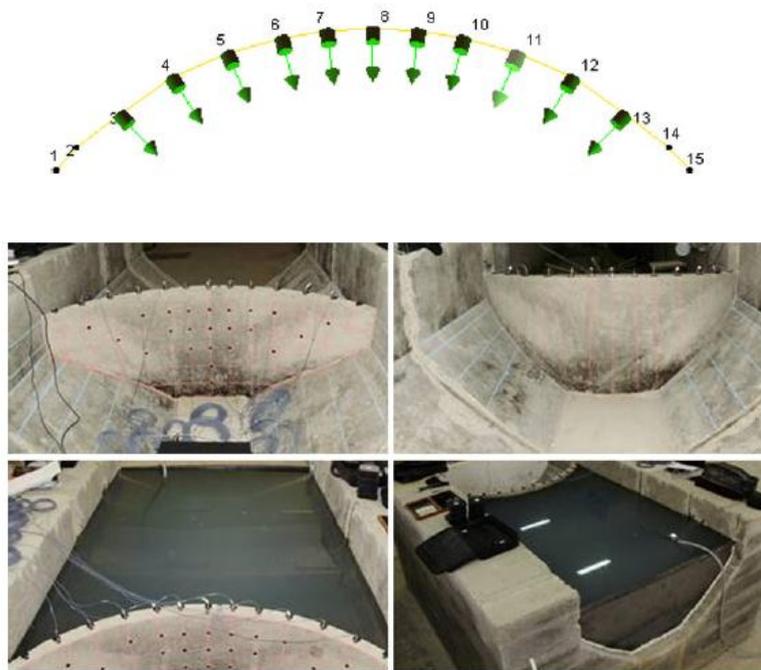


Figura 2.14 - Protótipo de barragem instrumentada com nível vazio e cheio (Sevim *et al.*, 2010)

Uma das conclusões obtidas com este estudo é que as frequências naturais obtidas para o reservatório cheio reduziram em torno de 20 a 25 % se comparadas com o reservatório vazio.

Zheng *et al.* (2010) afirmam que muitas das barragens em arco em serviço apresentam fissuras, das quais degradam a integridade e a capacidade portante da barragem. Baseando - se na frequência natural de vibração, é feita uma análise numérica em elementos finitos de modo a possibilitar o monitoramento da capacidade de carga de uma barragem fissurada em serviço, considerando a pressão hidrostática e sobrecarga.

Zheng e Li (2010) apresentam um novo método para resolver incompatibilidades de deslocamentos nodais na interface barragem-fundação analisando de forma acoplada

através dos métodos da carga de teste e o método dos elementos finitos. Os deslocamentos de translação de rotação dos arcos – balanços (vindos do método de carga de teste) na interface barragem-fundação são interpolados por um deslocamento de translação dos nós dos elementos finitos. Uma nova relação entre os deslocamentos de rotação e translação é então estabelecida, e a matriz dos coeficientes de deslocamentos dos nós da base da barragem é transformada em matriz de rigidez dos elementos finitos. Após a montagem de toda a matriz de rigidez, as equações de equilíbrio são estabelecidas e resolvidas. Desta forma, na aplicação ilustrada na Figura 2.15, o método formulado combinando o método da carga de teste e método dos elementos finitos se mostra coerente e aplicável, apresentando resultados bastante razoáveis.

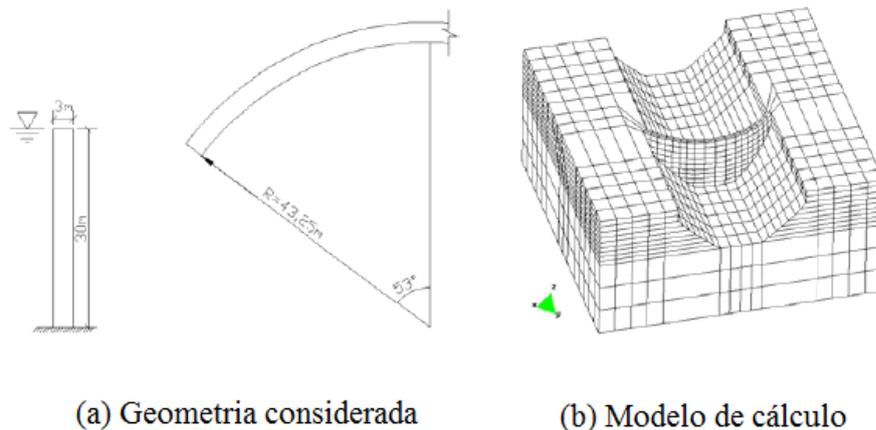


Figura 2.15 - Modelo de barragem em arco com simples curvatura (a) Geometria considerada; (b) Modelo de Cálculo (Zheng e Li, 2010)

Veról (2010) apresenta um modelo pseudo-bidimensional para a simulação da ruptura hipotética de barragens, combinando a simplicidade da formulação unidimensional com a capacidade de representação dinâmica das planícies, dos modelos 2D. Como estudo de caso, adotou a barragem de Funil, localizada no rio Paraíba do Sul, em Itatiaia, estado do Rio de Janeiro. Verificou-se que o MODCEL (desenvolvido originalmente para a simulação de enchentes urbanas e que se baseia no conceito das trocas ocorridas entre células de escoamento) é uma ferramenta capaz de simular a ruptura de barragem adequadamente, com a vantagem de ser um modelo que considera a planície de extravasamento e não exige recursos de computação muito avançados.

Com o objetivo de melhorar a capacidade de seleção das formas de barragens utilizando arcos circulares, de um e três centros, e parabólicos, Meliço (2010) partiu do estudo do

método de definição de formas proposto pelo USBR, utilizando arcos circulares de espessura constante. Em seguida apresentou um ajuste deste método, utilizando arcos circulares menos esbeltos e de espessura variável, e concluiu que as estruturas antes definidas eram demasiadamente finas, o que gerava tensões de tração, em condições de serviço, demasiadamente elevadas quando comparadas com a resistência do concreto das barragens.

Feng *et al.* (2011) propõem três fatores de segurança críticos: fator de segurança da cortina (K_1) – que é definida como o rendimento da zona a partir do pé da barragem ao eixo da cortina e implica que o escoamento e a subpressão pode ser significativamente aumentada; fator de segurança de mutação estrutural (K_2) - que é definido como um aumento abrupto do volume de vazão da barragem e implica que a carga interna é ajustada; e o fator de segurança último para a estrutura de toda a barragem (K_3) - que é definido como um aparecimento de aumento abrupto do deslocamento da crista e implica que a barragem está começando a se romper. Deste modo, um estudo comparativo sobre o desempenho da capacidade portante de barragens é feita em duas barragens reais para dar um critério de avaliação mais racional aos fatores de segurança. Este estudo foi feito na barragem em arco Kölnbrein, localizada no rio Malta na Áustria, com uma altura de 200 m e um comprimento máximo de corda de 626m. As espessuras da crista e da base da barragem eram 7,6 m e 36 m, respectivamente. Assim, a estabilidade em sobrecarga foi analisada usando o Método dos Elementos Finitos (MEF), com um modelo em três dimensões conforme Figura 2.16 e malha de 132.336 elementos hexaédrico sólidos (seis faces), dos quais 65.458 para a barragem e 66.784 para a fundação.

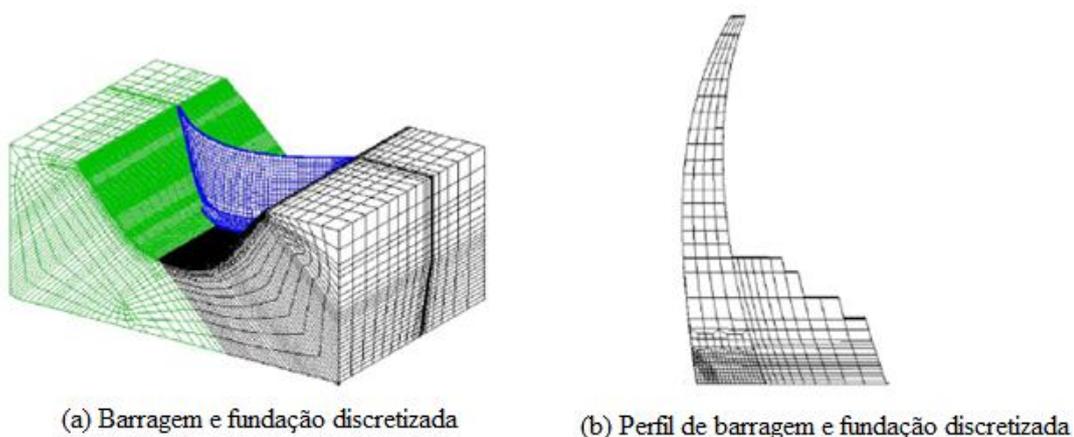


Figura 2.16 - Modelo de barragem em arco Kölnbrein (Feng *et al.*, 2011)

Além desta, a barragem em arco Xiaowan, localizada no sudeste da Província de Yunnan na China, sob o rio Lancang também fora estudada. Esta barragem tem dupla curvatura com 294,5 m de altura e espessura de 72,91 m. A armazenagem normal fica a 290 m com um volume de $151,38 \times 10^8 \text{ m}^3$. O comprimento de arco da crista tem 900 m e a relação entre o comprimento de arco da crista e a altura da barragem é de 3:1. O modelo tridimensional em elementos finitos fora gerado com 415.855 elementos e 439.833 nós para a fundação incluindo 55.790 elementos para a barragem, conforme Figura 2.17.

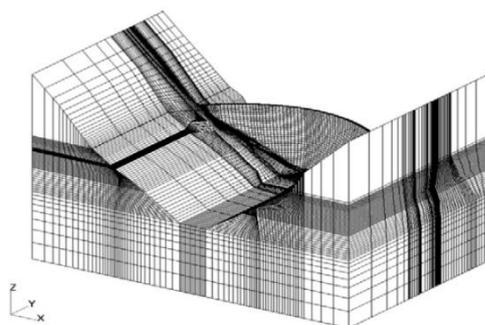


Figura 2.17 - Modelo em elementos finitos da barragem Xiaowan (Feng *et al.*, 2011)

Em ambas as análises, observou-se que quando K_1 é maior que 1,05, este fator é mais conservador se tornando bastante seguro, e os fatores K_2 e K_3 quando maiores que 2 e 3 respectivamente, o sistema barragem-fundação tem uma elevada segurança.

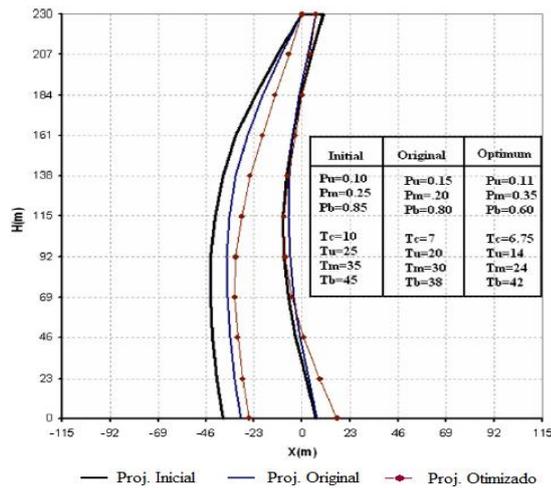
Akbari *et al.* (2011) apresenta uma metodologia para encontrar a forma ideal de barragens abóbada, uma vez que a geometria tem grande influência na segurança e economia de barragens em arco, sendo que tradicionalmente, o projeto da forma de uma barragem de arco é baseado na experiência do projetista, testes em modelos e procedimentos de tentativa e erro. Para obter a melhor forma, o projetista deve selecionar diversos esquemas com vários padrões e modificá-los para obter um número de formas viáveis. A melhor forma considerando a economia de projeto, aspectos estruturais, segurança, etc., é selecionada como a forma final. Entretanto, a forma da barragem obtida nem sempre é a melhor ou mesmo boa. Além disso, o período de concepção de projeto é bastante longo. Deste modo, para criar a geometria de barragens abóbada um novo algoritmo baseado Hermit Splines é proposto.

O Problema de otimização é resolvido através da programação sequencial quadrática (sequential quadratic programming - SQP), levando-se em consideração coordenadas

cartesianas, a forma da crista, a espessura do corpo da barragem, e as curvaturas. Os métodos propostos são aplicados com sucesso para a barragem em arco iraniana Karun IV (Figura 2.11 a), obedecendo aos seguintes critérios para otimização do projeto e construção à montante e à jusante: restrições geométricas, restrições de tensões (tração e compressão) e restrições de estabilidade. Assim, bons resultados são alcançados e após realizado o processo de otimização, o volume de escavação da barragem diminuiu 18% em comparação com o projeto inicial, e 10% em comparação com o projeto original (Figura 2.18). Ao se utilizar essa metodologia, se dispõe de um software eficiente de otimização da forma do arco de barragens em concreto para um projeto prático e confiável.



(a)



(b)

Figura 2.18 - (a) Barragem Karun-IV; (b) Seção transversal e comparativos de otimização (Akbari *et al.*,2011)

Portanto, a partir dos estudos realizados, percebe-se que ocorreu uma evolução nos processos de análise das barragens em arco no que diz respeito à forma de obtenção das respostas das estruturas, assim como no processo de cálculo. Neste trabalho, um dos estudos de caso a serem analisados será o uso do modelo numérico 3D de uma barragem em arco para simular o seu comportamento e tentar obter respostas em termos de deslocamentos e principais esforços desenvolvidos ao longo da mesma.

Ainda que este trabalho se trate da primeira dissertação de mestrado sobre barragens em arco em nossa universidade, outras monografias e textos acadêmicos sobre o assunto foram elaborados no âmbito do Grupo de Dinâmica e Fluido Estrutura (GD FE) da UnB, como exemplo, Ferreira (2006) e Pedroso (2002). Por outro lado, a experiência acumulada

anteriormente pelo grupo no domínio de barragens, mesmo não sendo exclusivamente voltada para barragens em arco, serviu de base e apoio a esta dissertação, em que podemos citar: Oliveira (2002), Ribeiro (2006), Silva (2007), Melo (2009) e estudos análogos como em Lustosa (2011).

2.5 CONSIDERAÇÕES E DESCRIÇÃO SOBRE AS BARRAGENS EM ARCO

Para todo e qualquer estudo em uma determinada área, é sempre interessante inicialmente conhecermos conceitos e especificidades da área na qual se está adentrando. Segundo USACE (1994) a terminologia usada no projeto e análise de barragens em arco não é universal. No sentido de minimizar ambiguidades, são feitas descrições e ilustrações que serão adotadas também neste trabalho.

2.5.1 Classificação das barragens

As barragens podem ser classificadas como barragem de terra e barragem de concreto, de acordo com o material de construção utilizado.

Baseando-se no material utilizado na sua construção e na sua concepção estrutural, as principais barragens de concreto podem ser do tipo: gravidade, em arco, em arcos múltiplos e em contrafortes (Figura 2.19).

- Barragens de gravidade: apresentam uma seção transversal aproximadamente triangular e resistem à pressão da água pelo seu peso. Este é o tipo mais difundido de barragem de concreto, o que representa dois terços do total.
- Barragens em arco: transmitem a maioria da carga de água para os lados do vale ou grandes blocos de concreto. A cada quatro barragens de concreto, uma é em arco. Consiste em uma estrutura de barramento mais delgada e leve, o que reduz em grande parte o consumo de concreto.
- Barragens em arcos múltiplos: apresentam mais de um arco ao longo do seu comprimento.
- Barragens em contrafortes: tem a carga de água transmitida aos contrafortes triangulares paralelos à direção do fluxo do rio.

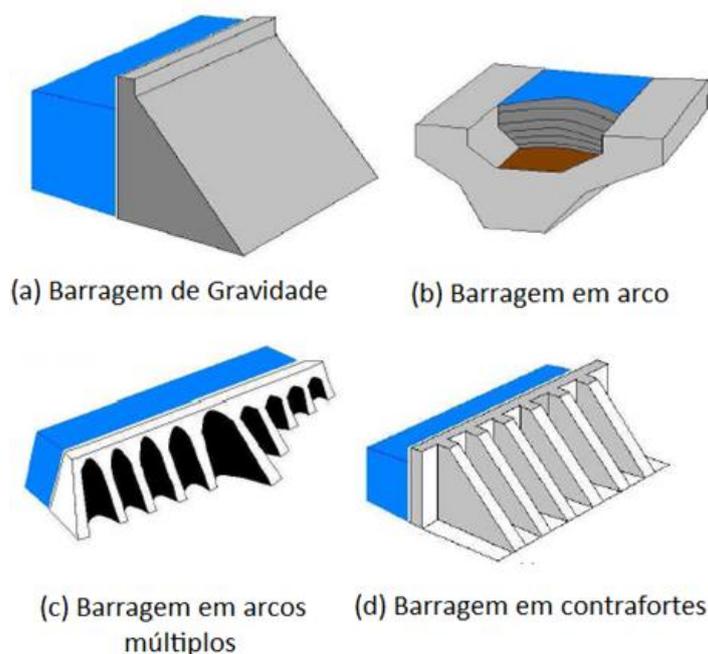


Figura 2.19 - Tipos de barragens de concreto (modificado – Oliveira, 2002)

A definição do tipo a se utilizar dentre os tipos de barragens de concreto expostos deve seguir uma correlação entre a altura da barragem e o comprimento transversal do vale a ser barrado, conforme ilustra a Figura 2.20.

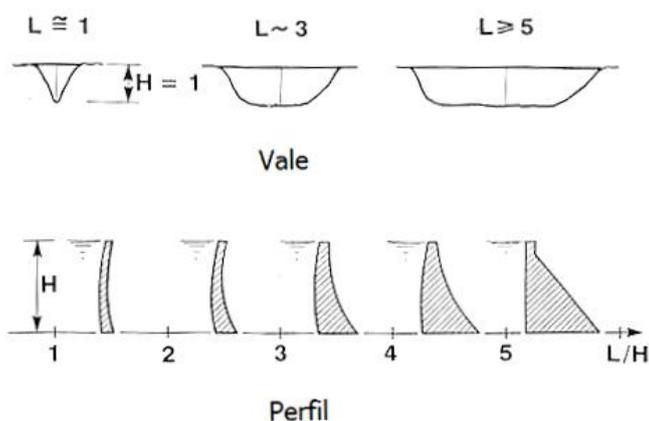


Figura 2.20 - Relação entre a largura e profundidade do vale e o perfil da barragem adequado (Pedroso, 2002)

Os perfis mais fechados (encaixados) podem ser barrados com a construção de barragens bastante esbeltas. A barragem em arco é o tipo mais utilizado nesta configuração geológica. Na outra extremidade do esquema, no caso de vales bastante abertos, a barragem de gravidade é mais utilizada (Pedroso, 2002).

Conforme o valor da relação corda/altura (L/h), o tipo de vale é designado por garganta, vale estreito ou vale largo, se inferior a 3, entre 3 e 6, ou superior a 6, respectivamente. A Figura 2.21 ilustra algumas das formas mais comuns dos vales.

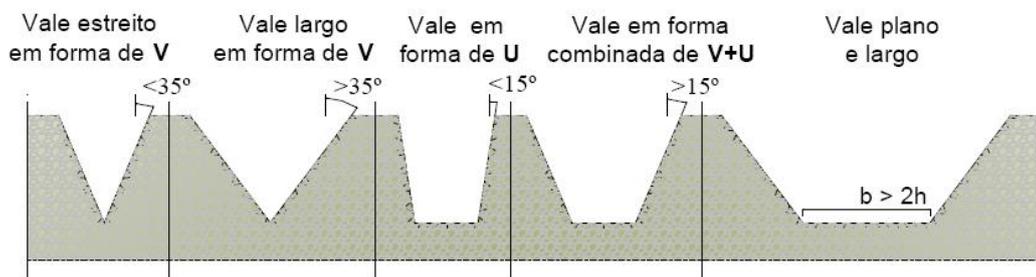


Figura 2.21 - Representação esquemática de formas comuns de vales (Meliço, 2010)

Muitas das barragens nos Estados Unidos foram construídas em vales cuja relação largura-altura é menor que 4:1.

2.5.2 Cargas e combinação de cargas

Assim como as barragens de gravidade, as barragens em arco são construídas com blocos de concreto (colunas retangulares com comprimentos laterais seccionados que dificilmente ultrapassam 15 m ou 20 m) que combatem a formação de fissuras de retração e resfriamento. Em contrapartida, uma barragem de gravidade através do seu peso próprio suporta todos os carregamentos aplicados, e uma barragem em arco tem sua estabilidade garantida transferindo os carregamentos atuantes para as paredes dos vales ou rochas de fundação, requerendo assim rochas de contato suficientemente resistentes. Já peso próprio é geralmente transmitido para a fundação na direção vertical (HERZOG, 1999).

Quanto aos carregamentos, podem ser classificados em dois tipos básicos: estáticos e dinâmicos. Os estáticos são aqueles cujos carregamentos atuantes não mudam, ou mudam de forma pouco significativa comparado com o período natural de vibração da estrutura. Podem ser citados como carregamentos estáticos o peso próprio, carregamento hidrostático em condições normais de operação da barragem, sobrepressão, forças oriundas da expansão do gelo, tensões internas causadas por variação de temperatura. Já os carregamentos dinâmicos são apenas transitórios, duram segundos ou menos. Dentre estes, estão o carregamento sísmico, induzidos, ou forças causadas por impactos de blocos de

gelo ou embarcações (*Engineering Guidelines for the Evaluation of Hydropower Projects*, 1999).

As barragens devem ser calculadas considerando todas as combinações de cargas possíveis a fim de garantir a segurança e integridade de todo o contexto envolvido neste tipo de obra. Dependendo das probabilidades de ocorrência, três tipos de combinações devem ser observadas: combinações usuais, combinações não-usuais e extremas.

Para o USBR (1977), as combinações de carga devem ser consideradas como o seguinte:

- Combinações usuais:

(a) Efeito da temperatura mínima do concreto e o nível mais provável de elevação do reservatório ocorrendo juntamente com o peso próprio, gelo (quando houver) e deslizamentos de encostas.

(b) Efeito da temperatura máxima do concreto e o mais provável nível de reservatório ocorrendo juntamente com peso próprio, e deslizamento de encostas.

(c) Nível normal de projeto do reservatório, efeito de temperatura do concreto, gelo, deslizamento de encostas.

(d) Nível mínimo de projeto do reservatório, efeito de temperatura do concreto, gelo e deslizamento de encostas.

- Combinações não-usuais: Nível máximo de projeto do reservatório, efeitos de temperatura do concreto, peso próprio e deslizamento de encostas.
- Combinações extremas: Algum tipo de combinação usual adicionando o efeito do máximo terremoto credível.

Para o USACE (1994) são consideradas as seguintes situações:

Combinações estáticas usuais: (1) Temperatura mínima usual do concreto, nível de elevação do reservatório juntamente com o peso próprio.

(2) Temperatura máxima normal do concreto, nível de elevação do reservatório juntamente com o peso próprio.

(3) Condição normal de operação do reservatório, temperatura do concreto juntamente com o peso próprio.

Combinações estáticas não-usuais: (1) Reservatório no nível dos vertedouros, temperatura do concreto e peso próprio.

(2) Nível mínimo de projeto do reservatório, variação de temperatura e peso próprio.

(3) Condição de fim de construção, reservatório vazio e variação de temperatura.

Combinações extremas: Reservatório com máxima capacidade de inundação, variação de temperatura e peso próprio.

Para o *Engineering Guidelines for the Evaluation of Hydropower Projects* (1999), as combinações devem ser feitas tomando as estações do inverno e verão.

2.5.3 Propriedades do concreto

Quanto às propriedades do concreto, uma barragem em arco deve ser construída com concreto que corresponda nas propriedades de resistência, durabilidade, permeabilidade, fluência. Assim, devem ser levadas em conta as propriedades elásticas e térmicas, seguindo as recomendações ilustradas a seguir.

(a) Propriedades elásticas

O módulo de elasticidade é diretamente influenciado pela proporção das misturas entre cimento, agregados, aditivos e idade. A deformação no corpo da barragem irá depender diretamente do módulo de elasticidade da estrutura. Além deste, outro fator diretamente relacionado ao módulo de elasticidade é o coeficiente de Poisson, o qual deve ser determinado para diferentes idades dos corpos-de-prova moldados.

Segundo o USBR (1977), na ausência de dados experimentais, as propriedades do concreto podem ser consideradas para projetos preliminares:

Resistência do concreto – 20,7 a 34,5 MPa;

Resistência à tração – 5 a 6 % da resistência à compressão;

Resistência ao cisalhamento – Coesão em torno de 10% da resistência à compressão e coeficiente de fricção interna de 1,0;

Coefficiente de Poisson – 0,2.

(b) Propriedades térmicas

Os efeitos de mudança de temperatura em uma barragem em arco são em muitas vezes a maior preocupação de um projeto deste porte. Especialmente em pequenas barragens, as tensões causadas pela mudança de temperatura podem ser maiores que os demais carregamentos considerados no projeto (USBR, 1977).

As propriedades básicas requeridas para a análise das tensões para este caso são: coeficiente de expansão térmica, calor específico, condutividade térmica, e difusividade térmica.

O coeficiente de expansão térmica pode ser entendido como a mudança de comprimento por unidade de comprimento para um grau de mudança de temperatura. O coeficiente de expansão térmica do concreto varia conforme o coeficiente de expansão térmica dos agregados, e normalmente estes valores estão no intervalo entre $3,5$ a 7×10^{-6} in./in./°F. Na ausência de dados, a média de 5×10^{-6} in./in./°F ($9,0 \times 10^{-6}$ /°C) pode ser usado (*Engineering Guidelines for the Evaluation of Hydropower Projects*, 1999).

Calor específico é a capacidade de armazenamento de calor por unidade de temperatura. O calor específico para o concreto varia de 0,20 a 0,25 Btu/lb-°F. Na ausência de ensaios pode ser adotado o valor de 0,22 Btu/lb-°F.

A condutividade térmica é a razão de condução de calor através de uma espessura unitária de uma unidade de área de um determinado material submetido a uma diferença de temperatura entre as faces. Valores típicos de condutividade térmica podem ser adotados entre 13 a 24 Btu-in./hr-ft²-°F.

Difusividade térmica é a taxa de fluxo de calor através de uma unidade de área, dividido pelo produto do número de vezes o calor específico e a densidade do gradiente.

Para o concreto, este varia entre 0,02 e 0,06 ft²/hr. Na ausência de dados experimentais, uma média de 0,04 ft²/hr pode ser adotada.

2.5.4 Propriedades da fundação

Não há outra estrutura na qual a fundação é tão importante quanto as barragens. Uma barragem em arco requer uma rocha de fundação suficientemente resistente aos carregamentos solicitantes. Em virtude da pequena área de contato da barragem com a fundação se comparado com os demais tipos de barragem, este tipo de barragem exerce uma grande tensão nas fundações (USACE, 1994).

Esta é considerada como sendo homogênea, elástica e isotrópica, apesar de na realidade ser heterogênea, inelástica e anisotrópica. Tais considerações têm reflexos imediatos no módulo de elasticidade da fundação (USBR, 1977).

A razão entre os módulos de deformação da rocha de fundação e do concreto é de vital importância na determinação da magnitude das tensões. Para Herzog (1999), este valor deve estar compreendido entre $0,1 \leq E_r/E_c \leq 2,0$. O projetista deve ter o máximo de atenção para possíveis alterações nos valores desta relação, uma vez que a rocha de fundação normalmente é heterogênea.

2.6 MÉTODOS DE ANÁLISE

Segundo o *Engineering Guidelines for the Evaluation of Hydropower Projects* (1999), a análise tridimensional por elementos finitos é preferível para análise estática e dinâmica de barragens em arco. O método da carga de teste (*Trial Load Method*) pode ser usado somente para análise estática, admitindo-se uma geometria simples, e parâmetros de material uniformes para o concreto e a rocha de fundação.

O método numérico mais utilizado na análise estrutural destes tipos de barragens é o método dos elementos finitos (MEF), devido às suas potencialidades e facilidade de utilização, principalmente através de programas comerciais de robustez comprovada (Meliço, 2010).

Outras formulações matemáticas e formas de abordagens também podem ser empregadas, como o método das diferenças finitas, por exemplo, porém todas devem ser verificadas e comparadas com a análise de elementos finitos por se tratar de uma análise mais eficaz.

Nesta seção, serão abordadas com mais ênfase duas metodologias de análise: a teoria flexional de cascas com a posterior metodologia simplificada proposta por Herzog (1999), e finalmente, a metodologia de análise por elementos finitos. A título de nota, descrever-se-á também a essência do método da carga de teste (*Trial Load Method*) para melhor entendimento das premissas básicas que nortearão as demais metodologias de estudo.

2.6.1 Método da Carga de Teste (*Trial Load Method*)

Segundo Creager *et al.* (1945) uma análise matemática exata não é possível, mas o método de carga de teste resulta em uma aproximação satisfatória, pois a barragem é admitida como sendo constituída de dois sistemas de elementos: arcos horizontais e vigas verticais ou balanços verticais, de acordo com a Figura 2.22.

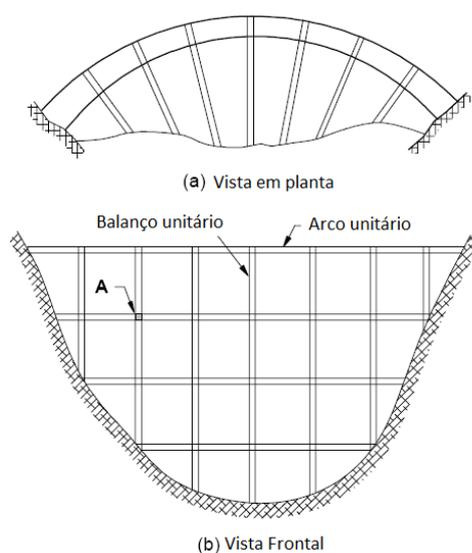


Figura 2.22 - Arcos e balanços verticais unitários no Método de carga teste (*Engineering Guidelines for the Evaluation of Hydropower Projects, 1999*)

Os carregamentos aplicados na barragem são divididos entre os elementos de arco e de balanços verticais de tal forma que os movimentos resultantes em todas as direções nos respectivos pontos de interseção analisados são iguais, conforme a Figura 2.23.

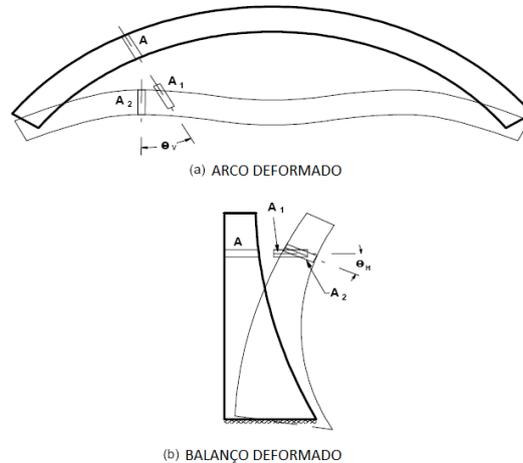


Figura 2.23 - Translações e rotações dos arcos e balanços verticais (*Engineering Guidelines for the Evaluation of Hydropower Projects*, 1999)

Assim, podemos admitir que os pontos A_1 e A_2 analisados para o elemento de arco e o elemento de balanço vertical têm as mesmas coordenadas finais.

Nesta análise, a barragem estudada é dividida em uma série de elementos de arcos e balanços verticais, espaçados de forma unitária verticalmente e no eixo da barragem, respectivamente. O somatório de todos os elementos ocupa todo o volume da barragem. Tanto os elementos de arco quanto de balanço vertical são admitidos independentes um do outro. Porém, ao final da análise, a continuidade geométrica deve ser reestabelecida para todos os pontos da estrutura.

Se a estrutura é aproximadamente simétrica, apenas metade da estrutura deve ser analisada, no caso de assimetria, ambos os lados devem ser estudados, de modo que o número de elementos verticais será o dobro do analisado na forma simétrica.

Considerações do método (COPEN, 1965):

- O concreto da barragem e a formação rochosa de fundação são homogêneos e isotrópicos;
- É obedecida a lei de Hooke;

- Seções planas permanecem planas na flexão;
- Tensões normais variam linearmente à montante e a jusante;
- O módulo de elasticidade para o concreto e a fundação é o mesmo em tração e compressão;
- Deformações devido a temperatura são proporcionais às mudanças de temperatura;
- Carregamentos hidrostáticos nas paredes do reservatório não causam movimentos diferenciais;
- Deformações da fundação são independentes da forma da superfície da fundação.

2.6.2 Teoria Flexional de Cascas Cilíndricas e Teoria Simplificada Aproximada

Quanto à teoria flexional de cascas cilíndricas, a priori, trata-se de uma metodologia de cálculo aproximada, uma vez que as equações aqui mostradas não estão ainda adaptadas para a simulação da geometria do vale. A teoria simplificada usando a teoria de cascas consiste em um conjunto de equações simplificadas, de modo que podemos considerar tal modelo de análise como sendo o mais prático para a análise analítica. Este método trata de uma simplificação da teoria de cascas cilíndricas, proposto por Herzog (1999). As aproximações consistem primeiramente em assumir uma base de barragem fixa de forma rígida, quando na verdade barragens em arco são, na melhor hipótese, fixas de forma elástica na sua fundação. As curvaturas na direção horizontal são consideradas apenas para altura média, e isso com uma fórmula empírica. Apesar de sua derivação teórica não ter sido obtida ainda, a previsão dos deslocamentos e deformações coincidem de forma adequadamente bem com um enorme número de barragens em arco de diferentes formas e tamanhos.

2.6.3 Análise Via Elementos Finitos

O procedimento numérico via elementos finitos é o mais usado na análise estrutural de barragens em arco. É o recomendado pelos principais manuais e guias de projeto de barragens. Este é capaz de representar o comportamento em 3D do sistema barragem-fundação e pode simular geometrias arbitrárias de barragem e de vales.

Segundo o *Engineering Guidelines for the Evaluation of Hydropower Projects* (1999), dos pressupostos do modelo estrutural, alguns merecem atenção:

- O corpo da barragem é geralmente assumido como sendo unido à fundação em todo seu contato com o vale. No entanto, a validade desta hipótese de modelagem é frequentemente o que esta análise pretende determinar. Se isso resulta em tensões de cisalhamento excessivas ou tensões de tração no contato da fundação, esta suposição de modelagem pode exigir uma modificação;
- A barragem é geralmente assumida como uma estrutura monolítica com propriedades de material sendo elástico-lineares e isotrópicas. Na realidade, a barragem em arco típica é dividida por juntas de construção, com juntas de tração e fissuras pré-existentes. Além disso, o concreto, por sua natureza não é isotrópico porque a sua resistência à compressão é normalmente 10 vezes a sua força de tração;
- A fundação é considerada monolítica com propriedades de material elástico linear e isotrópico, quando na realidade ela é articulada com características não lineares. O uso de um "módulo de deformação" ao invés do módulo de elasticidade real é uma tentativa de lidar com o caráter complexo da fundação.

3 DESENVOLVIMENTO TEÓRICO (FORMULAÇÃO TEÓRICA)

3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo será apresentada a base analítica da teoria de cascas, levando-se em conta os seguintes problemas: teoria de membrana e teoria flexional de cascas cilíndricas, conjugada com o método das forças, que considera a superposição de efeitos em seus estados de membrana e flexional, gerados por conta dos efeitos de borda (vinculações) destas cascas. Este estudo se mostra um caminho necessário uma vez que estas teorias permitem dominar os parâmetros e as grandezas fundamentais envolvidas, tais como os esforços, deslocamentos e rotações existentes na estrutura; mesmo que estes ainda estejam distantes da analogia ideal de uma barragem real, na qual se deve simular o vale, definir melhor a geometria, etc.. Entretanto, este passo está sendo dado com o objetivo de se compreender melhor as teorias mais refinadas no estudo das barragens em arco, como o método dos elementos finitos, constituindo-se portanto, em mais um degrau na pesquisa e no conhecimento gradativo deste tipo de problema.

Neste contexto, serão apresentadas as teorias, formulações e hipóteses gerais que regem os estudos de cascas cilíndricas e uma análise aproximada oriunda da teoria de cascas. Assim, os fundamentos deste texto estão calcados nos estudos clássicos da literatura sobre esta matéria.

3.2 CASCAS CILÍNDRICAS

A teoria linear de cascas pode ser classificada em quatro categorias, conforme cita Baker *et al.* (1972):

- Teoria de membrana;
- Teoria de cascas com aproximação de primeira ordem;
- Teoria de cascas com aproximação de segunda ordem;
- Teorias especiais de cascas.

Love (1944) foi o primeiro pesquisador a apresentar com êxito uma teoria de cascas baseada na elasticidade clássica. Para simplificar as relações tensão–deformação, e conseqüentemente, as relações constitutivas, foram introduzidas as seguintes considerações

conhecidas como primeiras aproximações ou ainda como hipóteses de Kirchoff – Love (Baker *et al.*, 1972):

- A espessura da casca é desprezível em relação ao menor raio de curvatura na superfície média;
- Elementos lineares normais à superfície média permanecem retos durante a deformação e não sofrem alongamentos, semelhante à hipótese de Navier na teoria de vigas, em que seções planas permanecem planas;
- Normais à superfície média não deformada permanecem normais à superfície média deformada;
- A componente de tensão normal na superfície média é pequena se comparada com as demais componentes de tensão e pode ser negligenciada nas relações de tensão – deformação;
- Deformações e deslocamentos são pequenos, permitindo que as quantias contendo termos de segunda ordem e de ordem superior sejam desprezadas em comparação aos termos de primeira ordem.

A teoria de Love para cascas esbeltas elásticas também é referida como a teoria de cascas de aproximação de primeira ordem. Ventsel e Krauthammer (2001) afirmam que esta teoria não é livre de algumas deficiências, incluindo o seu tratamento inconsistente de termos pequenos, onde alguns foram mantidos e outros foram rejeitados, apesar de serem de mesma ordem. Isto significa que para algumas cascas, o operador diferencial da matriz dos deslocamentos de Love, nas equações de equilíbrio, se torna assimétrico. Desta forma, viola o teorema da reciprocidade de Betti. Contudo, esta serviu de base para o desenvolvimento de diversas versões de teorias de aproximação de primeira ordem e teorias mais refinadas.

Reissner (1941) *apud* Ventsel e Krauthammer (2001) desenvolveu a teoria linear de cascas esbeltas (também com teoria de aproximação de primeira ordem) em que algumas inadequações da teoria de Love foram eliminadas. Ele derivou equações de equilíbrio, relações de deformações-deslocamentos, e expressões de tensões resultantes para cascas esbeltas aplicando a teoria da elasticidade tridimensional e as hipóteses de Kirchoff-Love, negligenciando pequenos termos. Sanders (1959) *apud* Ventsel e Krauthammer (2001) também desenvolveu uma teoria de cascas com aproximação de primeira ordem aplicando

o princípio dos trabalhos virtuais e as considerações de Kirchoff-Love, removendo satisfatoriamente as inconsistências da teoria de Love.

Vários autores apresentaram uma teoria de cascas por aproximação de segunda ordem. Flügge (1973) aplica as hipóteses de Kirchhoff-Love juntamente com a suposição de pequenas deflexões para as equações correspondentes à teoria tridimensional da elasticidade.

Como parte das teorias especiais de cascas pode-se citar a teoria de Donnell–Vlasov–Mushtari para cascas abatidas, onde estes mesmos autores desenvolveram de forma independente uma teoria simplificada. Além das hipóteses de Kirchhoff-Love, algumas hipóteses adicionais que simplificam as relações tensão-deslocamento, equilíbrio, e as equações de compatibilidade foram utilizadas na derivação destas equações. A teoria de membrana também pode ser apresentada como uma solução especial de cascas (Ventsel e Krauthammer, 2001).

3.2.1 Teoria de membrana

Membranas são estruturas de superfície não planas, de pequena espessura, que absorvem as cargas externas por esforços solicitantes normais às seções transversais de tração ou compressão.

Pedroso (1998) afirma que esta teoria está baseada na hipótese de não aparecerem momentos fletores e torçores numa casca, mas apenas forças normais nas seções principais.

Esta teoria acaba sendo mais simples que a teoria flexional, pois descreve com uma boa aproximação o comportamento estrutural das cascas reais, desde que satisfaçam determinadas condições geométricas, de apoio e de carga. Para isto, a vinculação deve ser de tal forma que junto dos apoios, as forças de reação sejam apenas forças normais, não podendo ainda haver carregamentos concentrados, nem variações bruscas de carregamento distribuído.

Considera-se que a teoria de membrana é válida desde que se verifiquem as seguintes condições ou hipóteses simplificadoras:

- A espessura da casca é pequena quando comparada com as demais dimensões;
- As ações externas são tais que os esforços se desenvolvem somente na superfície média da casca;
- As reações de apoio devem estar localizadas no plano meridional, caso contrário desenvolver-se-ão esforços transversais e esforços de flexão junto à região de fronteira;
- A variação do raio de curvatura ρ_1 da curva geratriz da superfície de revolução é lenta, não existindo descontinuidades. Nas zonas junto de descontinuidades existirão esforços transversais e momentos fletores.
- As tensões resultantes de esforços de membrana consideram-se uniformemente distribuídas ao longo da espessura da casca;
- A tensão radial é pequena quando comparada com as restantes, sendo possível considerar um estado de tensão plana;
- Os deslocamentos na direção normal à superfície média, designados por w , são pequenos e dentro do domínio elástico. Valores de w aceitáveis são tais que $w \leq h/2$, sendo h a espessura da casca.
- Os carregamentos são axissimétricos

Considerando uma superfície de revolução conforme Figura 3.1a, será mostrada a obtenção das equações de equilíbrio que regem o estado de membrana de uma casca cilíndrica, para isto, toma-se um elemento infinitesimal extraído da superfície de revolução. As forças que agem no elemento são mostradas na Figura 3.1b, seguindo as notações abaixo:

r : raio da casca cilíndrica;

h : a espessura da casca cilíndrica;

N_θ : a força normal por unidade de comprimento ao longo do paralelo;

N_x : a força normal por unidade de comprimento ao longo do meridiano;

θ : Ângulo do círculo paralelo;

x : segmento analisado ao longo da parede da casca cilíndrica.

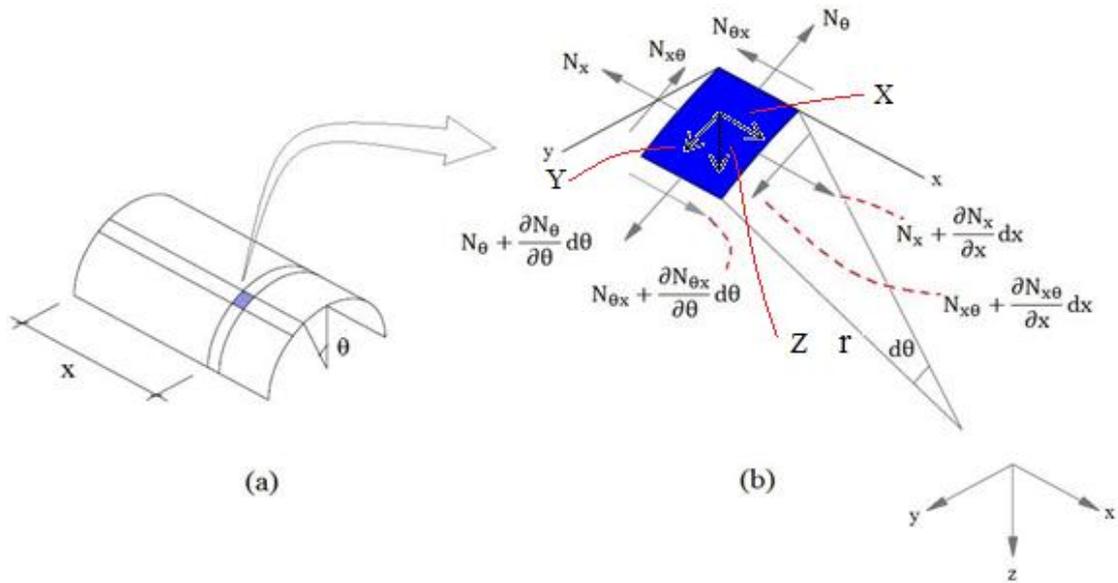


Figura 3.1 – Esquema de Casca Cilíndrica: (a) Convenção de eixos; (b) Equilíbrio de Elemento Infinitesimal de Casca Cilíndrica (modificado – Timoshenko, 1959)

Fazendo-se o equilíbrio do elemento e considerando um carregamento qualquer distribuído ao longo da parede da casca decomposto nas três direções, de modo que X, Y e Z representam este mesmo decomposto nas direções, x, y e z respectivamente, tem-se:

Direção x:

$$-N_x r d\theta dx + N_x r d\theta dx + \frac{\partial N_x}{\partial x} r d\theta dx + \left(-N_{\theta x} + N_{\theta x} + \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} d\theta \right) dx + X r d\theta dx = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} r d\theta dx + \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} d\theta dx + X r d\theta dx = 0 \quad (3.2)$$

Direção y:

$$\left(-N_\theta + N_\theta + \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dx + \left(-N_{x\theta} + N_{x\theta} + \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} dx \right) r d\theta + Y r d\theta dx = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} d\theta dx + \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} r d\theta dx + Y r d\theta dx = 0 \quad (3.4)$$

Direção z, seguindo Figura 3.2, chega-se à Equação 3.5 de modo que:

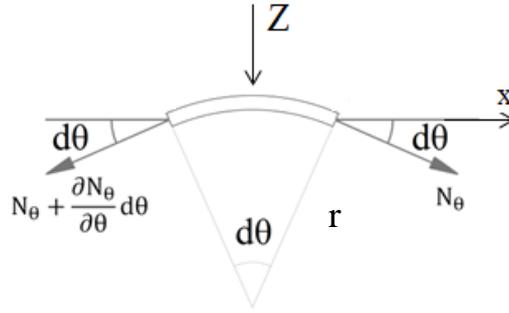


Figura 3.2 - Elemento infinitesimal de análise na direção z

$$N_{\theta}d\theta dx + Zrd\theta dx = 0 \quad (3.5)$$

Das Equações 3.2, 3.4 e 3.5, dividindo-se por $rd\theta dx$, resulta:

$$\begin{cases} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} = -X \\ \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} = -Y \\ N_{\theta} = -Zr \end{cases} \quad (3.6)$$

Para as deformações, devem ser consideradas as seguintes relações de deslocamentos lineares nas direções meridional e radial respectivamente:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{dv}{dx} \\ \varepsilon_{\theta} = \frac{w}{r} \end{cases} \quad (3.7)$$

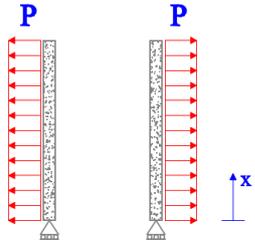
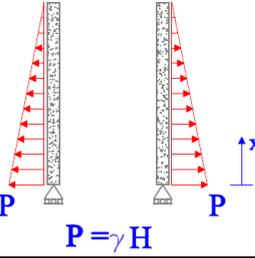
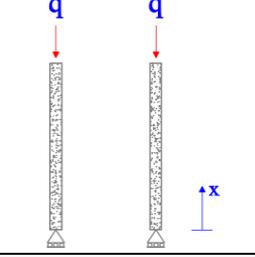
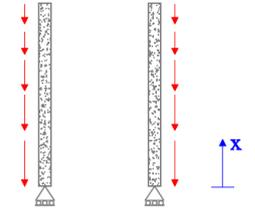
Da lei de Hooke, sendo E o Módulo de Elasticidade Longitudinal ou Módulo de Young e ν o Coeficiente de Poisson, obtém-se:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{Eh} (N_x - \nu N_{\theta}) \\ \varepsilon_{\theta} = \frac{1}{Eh} (N_{\theta} - \nu N_x) \end{cases} \quad (3.8)$$

A partir das Equações 3.6, 3.7 e 3.8 vários casos de carregamentos de cascas cilíndricas sob regime de membrana podem ser explorados. A Tabela 3.1 fora gerada utilizando-se destas mesmas equações, estando ilustrada a seguir, e cujas demonstrações de obtenção de

tais esforços, deslocamentos e rotações são ilustrados no Apêndice A. Vale ressaltar que nesta, além dos esforços já ilustrados, constam w , v e $\frac{dw}{dx}$ que são os deslocamentos horizontais na direção radial, deslocamentos verticais e rotações ao longo da altura da casca cilíndrica respectivamente.

Tabela 3.1 – Esforços e deslocamentos para cascas cilíndricas em regime de membrana

TEORIA DE MEMBRANA – ESFORÇOS E DESLOCAMENTOS					
CASOS	N_θ	N_x	w	v	$\frac{dw}{dx}$
	$P r$	0	$\frac{P r^2}{E h}$	$-\frac{v P r x}{E h}$	0
	$\gamma_a r (H - x)$	0	$\frac{\gamma_a r^2 (H - x)}{E h}$	$-\frac{v \gamma_a r (Hx - \frac{x^2}{2})}{E h}$	$\frac{\gamma_a r^2}{E h}$
	0	q	$-\frac{v r q}{E h}$	$\frac{q x}{E h}$	0
	0	$\gamma_c h (H - x)$	$-\frac{v \gamma_c r (H - x)}{E}$	$\frac{\gamma_c (Hx - \frac{x^2}{2})}{E}$	$\frac{v \gamma_c r}{E}$

Considerar os seguintes parâmetros para manuseio da Tabela 3.1:

γ_a : Peso específico da água, cujo valor de referência pode ser dado por $\gamma_a = 10 \text{ kN/m}^2$;

γ_c : Peso específico do concreto;

r : raio de curvatura da superfície média da casca cilíndrica;

h: a espessura da casca cilíndrica;

H: Altura total da parede da casca cilíndrica;

x: Segmento analisado ao longo da parede da casca cilíndrica;

P: Carregamento constante distribuído ao longo da superfície da parede da casca cilíndrica;

q: Carregamento distribuído ao longo da borda livre da casca cilíndrica.

3.2.2 Teoria flexional de cascas cilíndricas

Fundamentando-se na metodologia exposta por Timoshenko (1959), a Figura 3.3 ilustra os esforços presentes em um elemento infinitesimal de casca cilíndrica em regime de flexão.

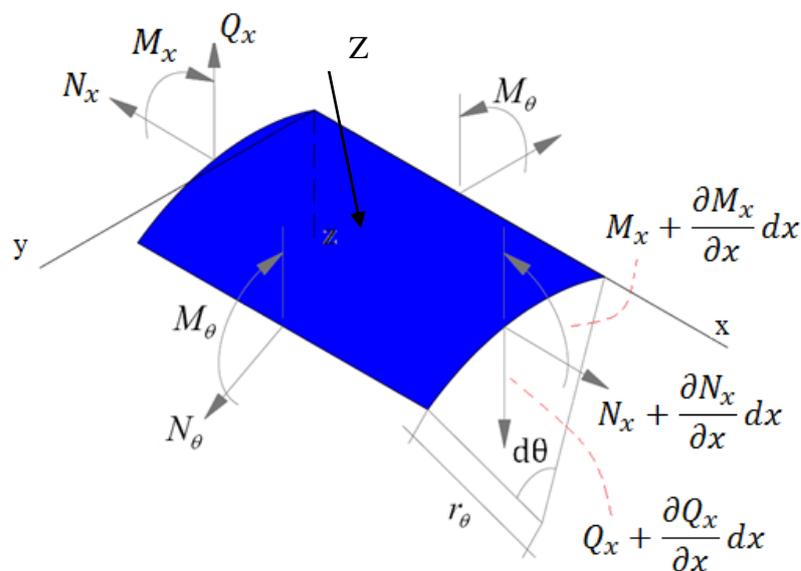


Figura 3.3 - Equilíbrio de esforços em um elemento infinitesimal de casca cilíndrica (modificado – Timoshenko, 1959)

As seguintes notações serão utilizadas:

M_x : Momento fletor por unidade de comprimento ao longo do círculo paralelo;

Q_x : Força cortante normal à direção y;

M_θ : Momento fletor por unidade de comprimento ao longo do círculo meridiano;

N_x : Força normal por unidade de comprimento ao longo do meridiano;

N_θ : Força normal por unidade de comprimento ao longo do paralelo;

dx: Diferencial do comprimento do arco meridiano;

dθ: Diferencial de comprimento do arco do paralelo;

$M_{x\theta}$: Momento torsional ao longo do círculo meridiano;

$M_{\theta x}$: Momento torsional ao longo do círculo paralelo;

$N_{x\theta}$ é o Força cisalhante por unidade de comprimento ao longo do paralelo;

$N_{\theta x}$: Força cisalhante por unidade de comprimento ao longo do meridiano;

Z : Força normal aplicada na área do elemento;

r_θ : Raio de curvatura do círculo paralelo

Por se tratar de uma estrutura com simetria axial e carregamento axissimétrico aplicado, simplificações dos esforços se operam ao se considerar as condições de simetria, a saber:

- Os esforços $M_{x\theta}$, $M_{\theta x}$, $N_{x\theta}$ $N_{\theta x}$ que variam em relação ao ângulo θ desaparecem;
- A componente vertical de deslocamento na direção do círculo paralelo desaparece.

Sob condições de simetria, três das seis equações de equilíbrio do elemento são identicamente satisfeitas, podendo considerar apenas as três equações restantes, sendo obtidas pela projeção das forças em eixos x e z e pelo momento das forças em torno do eixo y . Assumindo que as forças externas consistem apenas de uma pressão normal para a superfície, estas três equações de equilíbrio são:

$$\begin{cases} \frac{\partial N_x}{\partial x} r_\theta dx d\theta = 0 \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} r_\theta dx d\theta + N_\theta dx d\theta + Z r_\theta dx d\theta = 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} r_\theta dx d\theta - Q_x r_\theta dx d\theta = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

A primeira expressão sugere que o termo N_x é nulo, e desta forma, dividindo-se as equações restantes por $r_\theta dx d\theta$, obtém-se:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{r_\theta} N_\theta = -Z \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Lembrando as expressões de deformações:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{du}{dx} \\ \varepsilon_\theta &= -\frac{w}{r_\theta}\end{aligned}\quad (3.11)$$

Pela lei de Hooke:

$$\begin{aligned}N_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} [\varepsilon_x + \nu\varepsilon_\theta] = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{du}{dx} - \nu \frac{w}{r_\theta} \right] = 0 \\ N_\theta &= \frac{Eh}{1-\nu^2} [\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_x] = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[-\frac{w}{r_\theta} + \nu \frac{du}{dx} \right]\end{aligned}\quad (3.12)$$

Sendo E o Módulo de Elasticidade Longitudinal ou Módulo de Young e ν o Coeficiente de Poisson.

Trabalhando a Equação 3.12, resulta:

$$\frac{du}{dx} = \nu \frac{w}{r_\theta}\quad (3.13)$$

Substituindo a Equação 3.13 em 3.12, encontra-se N_θ de modo que:

$$N_\theta = -\frac{Ehw}{r_\theta}\quad (3.14)$$

Voltando na Equação 3.10, isolando o termo $\frac{\partial Q_x}{\partial x}$ e diferenciando a equação do momento para posterior substituição, resulta:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} = -Z - \frac{1}{r_\theta} N_\theta\quad (3.15)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{\partial Q_x}{\partial x} = 0\quad (3.16)$$

Considerando os momentos de flexão, conclui-se que devido a simetria não há mudança na curvatura na direção circunferencial. A curvatura na direção x é igual a $-\frac{d^2w}{dx^2}$. Usando as mesmas equações de placas:

$$M_{\theta} = \nu M_x \quad (3.17)$$

$$M_x = -D \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (3.18)$$

Sendo D a rigidez à flexão dada por:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (3.19)$$

Substituindo 3.15 e 3.18 em 3.16 e fazendo as devidas operações, a seguinte equação diferencial é obtida:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{r_0^2} w = Z \quad (3.20)$$

Usando a notação:

$$\beta^4 = \frac{Eh}{4r_0^2 D} \quad (3.21)$$

Fazendo-se a divisão da equação 3.20 por D e inserindo a Equação 3.21, a equação resultante adquire a seguinte configuração:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = \frac{Z}{D} \quad (3.22)$$

A solução da equação diferencial ordinária 3.22 definida como a deflexão w da teoria flexional de cascas cilíndricas, está apresentada na Equação 3.23 e cuja obtenção está ilustrada no Apêndice C.

$$w = e^{\beta x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sen \beta x) + e^{-\beta x}(C_3 \cos \beta x + C_4 \sen \beta x) + f(x) \quad (3.23)$$

Onde f(x) é a solução particular que representa a ação do carregamento no estado de membrana. As constantes C₁, C₂, C₃ e C₄ podem ser encontradas a partir das condições de contorno.

Para cilindros longos, que obedecem à condição $\beta x \geq 5$, uma borda da casca não influencia na outra borda, e assim o termo $e^{\beta x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ da Equação 3.23 pode ser anulado, pois este faria com que w crescesse exponencialmente com o aumento de y com pontos cada vez mais distantes da borda solicitada, o que não ocorre, visto que os esforços amortecem rapidamente ao longo da altura (Guimarães, 1995).

Ao se considerar tubos curtos, este mesmo termo da equação de deslocamentos não pode ser desprezado, uma vez que a influência de uma borda pode ser considerável sobre a outra.

Desta forma, todos os esforços e deslocamentos na casca cilíndrica podem ser obtidos em função de w e suas derivadas.

Relações geométricas devem se observadas nas cascas, de modo a identificar quando uma casca cilíndrica é esbelta ou espessa e quando é longa ou curta. Assim, devem ser notados:

- i. Uma casca é dita delgada quando a razão $\frac{h}{r} \leq \frac{1}{20}$, do contrário é dita espessa;
- ii. Uma casca é dita longa quando a condição $\beta H \geq 5$;
- iii. Uma casca é dita curta quando a condição $\beta H < 5$.

Sendo:

h : espessura da casca cilíndrica;

H : altura da parede da casca cilíndrica;

r : raio do cilindro.

3.2.3 Método das forças no acoplamento entre cascas ou elementos especiais

A teoria de membrana possui suas limitações conforme estabelecidas anteriormente, e a teoria flexional apesar de mais completa é bastante laboriosa e complicada para ser usada na análise de cascas com geometrias mais complexas. Combinar as duas teorias e elaborar um método mais prático de cálculo para estruturas mais complexas (geradas por partes mais simples interconectadas) é possível utilizando o método das forças.

O interesse do Método das Forças neste estudo visa construir soluções analíticas que descrevam o comportamento das bordas (vinculações) que serão importantes para se

compreender o que acontece nos apoios de uma barragem em arco, em particular na modelização de sua fundação. Neste método, os carregamentos só atuarão no estado de membrana, e os efeitos das vinculações são traduzidos por suas reações hiperestáticas, que representam cargas (força e momento) aplicadas no contorno, entre duas ou mais cascas interconectadas ou fixada nos apoios ou vínculos, tal como as fundações. Para isto, as seguintes definições são estabelecidas conforme Baker *et al.* (1972):

- O método das forças é um procedimento analítico o qual as relações de deflexões e rotações da casca são expressas em função dos carregamentos e/ou momentos aplicados nas bordas ou conexões, de modo a gerar soluções primárias e soluções secundárias;
- A solução primária é a solução da casca na qual os carregamentos externos que são aplicados na superfície média da casca são consistentes com as considerações da teoria de membrana;
- A solução secundária é a solução na qual carregamentos uniformes (momentos e esforços cortantes) são aplicados nas bordas e estas são assumidas como livres. Soluções secundárias são obtidas da teoria flexional;
- Os carregamentos unitários atuantes nas bordas são de intensidade unitária e são igualmente distribuídos ao longo desta borda;
- Os esforços resultantes encontrados em cada estágio são multiplicados pelos seus hiperestáticos, eliminando a descontinuidade de deformações e retornando a casca à sua condição inicial.

Os procedimentos de cálculo podem ser conduzidos de forma simplificada conforme passos a seguir:

- i. Assumir a casca como uma membrana e obter a solução de membrana para os carregamentos externos;
- ii. Aplicar os carregamentos unitários axissimétricos de borda: Momento (M), Cisalhamento Horizontal (H) e Cisalhamento vertical (V);
- iii. Tendo a solução primária e as soluções unitárias (secundária), a correção dos carregamentos M, H e V podem ser obtidas usando-se processos iterativos a partir das equações de compatibilidade;
- iv. A superposição de efeitos é realizada para se obter a solução final.

Desta forma, o sistema estrutural é representado por um conjunto de sistemas mais simples que interagem mecanicamente uns com os outros, podendo ser aplicável não somente para estruturas monolíticas mas também para estruturas mistas e cascas ortotrópicas (Baker *et al.*, 1972).

Um modelo de aplicação pode ser ilustrado conforme a Figura 3.4. Deve-se proceder de modo a separar as duas estruturas de cascas que neste caso, para ilustração do processo são: cúpula esférica e casca cilíndrica (Figura 3.4b).

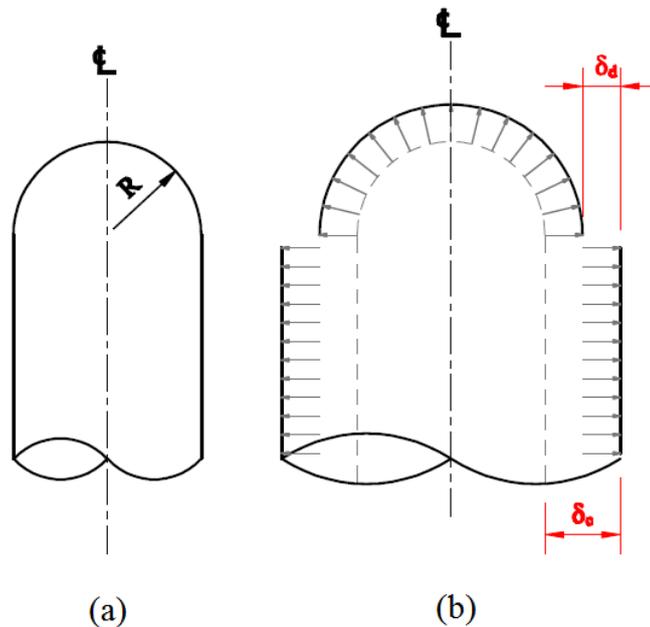


Figura 3.4 – Sistema de cascas: (a) Geometria; (b) Sistema submetido a pressão interna e deslocamentos de membrana (modificado – Baker *et al.*, 1972)

A solução primária resulta da teoria de membrana, sendo δ_c e δ_d deslocamentos de translação que aparecem da aplicação de um carregamento qualquer aplicado. Lacunas são criadas devido a diferenças entre os deslocamentos de translação e rotação da cúpula e da casca cilíndrica, e para eliminar estas lacunas são introduzidas nas junções, esforços e momentos unitários, conforme Figura 3.5, de modo que são gerados:

δ_{Hc} : deslocamento devido força H aplicada no cilindro;

β_{Hc} : rotação devido força H aplicada no cilindro;

δ_{Mc} : deslocamento devido momento M aplicado no cilindro;

β_{Mc} : rotação devido momento M aplicado no cilindro;

δ_{Hd} : deslocamento devido força H aplicada na cúpula esférica;

β_{Hd} : rotação devido força H aplicada na cúpula esférica;

δ_{Md} : deslocamento devido momento M aplicado na cúpula esférica;

β_{Md} : rotação devido momento M aplicado na cúpula esférica.

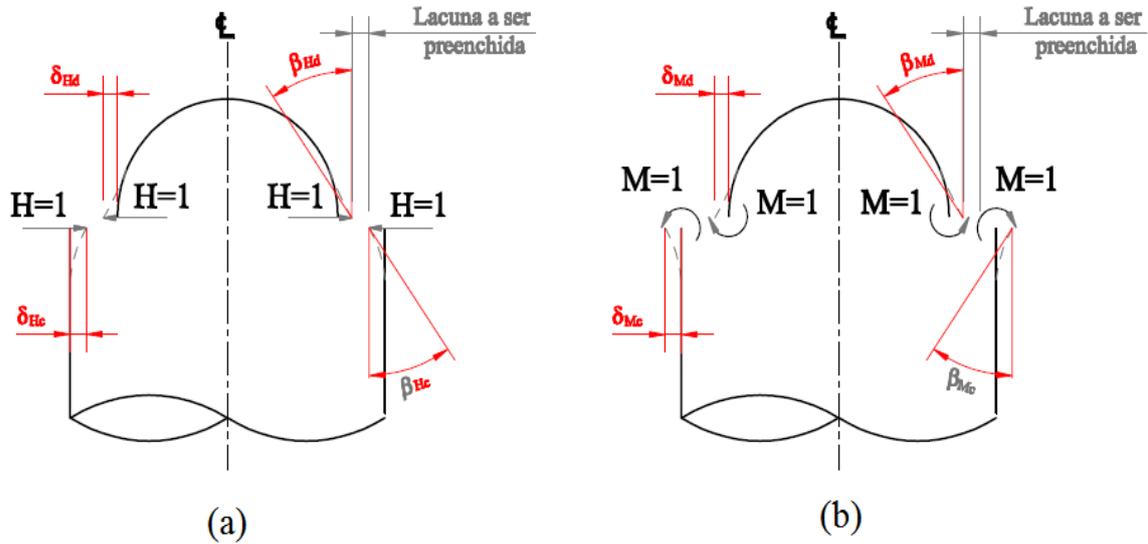


Figura 3.5 - Deformações devido carregamentos unitários: (a) Esforço horizontal
(b) Momento fletor (modificado – Baker *et al.*, 1972)

A convecção de sinais deve ser interpretada da seguinte maneira:

- H saindo da casca é positivo;
- M positivo quando causar tração nas fibras internas da casca;
- β positivo quando a rotação ocorrer no sentido horário.

Desta forma, analisando as Figuras 3.4 e 3.5, pelo lado direito da figura, as seguintes expressões são obtidas:

$$\begin{cases} \delta_d + \delta_{Hd}H + \delta_{Md}M = \delta_c - \delta_{Hc}H + \delta_{Mc}M \\ \beta_d - \beta_{Hd}H - \beta_{Md}M = \beta_c - \beta_{Hc}H + \beta_{Mc}M \end{cases} \quad (3.24)$$

$$\begin{cases} (\delta_{Hd} + \delta_{Hc})H + (\delta_{Md} - \delta_{Mc})M = \delta_c - \delta_d \\ (\beta_{Hd} - \beta_{Hc})H + (-\beta_{Md} - \beta_{Mc})M = \beta_c - \beta_d \end{cases} \quad (3.25)$$

Constituindo um sistema de duas equações e duas incógnitas, o sistema ilustrado em 3.25 é facilmente resolvido, devendo-se portanto encontrar os valores de H e M que são os efeitos de correção de borda referentes ao cisalhamento e momento, ou simplesmente

hiperestáticos, necessários para garantir a continuidade dos deslocamentos e rotações da junção. Vale ressaltar que os valores de δ e β são conhecidos e tabulados para cascas de geometria e carregamentos usuais, podendo ser encontrados em Baker *et al.*, (1972), Guimarães (1995) e Lustosa (2011). Valores de deslocamentos radiais (δ) e rotações (β) para o caso de cascas cilíndricas acopladas com elementos de placa constam no Apêndice B com as demonstrações de alguns casos de acoplamento entre cascas e elementos de placas utilizando o método das forças que serão abordados mais adiante em comparação com análises numéricas.

Para o cálculo das deformações e esforços finais, vale o princípio da superposição de efeitos conforme Equação 3.26:

$$E = E_0 + \sum_{i=1}^n E_i P_i \quad (3.26)$$

Onde:

E: Efeitos finais atuantes na estrutura hiperestática;

E_0 : Efeitos de membrana na estrutura oriundos do carregamento externo;

E_i : Efeitos de flexão na estrutura oriundos do i -ésimo hiperestático X_i ;

P_i : Hiperestático i aplicado na borda da casca;

n : Número de hiperestáticos considerados.

3.2.4 Análise aproximada usando teoria de cascas cilíndricas (Herzog, 1999)

Inúmeras tentativas foram realizadas para tirar vantagem da teoria de cascas cilíndricas na análise de barragens em arco. Mas somente em 1992, Herzog obteve sucesso em demonstrar que até mesmo a mais radical simplificação do problema, para o uso de fórmulas de tanques circulares com espessura constante, é suficiente para propósitos práticos na adequação de comportamentos previstos e observados de barragens em arco (deslocamentos, deformações e tensões).

As aproximações consistem primeiramente em assumir uma base de barragem fixa de forma rígida, quando na verdade barragens em arco são, na melhor hipótese, fixas de forma elástica em sua fundação. Em um segundo momento, curvaturas na direção horizontal são

consideradas apenas para altura média, e isso com uma fórmula empírica. Apesar de sua formulação teórica não ter sido rededuzida nesta pesquisa, a previsão de deslocamentos e deformações coincidem de forma adequada com um elevado número de barragens em arco de diferentes formas e tamanhos, conforme Herzog (1999).

- Expressões para o carregamento hidrostático

Com a ajuda de uma casca cilíndrica circular de comprimento característico (λ_x) na base da barragem, e de acordo com a Figura 3.6, chega-se ao momento fletor (M_x^w) e o esforço cortante (Q_x^w), dados na base da barragem, que são expressos respectivamente pelas Equações 3.27 e 3.28:

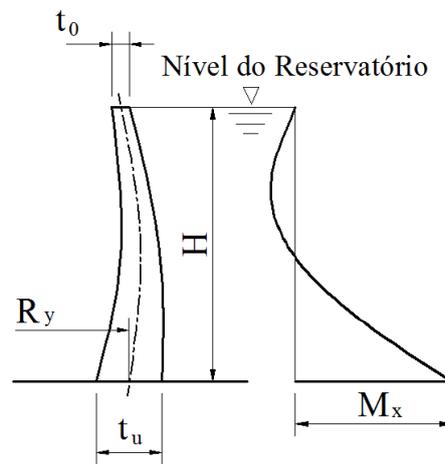


Figura 3.6 - Curvatura vertical de uma barragem em arco (modificado – Herzog, 1999)

$$M_x^w = \gamma_w (H - \lambda_x) \frac{\lambda_x^2}{2} \quad (3.27)$$

$$Q_x^w = \gamma_w \lambda_x \left(H - \frac{\lambda_x}{2} \right) \quad (3.28)$$

Sendo:

H: a altura do nível do reservatório;

γ_w : o peso específico da água;

λ_x : o comprimento característico para a base da barragem, dado por $\lambda_x = 0,76\sqrt{R_{yu}t_u}$;

R_{yu} : o raio com referência à base da barragem;

t_u : a espessura da base da barragem;

t_0 : a espessura da crista da barragem.

Considerando a barragem como esbelta, o comportamento desta será semelhante a uma casca cilíndrica, de modo que as forças de flexão e o esforço cortante diminuam gradualmente a amplitude das oscilações a partir da base fixa de uma casca circular na direção meridional, conforme mostra a Figura 3.7.

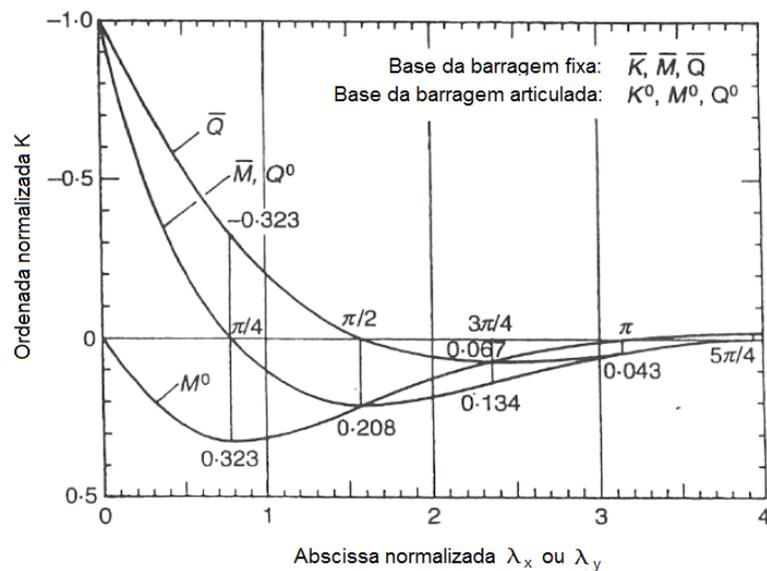


Figura 3.7 - Diminuição gradativa dos momentos e força cortante na direção meridional (Herzog, 1999)

A parte que permanece do carregamento hidrostático e que deve ser transferida para as laterais do vale na direção horizontal será:

$$W_y = \gamma_w \left(\frac{H^2}{2} \right) - Q_x^w = \gamma_w H \left[\frac{H}{2} - \frac{\lambda_x}{H} \left(H - \frac{\lambda_x}{2} \right) \right] = \gamma_w H \left(\frac{H}{2} - \lambda_x + \frac{\lambda_x^2}{2H} \right) \quad (3.29)$$

Sendo a porção da pressão hidrostática na direção radial (p_y) transmitida para o vale na altura média de acordo com a Equação 3.30:

$$p_y = \frac{W_y}{H} = \gamma_w \left(\frac{H}{2} - \lambda_x + \frac{\lambda_x^2}{2H} \right) \quad (3.30)$$

E a eficiência da barragem (η):

$$\eta = \frac{2p_y}{\gamma_w H} \quad (3.31)$$

O comprimento característico de uma casca cilíndrica em sua altura média (λ_y) é:

$$\lambda_y = 0,76 \sqrt{R_{ym} t_m} \quad (3.32)$$

Sendo t_m e R_{ym} a espessura da barragem e o raio respectivamente na altura média da barragem, é então gerado um momento horizontal no apoio à altura média (M_{yA}^w) de acordo com a Equação 3.27:

$$M_{yA}^w = p_y \frac{\lambda_y^2}{2} \quad (3.27)$$

A adequação desta fórmula empírica (3.27) já foi checada em aproximadamente 70 barragens em arco (Herzog, 1999). Este momento no apoio também diminui gradualmente a amplitude das oscilações na direção horizontal, conforme ilustra a Figura 3.8, em que em (a) é observado o comportamento de casca para uma estrutura esbelta, cujos valores de momentos são de caráter oscilatório, alternando-se a partir dos apoios, enquanto em (b) o comportamento é de viga para uma casca espessa, cujos momentos são monotônicos, se invertem, mas não se alternam a partir dos apoios. Vale ressaltar que λ_y indica a distância do apoio onde o momento se anula.

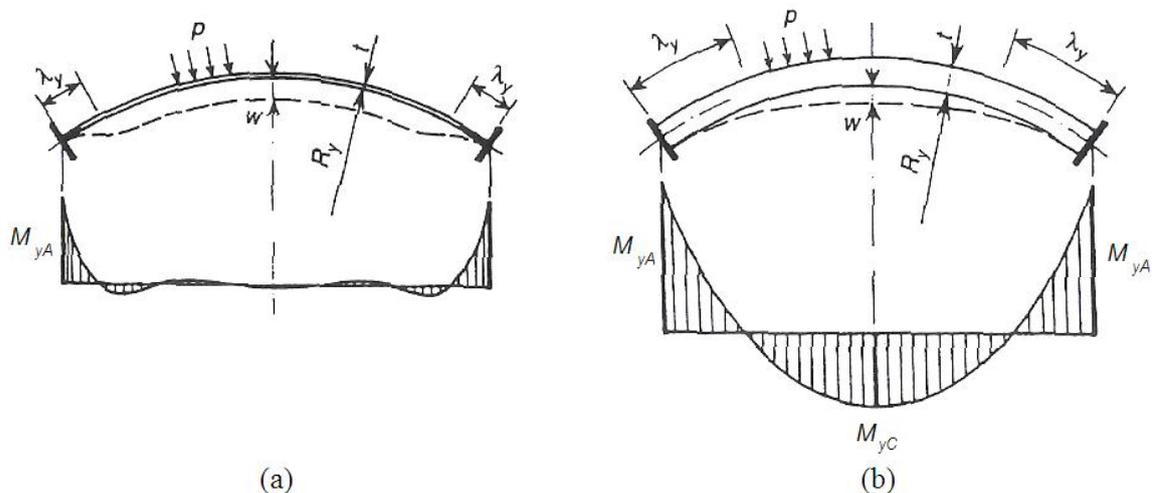


Figura 3.8 - Influência da espessura da barragem na diminuição gradativa dos momentos das ombreiras na direção horizontal do anel (Herzog, 1999)

A força direta na direção horizontal na altura média em razão da presença da pressão hidrostática (N_y^w) será:

$$N_y^w = p_y \left(R_{ym} + \frac{t_m}{2} \right) \quad (3.28)$$

O efeito da temperatura na barragem também pode ser estudado, entretanto não será contemplada esta análise nos modelos a serem estudados nos próximos capítulos. Contudo, vale o registro, de modo que os momentos em uma barragem em arco devido às variações de temperatura (M_x^T) são aproximados por:

$$M_x^T = \frac{E\omega T t_u \lambda_x^2}{R_{yu}} \frac{1}{2} \quad (3.29)$$

Para a base da barragem:

$$M_{yA}^T = \frac{E\omega T t_m \lambda_y^2}{R_{ym}} \frac{1}{2} \quad (3.30)$$

Para os apoios, a força normal na altura média (N_{ym}^T) é dada por:

$$N_{ym}^T = E\omega T t_m \quad (3.31)$$

Sendo ω o coeficiente de expansão térmica, T a variação de temperatura e E o Módulo de Young.

Se as deformações devido à temperatura ωT são substituídas pela retração específica do concreto ε_s , a formulação para diminuição de temperatura também vale para a retração do concreto (Herzog, 1999).

- Expressões para as tensões

Considerando uma área e seção transversal como $A = tx1$ e o módulo de seção $S = t^2/6$, as tensões nas direções vertical e horizontal são respectivamente:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{t_u} \pm \frac{6M_x}{t_u^2} \quad (3.32)$$

$$\sigma_y = \frac{N_y}{t_m} \pm \frac{6M_y}{t_m^2} \quad (3.33)$$

Nota: A tensão na vertical é dada na base da barragem e a tensão horizontal é dada à altura média da mesma.

A tensão vertical na linha central (σ_{x0}) da seção na base é:

$$\sigma_{x0} = \frac{N_x}{t_u} \quad (3.34)$$

E a tensão máxima cisalhante (τ_x), que possui distribuição parabólica, será:

$$\tau_x = \frac{3 Q_x}{2 t_u} \quad (3.35)$$

Portanto, as tensões principais ($\sigma_{1,2}$) serão:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{x0}}{2} \pm \left[\left(\frac{\sigma_{x0}}{2} \right)^2 + \tau_x^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.36)$$

E o ângulo entre a tensão principal de compressão e a vertical (α), é dado por:

$$\tan(2 \alpha) = \frac{2\tau_x}{\sigma_{x0}} \quad (3.37)$$

Se as tensões principais de tração excederem a resistência característica de tração do concreto, então fissuras e todas suas possíveis consequências devem ser consideradas no interior da barragem.

- Expressões para os deslocamentos radiais

Os deslocamentos radiais à meia altura de uma barragem em arco consistem em duas parcelas. Uma devido às forças normais geradas pela pressão hidrostática e variação de temperatura, aqui representadas respectivamente por:

$$w_{mN}^W = \frac{N_y^W R_{ym}}{Et_m} \quad (3.38)$$

$$w_{mN}^T = \omega TR_{ym} \quad (3.39)$$

Já a segunda parcela, devido momento fletor, é dada por:

$$w_{mM} = \int \frac{M_y^0 M_y'}{E_c I} dy = \frac{9M_{yA} \lambda_y^2}{Et_m^3} \quad (3.40)$$

A Figura 3.9 ilustra um esquema de obtenção da Equação 3.40 acima, obtida a partir do Teorema de Pasternak ou Teorema da Redução, onde para se calcular deslocamentos em estruturas hiperestáticas empregando o Princípio dos Trabalhos Virtuais (P.T.V.), um dos carregamentos deve ser tomado na estrutura hiperestática (a), podendo o outro ser tomado num sistema principal isostático qualquer que dela se obtenha (b) aplicando-se um carregamento unitário, e que neste caso o arco está em balanço.

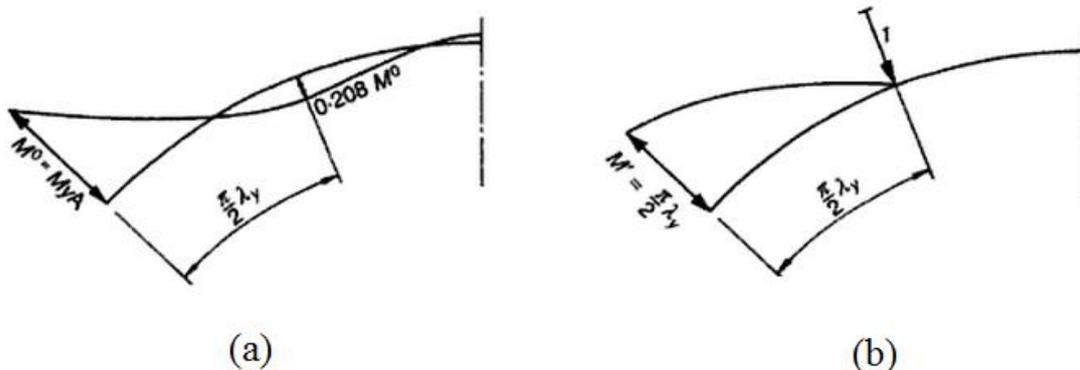


Figura 3.9 - Parcela do deslocamento radial em razão momento horizontal de curvatura nas ombreiras (aproximação) (Herzog, 1999)

4 VALIDAÇÃO DE SOLUÇÕES ANALÍTICAS E NUMÉRICAS

4.1 INTRODUÇÃO

As equações e procedimentos apresentados no capítulo anterior serão agora empregados a casos contidos na literatura clássica e atual, tomadas como modelos para validação e para que se possa adquirir um maior conhecimento de como atuam as grandezas envolvidas nos modelos analíticos e numéricos, sendo estes últimos obtidos a partir do programa ANSYS V11 com o Método dos Elementos Finitos. Será feito inicialmente o estudo de um modelo de casca cilíndrica variando-se as condições de borda de acordo com os casos a serem ilustrados. Depois, se procederá um estudo de cascas abatidas para em seguida avançar ao problema de uma barragem real, para o qual não se dispõem de soluções analíticas fechadas, mas somente soluções numéricas.

Assim, o objetivo deste capítulo consiste em se dominar procedimentos analíticos e a ferramenta computacional para se adquirir o embasamento necessário para obtenção de respostas numéricas, de modo a se chegar ao problema de barragens em arco com todos estes fatores e parâmetros envolvidos testados e validados.

4.2 MODELOS E DADOS A CONSIDERAR NOS CASOS DE VALIDAÇÃO

Um modelo de casca cilíndrica (Figura 4.1) submetido ao carregamento hidrostático e peso próprio será estudado de acordo com os casos ilustrados na Tabela 1.1 e especificados a seguir:

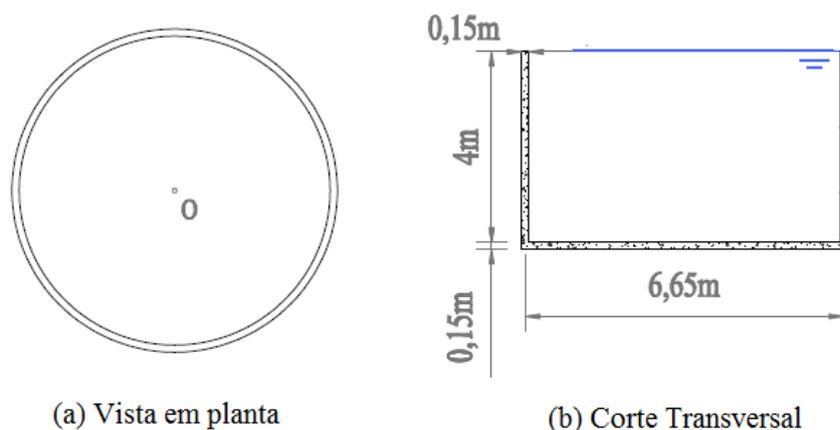


Figura 4.1 - Modelo de casca cilíndrica e placa circular (modificado – Guimarães, 1995)

- **Caso 1 - Considerando a ligação da casca na base como uma articulação;**
- **Caso 2 - Considerando a ligação da casca na base como um engaste perfeito;**
- **Caso 3 - Considerando a ligação da casca com uma placa rígida axialmente e com rotação livre;**
- **Caso 4 - Considerando a ligação da casca com uma placa axialmente elástica e com rotação livre;**
- **Caso 5 - Considerando a ligação da casca como sendo elasticamente engastada com uma placa (Analogia de Mohr).**

Serão considerados além dos valores da Figura 4.1 o concreto com resistência à compressão de 30 MPa, módulo de elasticidade secante igual a $3,47 \times 10^7$ kN/m², coeficiente de Poisson (ν) como 0,167, e o peso específico do concreto e da água sendo 25 kN/m³ e 10 kN/m³, respectivamente.

Cada caso estudado tem seu procedimento analítico seguindo o método das forças para cascas cilíndricas e acoplamento com elementos especiais, cuja obtenção dos hiperestáticos, esforços e deslocamentos na casca cilíndrica constam no Apêndice B.

Em um segundo momento, o modelo de casca abatida (Figura 4.2), denominado de **Caso 6**, submetido ao seu peso próprio será estudado de forma numérica, tomando-se como referência o estudo de Zienkiewicz (1967) e as respostas obtidas no tutorial do programa SAP 2000.

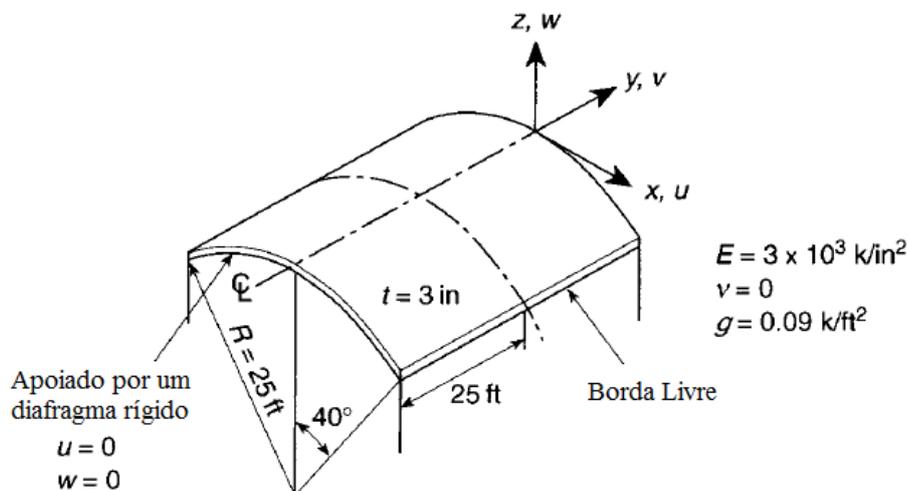


Figura 4.2 – Modelo de casca abatida (modificado – Zienkiewicz, 1967)

Um outro estudo de casca abatida, ilustrado na Figura 4.3, denominado de **Caso 7**, será analisado com base no trabalho de Lima Júnior (1996).

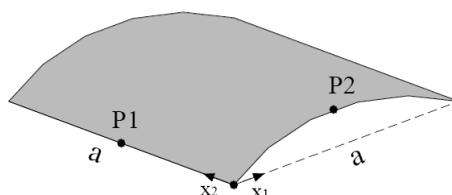


Figura 4.3 – Casca abatida engastada nas bordas retas e livre nas bordas curvas (Lima Júnior, 2006)

Para o Caso 7, considerar-se-á uma casca de curvatura cilíndrica engastada nas bordas retas e livre nas bordas curvas com raio de curvatura de 100 m, base quadrada de dimensões unitárias, carregamento transversal como sendo $0,006853 \text{ N/m}^2$, módulo de elasticidade longitudinal de 1000 N/m^2 , coeficiente de Poisson igual a 0,3 e espessura da casca de 0,1m.

Após conhecidas e dominadas todas as grandezas presentes nos modelos anteriores, o estudo de cascas cilíndricas de revolução e cascas cilíndricas parciais abatidas permitem abordar o caso de uma barragem real ainda que sem a simulação da deformabilidade das fundações. Contudo, de posse destes resultados, podem ser feitas análises mais aproximadas voltadas às barragens em arco. Assim, no processo progressivo de análise de cascas cilíndricas, visando estabelecer um procedimento coerente e funcional que permita a abordagem de barragens em arco, o **Caso 8** seguirá o modelo de casca apresentado por Huang Wen-Xi (1965) ilustrado na Figura 4.4. A casca tem base engastada e restrições ao longo da parede do cilindro que simula com a utilização da casca completa a eliminação do efeito da fundação engastada no contorno do vale.

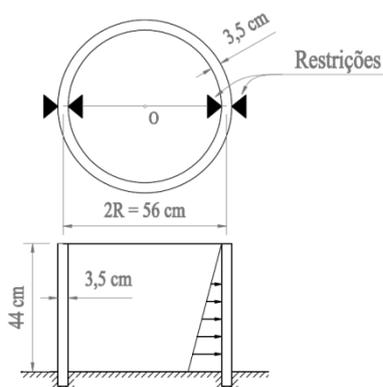


Figura 4.4 – Modelo de cilindro de base engastada e restrições radiais (modificado - Huang Wen-Xi, 1965)

Para este caso, além dos dados ilustrados na Figura 4.4 deve ser considerado o módulo de elasticidade de 22000 kg/cm^2 e o coeficiente de Poisson de $0,18$. O carregamento hidrostático será simulado considerando-se o mercúrio preenchendo totalmente o reservatório e cujo peso específico é $135,79 \text{ kN/m}^3$.

Modelos simulando o formato do vale também serão considerados (Figura 4.5 e Figura 4.6) e estudados numericamente, uma vez que para este caso soluções analíticas fechadas não são encontradas. Inicialmente, um modelo de espessura constante, seguindo estudos de Zienkiewicz (1967) e Zheng e Li (2010) será analisado considerando-se somente o carregamento hidrostático **(Caso 9)**.

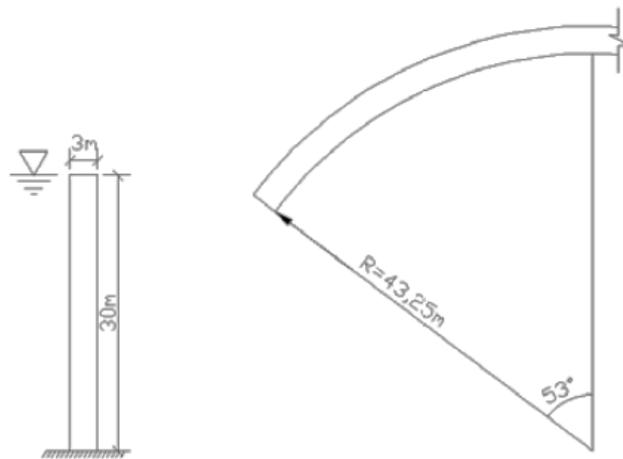


Figura 4.5 – Modelo de Barragem em arco em perfil e em planta (Zheng e Li, 2010)

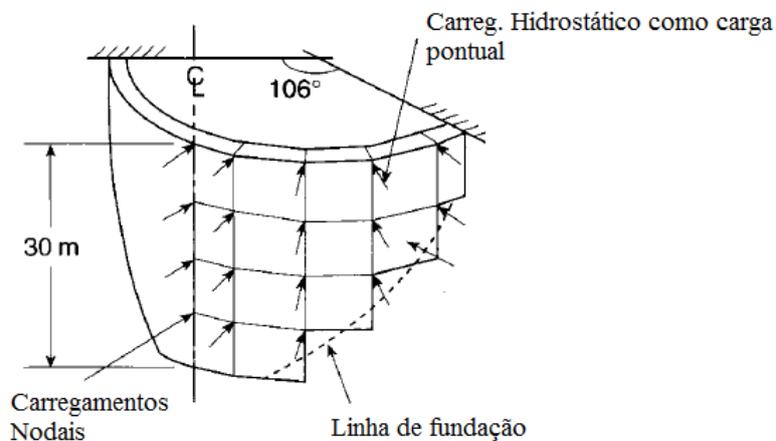


Figura 4.6 - Modelo de Barragem em arco discretizada em elementos retangulares (Zienkiewicz, 1967)

Ambos os modelos são validados pelo Método de Carga de Teste (*Trial Load Method*) e consideram a geometria conforme figuras anteriores, além de módulo de elasticidade, resistência característica e coeficiente de Poisson como sendo 20,8 GPa, 13,80 MPa e 0,15, respectivamente.

Um modelo de espessura variável de forma linear (Figura 4.7), denominado **Caso 10**, com as mesmas propriedades citadas no caso 9, fora gerado para servir de estágio intermediário ao caso teste final da barragem Stevenson Creek (Figura 4.8 e Figura 4.9).

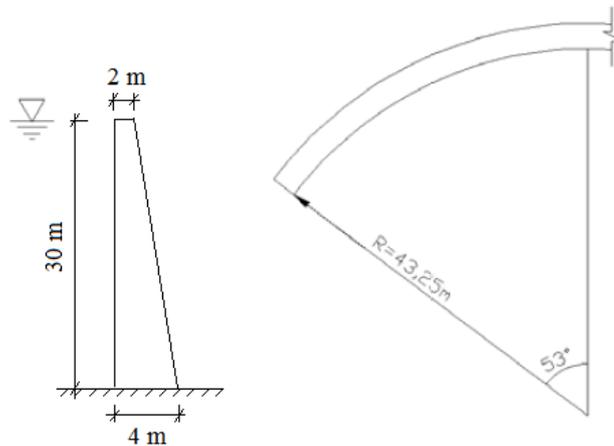


Figura 4.7 - Modelo de Barragem em arco em perfil e em planta com espessura variável

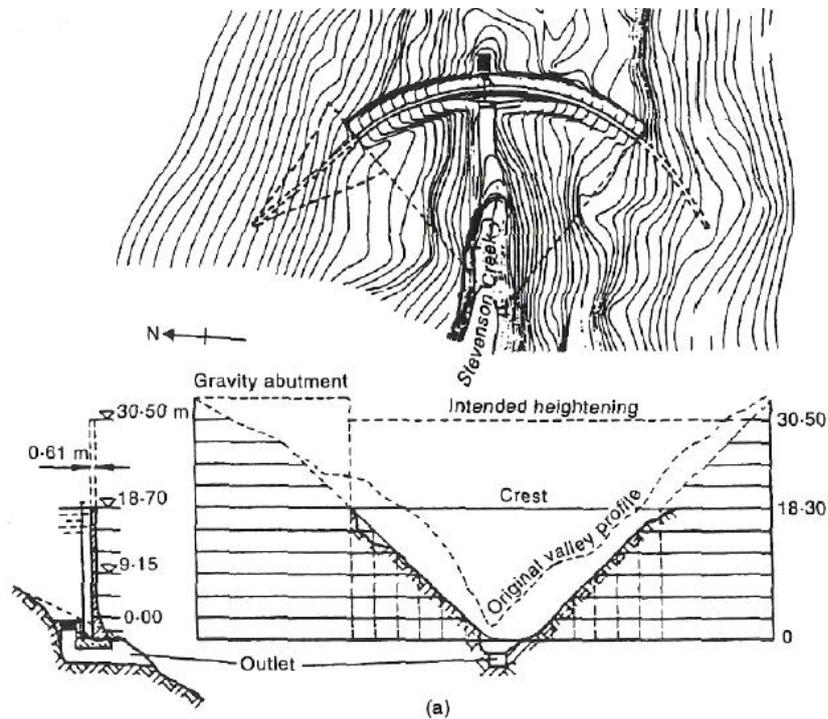


Figura 4.8 - Barragem de teste de Stevenson Creek (Herzog, 1999)

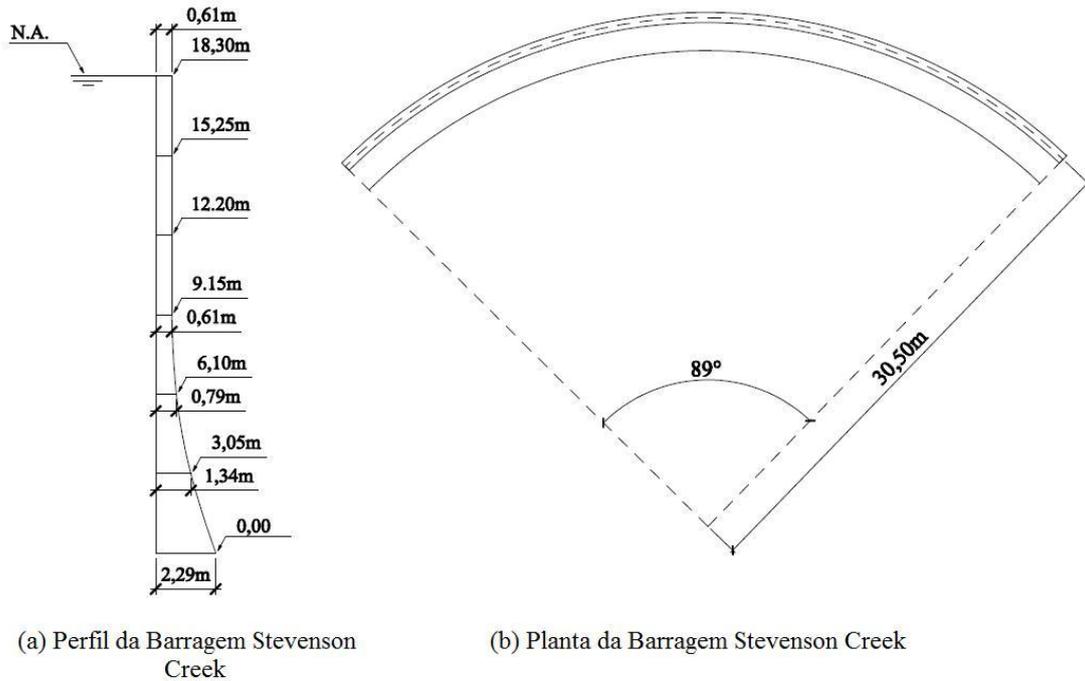


Figura 4.9 - Barragem Stevenson Creek: (a) Em perfil; (b) Em planta

Para o caso teste final – **Caso 11** (Barragem Stevenson Creek) tem-se uma barragem de simples curvatura que possui inércia variável ao longo de sua altura. São dados da estrutura: altura total de 18,30 m e um raio constante de 30,50 m, possui ainda 2,29 m de espessura na sua base e na crista 0,61 m. O módulo de elasticidade do concreto vale 20 GPa, resistência característica de 12,76 MPa, coeficiente de Poisson sendo 0,2 e o peso específico da água valendo 10 kN/m³. Localizada próxima a Fresno, na Califórnia, esta barragem foi construída para checar previsões do então novo método *Trial Load* do U.S. *Bureau of Reclamation*, e até hoje, é utilizada para checar novos métodos de análise. Sendo assim, esta também será usada, na tentativa de calibrar e validar o modelo final a ser analisado.

4.3 SOLUÇÕES ANALÍTICAS

Uma planilha de cálculo (Figura 4.10) fora elaborada em Excel® para automatizar o procedimento analítico de todos os casos citados anteriormente. Devem ser observados que os valores em vermelho são referentes aos dados de entrada, que podem ser alterados pelo usuário de forma a se adaptar a outras geometrias de cascas cilíndricas, e os demais valores são obtidos de forma automática. Vale ressaltar que o estudo analítico de todos os casos

foram confrontados com resultados de estruturas apresentadas por Lustosa (2011) e Guimarães (1995), buscando a validação de todo este procedimento automatizado.

TEORIA FLEXIONAL DE CASCAS CILÍNDRICAS (MÉTODO DAS FORÇAS)

DADOS DE ENTRADA

E =	34,5	GPa	h =	0,15	m
v =	0,167		H =	4,00	m
			R =	3,33	m

CÁLCULO DA ESBELTEZ DO CILINDRO

h/R = 0,045 Obs.: Casca Esbelta

CONSIDERAÇÃO DE PERTURBARÇÃO DE BORDA

$\beta \cdot L =$ 7,40 Obs.: Como $\beta \cdot L \geq 5$ - Usar fórmulas simplificadas

PARÂMETROS A CONSIDERAR

$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$	D = 9981,499	
$\beta^4 = \frac{E h}{4 R^2 D}$	$\beta^4 = 11,72388$	$\beta = 1,850409$

MÉTODO DAS FORÇAS PARA CASCAS CILÍNDRICAS - LIGAÇÃO ARTICULADA COM PLACA

$\Delta_0 + \Delta_M \cdot X_1 = 0$

$X_1 = \frac{-2 \cdot \beta^3 \cdot D \cdot \gamma_a \cdot R^2 \cdot H}{E \cdot h}$	$X_1 = -10,81$
---	----------------

Figura 4.10 - Modelo de Planilha de Cálculo Analítico para o Caso 1

Com o resultado dos hiperestáticos obtido, as respostas são apresentadas no regime de membrana, aplicação do hiperestático 1, aplicação do hiperestático 2 e respostas totais, que representam a resposta final da estrutura. A Tabela 4.1 ilustra o modelo de obtenção destas respostas para o Caso 1. Demais casos também possuem planilhas de cálculos semelhantes.

De forma semelhante, para a metodologia de cálculo de barragens em arco proposta por Herzog (1999) também fora elaborada uma planilha de cálculo em Excel® para automatizar o procedimento analítico dos modelos de barragens. De forma análoga ao modelo elaborado para cascas cilíndricas, os valores em vermelho são referentes aos dados de entrada, que podem ser alterados pelo usuário de forma a se adaptar a outras geometrias de barragens, e os demais valores são obtidos de forma automática. Vale ressaltar que o estudo analítico automatizado foi validado confrontando os resultados com os expostos por Herzog (1999) calculando-se deslocamentos e tensões verticais na base da barragem conforme modelo ilustrado na Figura 4.11.

Tabela 4.1 - Modelo de obtenção de respostas analíticas de cascas cilíndricas Caso 1

RESPOSTAS ANALÍTICAS - LIGAÇÃO COMO UMA ARTICULAÇÃO																			
REGIME DE MEMBRANA							ESTADO 1						TOTAIS						
Cota - y (m)	N _{II}	Desloc. Radial (m)	Rotação (rad)	M _φ	M _θ	V _y	N _{II}	Desloc. Radial (m)	Rotação (rad)	M _φ	M _θ	V _y	N _{II}	Desloc. Radial (m)	Rotação (rad)	M _φ	M _θ	V _y	NI
0,00	133,00	0,000085	-0,000021	0,00	0,00	0,00	-133,00	-0,000085	0,000158	0,00	0,00	10,81	0,00	0,000000	0,000137	0,00	0,00	10,81	15,00
0,20	126,35	0,000081	-0,000021	0,00	0,00	0,00	-85,64	-0,000055	0,000141	1,46	0,24	4,26	40,71	0,000026	0,000120	1,46	0,24	4,26	14,25
0,40	119,70	0,000077	-0,000021	0,00	0,00	0,00	-46,85	-0,000030	0,000107	1,88	0,31	0,33	72,85	0,000047	0,000085	1,88	0,31	0,33	13,50
0,60	113,05	0,000073	-0,000021	0,00	0,00	0,00	-19,48	-0,000013	0,000070	1,72	0,29	-1,61	93,57	0,000060	0,000048	1,72	0,29	-1,61	12,75
0,80	106,40	0,000068	-0,000021	0,00	0,00	0,00	-2,73	-0,000002	0,000039	1,32	0,22	-2,23	103,67	0,000067	0,000018	1,32	0,22	-2,23	12,00
1,00	99,75	0,000064	-0,000021	0,00	0,00	0,00	5,77	0,000004	0,000017	0,88	0,15	-2,10	105,52	0,000068	-0,000004	0,88	0,15	-2,10	11,25
1,20	93,10	0,000060	-0,000021	0,00	0,00	0,00	8,73	0,000006	0,000003	0,50	0,08	-1,64	101,83	0,000065	-0,000018	0,50	0,08	-1,64	10,50
1,40	86,45	0,000056	-0,000021	0,00	0,00	0,00	8,50	0,000005	-0,000004	0,23	0,04	-1,11	94,95	0,000061	-0,000025	0,23	0,04	-1,11	9,75
1,60	79,80	0,000051	-0,000021	0,00	0,00	0,00	6,77	0,000004	-0,000007	0,05	0,01	-0,65	86,57	0,000056	-0,000028	0,05	0,01	-0,65	9,00
1,80	73,15	0,000047	-0,000021	0,00	0,00	0,00	4,67	0,000003	-0,000007	-0,04	-0,01	-0,31	77,82	0,000050	-0,000028	-0,04	-0,01	-0,31	8,25
2,00	66,50	0,000043	-0,000021	0,00	0,00	0,00	2,79	0,000002	-0,000005	-0,08	-0,01	-0,08	69,29	0,000045	-0,000027	-0,08	-0,01	-0,08	7,50
2,20	59,85	0,000038	-0,000021	0,00	0,00	0,00	1,36	0,000001	-0,000004	-0,08	-0,01	0,04	61,21	0,000039	-0,000025	-0,08	-0,01	0,04	6,75
2,40	53,20	0,000034	-0,000021	0,00	0,00	0,00	0,42	0,000000	-0,000002	-0,07	-0,01	0,09	53,62	0,000034	-0,000024	-0,07	-0,01	0,09	6,00
2,60	46,55	0,000030	-0,000021	0,00	0,00	0,00	-0,11	0,000000	-0,000001	-0,05	-0,01	0,10	46,44	0,000030	-0,000023	-0,05	-0,01	0,10	5,25
2,80	39,90	0,000026	-0,000021	0,00	0,00	0,00	-0,34	0,000000	0,000000	-0,03	0,00	0,08	39,56	0,000025	-0,000022	-0,03	0,00	0,08	4,50
3,00	33,25	0,000021	-0,000021	0,00	0,00	0,00	-0,38	0,000000	0,000000	-0,02	0,00	0,06	32,87	0,000021	-0,000021	-0,02	0,00	0,06	3,75
3,20	26,60	0,000017	-0,000021	0,00	0,00	0,00	-0,33	0,000000	0,000000	-0,01	0,00	0,04	26,27	0,000017	-0,000021	-0,01	0,00	0,04	3,00
3,40	19,95	0,000013	-0,000021	0,00	0,00	0,00	-0,25	0,000000	0,000000	0,00	0,00	0,02	19,70	0,000013	-0,000021	0,00	0,00	0,02	2,25
3,60	13,30	0,000009	-0,000021	0,00	0,00	0,00	-0,16	0,000000	0,000000	0,00	0,00	0,01	13,14	0,000008	-0,000021	0,00	0,00	0,01	1,50
3,80	6,65	0,000004	-0,000021	0,00	0,00	0,00	-0,09	0,000000	0,000000	0,00	0,00	0,00	6,56	0,000004	-0,000021	0,00	0,00	0,00	0,75
4,00	0,00	0,000000	-0,000021	0,00	0,00	0,00	-0,04	0,000000	0,000000	0,00	0,00	0,00	-0,04	0,000000	-0,000021	0,00	0,00	0,00	0,00

ANÁLISE APROXIMADA (HERZOG, 1999)

DADOS DE ENTRADA

E = **20** GPa
v = **0,2**

Área seção = **11,64** m²
H = **18,30** m
R_{ym} = **30,50** m
R_{yu} = **29,66** m

t_m = **0,61** m
t_u = **2,29** m

N_x = -G → N_x = -291,00 kN/m

$\lambda_x = 0,76 \sqrt{R_{yu} t_u}$ → λ_x = 6,26 m

$M_x^w = \gamma_w (H - \lambda_x) \frac{\lambda_x^2}{2}$ → M_x^w = 2361,04 kN.m/m

$Q_x^w = \gamma_w \lambda_x \left(H - \frac{\lambda_x}{2} \right)$ → Q_x^w = 950,06 kN/m

$p_y = \frac{W_y}{H} = \gamma_w \left(\frac{H}{2} - \lambda_x + \frac{\lambda_x^2}{2H} \right)$ → p_y = 39,58 kN/m²

$\lambda_y = 0,76 \sqrt{R_{ym} t_m}$ → λ_y = 3,28 m

$M_{yA}^w = p_y \frac{\lambda_y^2}{2}$ → M_{yA}^w = -212,69 kN.m/m

$N_y^w = p_y \left(R_{ym} + \frac{t_m}{2} \right)$ → N_y^w = 1219,38 kN/m

DESLOCAMENTO RADIAL	
$w_{mN}^w = \frac{N_y^w R_{ym}}{E_c t_m} + \frac{9M_{yA}^w \lambda_y^2}{E_c t_m^3}$	
w _{mN} ^w = 7,58	mm
TENSÕES VERTICAIS (BASE DA BARRAGEM)	
- Tensões à Montante	
$\sigma_x = \frac{N_x}{t_u} \pm \frac{6M_x}{t_u^2}$	→ σ _x = 2574,30 kN/m ²
- Tensões à Jusante	
$\sigma_x = \frac{N_x}{t_u} \pm \frac{6M_x}{t_u^2}$	→ σ _x = -2701,37 kN/m ²

Figura 4.11 - Modelo de Planilha de Cálculo Analítico para metodologia Herzog (1999)

4.4 MODELAGEM NUMÉRICA E ASPECTOS COMPUTACIONAIS

Conhecer a ferramenta computacional e saber extrair dela o que de melhor nos fornece é de vital importância em todo e qualquer programa que usa elementos finitos. O programa ANSYS como qualquer outro programa computacional executa aquilo que o usuário determina, não cabendo ao programa definir e/ou indicar se a análise está sendo feita de maneira correta ou não. Desta forma, cuidados são necessários nas fases de pré-processamento, pós-processamento e na análise de resultados, para que o modelo numérico seja capaz de reproduzir o que realmente está se buscando modelar e analisar.

Quanto ao pré-processamento, deve-se tomar cuidado com os dados de entrada uma vez que o programa não indica ou determina as unidades das grandezas envolvidas, cabendo ao usuário estabelecer seus valores e correlações entre as grandezas. Além disto, por se tratar de um programa estrangeiro, a convenção para momentos fletores é a inversa da utilizada no Brasil, portanto deve-se entrar com cargas de valores de sinal contrário para obter respostas de acordo com nossa convenção usual.

Quanto ao pós-processamento e análise de resultados devem ser observados os seguintes pontos:

- As respostas numéricas podem ser explicitadas por nós ou por elementos;
- Respostas nodais de deslocamentos e rotações são dadas decompostas em coordenadas cartesianas para os eixos x, y e z;
- No degradê de cores para ilustrações das respostas nodais e de elementos em 2D e 3D é utilizado um plotador gráfico cujas faixas estão no *default* do programa, consistindo na divisão de dez zonas de cores;
- Para os nós, o plotador gráfico utiliza a média entre estes para exposição da solução numérica. Para o elemento, pode-se optar por utilizar a média entre os nós do elemento ou não.

Assim, a modelagem numérica de todos os casos foi feita no software ANSYS V11 que é baseado no método dos elementos finitos (MEF) com o qual será possível determinar os esforços e deslocamentos atuantes nos modelos de estrutura e assim comparar estes resultados com os valores obtidos pelas formulações analíticas e/ou comparativos numéricos disponíveis na literatura.

4.4.1 Elementos Utilizados

As cascas cilíndricas serão simuladas com elementos finitos da biblioteca do programa ANSYS a saber: SHELL 43 para as cascas espessas e SHELL 63 para as cascas esbeltas. As cascas abatidas serão simuladas com elementos SHELL 93. Os modelos de barragens serão representados por elementos tipo SOLID 95. As especificações serão expostas a seguir:

Elemento SHELL 43:

Bem apropriado para modelos lineares, deformáveis, e estruturas de cascas moderadamente espessas, o elemento possui quatro nós (Figura 4.12a) e seis graus de liberdade por nó: translações nodais nas direções x , y e z e rotações em torno dos eixos x , y e z . O elemento possui plasticidade, fluência, grandes deslocamentos e grande capacidade de deformação. A saída dos valores de momentos, tensões normais e cisalhantes, necessárias à análise podem ser vistos na Figura 4.12b.

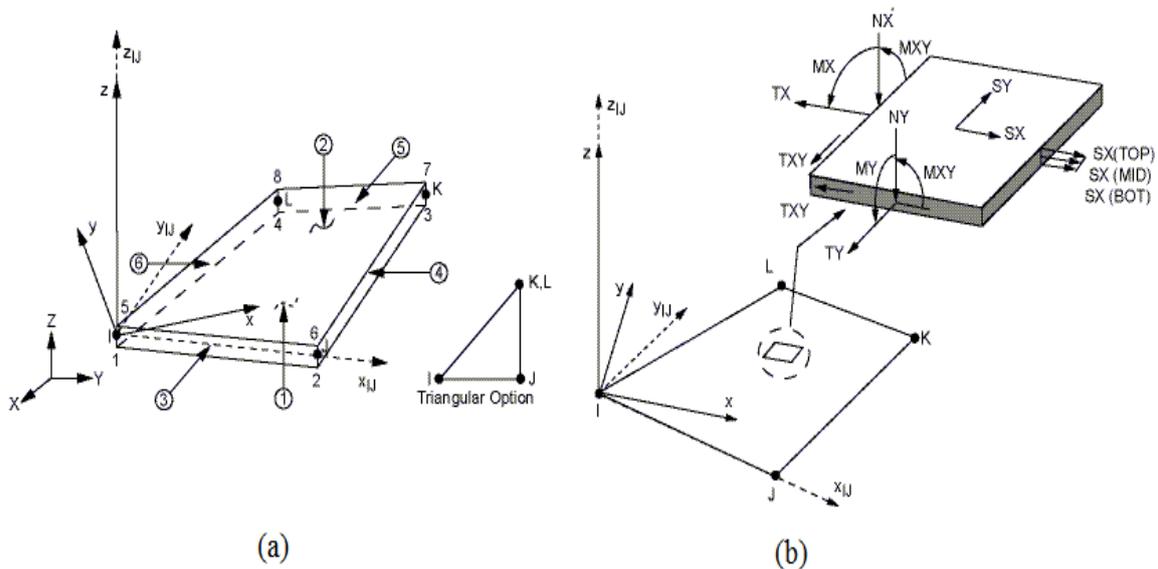


Figura 4.12 - (a) Geometria do elemento; (b) Tensões de saída do elemento SHELL 43 (Biblioteca ANSYS)

Elemento SHELL 63:

O elemento foi escolhido, em razão de suas propriedades físicas e geométricas. Com uma boa malha ele produz boas respostas numéricas, além de permitir aplicar esforços de flexão, e esforços normais perpendiculares à superfície, gerando saídas com valores de momentos, tensões normais e cisalhantes, necessárias às análises conforme pode ser visto na Figura 4.13b. O elemento SHELL63 tem capacidade de trabalhar em regime de membrana e de flexão. São admitidos carregamentos no plano e normais a ele. Possui quatro nós e seis graus de liberdade por nó: translações e rotações nas direções x , y e z (Figura 4.13a), além de possuir grande capacidade de deformação.

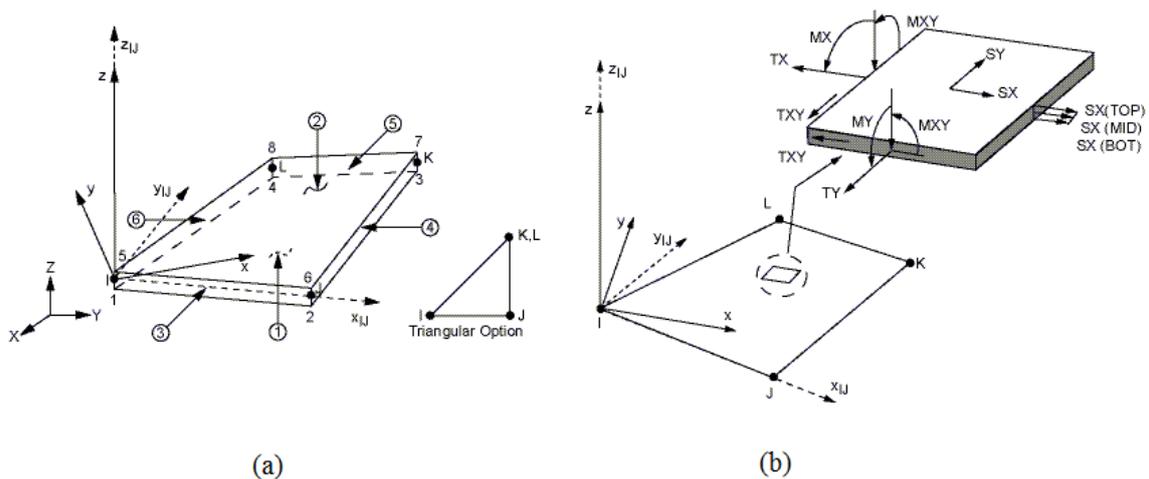


Figura 4.13 – (a) Geometria do elemento; (b) Tensões de saída do elemento SHELL 63 (Biblioteca ANSYS)

Elemento SHELL 93:

É particularmente adequado para modelar cascas curvas. O elemento tem oito nós e seis graus de liberdade por nó (Figura 4.14a): translações nodais nas direções x , y , e z e rotações em torno dos eixos x , y , e z . As formas de deformação são quadráticas em ambos os sentidos. Além disto, o elemento tem plasticidade, rigidez, apresenta grande deflexão, e grande capacidade de deformação. A saída dos valores de momentos, tensões normais e cisalhantes, necessárias à análise podem ser vistos na Figura 4.14b.

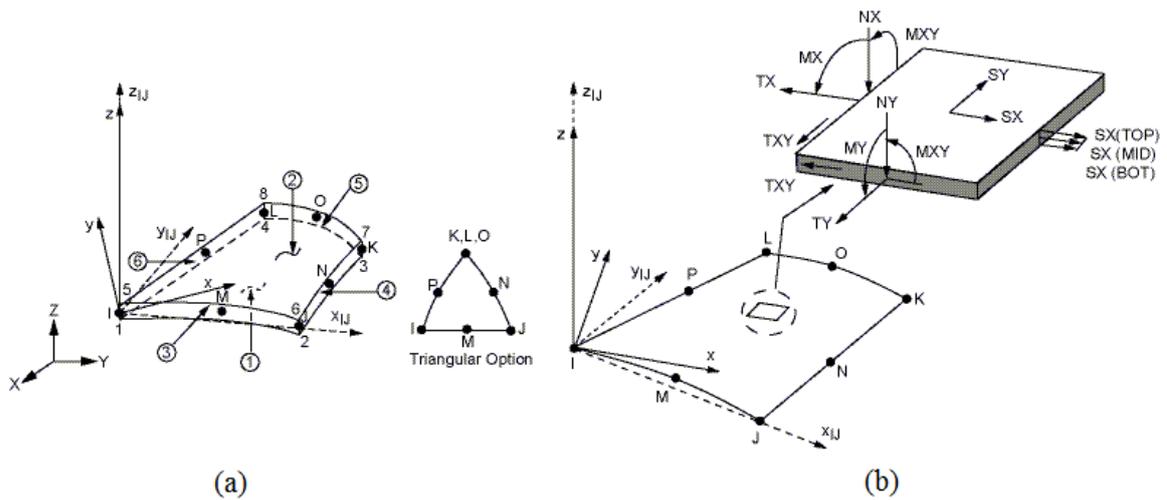


Figura 4.14 - (a) Geometria do elemento; (b) Tensões de saída do elemento SHELL 93 (Biblioteca ANSYS)

Elemento SOLID 95:

É um elemento sólido 3D de 20 nós que segue a geometria ilustrada na Figura 4.15a.

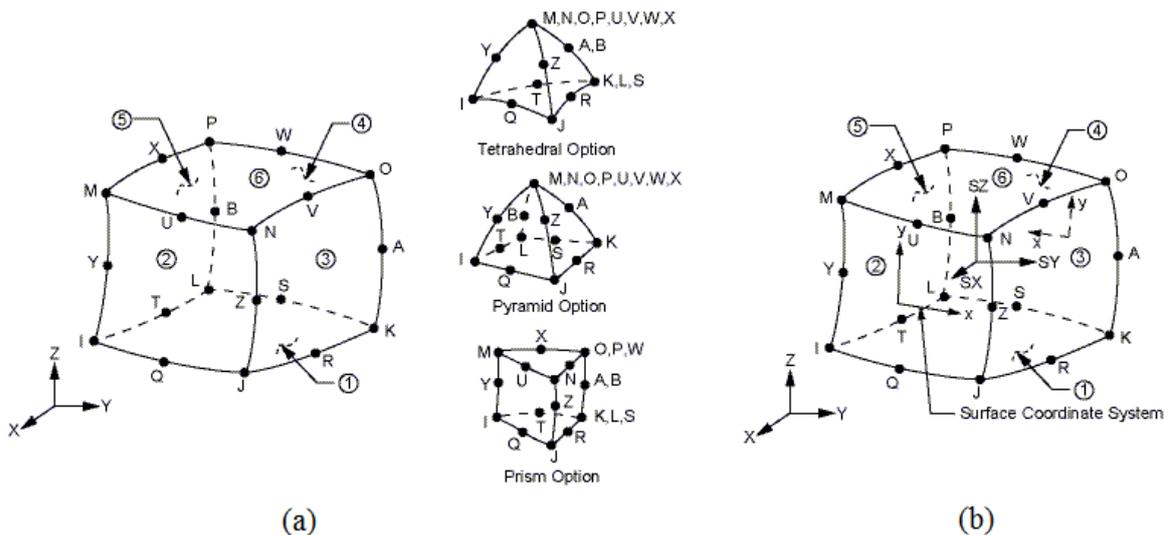


Figura 4.15 - (a) Geometria do elemento; (b) Tensões de saída do elemento SOLID 95 (Biblioteca ANSYS)

Sua escolha se deu por ser um elemento de ordem superior ao elemento SOLID 45 (elemento sólido 3D de oito nós) que permite formas mais irregulares (se levarmos em conta os contornos da barragem) sem grandes perdas de precisão. Tais elementos têm formas de deslocamento compatíveis e estão bem adaptados ao modelo de fronteiras curvas. É definido por 20 nós com três graus de liberdade por nó: translações nodais nas

direções x, y, e z, podendo ter qualquer orientação espacial. Apresenta plasticidade, fluência, grande deformação e grande capacidade de tensão. A saída dos valores tensões normais necessárias à análise pode ser vista na Figura 4.15b.

A segunda simulação será feita com elementos SHELL 63, cujas especificações já foram mencionadas.

4.4.2 Modelos numéricos e critérios de análise

Casos de 1 a 5 – Cascas Cilíndricas conforme esquemas da Tabela 1.1:

Os modelos de cascas cilíndricas seguem os dados citadas no item 4.2 cuja geometria está ilustrada na Figura 4.16 e Figura 4.17. Fora utilizado somente um quarto da estrutura para simplificação computacional. Para discretização em elementos finitos, utilizou-se o elemento SHELL 63. A casca cilíndrica será submetida à ação do peso próprio e do carregamento hidrostático para verificar a influência dos carregamentos verticais no método das forças, e na ordem de grandeza dos resultados obtidos.

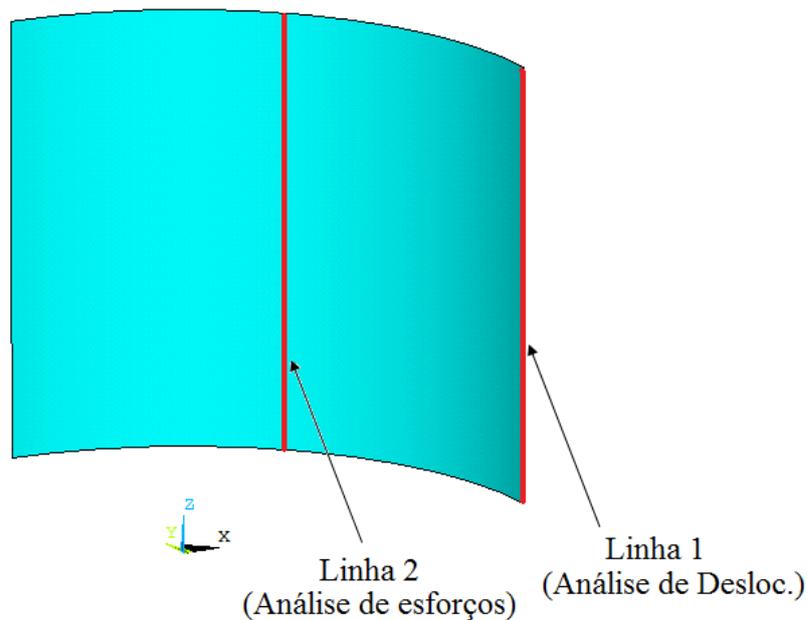


Figura 4.16 - Modelo de casca cilíndrica e linhas de análise

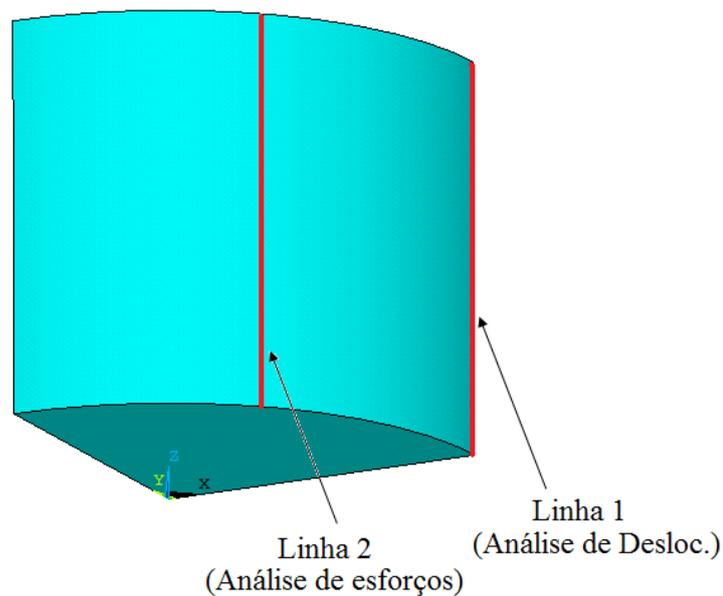


Figura 4.17 - Modelo de casca cilíndrica com placa e linhas de análise

As linhas 1 e 2 apresentadas acima são adotadas como seções representativas de observações para análise dos esforços e deslocamentos. A Linha 1 fora adotada para obtenção dos deslocamentos (radiais e rotação), pois a saída dos resultados é decomposta nos eixos x , y e z e desta forma, apenas o deslocamento em x será captado para análise dos deslocamentos radiais e a rotação em y para a análise do ângulo de rotação ao longo da altura da parede da casca cilíndrica. A Linha 2 fora considerada para a obtenção dos esforços a fim de minimizar uma possível influência das condições de simetria na parede da casca.

Vale ressaltar que para o caso de cascas cilíndricas, as condições de contorno na base da casca, quando da ausência da placa circular, estão em conformidade com os casos 1 e 2 da Tabela 1.1. Para as condições de simetria aplicadas ao longo das paredes verticais da Figura 4.16, nas linhas em y é nulo, é restringido o deslocamento na direção y e as rotações nas direções x e z , e nas linhas em que x é nulo, é restringido o deslocamento na direção x e as rotações nas direções y e z . Para o caso de cascas cilíndricas e placa circular de fundo (Casos 3, 4 e 5) do item 4.2., as condições de simetria devem ser aplicadas ao longo das paredes verticais e limites da placa da Figura 4.17, de modo que: nas linhas onde y é nulo, é restringido o deslocamento na direção y e as rotações nas direções x e z , e nas linhas onde x é nulo, é restringido o deslocamento na direção x e as rotações nas direções y e z .

Caso 6 – Casca abatida com apoios nas bordas curvas:

Para discretização em elementos finitos, utilizou-se o elemento SHELL 93. A casca abatida será submetida à ação do peso próprio, sendo utilizado somente um quarto da estrutura para simplificação computacional. As linhas 1 e 2 representadas (Figura 4.18a) são adotadas como seções representativas para análise de esforços e análise de deslocamentos respectivamente. A Linha 1 fora adotada para obtenção dos esforços e deslocamentos verticais na seção central e a Linha 2 fora considerada para a obtenção dos deslocamentos longitudinais na seção apoiada, fazendo-se a convergência com resultados apresentados no caso-teste dado no programa SAP 2000 e Zienkiewicz (1967). São ilustradas ainda as condições de contorno (Figura 4.18b), cujas bordas retas são livres e as bordas curvas são apoiadas sob um diafragma rígido. Para as condições de simetria da estrutura temos: na borda reta é restringido o deslocamento na direção x e as rotações em torno dos eixos y e z , e na borda curva é restringido o deslocamento na direção z e rotações em torno dos eixos x e y .

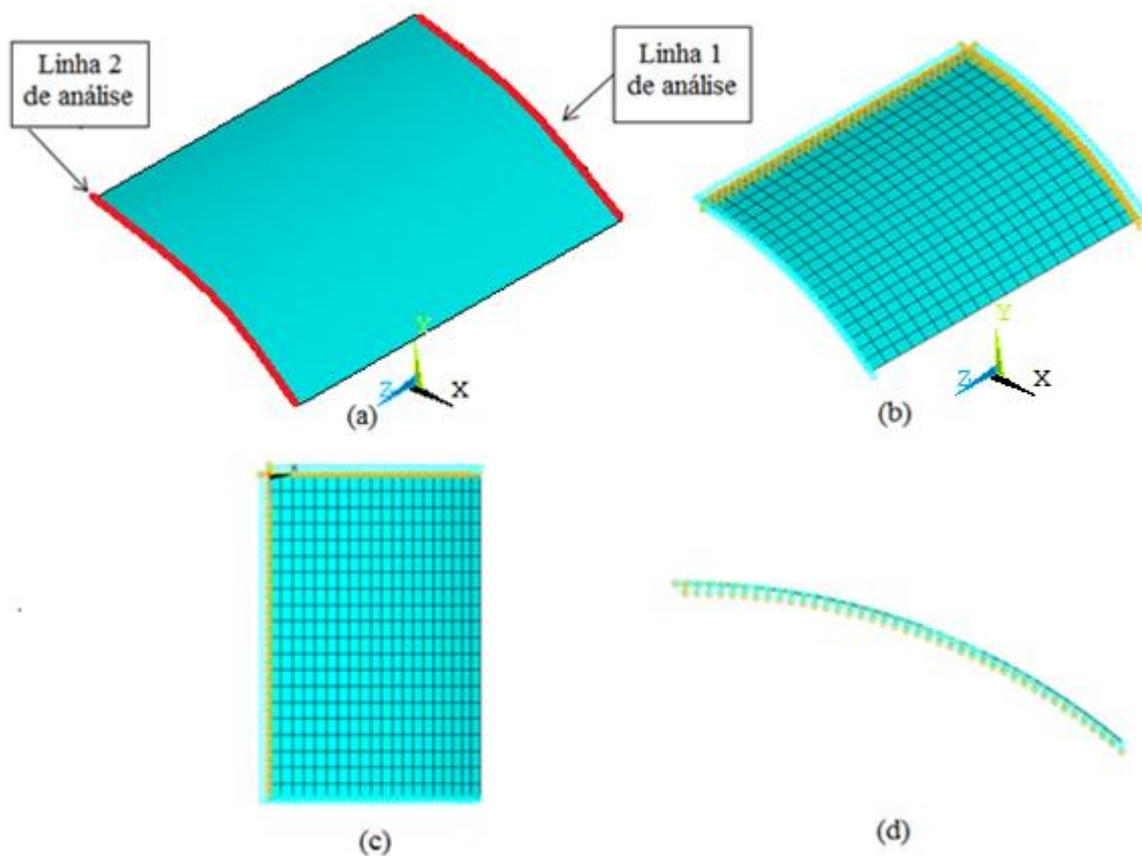


Figura 4.18 - Modelo de casca abatida apoiada nas bordas: (a) Seções representativas; (b) Vista em perspectiva; (c) Vista em planta; (d) Vista frontal

Caso 7 – Casca abatida engastada nas bordas retas e livre nas bordas curvas:

O segundo modelo de casca abatida (Caso 7) está conforme a Figura 4.19, sendo utilizado somente a metade da estrutura para simplificação computacional. Para discretização em elementos finitos, utilizou-se o elemento SHELL 93. A casca abatida será submetida à ação do carregamento transversal de $0,006853 \text{ N/m}^2$. Neste, serão analisados apenas pontos específicos P_1 e P_2 , ilustrados na Figura 4.19, para ser usado na comparação com os resultados apresentados por Lima Júnior (1996).

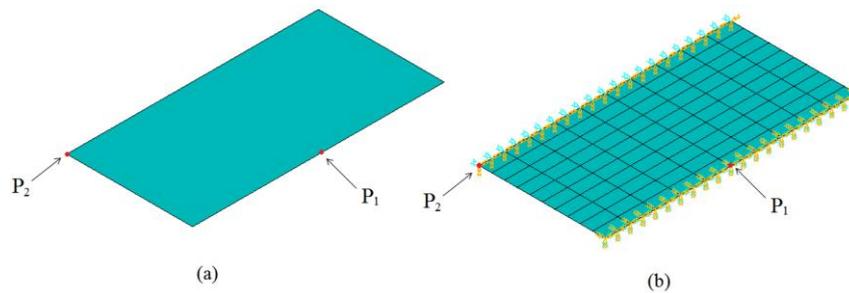


Figura 4.19 - Modelo de casca abatida engastada: (a) Pontos representativos; (b) Condições de simetria e condições de contorno

Caso 8 – Casca cilíndrica engastada na base com restrição radial ao longo do meridiano de simetria:

Para o Caso 8, o modelo sugerido por Huang Wen-Xi (1965) para uma barragem em arco está ilustrado na Figura 4.20.

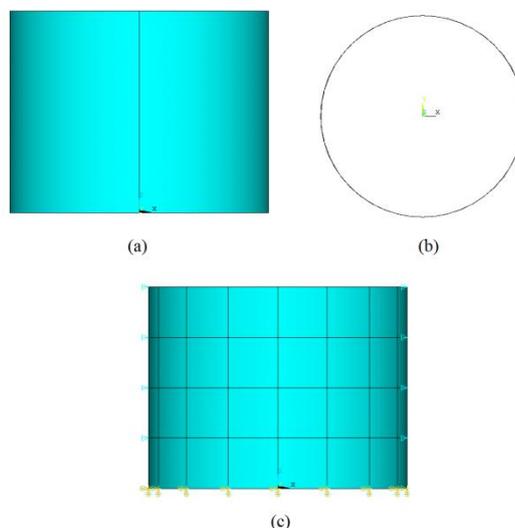


Figura 4.20 - Modelo de casca para análise de barragem em arco: (a) Vista Frontal; (b) Vista em planta; (c) Malha e condições de contorno

Serão observadas linhas específicas para os deslocamentos (Figura 4.21) nesta malha de referência. Este caso será discretizado por elementos SHELL 43 e elementos SHELL 63. No estudo de refinamento de malhas, analisar-se-á somente a linha vertical “a”.

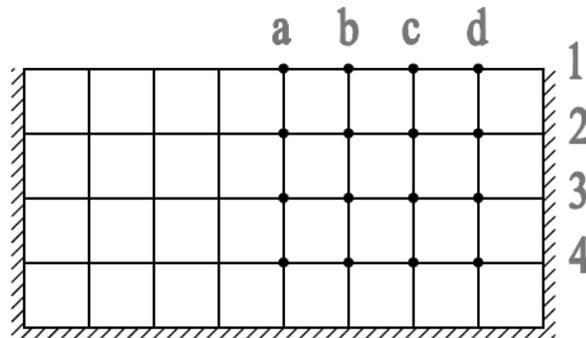


Figura 4.21 - Malha e linhas de análise de deslocamentos (modificado - Huang Wen-Xi, 1965)

Com o intuito de verificar a influência da simetria na modelagem numérica, foram simulados ainda para este caso um modelo considerando apenas a metade da estrutura (Figura 4.22) e outro com apenas um quarto da mesma (Figura 4.23). A verificação será feita na linha vertical “a” da Figura 4.21 ilustrada pelas linhas de análise em vermelho da Figuras 4.22 e 4.23.

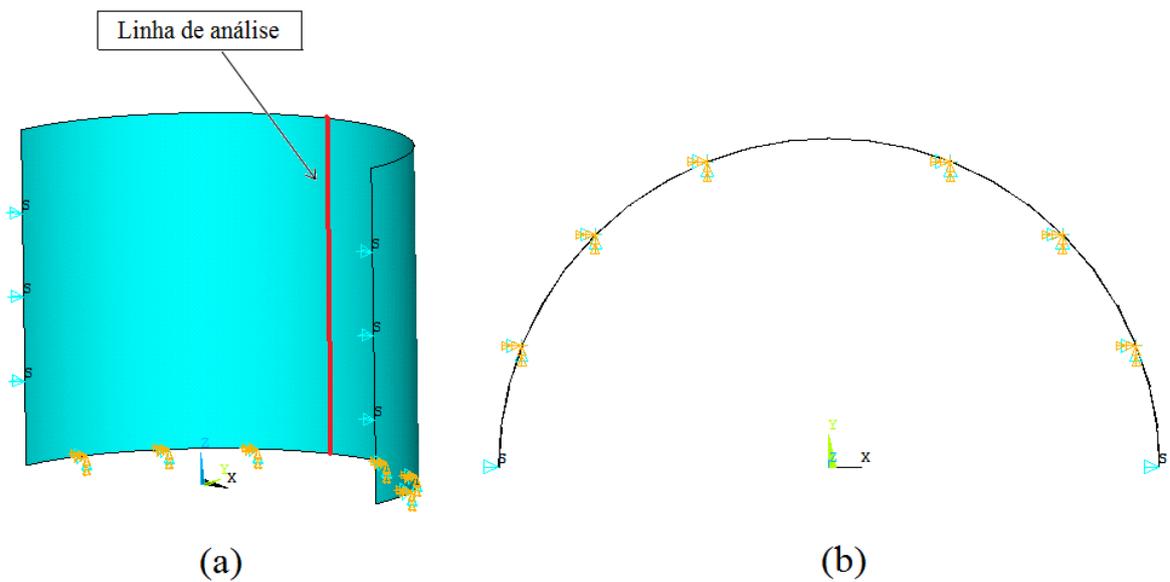


Figura 4.22 - Metade de casca para análise de barragem em arco

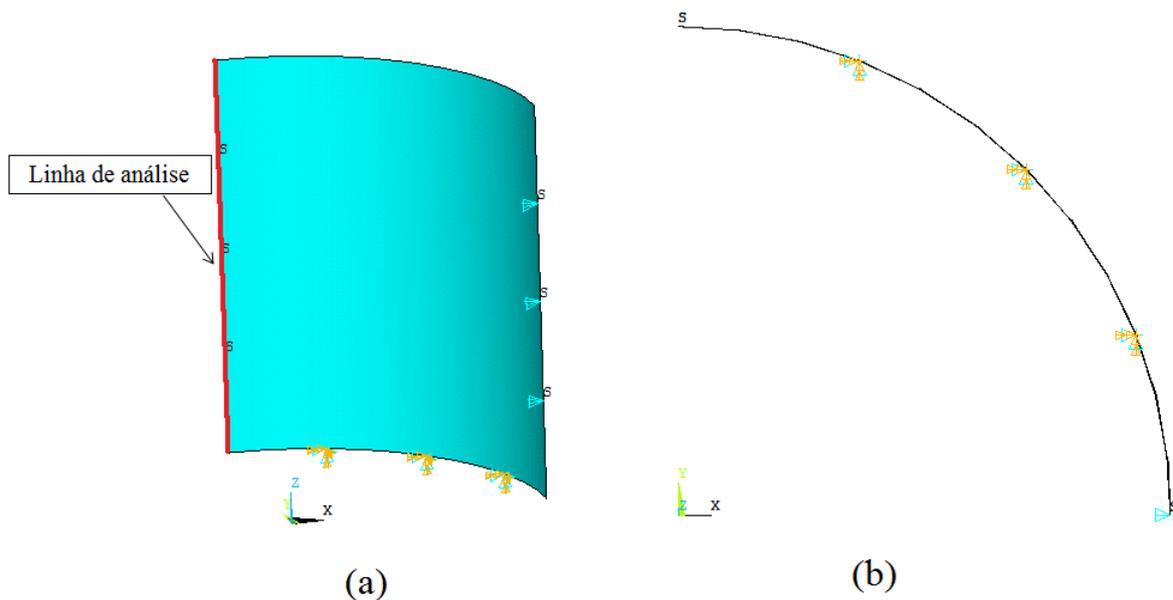


Figura 4.23 - Um quarto de casca para análise de barragem em arco

Caso 9 – Barragem em arco de simples curvatura e espessura constante:

Para o Caso 9, as simulações numéricas baseadas nos estudos de Zienkiewicz (1967) e Zheng e Li (2010) serão analisadas considerando somente a atuação do carregamento hidrostático. O modelo sólido gerado com elementos SOLID 95 está ilustrado na Figura 4.24, onde constam somente a geometria e as diferentes vistas. Será considerada somente a metade da estrutura, ou seja, será utilizada a condição de simetria, com condições de contorno como sendo perfeitamente engastados no contato estrutura-fundação. Será feita ainda a simulação deste mesmo modelo discretizado por elementos SHELL 63 para testes de convergência com o modelo sólido. Desta forma, o elemento finito SHELL 63 permitirá capturar os valores dos momentos presentes na estrutura, aspecto não contemplado pelo elemento finito sólido. O objetivo deste caso é analisar a evolução dos deslocamentos e tensões à montante e à jusante da estrutura de barramento na seção central de análise.

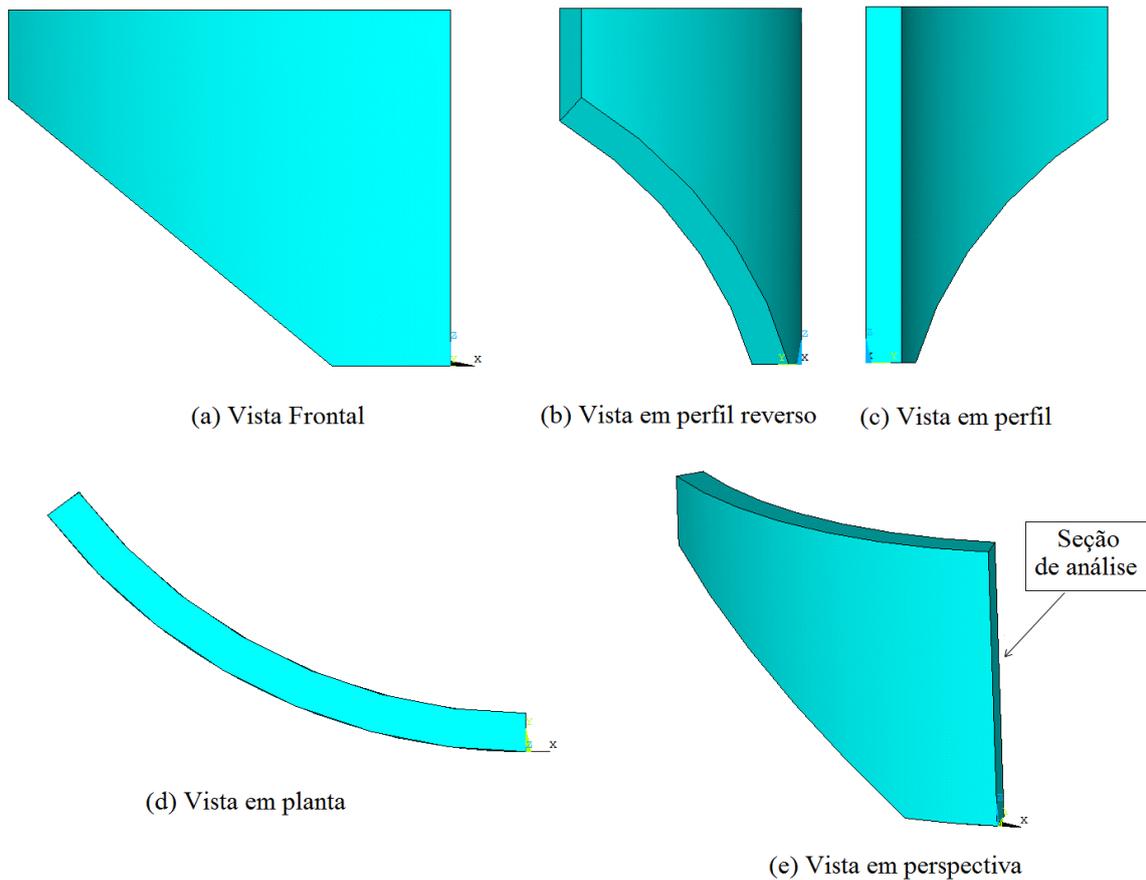


Figura 4.24 - Barragem em arco com espessura constante em modelo sólido

Caso 10 – Barragem em arco de simples curvatura com espessura linearmente variável:

De forma análoga ao caso da barragem anterior, o modelo de espessura variável de forma linear – Caso 10 – fora gerado (Figura 4.25) com elementos SOLID 95 está ilustrado na Figura 4.25, onde constam somente a geometria e as diferentes vistas. Será considerada somente a metade da estrutura, ou seja, será utilizada a condição de simetria, e esta sendo perfeitamente engastada no vale. O objetivo deste estudo é analisar a evolução dos deslocamentos e tensões à montante e à jusante da estrutura de barramento na seção central de análise.

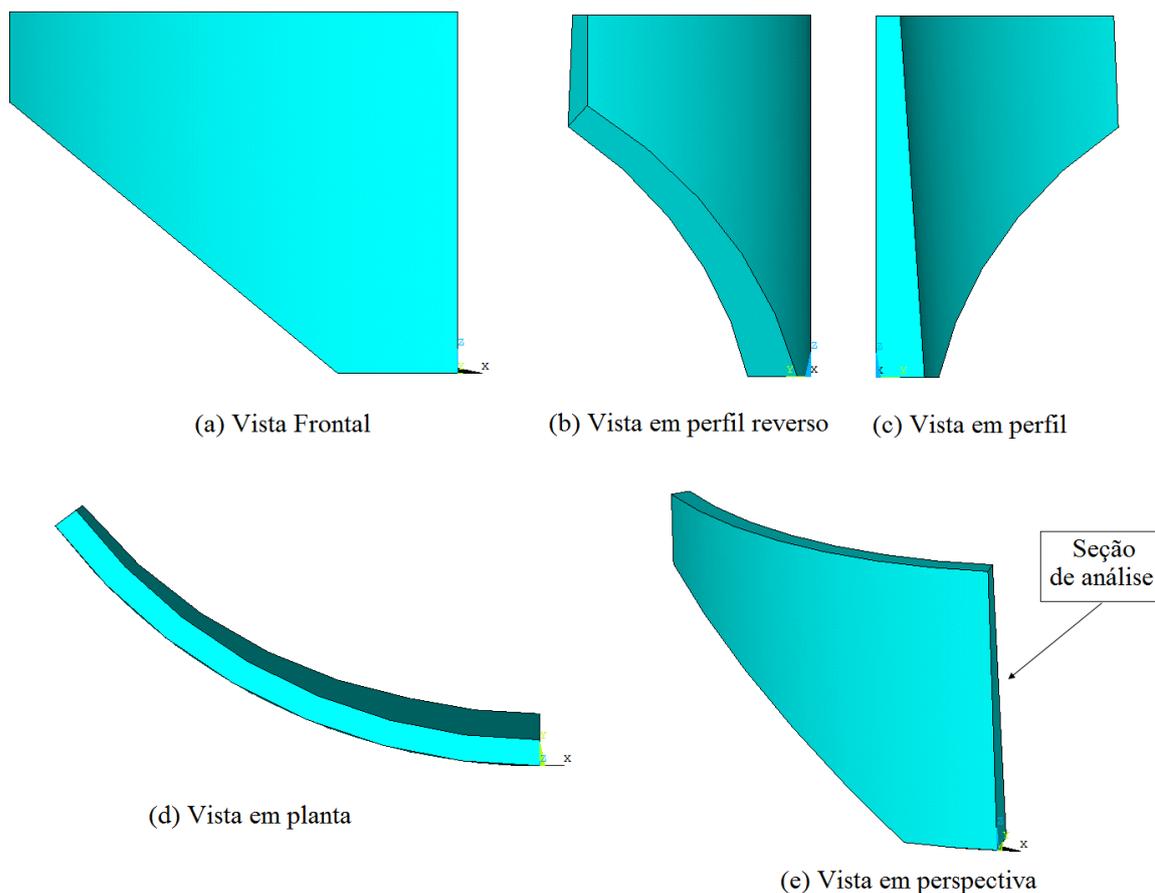


Figura 4.25 - Barragem em arco com espessura variável em modelo sólido

Caso 11 – Aplicação a um estudo de caso real – Barragem de teste Stevenson Creek:

O estudo de caso final – Caso 11, representado pela barragem Stevenson Creek, será feito simulando-se a estrutura submetida ao carregamento hidrostático e tomando como base os resultados experimentais e valores previstos por Herzog (1999) à meia altura da barragem. Desta forma, serão analisados os deslocamentos e tensões à montante e à jusante do modelo numérico, utilizando-se de elementos do tipo SOLID 95.

A Figura 4.26 ilustra através das várias vistas a geometria da barragem e o modelo de elementos finitos a ser discretizado por elementos sólidos. De forma análoga aos casos anteriores, será considerada somente metade da estrutura, utilizando-se das condições de simetria e condições de contorno como sendo perfeitamente engastados. Assim, o objetivo deste estudo final é analisar a evolução dos deslocamentos e tensões à montante e à jusante na seção central de análise, confrontando com os resultados analíticos aproximados oriundos de Herzog (1999) e resultados experimentais.

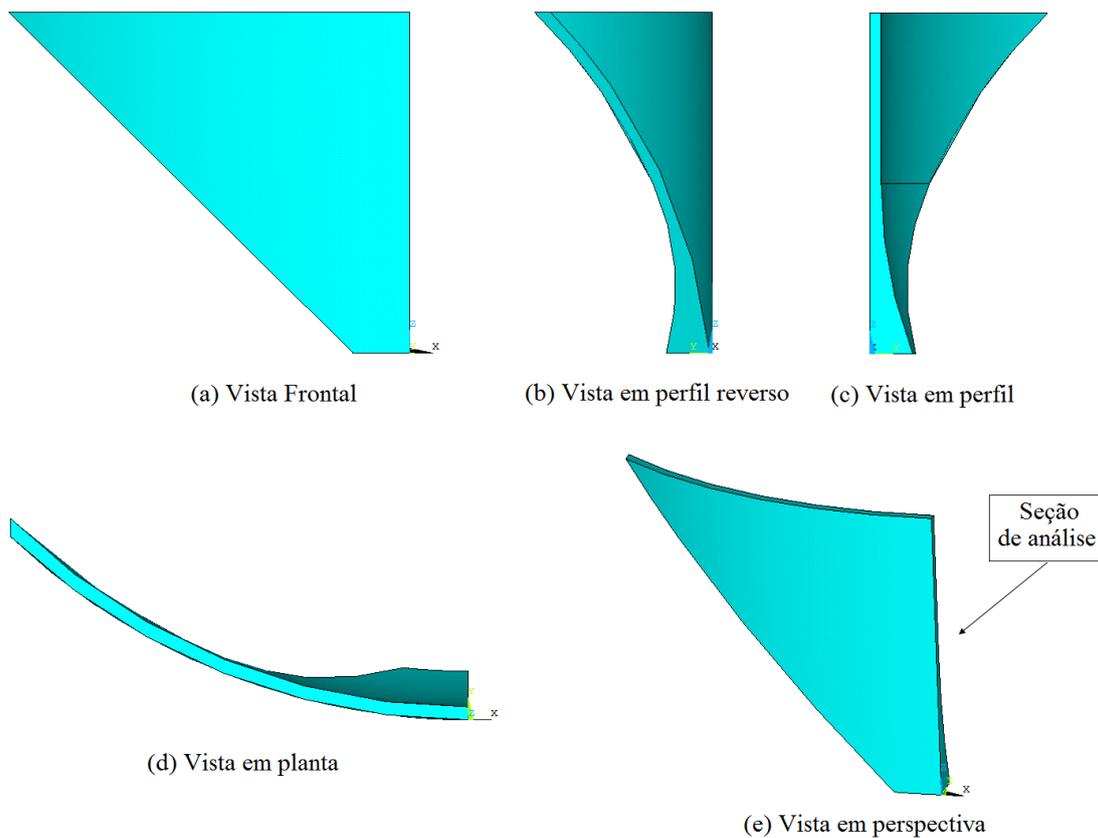


Figura 4.26 - Geometria do modelo sólido da Barragem Stevenson Creek

4.5 CALIBRAGEM E VALIDAÇÃO DE SOLUÇÕES NUMÉRICAS

A calibragem dos modelos e as validações foram efetuadas seguindo-se as soluções analíticas para cascas cilíndricas e as soluções numéricas, para os casos de cascas abatidas e modelos de barragens em arco. Desta maneira, procurou-se testar a convergência tanto em termos de deslocamentos quanto em termos de esforços para se ter uma maior exatidão nas respostas obtidas em função de cada grandeza de interesse.

Casos de 1 a 5 – Cascas Cilíndricas conforme esquemas da Tabela 1.1:

Para todos os casos de cascas cilíndricas, optou-se por adotar o nível de refinamento *SMART SIZE 1* com elementos triangulares do gerador de malhas automático do ANSYS por se tratar de um elemento e densidade de malha já testados em Lustosa (2011).

Caso 6 – Casca abatida com apoios nas bordas curvas:

Trata-se de uma casca abatida submetida ao peso próprio, em que foram utilizados três níveis diferentes de malha (Figura 4.27) constituídas de elementos SHELL 93: Malha 1 (6x6), Malha 2 (10x10) e Malha 3 (20x20). A Malha 1 foi adotada como o ponto de partida por se tratar de discretização de densidade de malha testada e contida nos programas ANSYS e SAP 2000. As divisões desta malha são de seis elementos ao longo da longitudinal e seis elementos ao longo da direção tangencial. Para a malha gerada no caso teste do ANSYS os resultados são testados somente em pontos extremos cujas respostas são máximas em virtude de somente estes pontos serem apresentados no programa. A malha do caso teste no programa SAP 2000 apresenta bons resultados e o estudo de convergência neste já é um tanto melhor do que no programam ANSYS uma vez que, analisa não somente pontos e sim linhas de corte, conforme aquelas adotadas neste estudo.

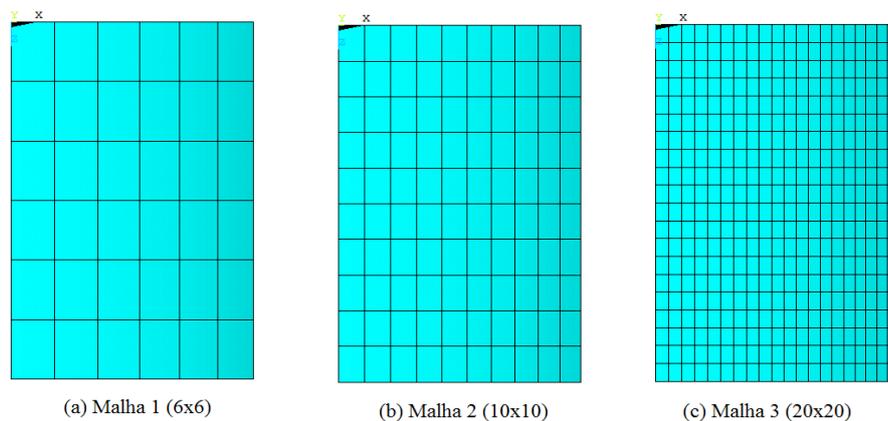


Figura 4.27 - Discretização de malhas em elementos finitos para cascas abatidas

Foram analisados os deslocamentos verticais – U_y e deslocamentos longitudinais – U_z (Figura 4.28), além dos momentos tangenciais (M_θ) e meridionais (M_ϕ) na seção central conforme Figura 4.29, e cujos testes com as malhas mostradas tiveram como referência os resultados apresentados por Zienkiewicz (1967) e o caso teste do programa SAP 2000, que estão ilustrados a seguir.

Deve ser observado que as grandezas consideradas neste Caso 6 de estudo se encontram em unidades inglesas para ficarem de acordo com os estudos de referência. E ainda, nos gráficos, o eixo referente ao ângulo de abertura, o valor de ângulo 0° se refere ao eixo de simetria longitudinal da casca e o ângulo de 40° se refere à borda livre.

Para os deslocamentos verticais (Figura 4.28), as três malhas estudadas respondem de forma satisfatória e demonstram grande proximidade com os valores de referência. Deste

modo, para este tipo de estrutura, qualquer uma das três malhas são capazes de representar o comportamento dos deslocamentos com elevada acurácia, e assim, a Malha 3 (20x20) foi escolhida para ilustrar a precisão deste estudo com os resultados de referência em termos de deslocamentos longitudinais ao longo da borda curva apoiada.

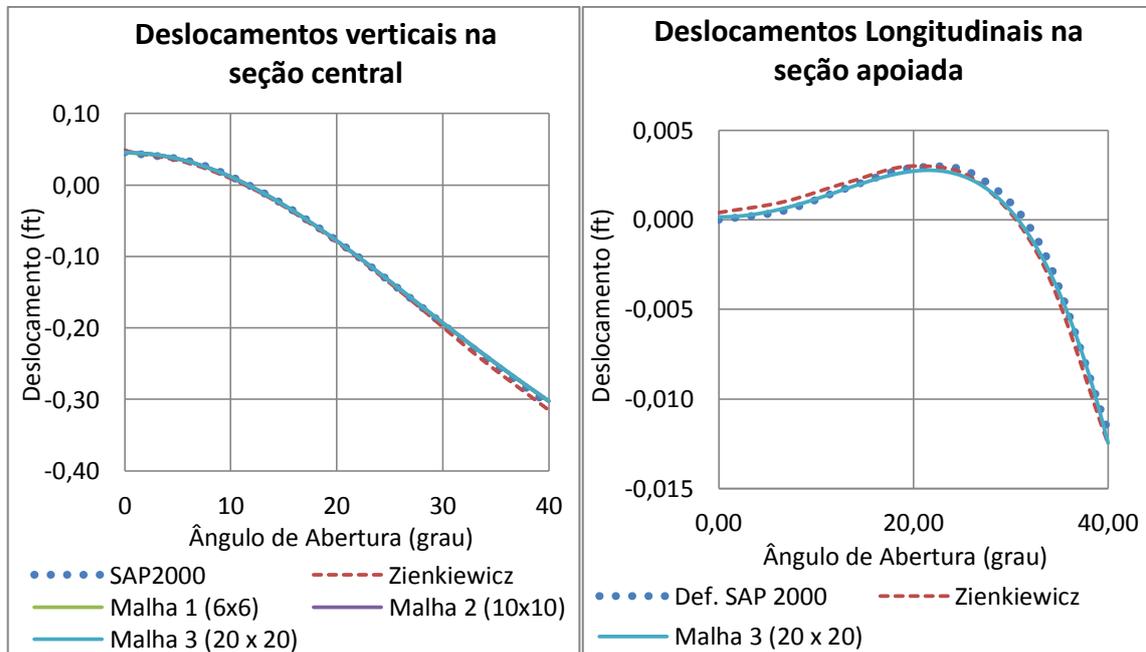


Figura 4.28 - Deslocamentos verticais (U_y) na seção central e longitudinais (U_z) na seção apoiada para malhas estudadas

Para a validação do momento meridional (M_ϕ) e tangencial (M_θ) na seção central, devem ser observadas as Figura 4.29 e Figura 4.30, respectivamente.

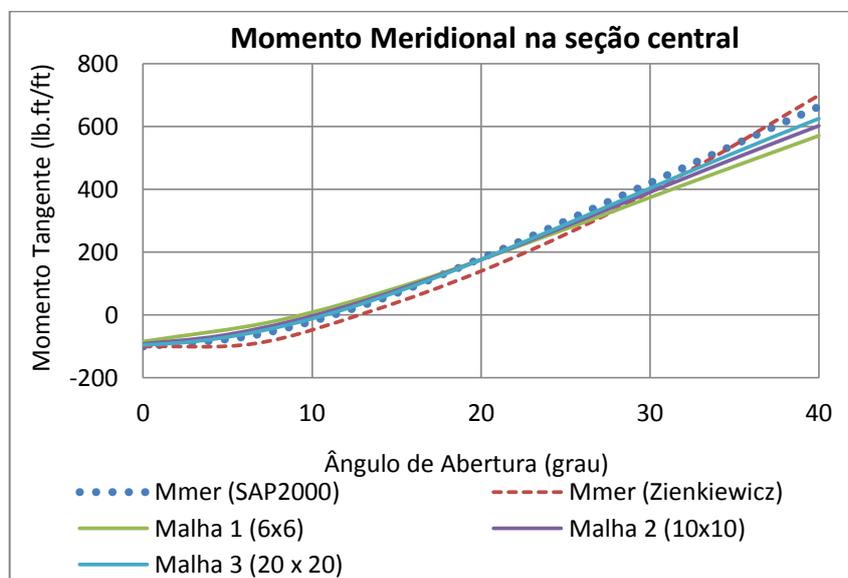


Figura 4.29 - Momentos meridionais (M_ϕ) na seção central para malhas estudadas

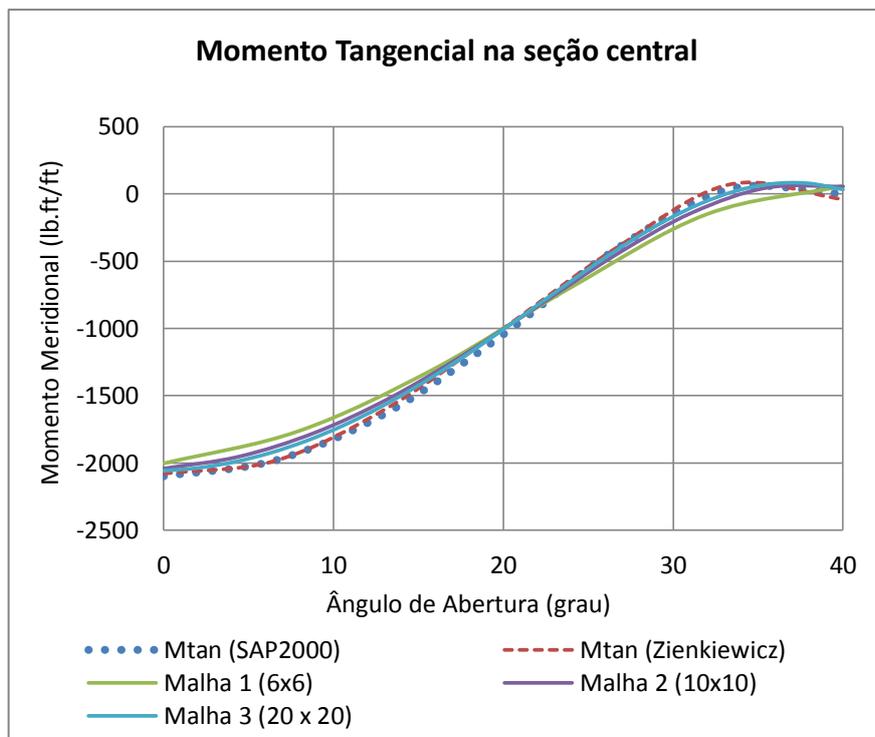


Figura 4.30 - Momentos Tangencias (M_{θ}) na seção central para malhas estudadas

Para os momentos tangencial (M_{θ}) e meridional (M_{ϕ}), pode-se notar que a Malha 1 (6x6) é a que pior representa os resultados, apresentando valores mais divergentes em torno de 0° a 10° e de 30° a 40° de ângulo de abertura da casca. A Malha 3 (20x20) é a que mais se aproxima dos valores de referência seguindo os mesmos comportamentos descritos por estes. Diante disto, podemos tomar a Malha 3 (20x20) como a que melhor representa o comportamento de uma casca abatida apoiada nas bordas curvas, uma vez que tanto para os deslocamentos quanto para momento tangencial (M_{θ}) e momento meridional (M_{ϕ}) é capaz de representar os resultados com grande precisão em relação aos valores de referência ao longo da seção central.

Caso 7 – Casca abatida engastada nas bordas retas e livre nas bordas curvas:

Trata-se de uma casca abatida com curvatura cilíndrica submetida ao carregamento transversal de 0,006853 N/m². Tomou-se a divisão de elementos utilizada na Malha 2 (10x10) a partir da qual já fora mostrada a obtenção de bons resultados, e ilustrada na Figura 4.31. Os deslocamentos verticais (transversais) ao longo da casca foram estudados e comparados com o modelo em elementos finitos deste presente estudo (Figura 4.32 e Figura 4.33).

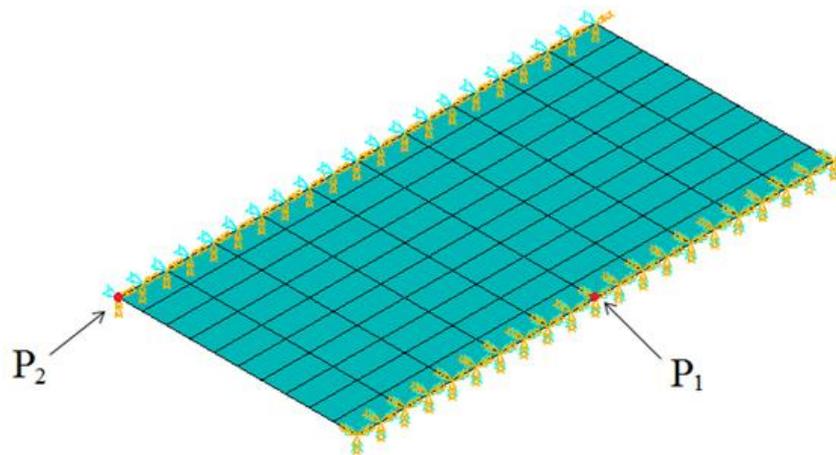


Figura 4.31 - Discretização de malha em elementos finitos para casca abatida engastada em borda reta

Analisando a Figura 4.33 em relação à Figura 4.32, nota-se grande coerência e proximidade nos resultados tanto na borda engastada, com deslocamentos nulos quanto na borda que representa o eixo de simetria ou seção central da casca abatida com valores próximos de 0,00022 m. A Tabela 4.3 compara os resultados na borda engastada seguindo os alinhamentos dos pontos P1 e P2, e as proximidades nos resultados são qualificadas como satisfatórias. Diante disto, tomaremos a Malha 2 (10x10) para representar o estudo de casca abatida com bordas retas engastadas e bordas curvas livres.

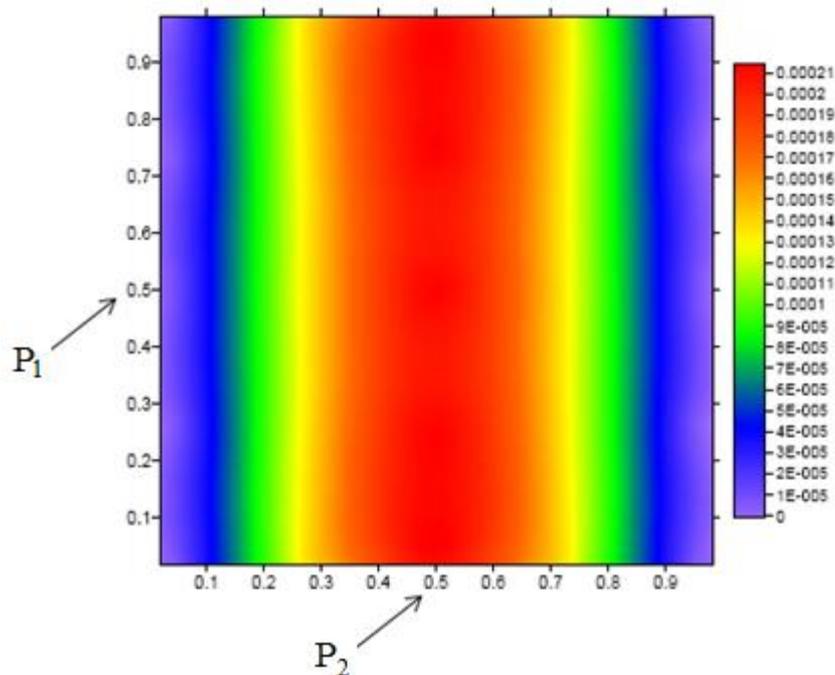


Figura 4.32 - Deslocamentos Transversais de referência em metros (Lima Junior, 2006)

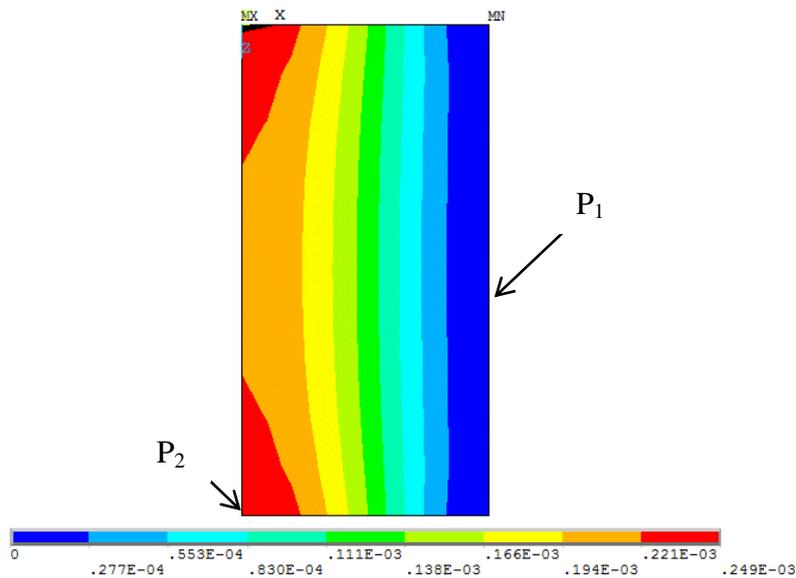


Figura 4.33 - Deslocamentos Transversais em metros de modelo em elementos finitos

Tabela 4.2 - Tabela Resumo de Esforços e deslocamentos em borda engastada

Método	w(m)	$N_I (P1) - N/m$	$N_{II} (P2) - N/m$	$M_x (P1) - N.m/m$
MEF (Referencia)	$2,30 \times 10^{-4}$	$1,20 \times 10^{-4}$	$2,70 \times 10^{-5}$	$- 4,67 \times 10^{-4}$
MEC (Lima e Venturini)	$2,15 \times 10^{-4}$	$1,25 \times 10^{-4}$	$2,77 \times 10^{-5}$	$- 4,70 \times 10^{-4}$
MEF (Ansys)	$2,49 \times 10^{-4}$	$1,22 \times 10^{-4}$	$2,93 \times 10^{-5}$	$-4,81 \times 10^{-4}$

Caso 8 – Casca cilíndrica engastada na base com restrição radial ao longo do meridiano de simetria:

Trata-se do modelo sugerido por Huang Wen-Xi (1965), em que são estudados dois modelos, um constituído por elementos SHELL 43 e outro com elementos SHELL 63. Isto se deve em razão das repostas de referência serem apresentadas com e sem o efeito de cisalhamento transversal, além de mostrar os resultados experimentais. Assim, para a consideração do efeito de cisalhamento transversal, adotou-se o modelo com elementos SHELL 43 e sem esta consideração, adotou-se o modelo com elementos SHELL 63. Para ambos os modelos, serão utilizadas três níveis de malha (Figura 4.34) partindo da malha de referência sugerida por Huang Wen-Xi (1965): Malha 1, com divisão em quatro elementos na direção vertical; Malha 2, com divisão em dez elementos na direção vertical; Malha 3, com divisão em vinte elementos na direção vertical.

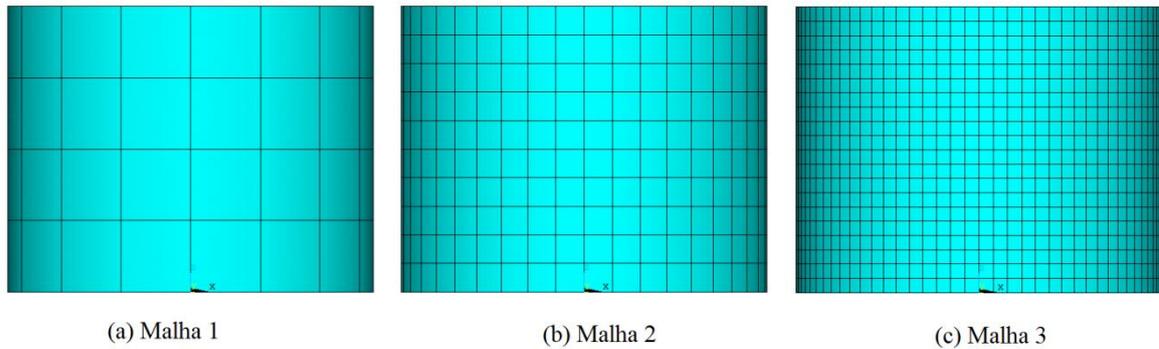


Figura 4.34 - Discretização de malhas em elementos finitos

Desta maneira, analisando-se a linha central (Linha a) da Figura 4.21, estudou-se as três malhas para os deslocamentos radiais, ilustrados na Figura 4.35 para elementos de casca espessa e para elementos de casca esbelta, tomando como referência na validação os resultados de Huang Wen-Xi (1965), ilustrados pela a linha tracejada.

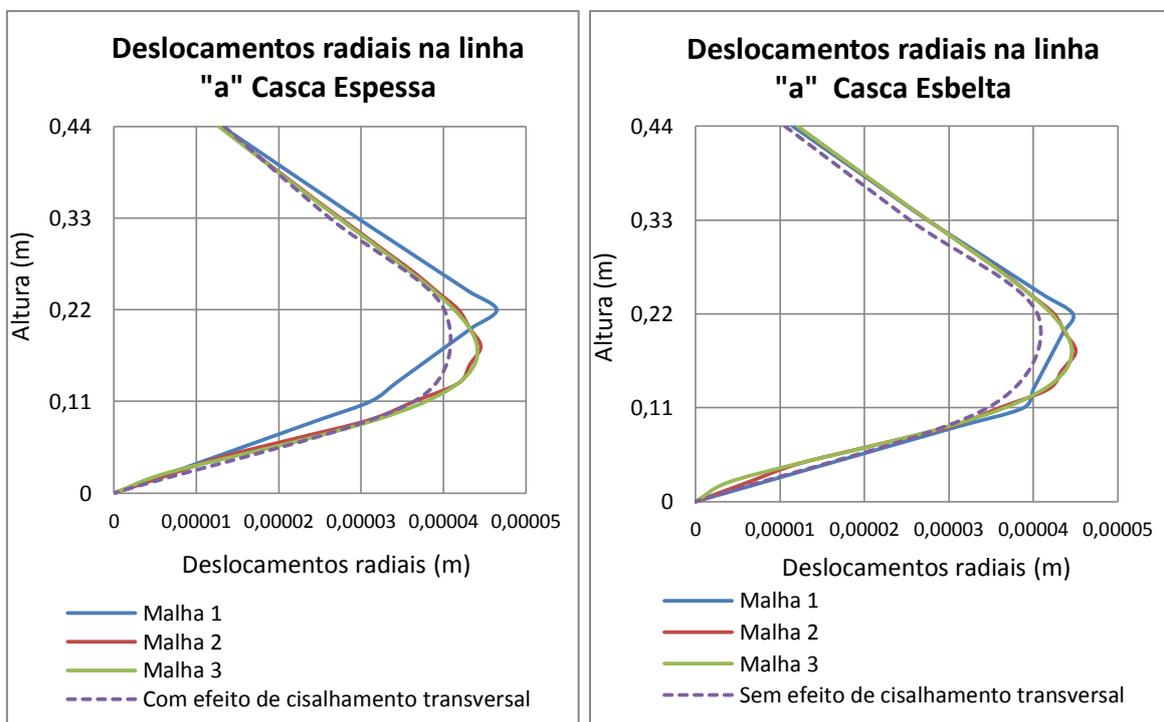


Figura 4.35 - Deslocamentos radiais para malhas estudadas com elementos casca espessa e elementos casca esbelta

Nota-se que a Malha 1, com quatro elementos ao longo da direção vertical mostrou-se bastante pobre na representação do problema; já as Malha 2 e 3, com dez e vinte elementos, ao longo da direção vertical, respectivamente, ilustram melhor o comportamento dos deslocamentos radiais, tanto para o caso de cascas espessa quanto para o caso de casca esbelta. Contudo, a malha que melhor descreve a trajetória de

deslocamentos é a Malha 3, mesmo apresentando uma diferença no deslocamento máximo observado em torno da altura de 0,19 m. Entretanto para os demais pontos, observou-se uma coerência entre os resultados. Assim, esta malha será tomada como ideal para o presente estudo representada por elementos característicos de comprimentos 0,022 m ao longo da vertical.

Caso 9 – Barragem em arco de simples curvatura e espessura constante:

Será estudado o modelo apresentado por Zienkiewicz (1967) e Zheng e Li (2010) conforme Tabela 1.1. A validação dos resultados será feita utilizando-se modelos com elementos SOLID 95 seguindo os seguintes critérios:

- Serão gerados inicialmente quatro tipos de malha de acordo com o gerador automático do ANSYS com elementos Tetraédricos, passando pelos níveis 6, 4, 2 e 1, sendo denominadas de Malha 6, Malha 4, Malha 2 e Malha 1, respectivamente. A Malha 6 é a mais grosseira e a Malha 1 a mais refinada;
- Destas quatro malhas, a que apresentar maior precisão com os resultados de referência será refinada uma vez e posteriormente duas vezes, denominadas de Refino 1 e Refino 2;
- Serão observados na validação de resultados os deslocamentos radiais, e as tensões verticais à montante e à jusante.

A Tabela 4.4 ilustra para os diferentes modelos discretizados em elementos finitos sólidos o número de elementos e número de nós de cada malha estudada.

Tabela 4.3 - Relações de malhas, elementos e nós do Caso 9 – modelo sólido

Malha	Número de Elementos	Número de Nós
Malha 6	327	750
Malha 4	341	779
Malha 2	399	900
Malha 1	494	1103

A primeira análise de validação de resultados está exposta nas figuras seguintes, com deslocamentos radiais (Figura 4.36), tensões verticais à montante (Figura 4.37) e tensões verticais à jusante (Figura 4.38).

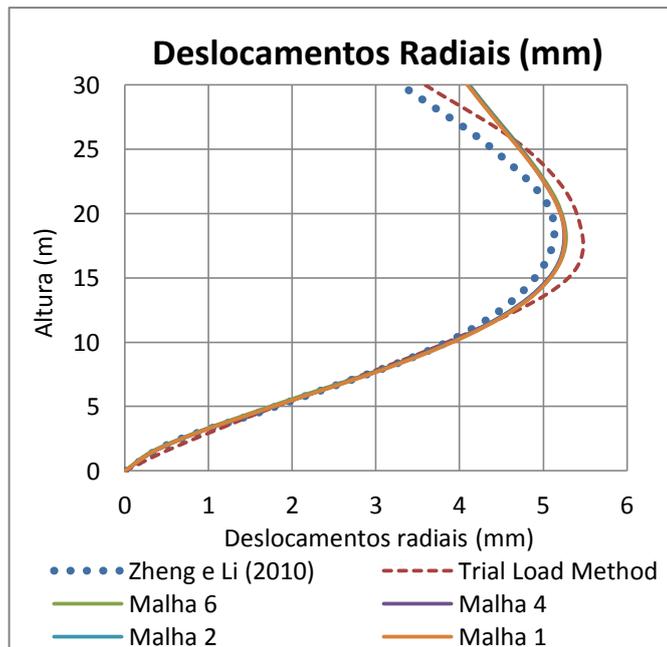


Figura 4.36 - Validação de deslocamentos radiais com malhas em elementos finitos

Nota-se que para os deslocamentos radiais, todas as malhas respondem de forma satisfatória sobrepondo-se umas às outras. Já para as tensões verticais à montante e à jusante a malha que melhor descreve tais valores é a Malha 1, a qual apresenta menor número de segmentos lineares em função da maior quantidade de elementos e consequentemente maior número de interpolações entre valores dos elementos, além de descrever o comportamento semelhante aos estudos de referência com valores na base em maior proximidade.

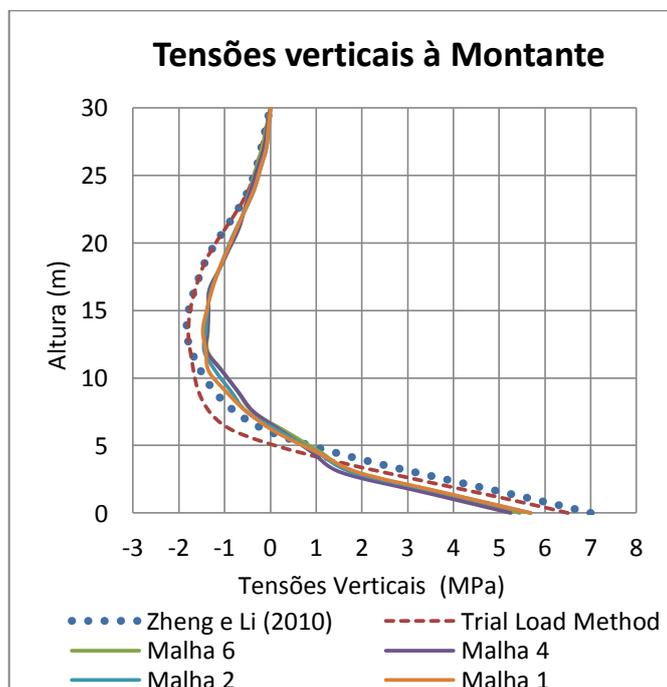


Figura 4.37 - Validação de tensões verticais à montante com malhas em elementos finitos

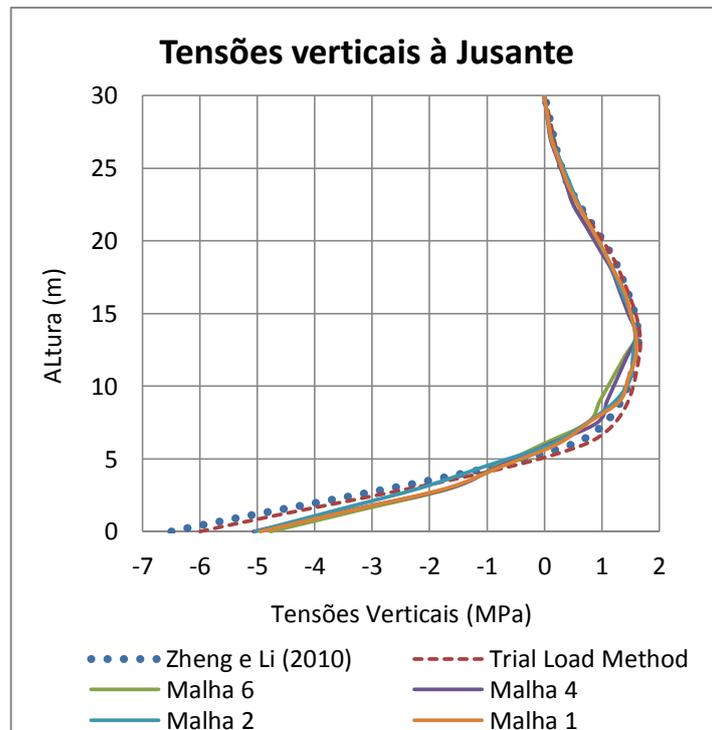


Figura 4.38 - Validação de tensões verticais à jusante com malhas em elementos finitos

É escolhida então a Malha 1 nesta análise inicial por fornecer melhores resultados em conformidade aos estudos de referência de Zeng e Li (2010) e pelo *Trial Load Method* apresentado em Zienkiewicz (1967). Agora será analisada a influência dos refinamentos desta malha na melhoria dos resultados, de modo que as malhas são conforme Tabela 4.5.

Tabela 4.4 - Relações de malhas refinadas, elementos e nós do Caso 9 – modelo sólido

Malha	Número de Elementos	Número de Nós
Refino 1	3949	6962
Refino 2	13330	21531

Os deslocamentos radiais (Figura 4.39) apresentados da mesma forma das malhas anteriores apresentam-se sobrepostas umas às outras, de modo que nesta análise, a influência do refinamento é pouco relevante.

As tensões verticais à montante e à jusante, Figura 4.40 e Figura 4.41 respectivamente estão muito próximas aos valores de referência, notando-se apenas pequenas variações na base da barragem, onde a malha Refino 1 já fornece com elevada precisão os valores das tensões à montante e à jusante. Desta forma, será adotada a malha Refino 1 para a representação dos resultados deste estudo.

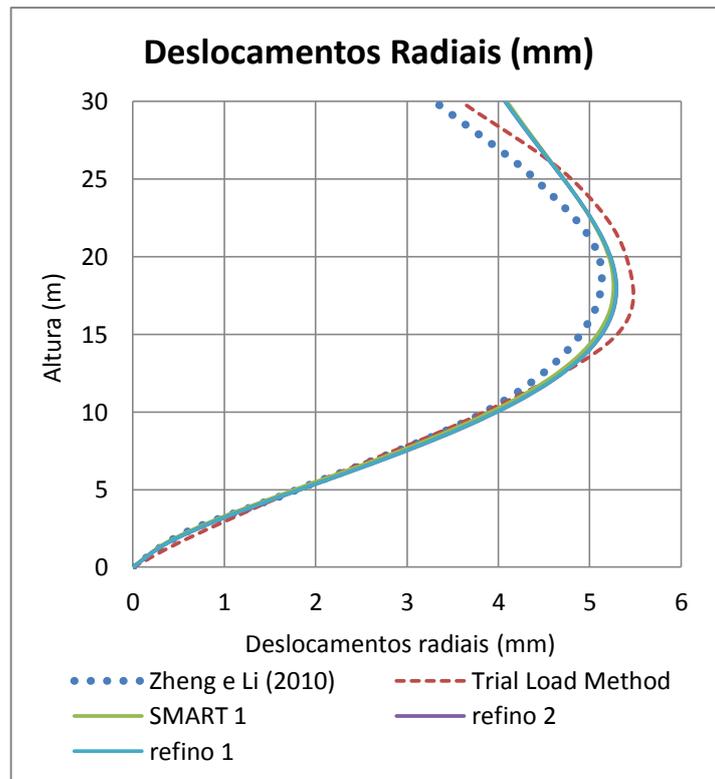


Figura 4.39 - Validação dos deslocamentos radiais com malhas em elementos finitos refinados

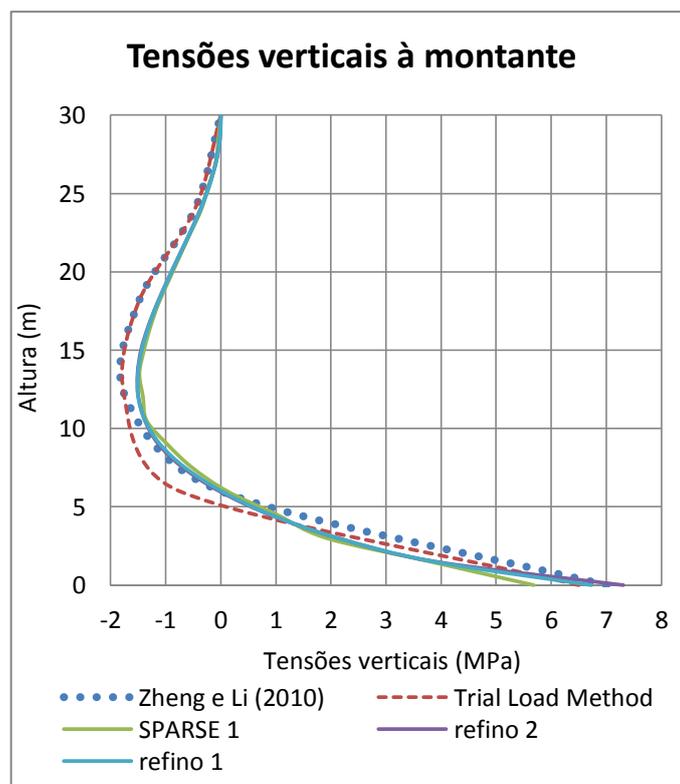


Figura 4.40 - Validação de tensões verticais à montante com malhas em elementos finitos refinados

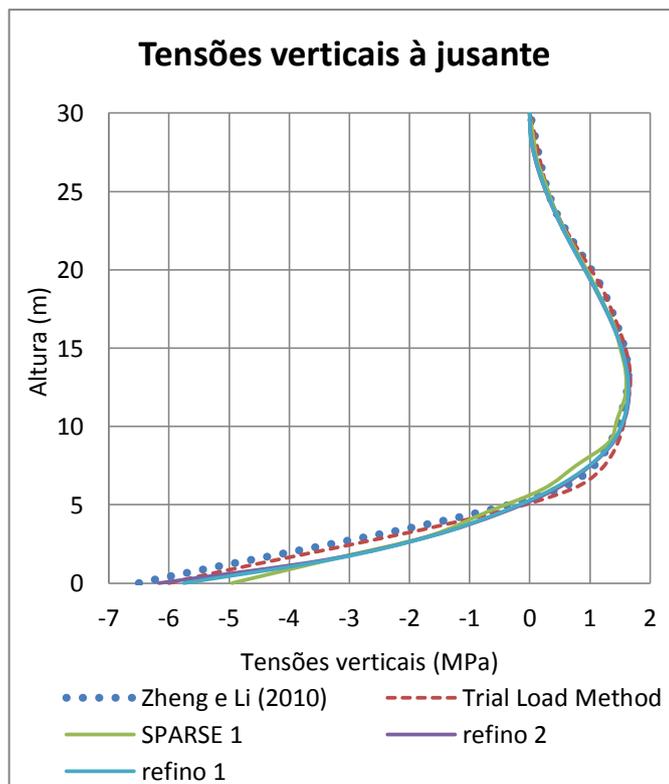


Figura 4.41 - Validação de tensões verticais à jusante com malhas em elementos finitos refinada

O mesmo modelo anterior (Caso 9) apresentado por Zienkiewicz (1967) e Zheng e Li (2010) será validado agora utilizando elementos SHELL 43, uma vez que verificada a esbeltez da casca, esta fora classificada como sendo espessa. Para isto, faz-se:

- A geração de quatro tipos de malha de acordo com o gerador automático do ANSYS com elementos Triangulares, passando por níveis 6, 4, 2 e 1, sendo determinadas de Malha 6, Malha 4, Malha 2 e Malha 1, respectivamente, de modo que a Malha 6 é a mais grosseira e a Malha 1 a mais refinada (ver Tabela 4.6);
- A validação dos resultados é obtida em termos de deslocamentos radiais, tensões verticais à montante e à jusante.

Tabela 4.5 - Relações de malhas, elementos e nós do Caso 9 – modelo de casca

Malha	Número de Elementos	Número de Nós
Malha 6	56	40
Malha 4	336	196
Malha 2	882	485
Malha 1	1373	742

As figuras 4.42 e 4.43 abaixo ilustram a variação das principais grandezas (deslocamentos e tensões) ao longo da altura da seção central da barragem para as quatro malhas constituídas de elementos SHELL 43 e compara com os resultados dados na literatura.

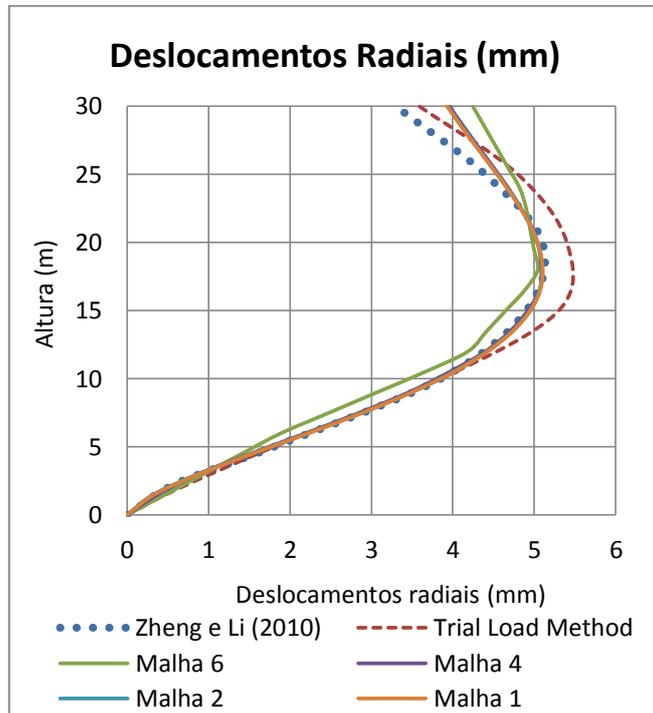


Figura 4.42 - Validação de deslocamentos radiais com malhas em elementos finitos SHELL 43

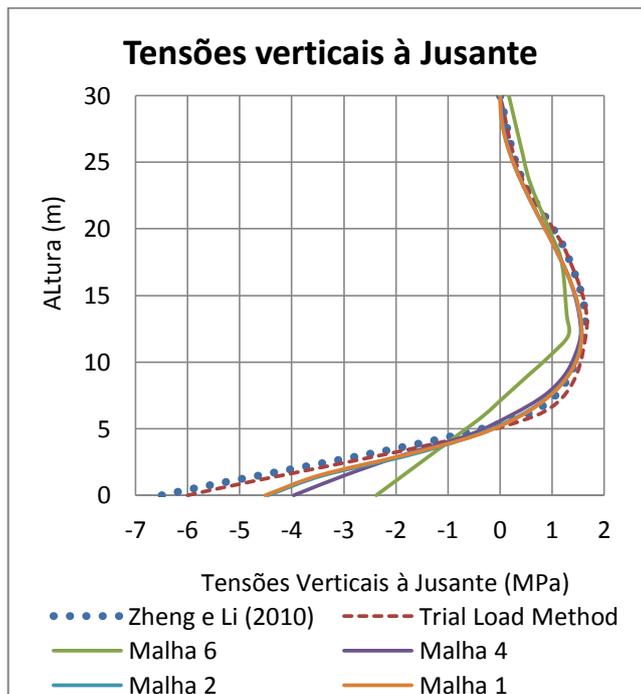


Figura 4.43 - Validação de tensões verticais à jusante com malhas em elementos finitos SHELL 43

Observa-se na Figura 4.42 e Figura 4.43 que utilizando elementos tipo SHELL 43 as respostas numéricas obtidas tanto para o caso dos deslocamentos radiais quanto para as tensões verticais à jusante apresentam um certo afastamento. Tentando buscar melhores respostas, e sabendo que esta barragem se constitui numa casca espessa muito próxima ao limite que se considera uma casca esbelta (relação espessura (h) sobre raio da casca (r) $h/r \leq 0,05$), sendo $h/r = 0,067$ o valor para a barragem em questão, fora feita a tentativa de resolução com modelo constituído de elementos SHELL 63, obedecendo aos mesmos critérios estabelecidos anteriormente e malhas com número elementos e número de nós coincidentes com o que fora mostrado na Tabela 4.6. Deste modo, os resultados para modelos com elementos tipo SHELL 63, baseado nos deslocamentos radiais (Figura 4.44) e tensões à jusante (Figura 4.45) são mostrados a seguir em função das quatro discretizações de malhas.

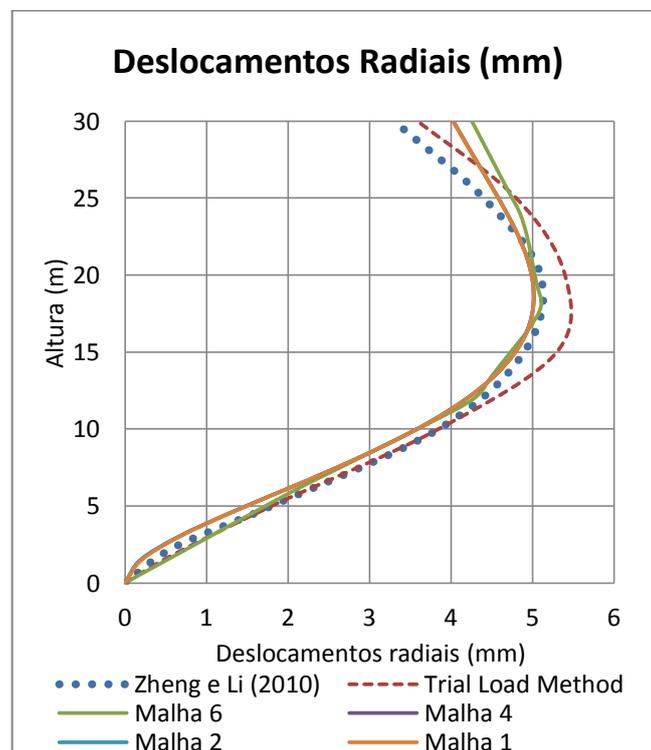


Figura 4.44 - Validação de deslocamentos radiais com malhas em elementos finitos SHELL 63

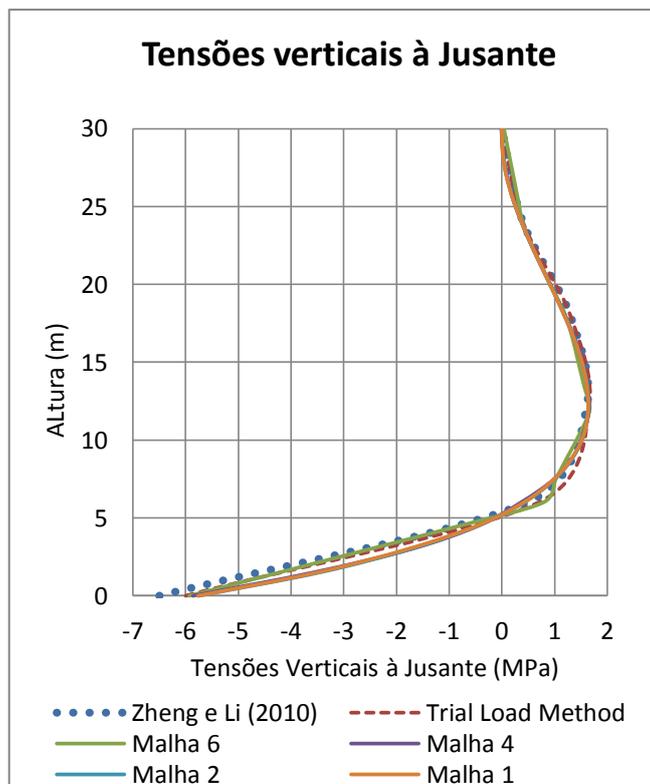


Figura 4.45 - Validação de tensões verticais à jusante com malhas em elementos finitos SHELL 63

Com o uso do elemento Shell 63, é notória a melhora nos resultados tanto em termos de deslocamentos radiais quanto em termos de tensões verticais à jusante, onde a partir da Malha 4 pode ser observado que há sobreposição entre os resultados. Porém, analisando de forma criteriosa, a Malha 1 é que melhor representa o comportamento deste tipo de estrutura, uma vez que na base as tensões verticais apresentam uma maior proximidade com o resultado de referência, e desta forma, será adotada para captar os momentos existentes na estrutura.

Caso 10 – Barragem em arco de simples curvatura com espessura linearmente variável:

Continuando com os casos de barragens, o modelo de espessura variável de forma linear dado na Figura 4.25, se constitui num estágio intermediário e fora gerado com elementos SOLID 95. Para validação de resultados, com os dados obtidos do caso anterior de barragem com espessura constante, a Malha 1 será adotada como sendo de referência. Adotar-se-á uma malha ligeiramente mais grosseira e outra ligeiramente mais refinada, de modo a verificar a evolução dos deslocamentos e tensões à montante e à jusante. Apesar de não se possuir valores de referência, e como a mesma malha já fora

testada para dimensões mais ou menos semelhantes, acredita-se que as respostas podem ser seguras e confiáveis para análises futuras com os demais métodos em estudo.

Logo, para os modelos constituídos de elementos sólidos, serão criadas as malhas com elementos tetraédricos: Malha 2, Malha 1, e a malha Refino 1 resultante do refinamento da Malha 1, de acordo com o gerador automático de malhas do ANSYS e cujos número de elementos e número de nós estão apresentados na Tabela 4.7.

Tabela 4.6 - Relações de malhas, elementos e nós do Caso 10 – modelo sólido

Malha	Número de Elementos	Número de Nós
Malha 2	484	1081
Malha 1	604	1336
Refino 1	4825	8468

São apresentados a seguir os resultados referentes a cada malha estudada. A Figura 4.46 ilustra os deslocamentos radiais ao longo da seção central.

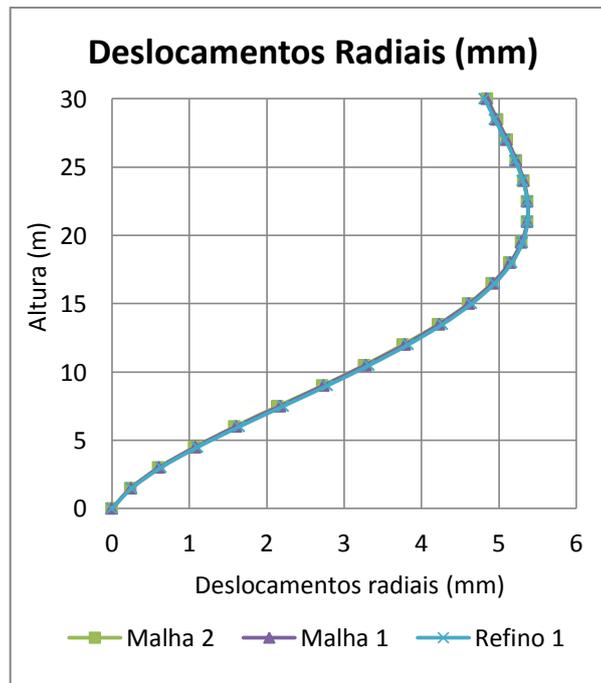


Figura 4.46 - Validação de deslocamentos radiais com malhas em elementos finitos barragem espessura variável

Pode-se observar que para todos os níveis de malha os deslocamentos são os mesmos, ficando uns sobrepostos aos outros, o que indica mais uma vez que para os deslocamentos a convergência é mais rápida. Por outro lado, analisando as tensões verticais à montante e à

jusante, apresentam pequenas diferenças na base da barragem, conforme mostra a Figura 4.47.

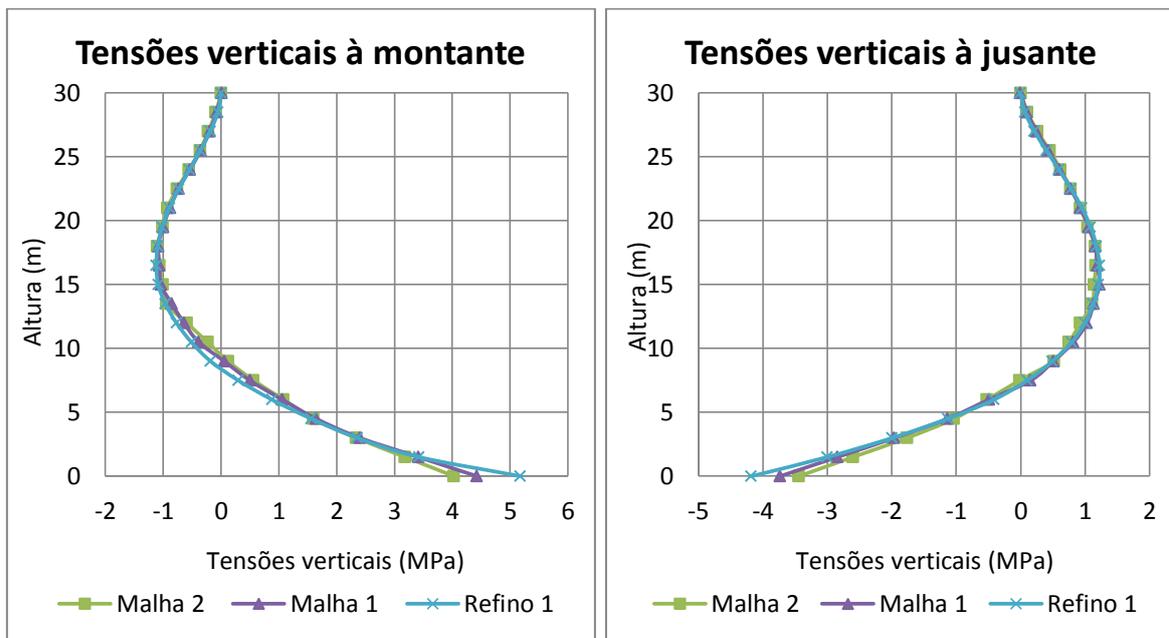


Figura 4.47 - Validação de tensões à montante à jusante com malhas em elementos finitos barragem espessura variável

Apesar de todas as malhas apresentarem resultados bem semelhantes, com pequenas variações apenas nas tensões verticais na base da barragem, e em virtude da malha Refino 1 apresentar uma maior regularidade em função do maior número de elementos e devido o maior valor de tensão apresentada, representando até mesmo segurança, se considerarmos a superestimação deste valor, esta malha será adotada para o estudo de barragem com espessura variando linearmente com a atuação do carregamento hidrostático.

Caso 11 – Aplicação a um estudo de caso real – Barragem de teste Stevenson Creek:

Finalmente para um estudo de caso final, a barragem Stevenson Creek será analisada considerando-se somente a atuação do carregamento hidrostático, e cuja validação de resultados será feita utilizando modelos com elementos SOLID 95 seguindo os procedimentos:

- Serão gerados cinco tipos de malha de acordo com o gerador automático do ANSYS com elementos Tetraédricos, passando por níveis 10, 8, 6, 4 e 1, sendo

determinadas de Malha 10, Malha 8, Malha 6, Malha 4 e Malha 1 respectivamente, de modo que a Malha 10 é a mais grosseira e a Malha 1 a mais refinada (ver Tabela 4.8);

- Destas cinco malhas, a que representar com maior proximidade os resultados obtidos com os resultados de referência será adotada para as comparações com os resultados vindos das demais teorias.

Tabela 4.7 - Relações de malhas, elementos e nós do Caso 11 – modelo sólido

Malha	Número de Elementos	Número de Nós
Malha 10	321	807
Malha 8	510	1197
Malha 6	1529	3271
Malha 4	1446	3110
Malha 1	1664	3562

Os resultados referentes a cada malha estudada para deslocamentos radiais (Figura 4.48), tensões verticais à montante e à jusante (Figura 4.49) estão a seguir.

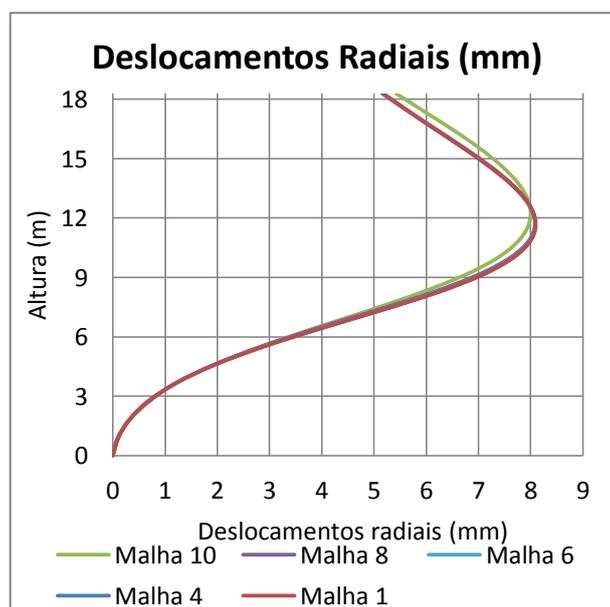


Figura 4.48 - Validação de deslocamentos radiais com malhas em elementos finitos para a barragem Stevenson Creek

Observa-se que para o modelo da barragem Stevenson Creek, os deslocamentos radiais apresentados na Figura 4.48 tem a Malha 10 apresentando um comportamento diferente das demais, e a partir da Malha 8 até a Malha 1 todos os resultados ficam sobrepostos, o que demonstra que para os deslocamentos a convergência já foi atingida uma vez que não

há qualquer tipo de alteração nestes valores para níveis de maiores refinamentos. Entretanto para as tensões verticais à montante e à jusante (Figura 4.49) há um maior desvio dos resultados ao longo da altura da barragem.

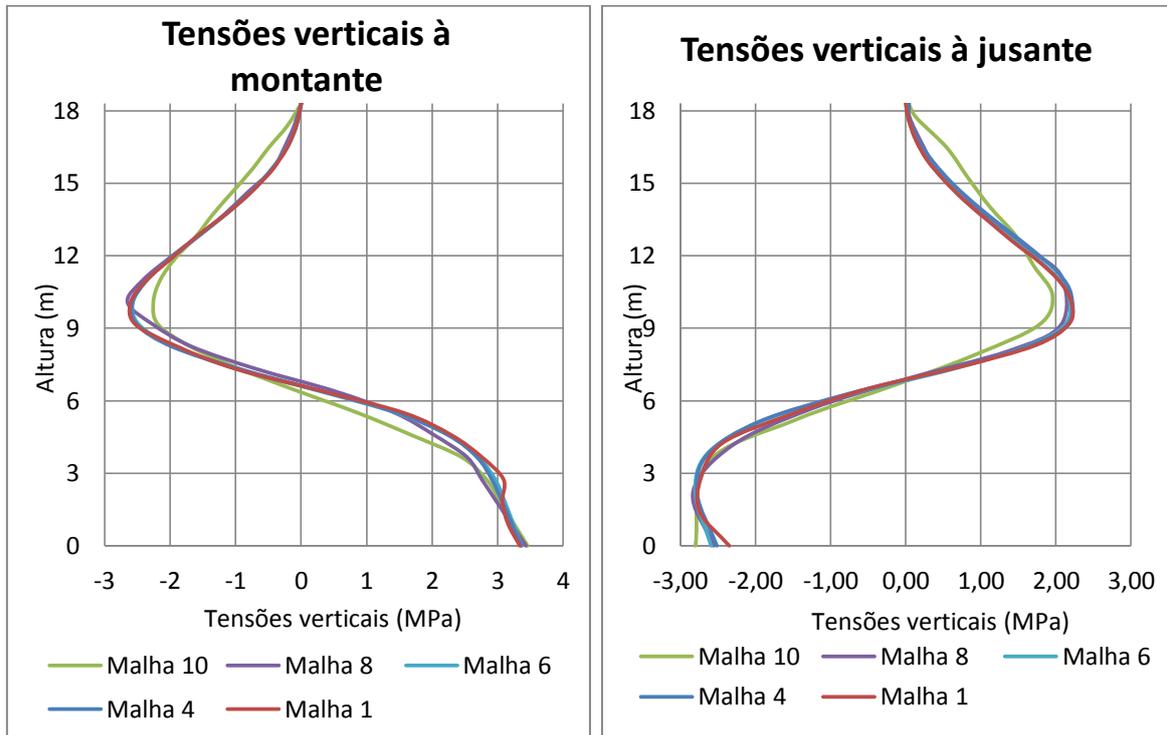


Figura 4.49 - Validação de tensões à montante e à jusante com malhas em elementos finitos na barragem Stevenson Creek

A partir destes resultados pode-se afirmar que as malhas 4 e 6 são as que melhor reproduzem o problema em questão uma vez que a trajetória descrita pelos valores de tensões são bem mais comportados e coerentes com as respostas apresentadas até o momento. Em virtude da Malha 4 apresentar menor número de elementos e ter grande precisão, esta será adotada para análise dos resultados desta barragem.

5 RESULTADOS

5.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados os resultados gerais de todos os casos estudados e suas comparações analíticas (baseado nas teorias desenvolvidas no Capítulo 3) e numéricas (obtidos com o programa ANSYS 11.0), tomando-se como referência as malhas validadas no capítulo anterior e ditas como de referência para a análise de resultados. As análises serão conduzidas em termos de deslocamentos ao longo da estrutura, e para certos casos, em função dos esforços e tensões avaliados em pontos e linhas específicos da estrutura.

5.2 ANÁLISE DE RESULTADOS

As cascas cilíndricas foram submetidas ao peso próprio (PP) e ao carregamento hidrostático (Hidro). Serão analisadas rotações, deslocamentos radiais, esforços meridionais e tangenciais. A Figura 5.1a ilustra a convenção dos esforços presentes na estrutura. A Figura 5.1b ilustra a malha de elementos finitos que foi utilizada para os casos considerando somente a casca cilíndrica, constituída de 1398 elementos e 751 nós. Já a Figura 5.1c corresponde à malha utilizada para os casos de casca conectada a placa de fundo, constituída de 1350 elementos e 721 nós.

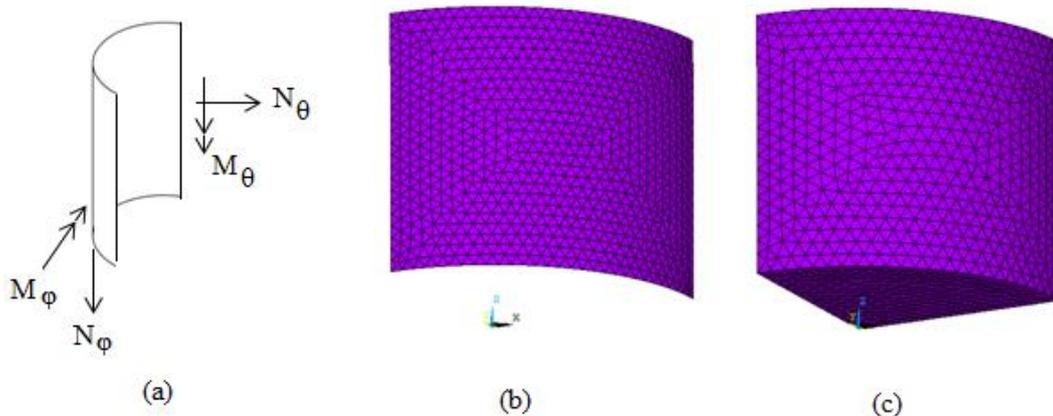


Figura 5.1 – Convenção de esforços e Malhas de elementos finitos utilizada (ANSYS)

- Caso 1 – Considerando a ligação da casca na base como uma articulação:

Os resultados obtidos analiticamente e numericamente para deslocamentos radiais (w) e rotações (Figura 5.2), e esforço normal tangencial (N_θ) e meridional (N_ϕ) (Figura 5.3) ao

longo de toda a altura da parede da casca cilíndrica se mostram praticamente coincidentes, não havendo qualquer tipo de perturbação localizada.

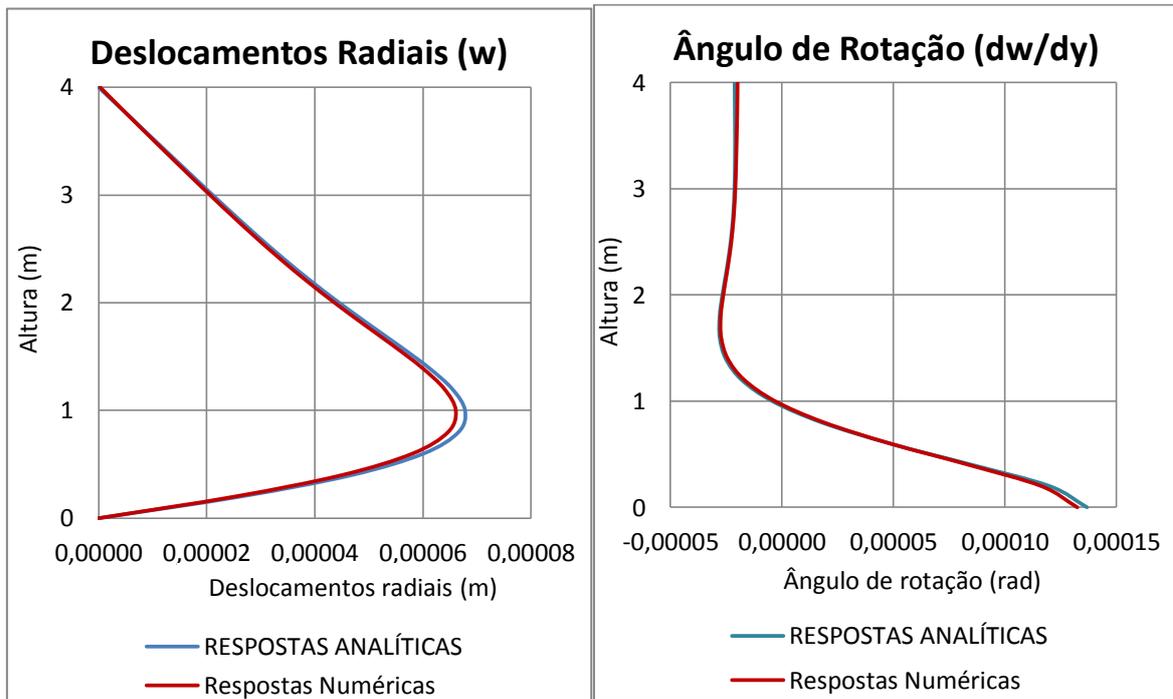


Figura 5.2 - Deslocamentos radiais (w) e Rotações (dw/dy) ao longo da altura da casca (Caso 1)

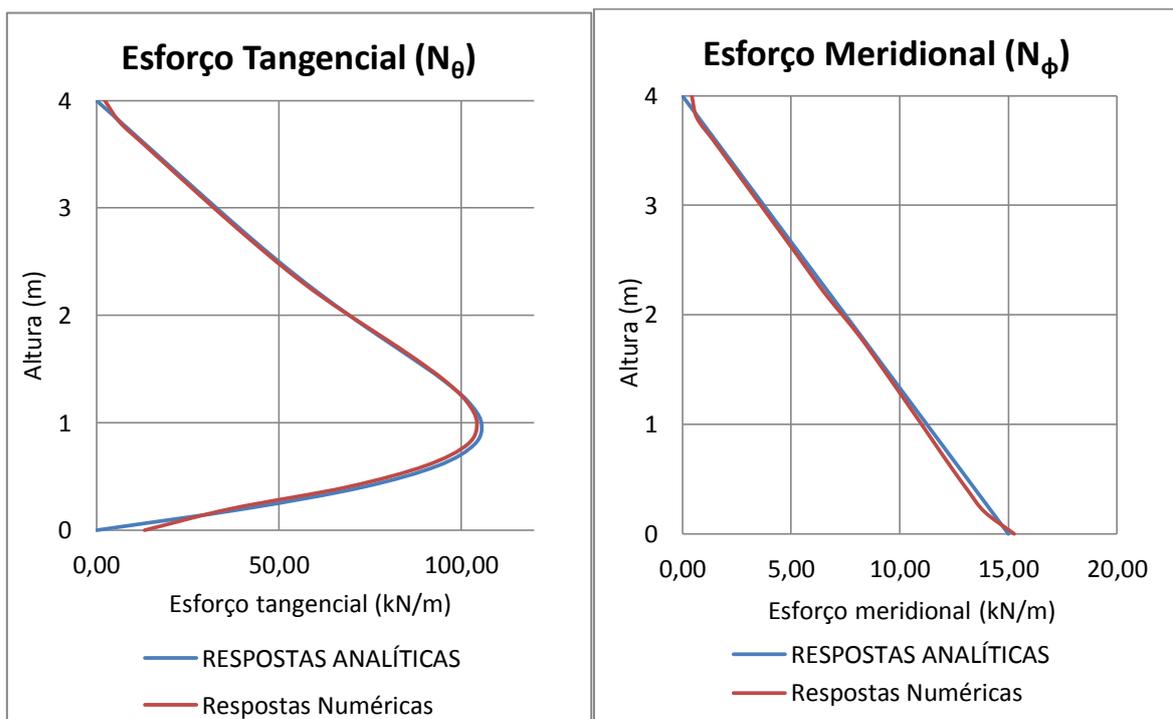


Figura 5.3 - Esforço Normal Tangencial (N_θ) e Esforço Normal Meridional (N_ϕ) ao longo da altura da casca (Caso 1)

Para os momentos fletores na direção do meridiano (M_ϕ) e do paralelo (tangencial - M_θ), conforme mostra a Figura 5.4, pode-se dizer que mesmo possuindo em zonas específicas uma maior diferença entre seus valores, localizados até a altura de um metro, o modelo numérico apresenta respostas satisfatórias. Tais diferenças podem ser atribuídas à acumulação dos erros nos termos diferenciais, uma vez que os momentos fletores nas direções meridional e tangencial são dados em função da segunda derivada dos deslocamentos, os quais apresentam diferenças mínimas nos deslocamentos, porém que são amplificadas nas curvas dos momentos. Os valores na base da casca (altura zero) apresentam uma maior discordância entre eles, isto pode ser atribuído à perturbação de borda nas zonas dos apoios.

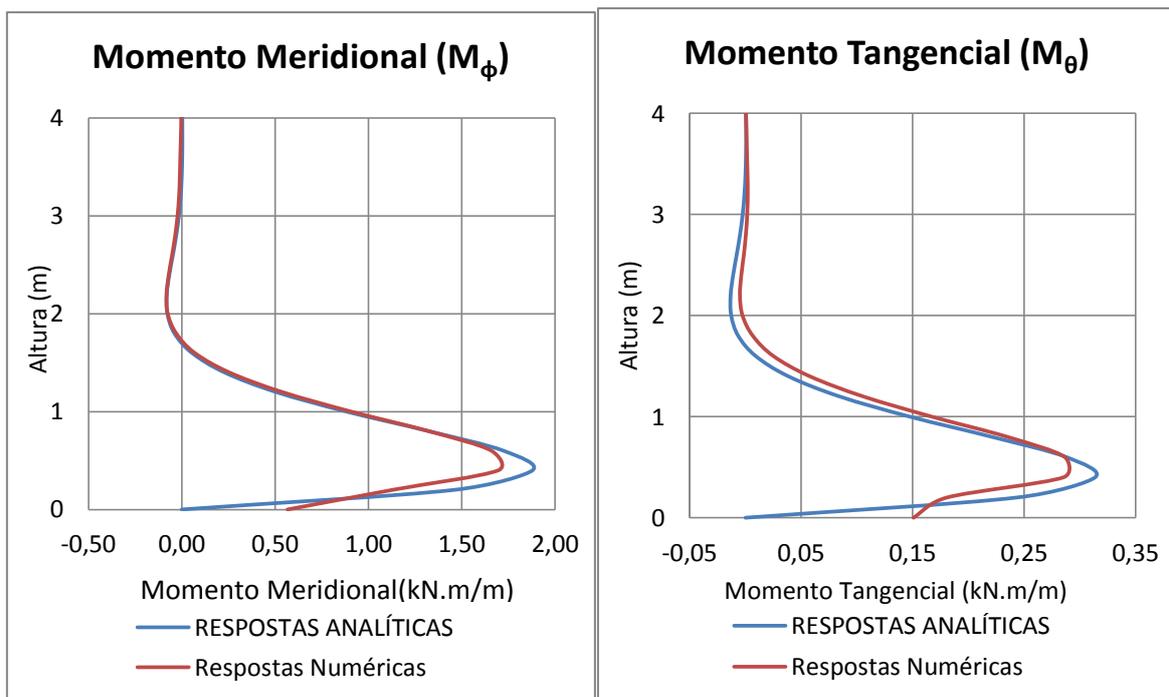


Figura 5.4 - Momento Meridional (M_ϕ) e Momento Tangencial (M_θ) ao longo da altura da casca (Caso 1)

- Caso 2 - Considerando a ligação da casca como um engaste perfeito:

Todos os resultados obtidos analiticamente e numericamente para este caso (Figuras 5.5 a 5.7) ao longo de toda a altura da parede da casca cilíndrica se mostram coincidentes. Observou-se uma pequena diferença na resposta numérica dos momentos na base da casca (altura zero), diferença esta atribuída mais uma vez aos efeitos das bordas. Neste caso foram solucionados numericamente modelos com e sem a atuação do

peso próprio para comprovar o tratamento desacoplado de atuação das forças meridionais (sentido vertical) à casca. Desta forma comprova-se que uma força na direção vertical não influencia na obtenção dos demais esforços, sendo relevante somente para o esforço normal meridional (N_ϕ) (Figura 5.6), que é nulo quando não se considera o peso próprio.

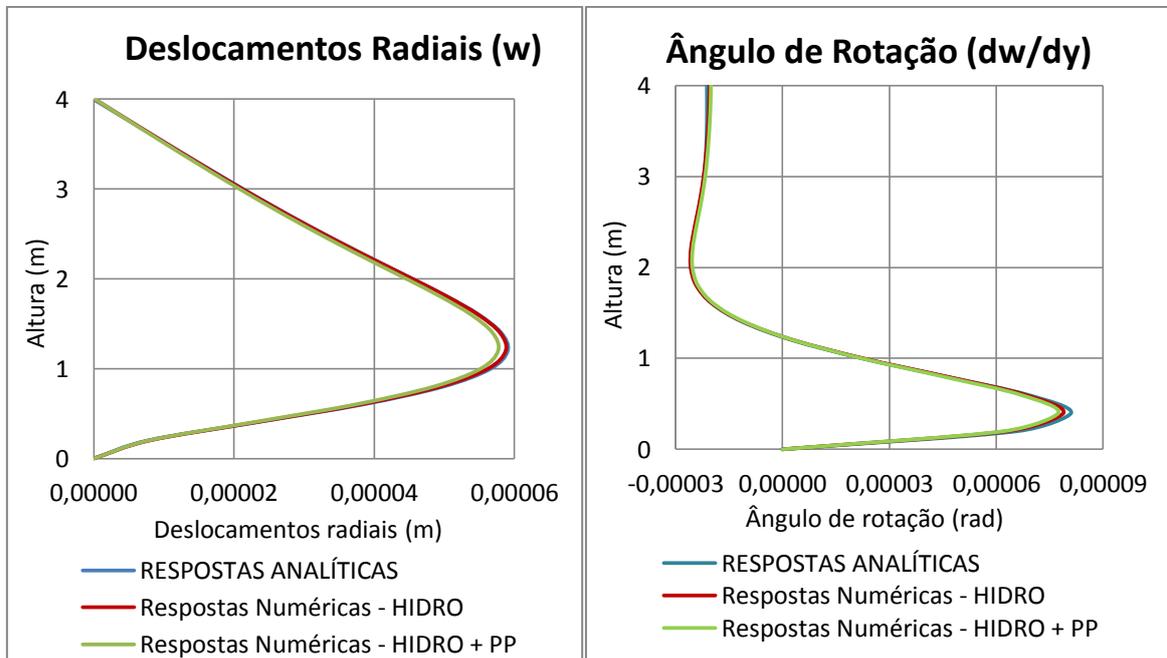


Figura 5.5 - Deslocamentos radiais (w) e Rotações (dw/dy) ao longo da altura da casca (Caso 2)

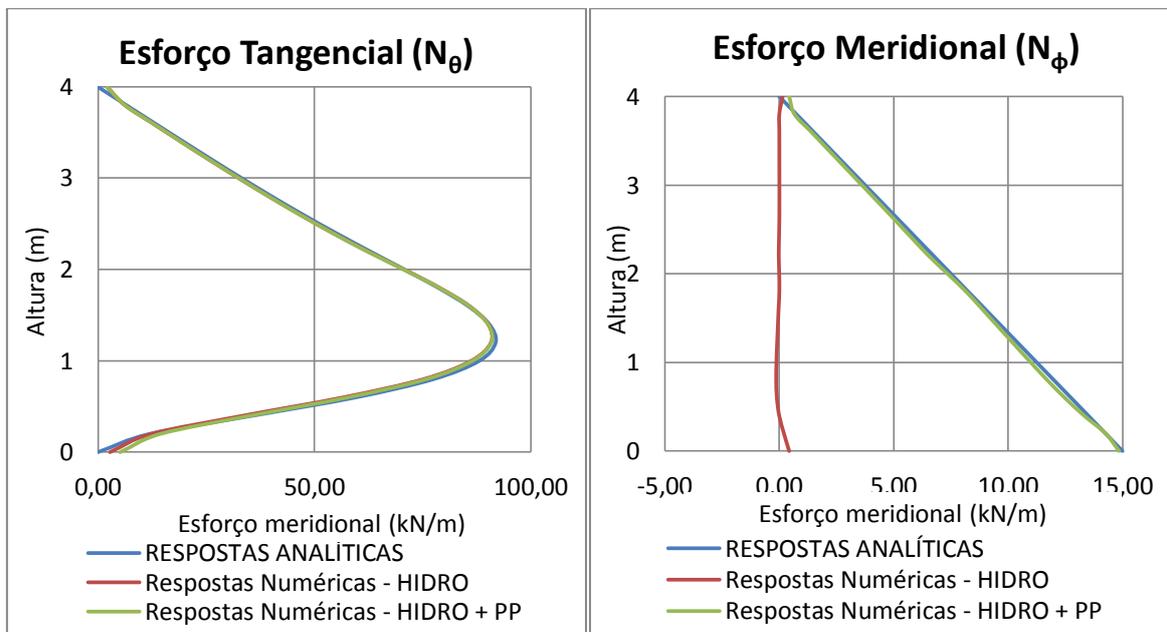


Figura 5.6 - Esforço Normal Tangencial (N_θ) e Esforço Normal Meridional (N_ϕ) ao longo da altura da casca (Caso 2)

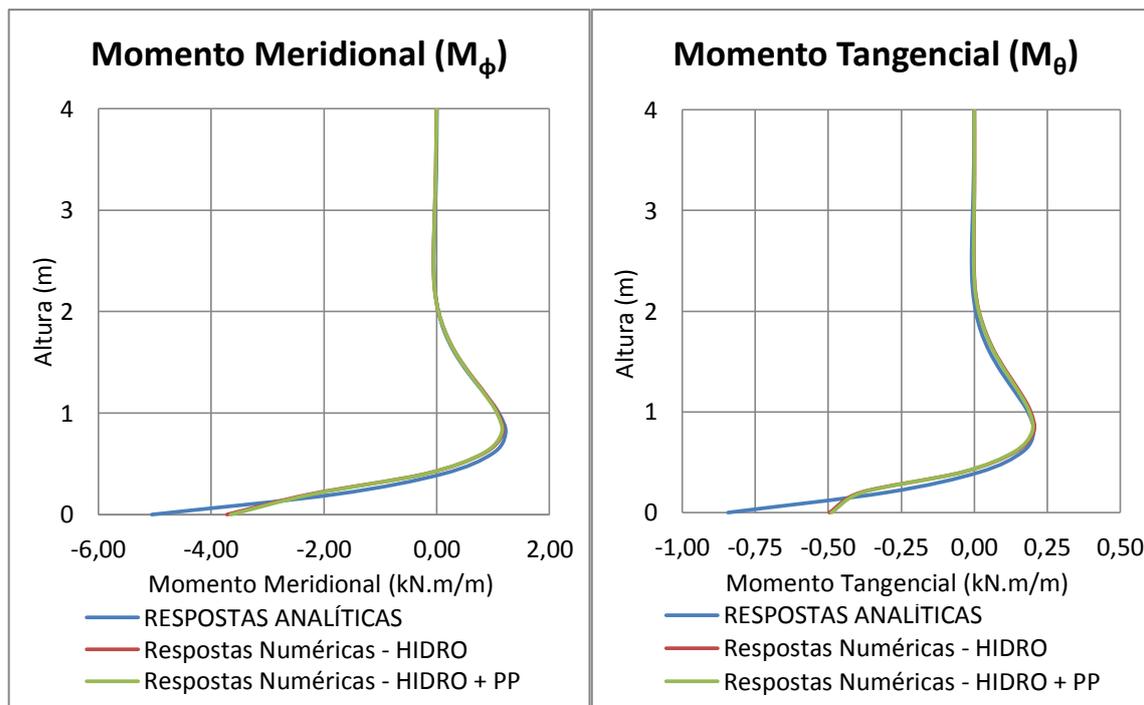


Figura 5.7 - Momento Meridional (M_ϕ) e Momento Tangencial (M_θ) ao longo da altura da casca (Caso 2)

- Caso 3 - Considerando a ligação da casca com uma placa rígida axialmente com rotação livre:

Para este caso, os deslocamentos radiais (w), rotações (dw/dy) (Figura 5.8), e os esforços normais na direção tangente (N_θ) com ou sem a atuação de peso próprio (Figura 5.9), evoluem ao longo da altura da casca em conformidade com as respostas analíticas. Quando analisamos na direção meridional nota-se que a região onde está localizada a placa apresenta singularidades decorrentes do esforço cortante vindo da placa, mas que logo se atenua (próximo de 0,5m de altura) e depois evolui em conformidade com as previsões analíticas. Para os momentos fletores na direção meridional (M_ϕ) e tangente (M_θ) (Figura 5.10), os nós próximos à base apresentaram maiores diferenças devido as perturbações oriundas da presença da placa, com valores numéricos diferindo dos valores analíticos.

Vale ressaltar que este trabalho não contempla o estudo dos efeitos das perturbações localizadas nas zonas de conexão entre casca e placa de fundo, assim como da casca e seus apoios. Tal aspecto fora observado nos resultados numéricos (Figura 5.9) evidenciado a não previsão destes na formulação analítica.

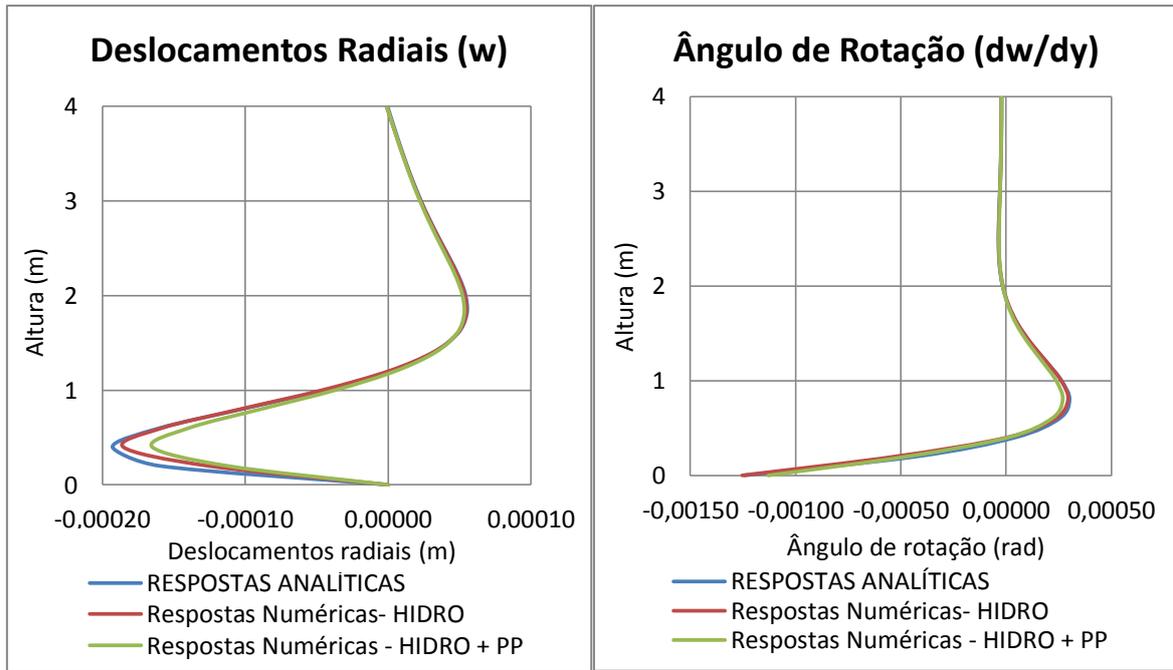


Figura 5.8 - Deslocamentos radiais (w) e Rotações (dw/dy) ao longo da altura da casca (Caso 3)

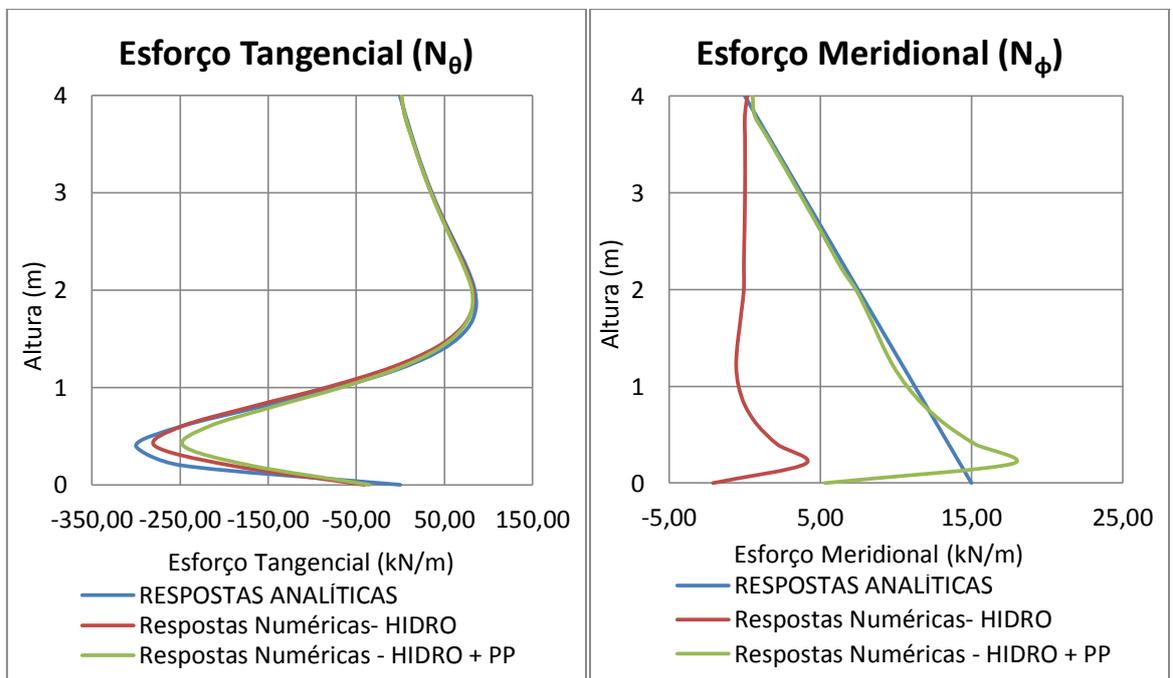


Figura 5.9 - Esforço Normal Tangencial (N_{θ}) e Esforço Normal Meridional (N_{ϕ}) ao longo da altura da casca (Caso 3)

Nota-se que mesmo com a presença da placa, uma força na direção vertical (peso próprio) atuando, não influencia na obtenção dos demais esforços na casca cilíndrica, sendo relevante somente para o esforço normal meridional (N_{ϕ}). Para os esforços e

deslocamentos analisados numericamente, de uma forma geral, se apresentam um bom comportamento em relação aos resultados analíticos.

As discrepâncias observadas nos esforços da Figura 5.10 na base da casca (em conexão com a placa) são explicadas pelos mesmos motivos já comentados anteriormente.

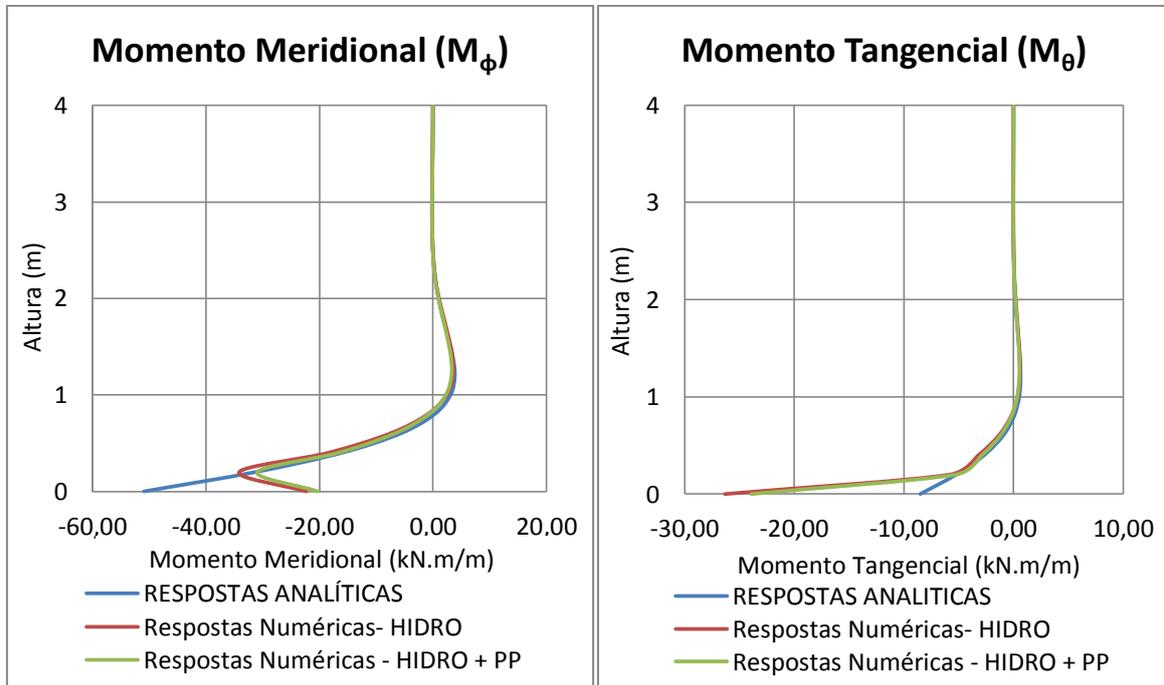


Figura 5.10 - Momento Meridional (M_ϕ) e Momento Tangencial (M_θ) ao longo da altura da casca (Caso 3)

- Caso 4 - Considerando a ligação da casca com uma placa axialmente elástica com rotação livre:

Os esforços normais tangenciais (N_θ) e meridionais (N_ϕ), além dos deslocamentos radiais (w) analisados numericamente de uma forma geral apresentam um bom comportamento em relação aos resultados analíticos. Mais uma vez podemos notar que a região correspondente à altura da placa, gera uma zona de perturbação dos esforços, que logo é atenuada e evolui conforme o previsto pelos resultados analíticos, conforme pode ser visto nas Figuras 5.11, 5.12 e 5.13.

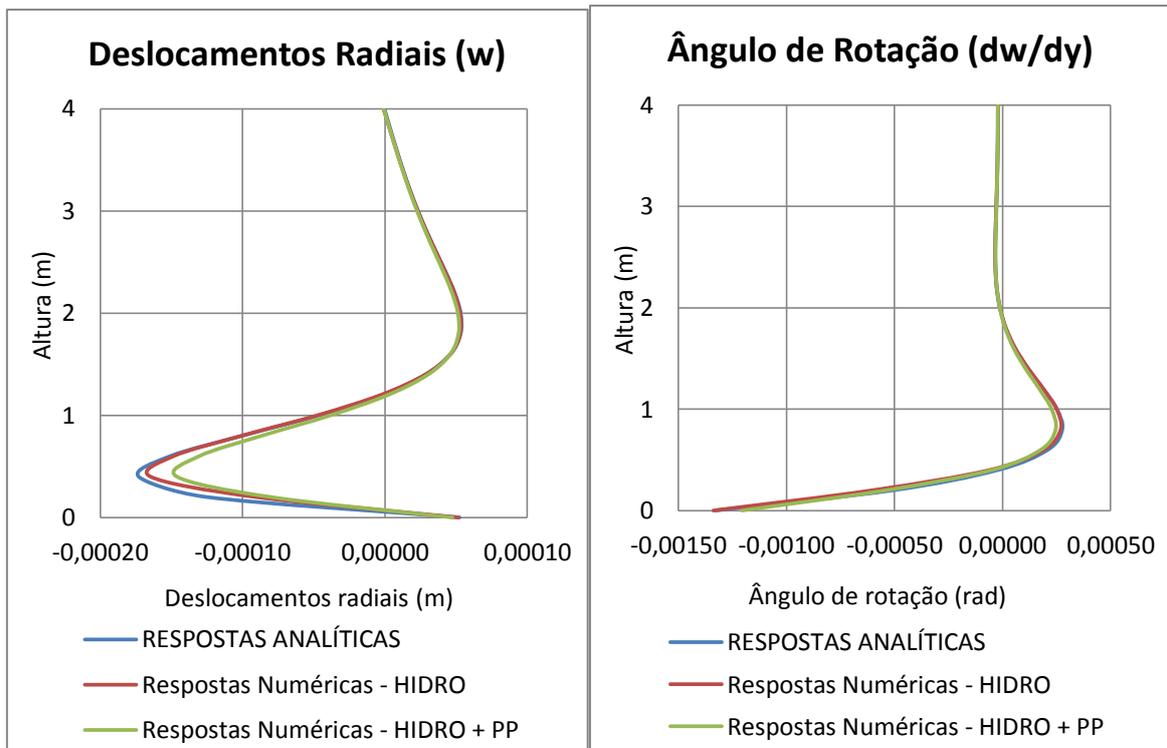


Figura 5.11 - Deslocamentos radiais (w) e Rotações (dw/dy) ao longo da altura da casca (Caso 4)

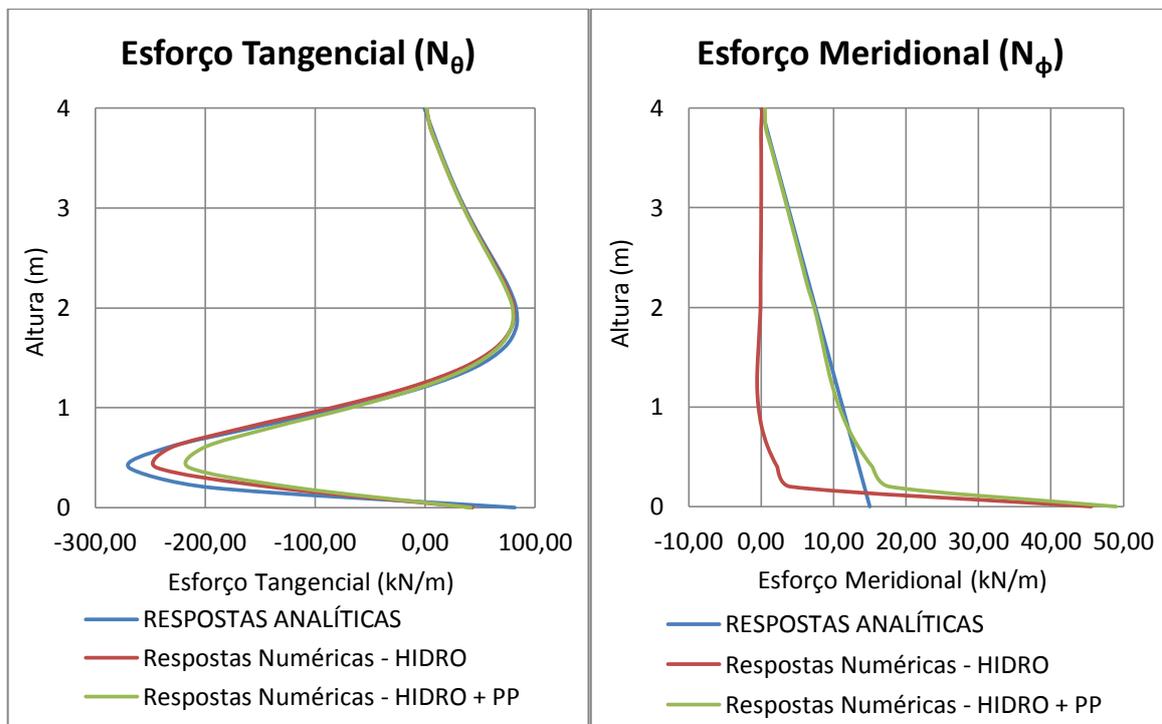


Figura 5.12 - Esforço Normal Tangencial (N_θ) e Esforço Normal Meridional (N_ϕ) ao longo da altura da casca (Caso 4)

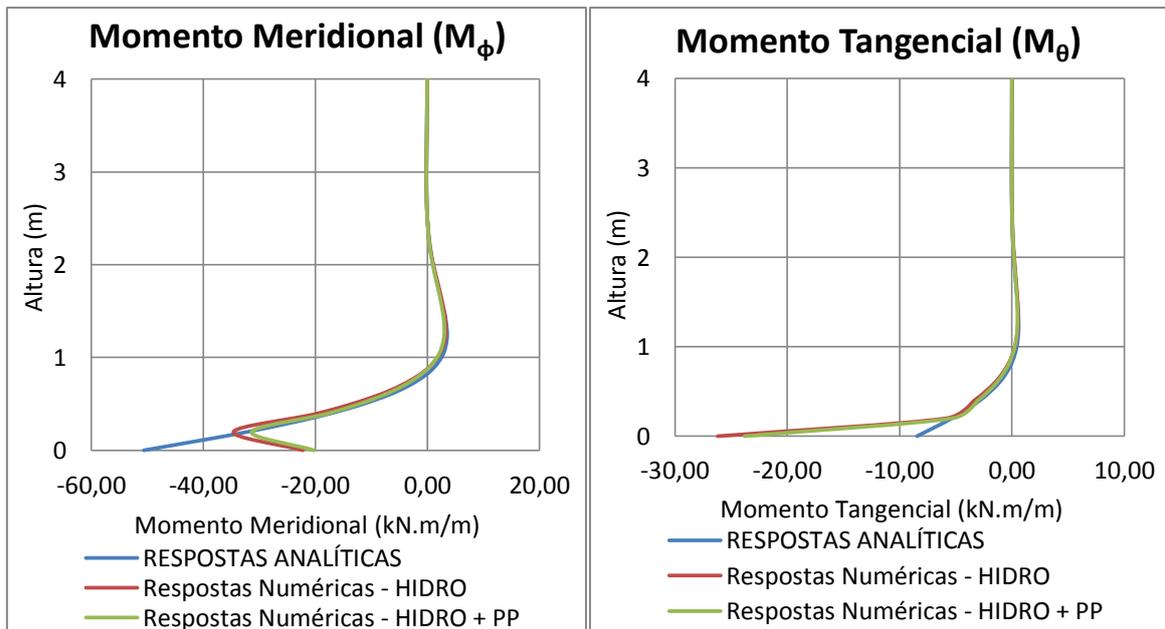


Figura 5.13 - Momento Meridional (M_ϕ) e Momento Tangencial (M_θ) ao longo da altura da casca (Caso 4)

- Caso 5 - Considerando a ligação da casca como sendo elasticamente engastada à uma placa (Analogia de Mohr):

A Figura 5.14 ilustra os deslocamentos radiais (w) e o ângulo de rotação (dw/dy), evidenciando mais uma vez a proximidade destes resultados.

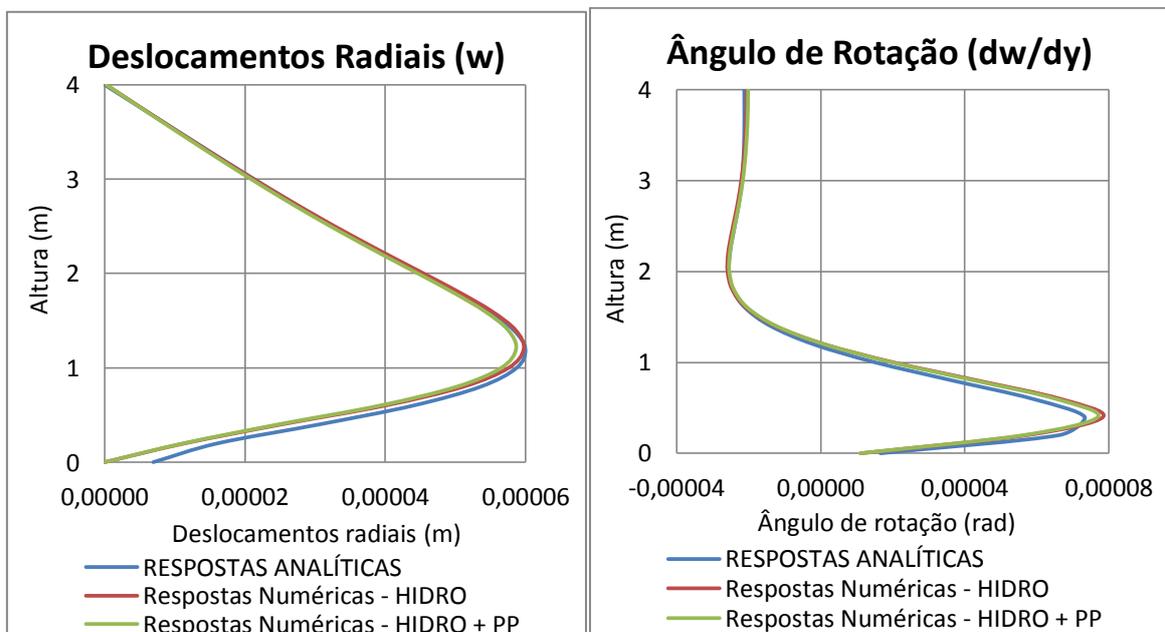


Figura 5.14 - Deslocamentos radiais (w) e Rotações (dw/dy) ao longo da altura da casca (Caso 5)

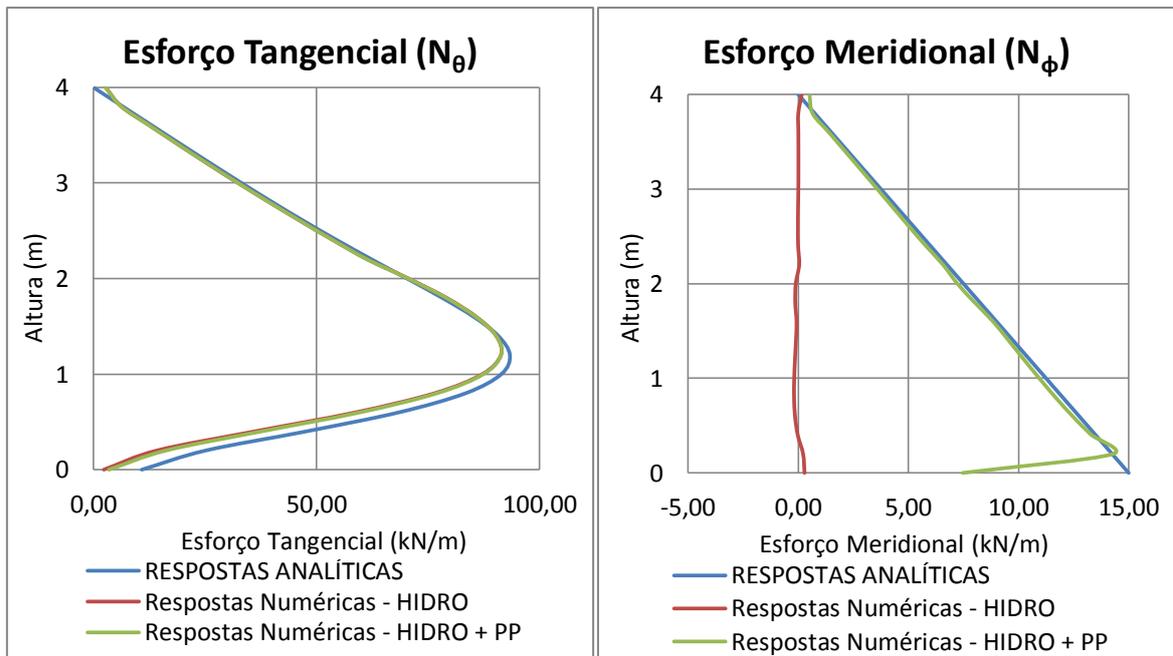


Figura 5.15 - Esforço Normal Tangencial (N_{θ}) e Esforço Normal Meridional (N_{ϕ}) ao longo da altura da casca (Caso 5)

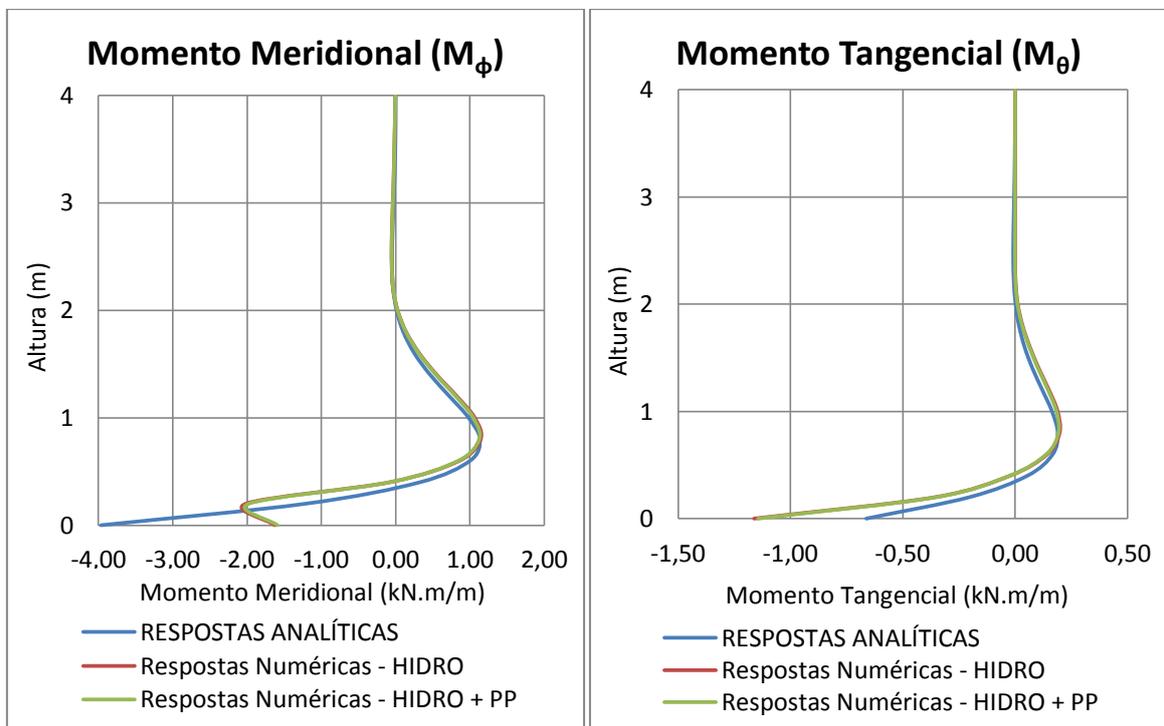


Figura 5.16 - Momento Meridional (M_{ϕ}) e Momento Tangencial (M_{θ}) ao longo da altura da casca (Caso 5)

Como nos casos anteriores, a base do reservatório modelado numericamente apresenta uma pequena diferença por conta dos esforços da laje de fundo (Figuras 5.15 e 5.16).

Fica evidente que em todos os casos estudados de casca com laje de fundo há uma zona de perturbação que ainda carece de um estudo mais aprofundado. Nota-se que os momentos fletores são os esforços mais afetados nestas zonas quando comparados com seus valores teóricos. Para o esforço normal meridional (N_φ), há uma perturbação em decorrência do esforço cortante vindo da placa que interfere diretamente na resposta da casca. Para o momento meridional (M_φ), há a redução no valor numérico deste, pois este é resultante da diminuição entre o momento na casca e o momento na placa, uma vez que numericamente as duas estruturas funcionam perfeitamente solidários (em conjunto), fato não contemplado no modelo analítico.

Um caso adicional fora estudado imaginando-se uma placa circular de rigidez infinita, apoiada na base e acoplada com uma casca cilíndrica. O objetivo é verificar se esta situação reproduz o resultado de um engaste perfeito, o que em tese ocorre, uma vez que os deslocamentos e rotações são restringidos devido a rigidez infinita da placa na conexão. Os resultados são apresentados em termos de deslocamentos (w) e rotações (dw/dy) (Figura 5.17), esforços normais meridionais (N_φ) e tangentes (N_θ) (Figura 5.18), e momentos meridionais (M_φ) e tangentes (M_θ) (Figura 5.19), comparado com a solução analítica dos casos de engaste perfeito e de ligação elasticamente engastada.

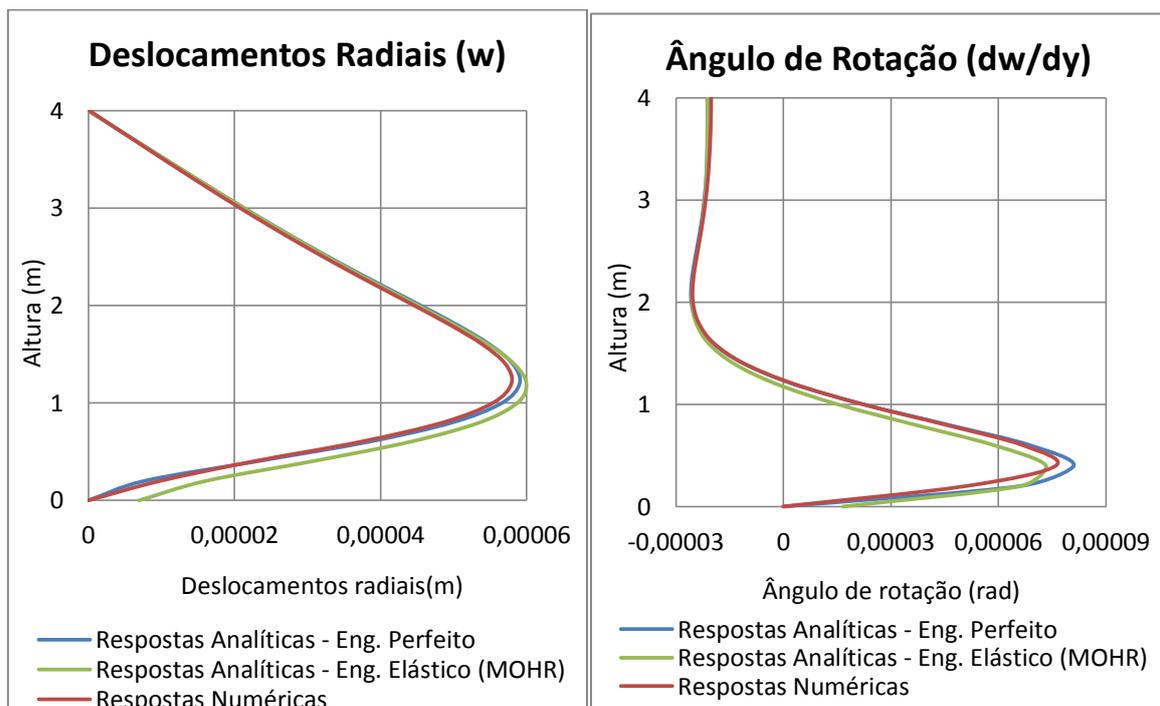


Figura 5.17 - Deslocamentos radiais (w) e Rotações (dw/dy) ao longo da altura da casca – placa com rigidez infinita

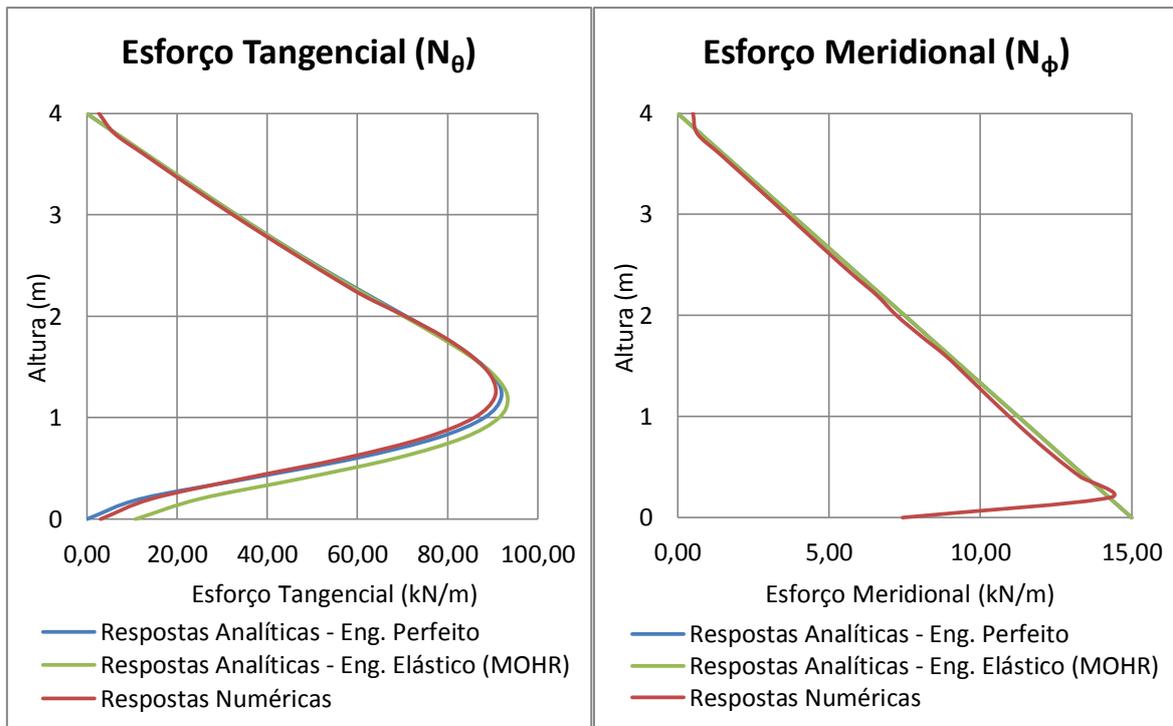


Figura 5.18 - Esforço Normal Tangencial (N_θ) e Esforço Normal Meridional (N_ϕ) ao longo da altura da casca - Placa com rigidez infinita

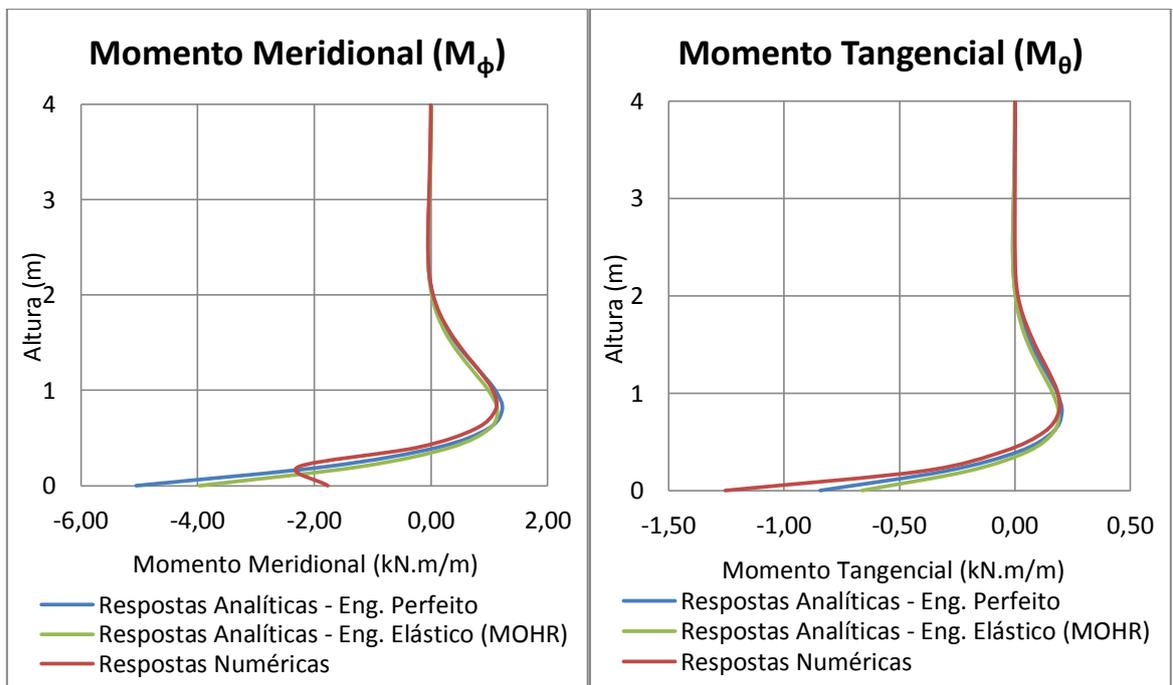


Figura 5.19 - Momento Meridional (M_ϕ) e Momento Tangencial (M_θ) ao longo da altura da casca - Placa com rigidez infinita

Mais uma vez, os resultados analíticos e numéricos para os deslocamentos radiais (w), rotações (dw/dy) e esforços normais tangenciais (N_θ) se apresentam em bom acordo. Quando consideramos a direção do meridiano, para o esforço normal meridional

(N_φ) e o momento meridional (M_φ), observa-se uma zona de interferência em virtude da presença da placa. Contudo, a ligação de engaste perfeito simulada com uma placa de rigidez infinita se mostra totalmente adequada uma vez que os resultados numéricos obtidos se mostram em total conformidade com as respostas analíticas na situação de engaste perfeito, com exceção em uma pequena zona de perturbação que aparece para esforços na direção do meridiano em função da existência da placa.

Caso 6 - Casca abatida com apoios nas bordas curvas submetida ao peso próprio:

Para este caso utilizou-se a Malha 3 (20x20) (Figura 5.20), cujas duas direções são divididas em 20 segmentos (melhor divisão de acordo com o estudo de validação). Os resultados do modelo numérico são mostrados em termos de deslocamentos verticais U_y (Figura 5.21), deslocamentos longitudinais – U_z (Figura 5.22), momentos tangenciais – M_θ (Figura 5.23) e momento meridional – M_φ (Figura 5.24).

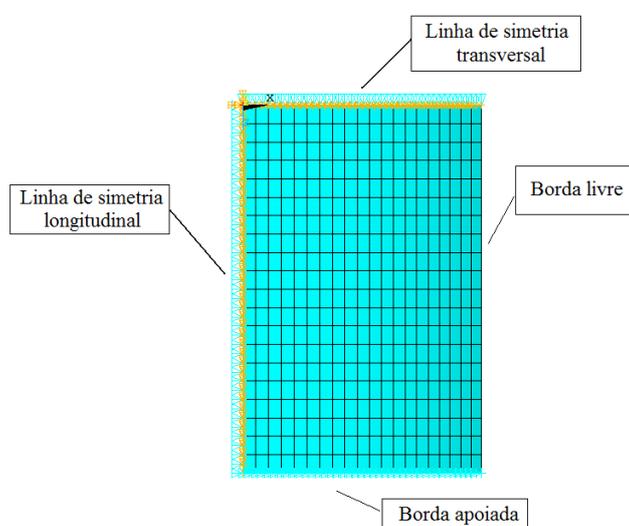


Figura 5. 20 - Malha de elementos finitos utilizada no Caso 6 (ANSYS)

Cabe salientar novamente que as grandezas consideradas neste caso de estudo se encontram em unidades inglesas para ficarem de acordo com os estudos de referência.

Pela Figura 5.21 podemos verificar que na linha de simetria longitudinal o deslocamento vertical ocorre no sentido positivo (em vermelho), ou seja, para cima, isto decorre da ação do peso próprio da estrutura que nas bordas livres tendem a se deslocar para baixo e para o centro (ver Figura 5.22), causando um encurtamento na direção transversal nas zonas

próximas à linha de simetria transversal e conseqüentemente levando a zona central a deslocamentos positivos.

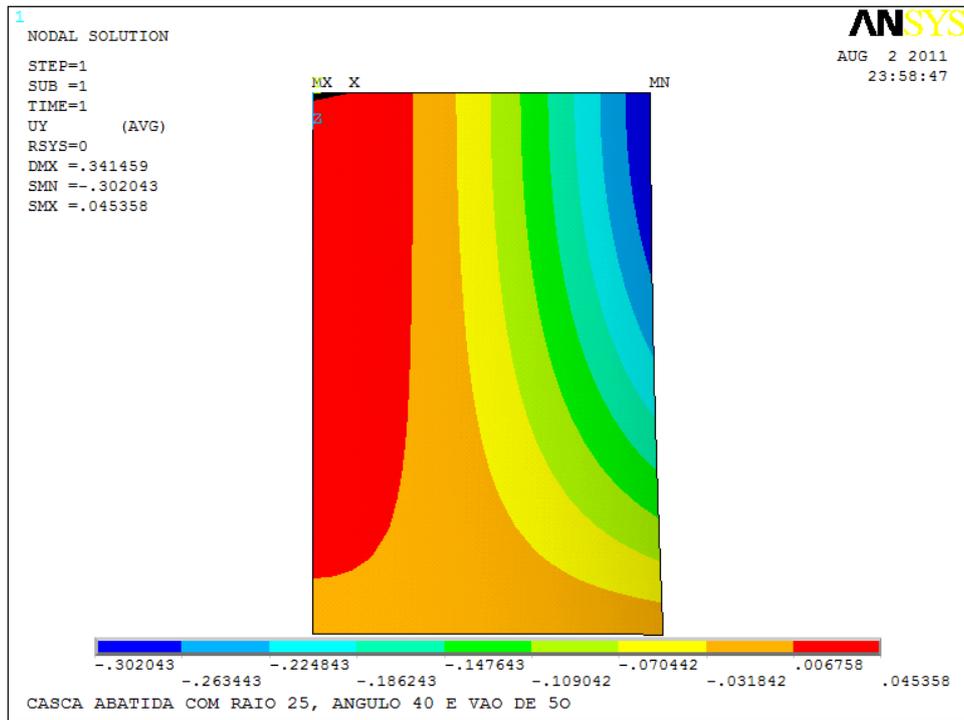


Figura 5.21 - Deslocamentos verticais – Uy (ft) – Caso 6

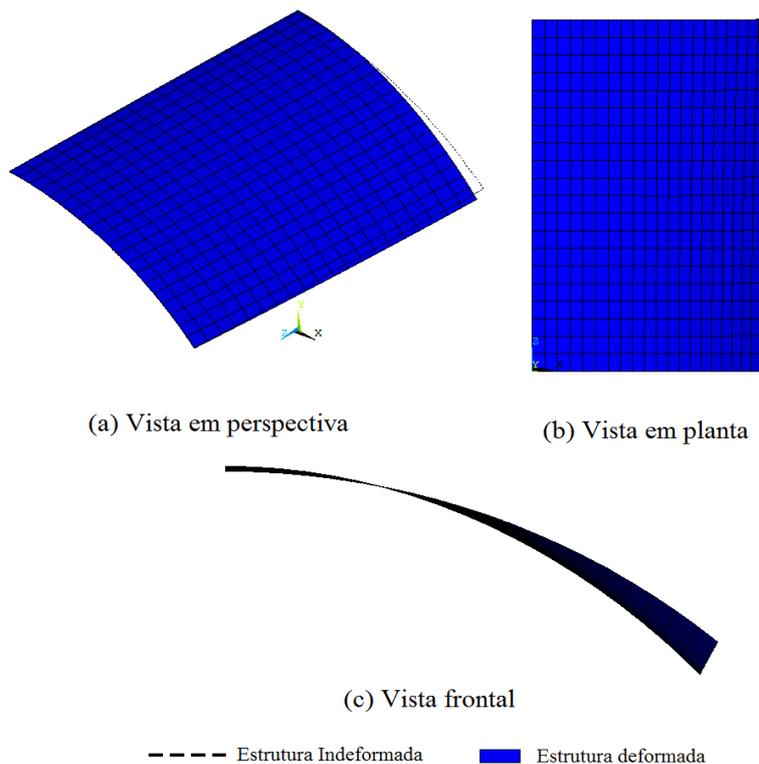


Figura 5.22 - Deformação de casca abatida - Caso 6

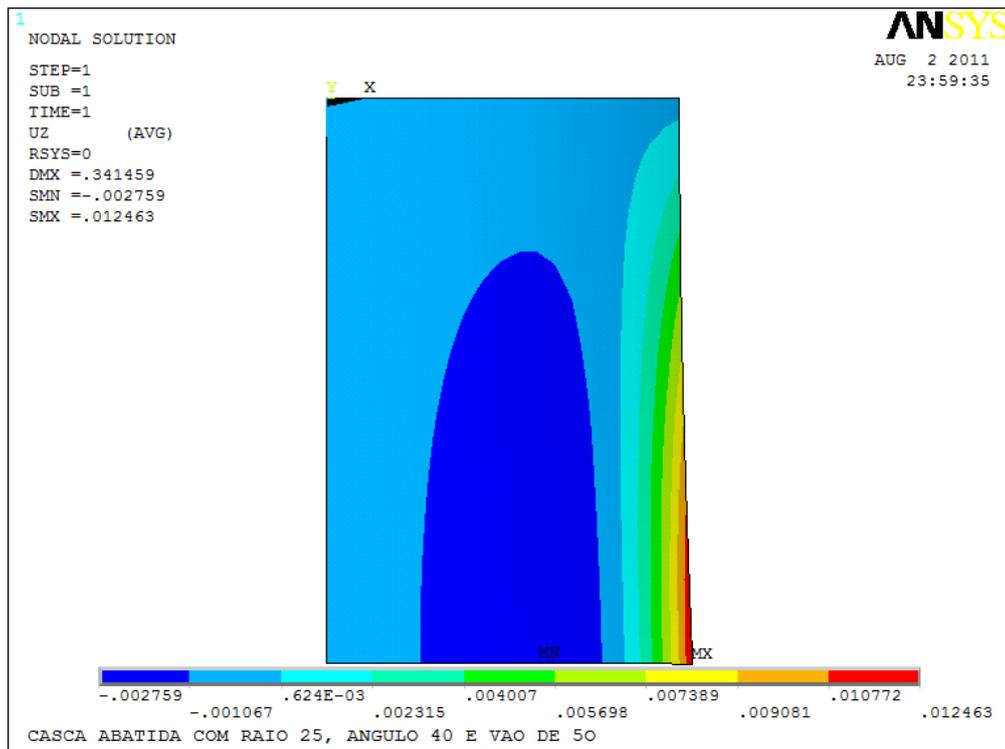


Figura 5.23 - Deslocamentos longitudinais – Uz (ft) – Caso 6

Para o momento Meridional – M_θ (Figura 5.24), como esperado a borda livre apresenta valores positivos, entretanto valores negativos aparecem na zona mais central próxima à linha de simetria longitudinal. Se imaginarmos uma placa que possui raio de curvatura infinito apoiada em duas bordas, ocorre o surgimento de momentos fletores em apenas uma direção e com valores positivos no centro desta. Analogamente, na Figura 5.24 o momento positivo situa-se na zona central, mas na borda livre, e o aparecimento de momentos fletores negativos pode ser atribuído à curvatura da casca, que gera uma maior rigidez nesta zona central e a inversão destes esforços. Na Figura 5.25, os momentos fletores na direção tangencial (M_θ) são em grande maioria negativos. Tais valores são gerados analogamente ao comportamento de balanços com a atuação do peso próprio, cujos valores negativos de momentos aparecem devido a resistência atribuída ao efeito Poisson na estrutura.

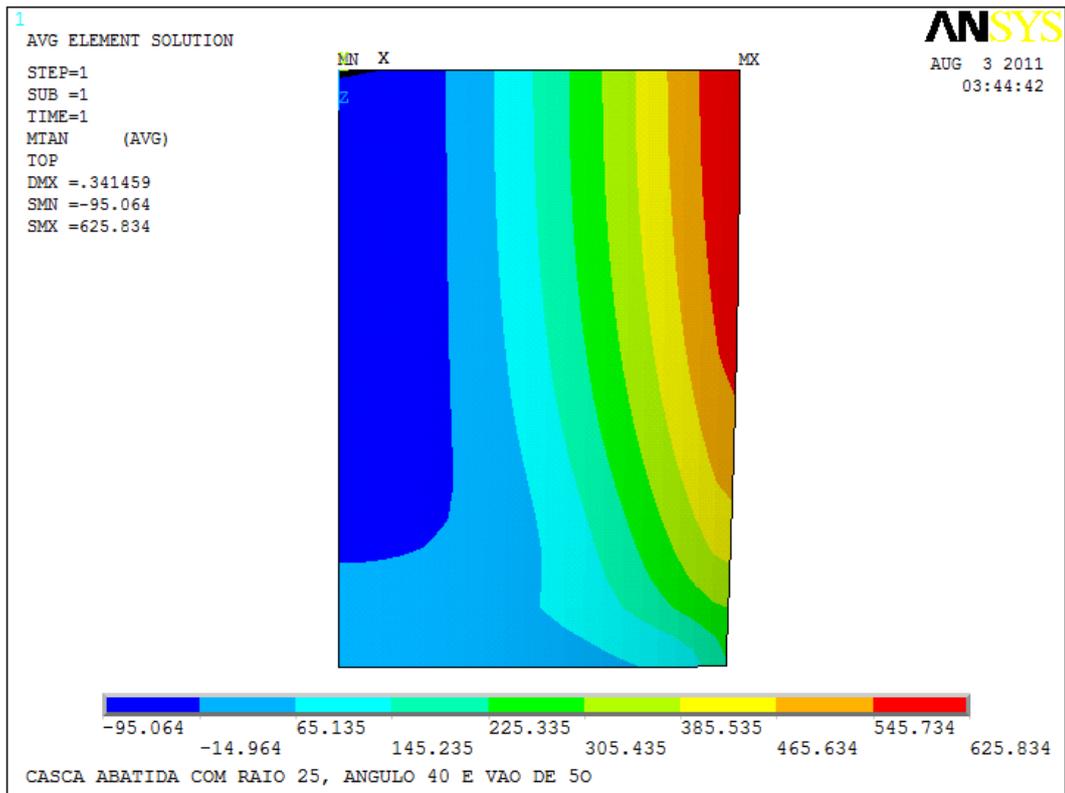


Figura 5.24 - Momentos Meridionais – M_{ϕ} (lb.ft/ft) – Caso 6

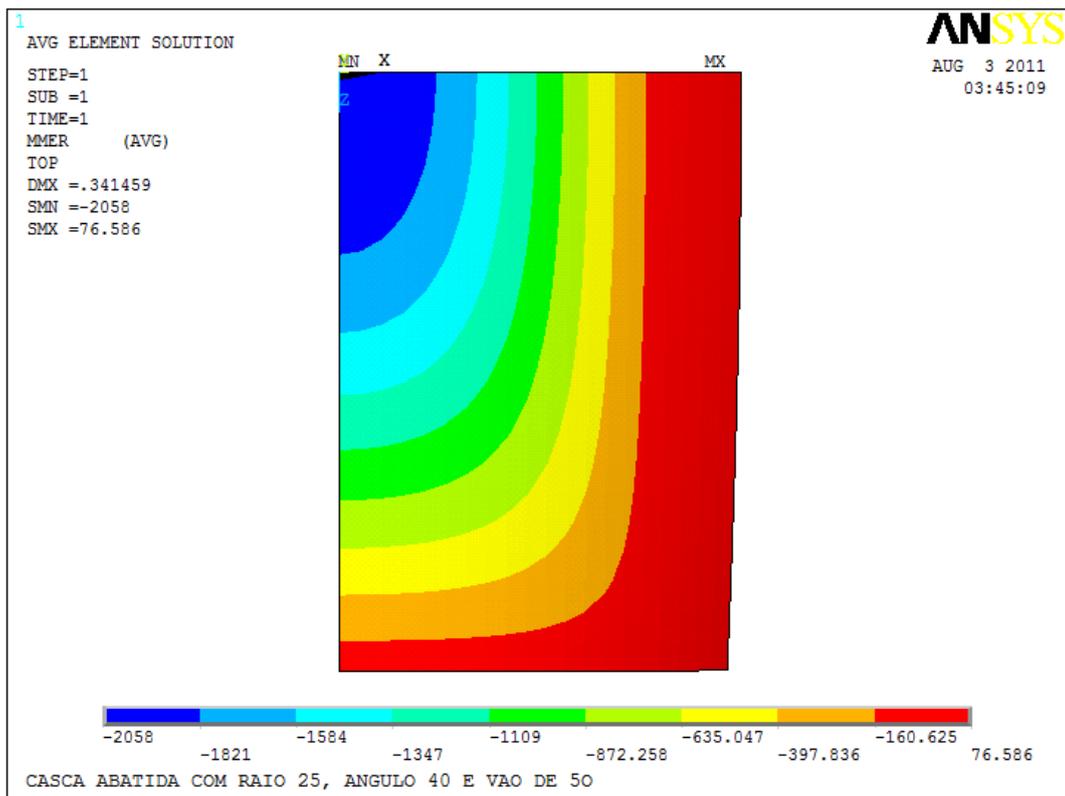


Figura 5. 25 - Momentos Tangenciais – M_{θ} (lb.ft/ft) – Caso 6

Caso 7 – Casca abatida engastada nas bordas retas e livre nas bordas curvas

Para este caso, tem-se uma casca submetida ao carregamento transversal de $0,006853 \text{ N/m}^2$, e a Malha 2 (10×10) qualificada anteriormente para simulação numérica (Figura 5.26), cujas duas direções são divididas em 10 segmentos.

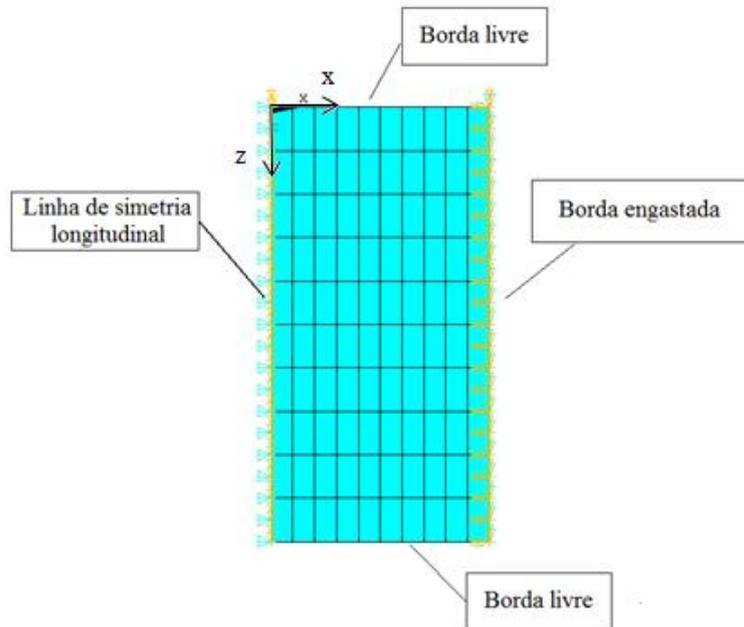


Figura 5.26 - Malha de elementos finitos utilizada na análise de casca abatida biengastada (ANSYS)

A Figura 5.27 ilustra os deslocamentos transversais (verticais) – U_y , os quais são máximos na linha de simetria longitudinal, mostrando-se condizentes com o esperado para situação biengastada. Entretanto deslocamentos de $0,000249\text{m}$ estão localizados nos nós de encontro entre a borda livre e a linha de simetria longitudinal, cujo efeito de deslocamentos maiores está associado ao menor efeito de Poisson nas bordas livres, atuando de forma semelhante a arcos isolados. À medida que observamos a direção longitudinal, sobre a linha de simetria, verificamos a diminuição destes deslocamentos, que é atribuído ao maior efeito Poisson na direção longitudinal e devido ligações das seções arqueadas, fato que não ocorre nas seções das extremidades livres.

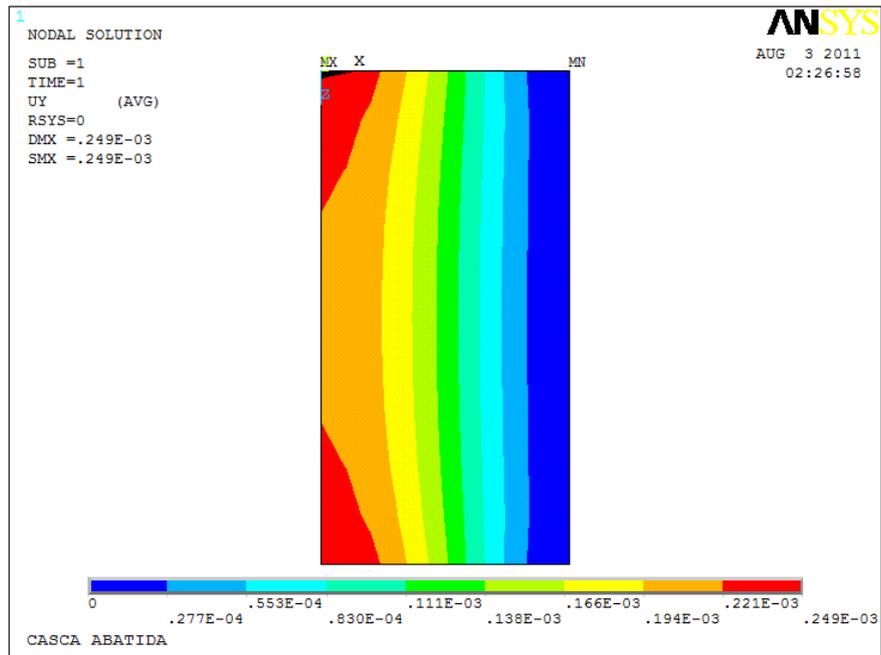


Figura 5.27 - Deslocamentos verticais – Uy (m) – Caso 7

Os momentos fletores tangenciais (M_θ) são ilustrados na Figura 5.28. O valor máximo positivo está localizado junto à linha de simetria longitudinal com valor de 0,000286 N.m/m e valor máximo negativo junto às bordas engastadas com valor de 0,000499 N.m/m. As Figuras 5.29 e 5.30 ilustram os esforços normais na direção meridional (N_ϕ) e tangencial (N_θ).

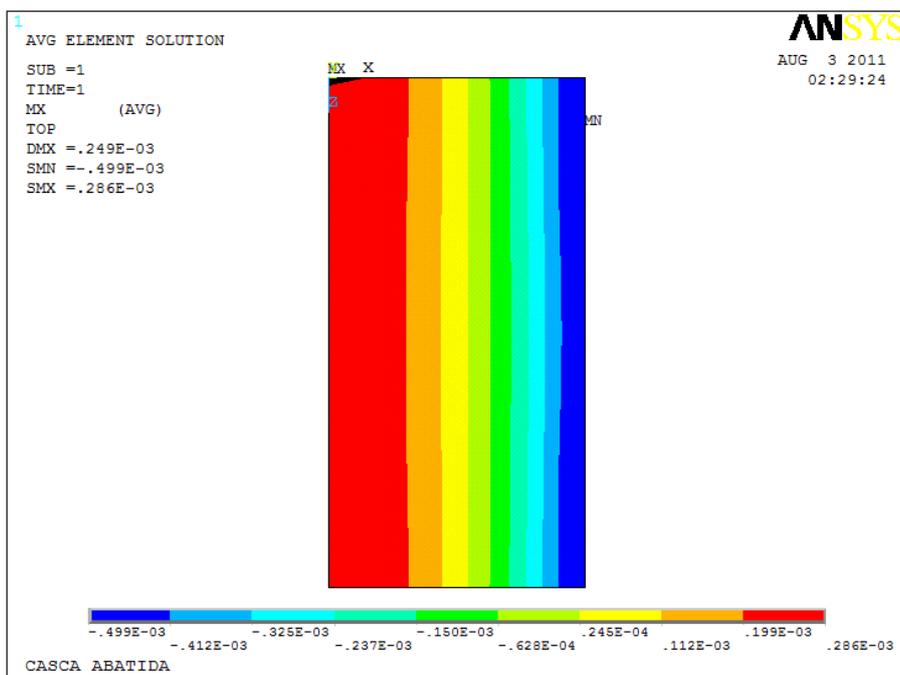


Figura 5. 28 - Momento fletor tangencial – M_θ (N.m/m) – Caso 7

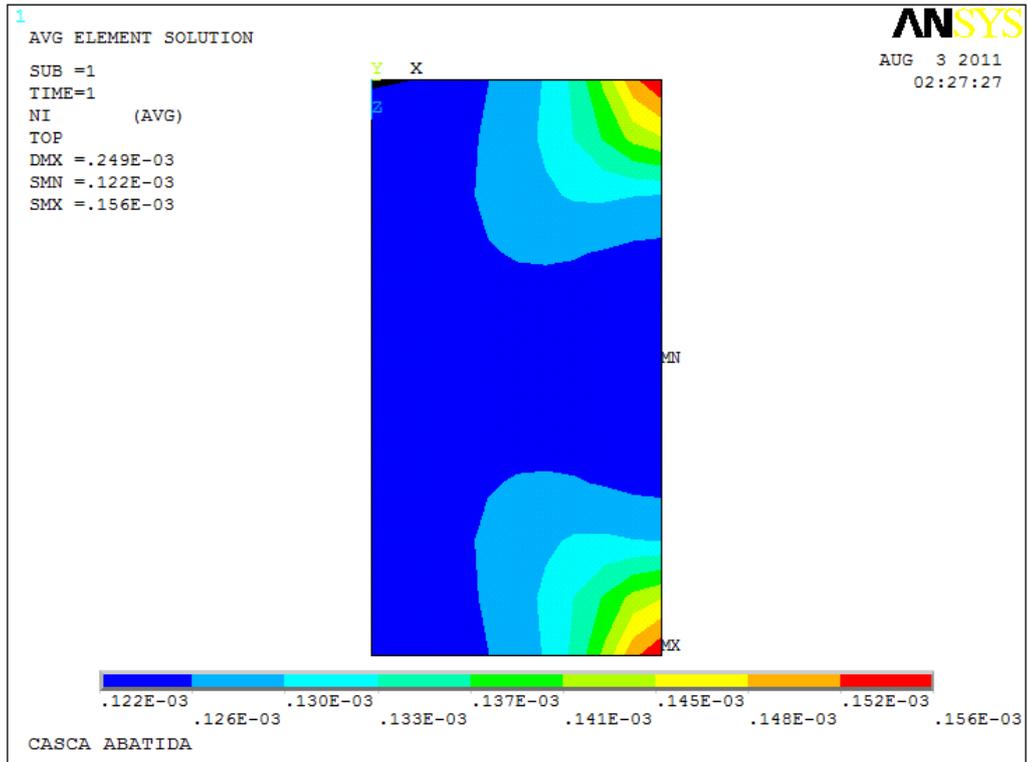


Figura 5. 29 - Esforço normal meridional – N_ϕ (N/m) em casca abatida com bordas retas engastadas

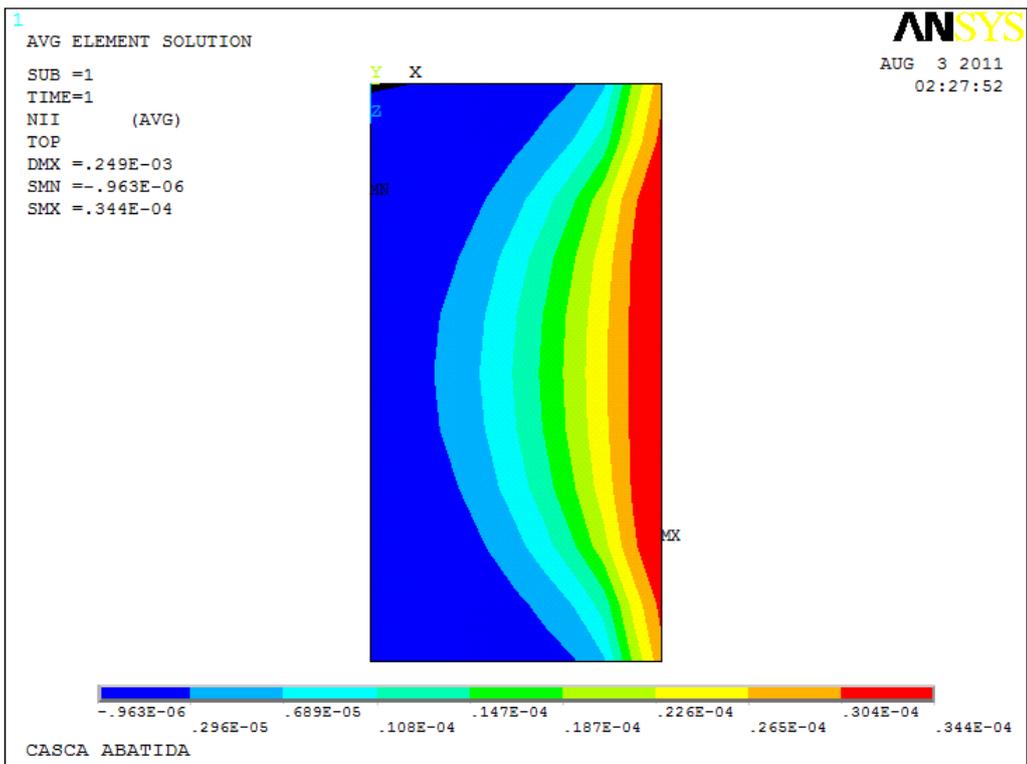


Figura 5.30 - Esforço normal tangencial – N_θ (N/m) em casca abatida com bordas retas engastadas

Caso 8 – Casca cilíndrica engastada na base com restrição radial ao longo do meridiano de simetria:

No modelo sugerido por Huang Wen-Xi (1965), utilizou-se a Malha 3 validada anteriormente. Os deslocamentos ao longo da altura do reservatório são observados na linha “a”, cujos deslocamentos radiais são máximos e mostrados com e sem a consideração do efeito de cisalhamento (Figura 5.31), isto é, serão usados elementos finitos que contemplam a inclusão dos efeitos de cisalhamento (casca espessa) e elementos finitos para cascas esbeltas.

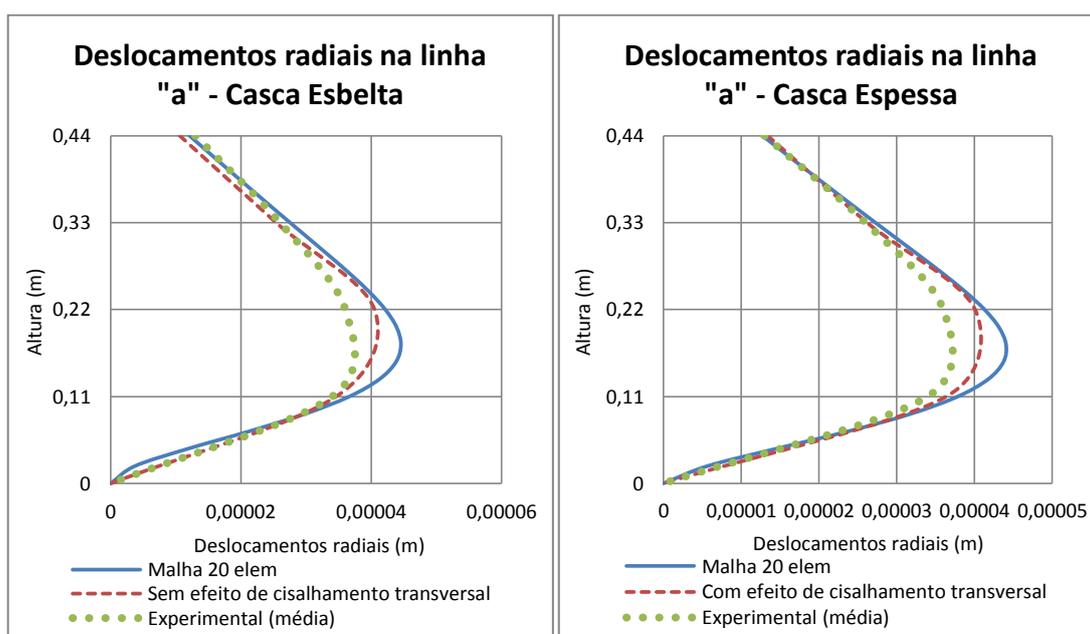


Figura 5.31 - Deslocamentos radiais em simulação de modelo Huang Wen-Xi (1967)

Observa-se que, levando em conta ou não o efeito de cisalhamento, os resultados se mostram satisfatórios. Apesar do modelo numérico apresentar uma deformação com valores mais altos na zona de deformação máxima (entre 0,11 e 0,22m de altura), as demais zonas se comportam de forma semelhante aos resultados de referência. A influência do uso de diferentes simetrias (metade e um quarto de casca) fora testada a fim de comparar o uso de diferentes soluções numéricas, e assim testar estas condições para depois utilizá-las em barragens reais. A Figura 5.32 apresenta os deslocamentos radiais na linha “a” considerando a estrutura completa, a metade e um quarto desta, e mostra claramente que se as condições de simetria forem impostas de forma correta, não existem diferenças numéricas entre estas formas de representação.

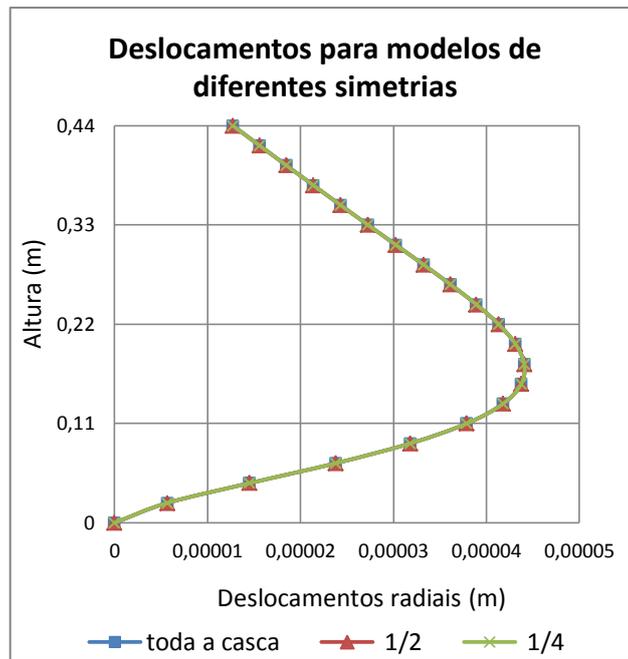


Figura 5. 32 - Deslocamentos radiais (w) para diferentes condições de simetrias

Todos os resultados ilustrados até o momento, em que foram observados e tratados diversos esforços e deslocamentos sob diferentes situações de carregamento e condições de contorno, fizeram parte de um processo progressivo de análise, necessário para o tratamento adequado e seguro, na modelagem numérica de barragens reais.

Caso 9 – Barragem em arco de simples curvatura e espessura constante:

Neste caso estudou-se o modelo de barragem em arco, apresentado por Zienkiewicz (1967) e Zheng e Li (2010) em sua seção central, considerando-se somente a atuação de carregamento hidrostático. Foram analisados numericamente os deslocamentos radiais, tensões verticais à montante e à jusante, utilizando-se a malha Refino 1 para o modelo sólido e a Malha 1 para o modelo tipo *shell*, qualificadas no Capítulo 4, e de forma analítica seguindo a teoria aproximada de Herzog (1999) ilustrada no Capítulo 3.

Os deslocamentos radiais (w) são ilustrados na Figura 5.33 para os diferentes modelos numéricos e o processo aproximado de Herzog (1999). Nota-se que os deslocamentos do modelo numérico utilizado neste trabalho está em conformidade com os demais resultados apresentados, situando-se entre o *Trial Load Method* – método analítico mais antigo que fornece maiores deslocamentos devido a condição da fundação ser considerada homogênea, semi-infinita e elástica; e o método de Zheng e Li (2010), que leva em

consideração a barragem como sendo composta de elementos de arcos e balanços verticais acoplado à fundação, que é tratada pelo método dos elementos finitos. Considerando que no modelo numérico deste estudo, a conexão barragem-vale possui contornos considerados perfeitamente engastados, é de se esperar que os resultados sejam menores. Nota-se grande similitude entre as três análises numéricas até aproximadamente metade da altura da barragem e a partir desta houve uma maior divergência entre os resultados.

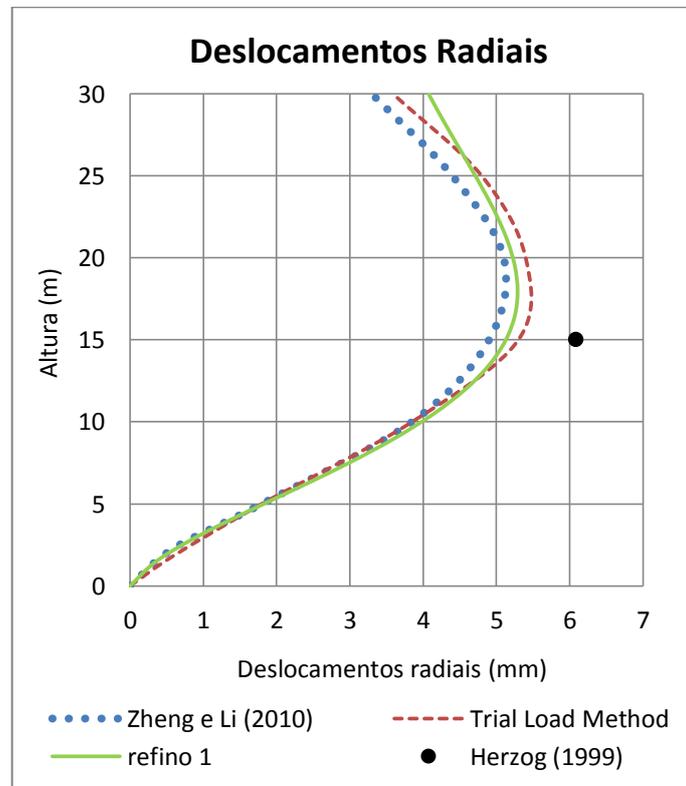


Figura 5.33 - Deslocamentos radiais na seção central de barragem em arco – Modelo Sólido

Como a formulação aproximada de Herzog (1999), para deslocamentos e momentos fletores, está adaptada apenas para a altura média da barragem, e para tensões à montante e à jusante na base, nos gráficos estão inseridos somente estes pontos que representam os respectivos valores obtidos neste processo de cálculo. Destaca-se na Figura 5.33 o valor do deslocamento de 6,09 mm destoando dos demais valores na análise, porém não sendo grave esta discrepância se considerarmos que a diferença entre os métodos é menos de um milímetro.

Para as tensões verticais à jusante e à montante (Figura 5.34) os resultados de todos os modelos numéricos de análise se mostram com diferenças mínimas, assegurando a

validade destes procedimentos de análise. Assim, o modelo numérico adotado se mostra satisfatório, coerente e acompanhando os demais resultados ao longo de toda altura da barragem, para tensões verticais à montante (σ_{yM}) e à jusante (σ_{yJ}). Contudo, o valor da tensão vertical à montante obtido por meio da teoria aproximada de Herzog (1999) se mostra com um valor inferior aos demais, sendo de 4,73 MPa.

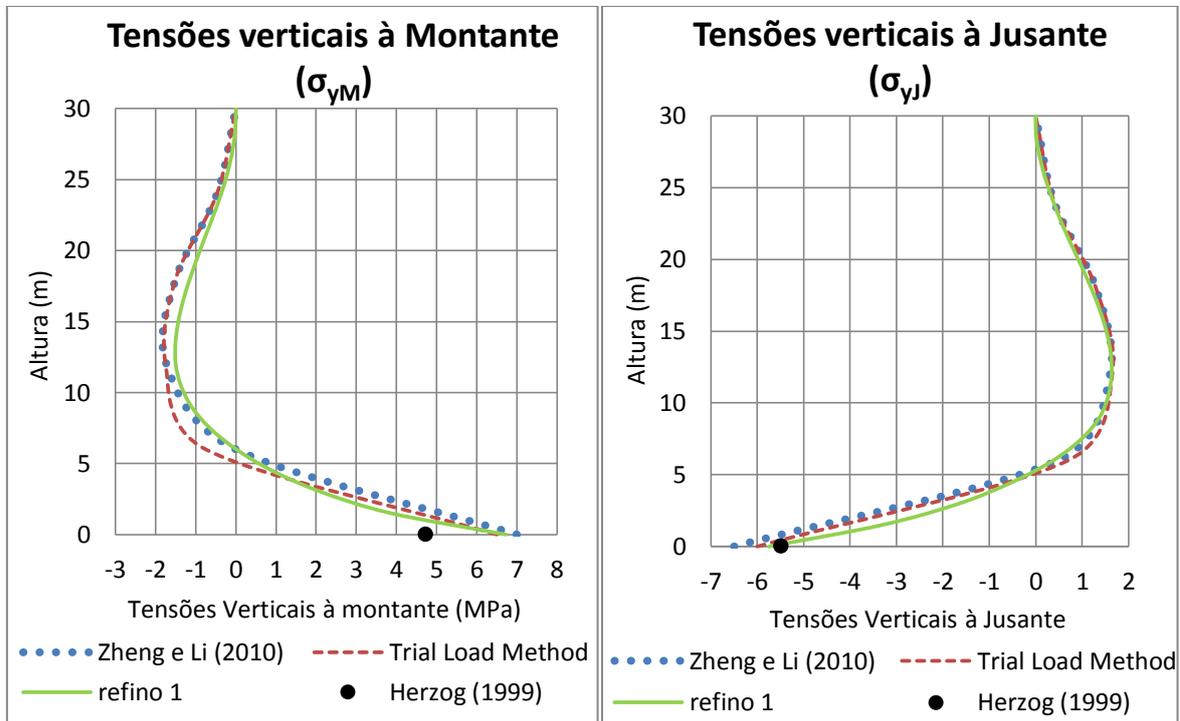


Figura 5.34 - Tensões verticais (σ_y) na seção central de barragem em arco – Modelo Sólido

Com as repostas do modelo sólido calibradas, e a validação do modelo tipo *Shell* já feita com Malha 1 definida anteriormente para este estudo, os deslocamentos radiais e as tensões à jusante serão comparados com o modelo sólido com o intuito de mostrar o desenvolvimento dos momentos fletores ao longo da altura da barragem e compará-los com os resultados obtidos pela formulação aproximada de Herzog (1999). As Figuras 5.35 e 5.36 ilustram os deslocamentos radiais e as tensões à jusante, respectivamente, para os dois modelos analisados e comparados com os resultados de referência.

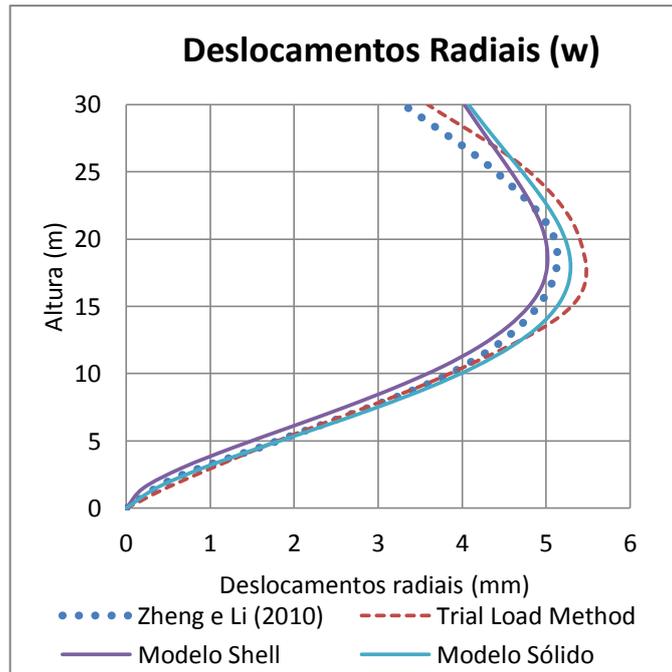


Figura 5.35 - Deslocamentos radiais na seção central de barragem em arco – Modelo Sólido e Modelo Shell

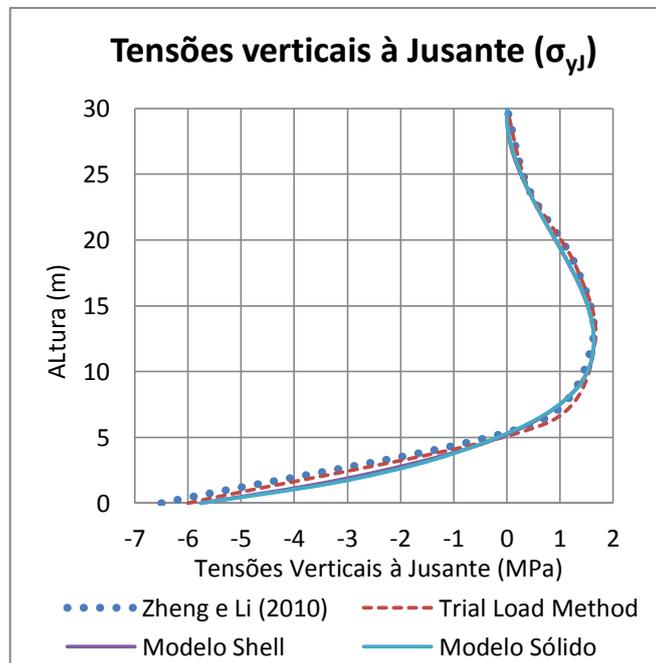


Figura 5.36 - Tensões verticais na seção central de barragem em arco – Modelo Sólido e Modelo Shell

Apesar dos deslocamentos radiais do modelo com elementos de casca não estarem tão próximos dos resultados do modelo constituído de elementos sólidos, os mesmos podem ser considerados razoáveis, uma vez que descreve o comportamento semelhante aos demais resultados, com diferenças inferiores a um milímetro, enquanto os resultados de tensões verticais à jusante (Figura 5.36) são perfeitamente coincidentes. Desta forma, uma

vez assegurado que os deslocamentos e as tensões respondem perfeitamente à estrutura modelada, os momentos fletores meridionais (M_ϕ) e tangenciais (M_θ) ao longo da altura da barragem podem ser extraídos de forma segura, e estão ilustrados na Figura 5.37.

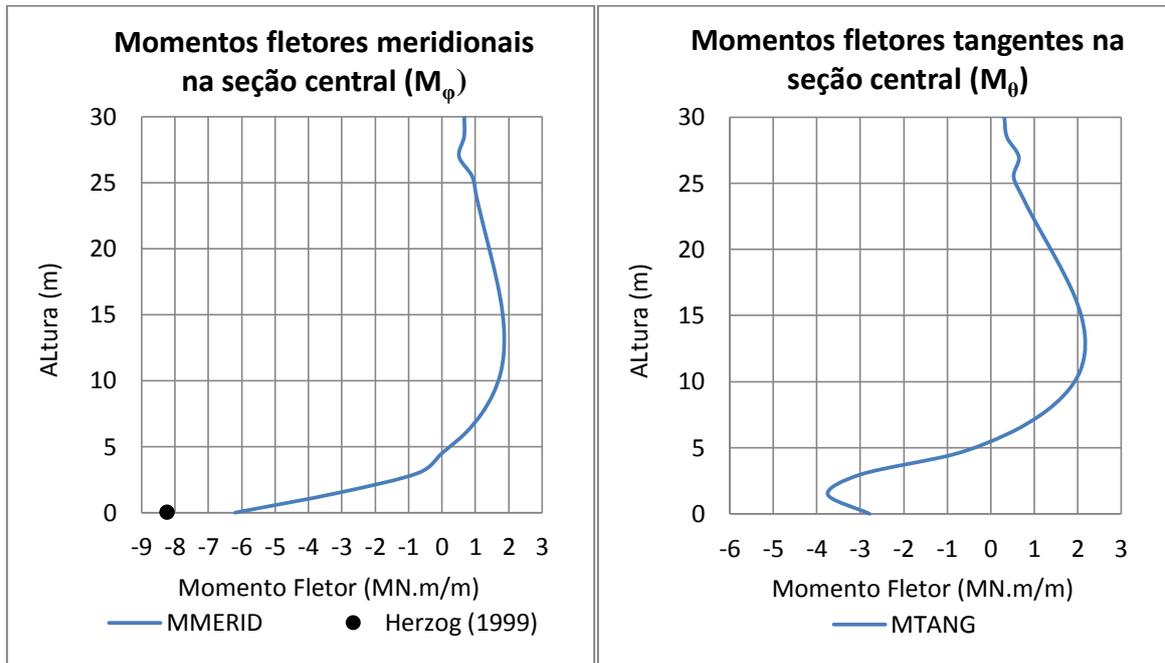


Figura 5.37 – Momentos fletores M_ϕ e M_θ na seção central de barragem em arco – Modelo Shell

O momento fletor na base da barragem seguindo o modelo numérico apresenta um valor de -6,20 MN.m/m comparado como o valor obtido da teoria aproximada de cascas de -8,22 MN.m/m.

Assim, podemos afirmar que a modelagem numérica deste estudo se encontra perfeitamente calibrada com valores apresentando boa precisão, comprovada pela grande semelhança entre as respostas obtidas numericamente e analiticamente. O modelo de cálculo seguindo a teoria aproximada de cascas de Herzog (1999) foi a que pior representou os resultados obtidos, e isto pode estar associado à espessura constante da barragem, fato não muito comum em barragens em arco reais, e que pode ter gerado erros oriundos da formulação empírica para o momento fletor meridional (M_{yA}) da Equação 3.27. Apesar dos resultados seguindo Herzog (1999) apresentarem valores maiores, pode-se considerar que estes são razoavelmente satisfatórios, e podem ser aplicados para prever de forma rápida e prática o comportamento de um projeto de barragem em arco mesmo que de espessura constante.

Analisando-se agora um corte horizontal realizado à meia altura da barragem, a Figura 5.38 ilustra o desenvolvimento dos momentos fletores tangenciais (M_{θ}).

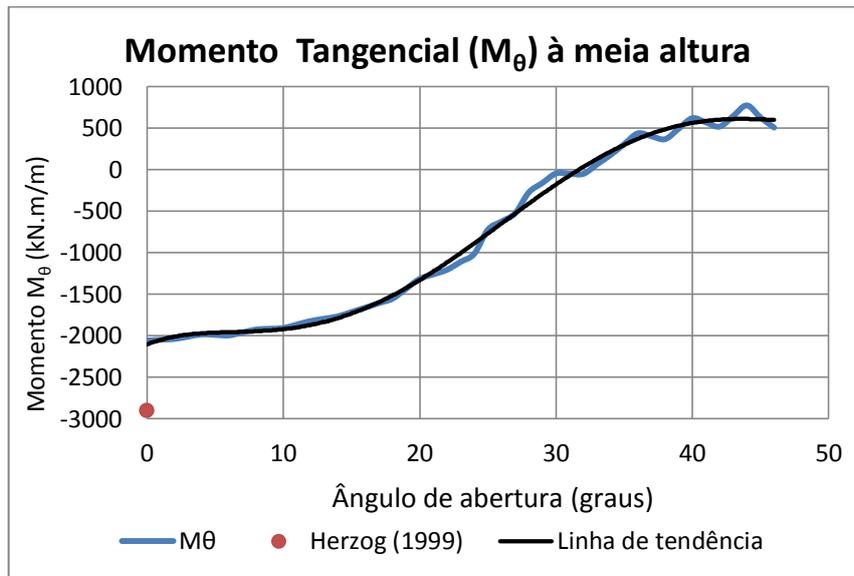
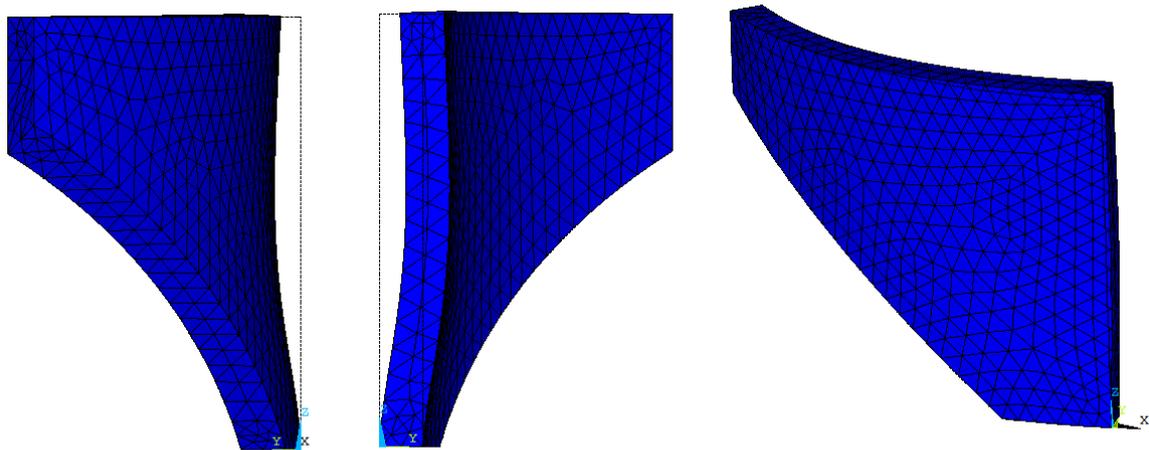


Figura 5.38 - Momento Fletor Tangencial (M_{θ}) à meia altura da barragem

Nota-se que o desenvolvimento dos momentos fletores tangenciais (M_{θ}) seguem comportamento semelhante ao observado em um arco isolado, isto se deve ao fato da grande espessura da barragem (3 m) em relação à altura da mesma (30 m) resultando em uma casca espessa ($h/r \geq 0,02$) cujos momentos não são atenuados na parte central da barragem.

A seguir é ilustrado o comportamento global da estrutura em termos de deslocamentos (Figura 5.39 e Figura 5.40) e tensões verticais à montante (Figura 5.41) e à jusante (Figura 5.42), fornecidos pelo programa ANSYS para o elemento finito sólido. Nota-se que os maiores deslocamentos ocorrem na zona próxima à altura média da barragem.



(a) Vista em perfil reverso

(b) Vista em perfil

(c) Vista em perspectiva

Figura 5.39 – Deformada da estrutura de barragem em arco – Caso 9

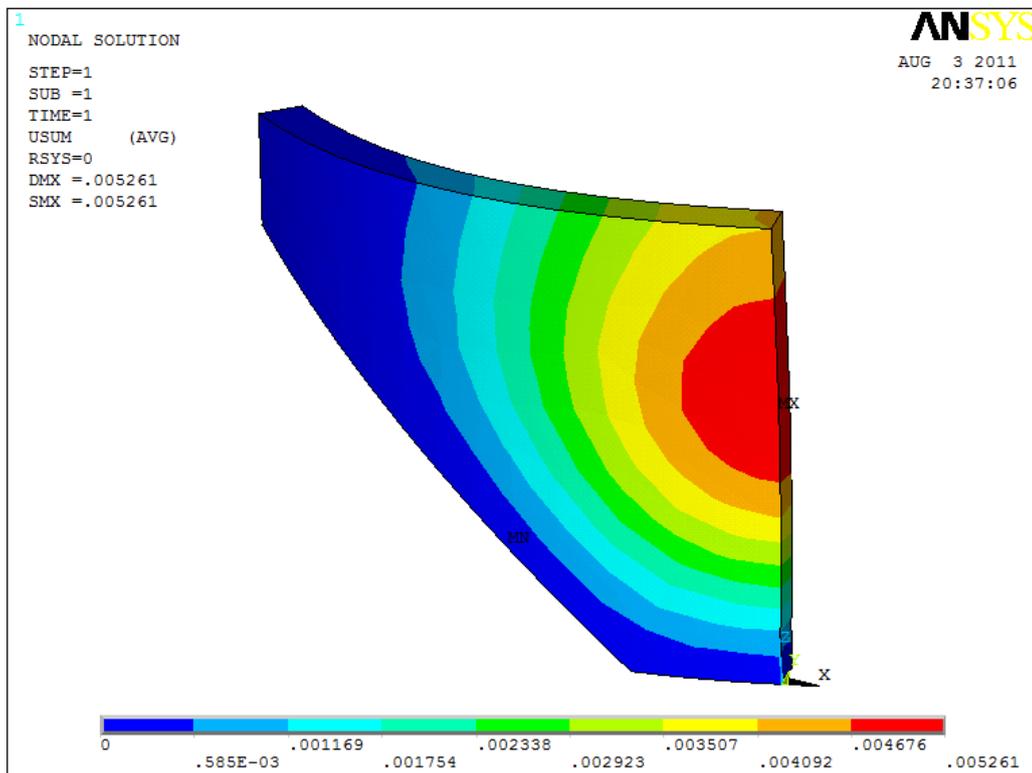


Figura 5.40 - Deslocamentos totais da estrutura via elementos finitos (valores em metro)

Observa-se para as tensões verticais à montante (σ_{yM}) que o valor máximo de tração se encontra na base da barragem, caracterizando uma zona mais provável à abertura de fissuras de tração. Há também o aparecimento de tensões de compressão à meia altura da barragem em virtude do próprio deslocamento ao longo da altura da estrutura, devendo-se tomar o cuidado em relação a uma possível ruptura por esmagamento do concreto.

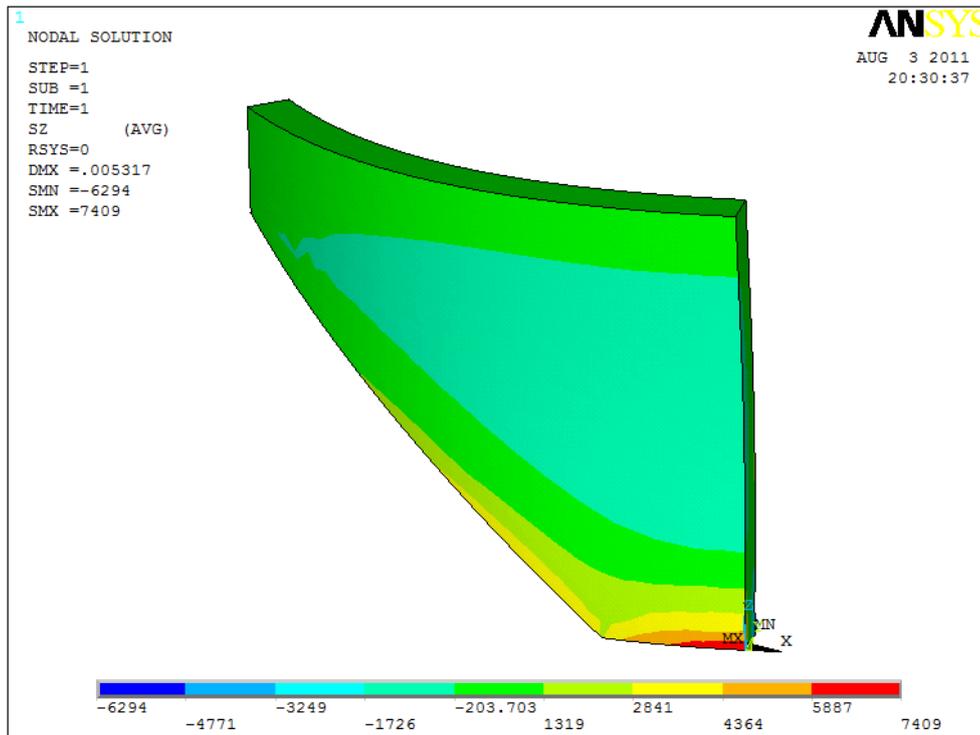


Figura 5.41 - Tensões verticais à montante (σ_{yM} – kPa) via elementos finitos

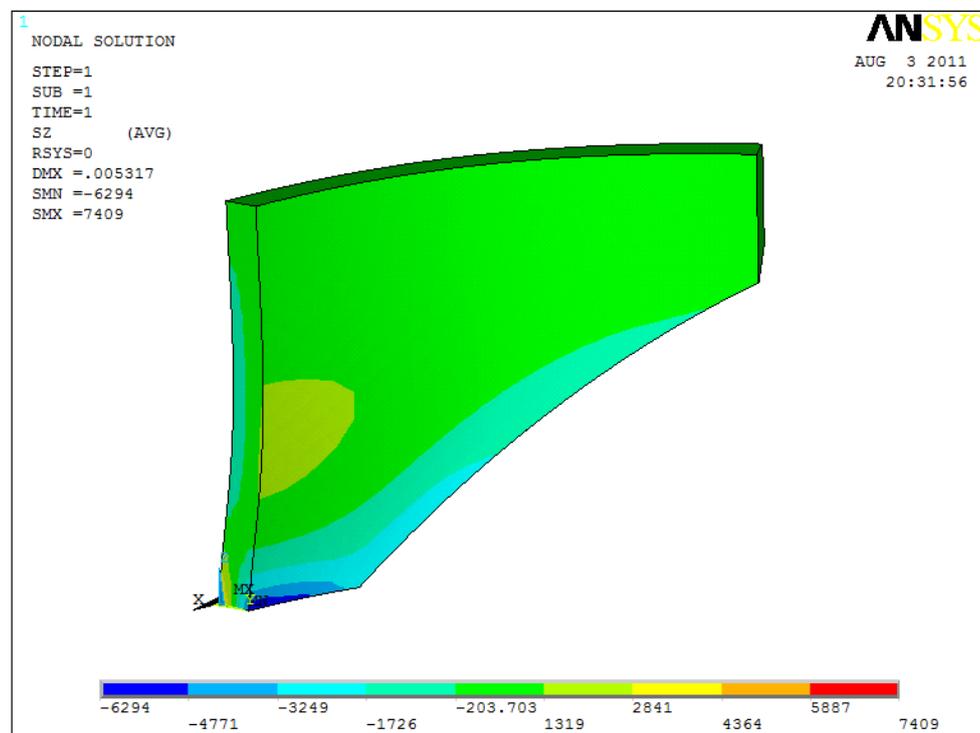


Figura 5.42 - Tensões verticais à jusante (σ_{yJ} – kPa) via elementos finitos

Para as tensões verticais à jusante (σ_{yJ}), nota-se maior valor de tensão vertical de compressão na base da barragem e valores de tensão positivos à meia altura da barragem

por conta do deslocamento da estrutura. A tensão máxima de compressão ($\sigma_y = 6,29$ MPa) encontrada na base à jusante corresponde a 45% da tensão admissível do concreto.

Caso 10 – Barragem em arco de simples curvatura com espessura linearmente variável

Este caso tem o intuito de verificar a influência da variação da espessura na melhora dos resultados da formulação de Herzog (1999), que no Caso 9 de barragem com espessura constante ilustrado anteriormente foi a que mostrou resultados menos satisfatórios. Assim, uma barragem de espessura variável de forma linear é analisada apenas com modelo Sólido em elementos finitos tomando como base de observação os deslocamentos radiais na seção central (Figura 5.43), e as tensões verticais à montante e à jusante na seção central (Figura 5.44). O modelo de barragem segue proposição da Figura 4.7 seguindo mesmos dados da barragem anterior.

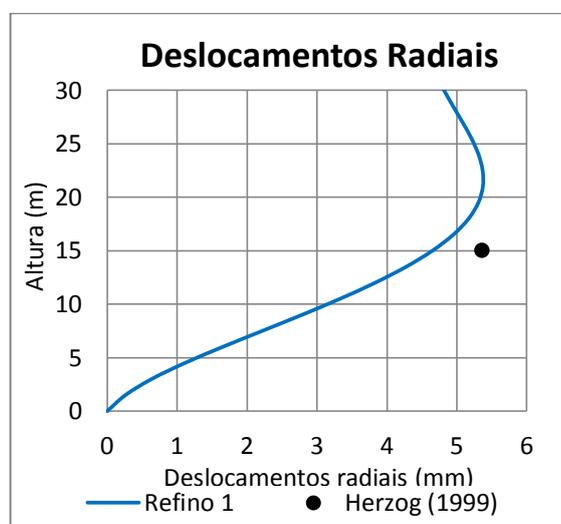


Figura 5.43 - Deslocamentos radiais na seção central de barragem em arco com espessura variável – Modelo Sólido

Os resultados de deslocamentos apresentados numericamente e com cálculo analítico pelas expressões da teoria aproximada de Herzog (1999) são de 4,65 mm e 5,36 mm, respectivamente. Estes se mostram mais próximos se comparados com o caso anterior de barragem com espessura constante. Estão ilustrados ainda os valores de tensões verticais à montante (σ_{yM}) e à jusante (σ_{yJ}) na Figura 5.44. Notou-se uma aproximação considerável entre a teoria aproximada de Herzog (1999) e o modelo numérico analisado para a base da barragem. Assim, estes fatos parecem mostrar que a formulação de Herzog (1999) é melhor adaptada à barragens cujas espessuras variam ao longo da altura e que estão mais

próximas das barragens reais, sendo esta afirmativa considerada, além da melhora nos resultados, em virtude da grande experiência do autor em projetos deste tipo.

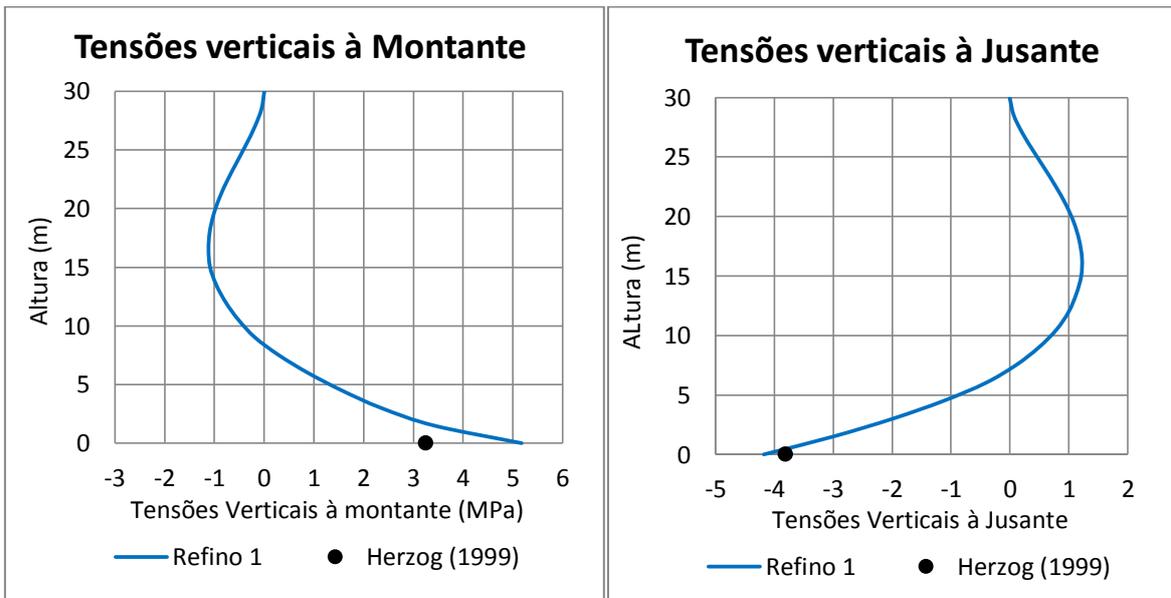


Figura 5.44 - Tensões verticais na seção central de barragem em arco com espessura variável – Modelo Sólido

As Figuras 5.45 e 5.46 ilustram o comportamento global da estrutura em termos de deformadas e deslocamentos totais da estrutura.

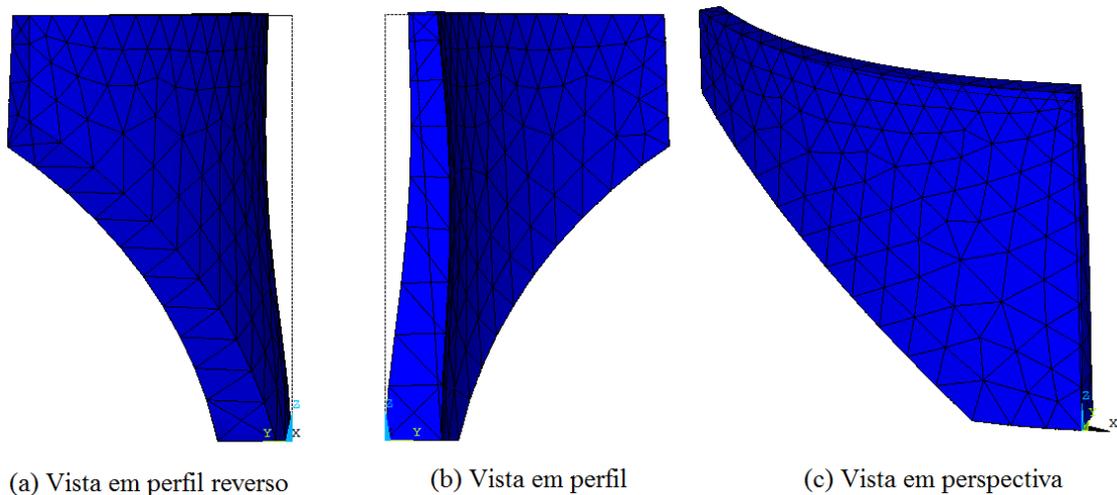


Figura 5.45 - Deformada da estrutura de barragem em arco com espessura variável

Os deslocamentos totais no corpo da barragem (Figura 5.46) se comportam de forma semelhante ao caso anteriormente analisado, cujos valores máximos estão situados na zona próxima à altura média da barragem. Da mesma forma, as tensões verticais máximas à

montante (σ_{yM}) e à jusante (σ_{yJ}) estão situadas na base da barragem, caracterizando zonas críticas na consideração das trações e compressões da barragem de concreto, respectivamente, conforme ilustram as Figuras 5.47 e 5.48.

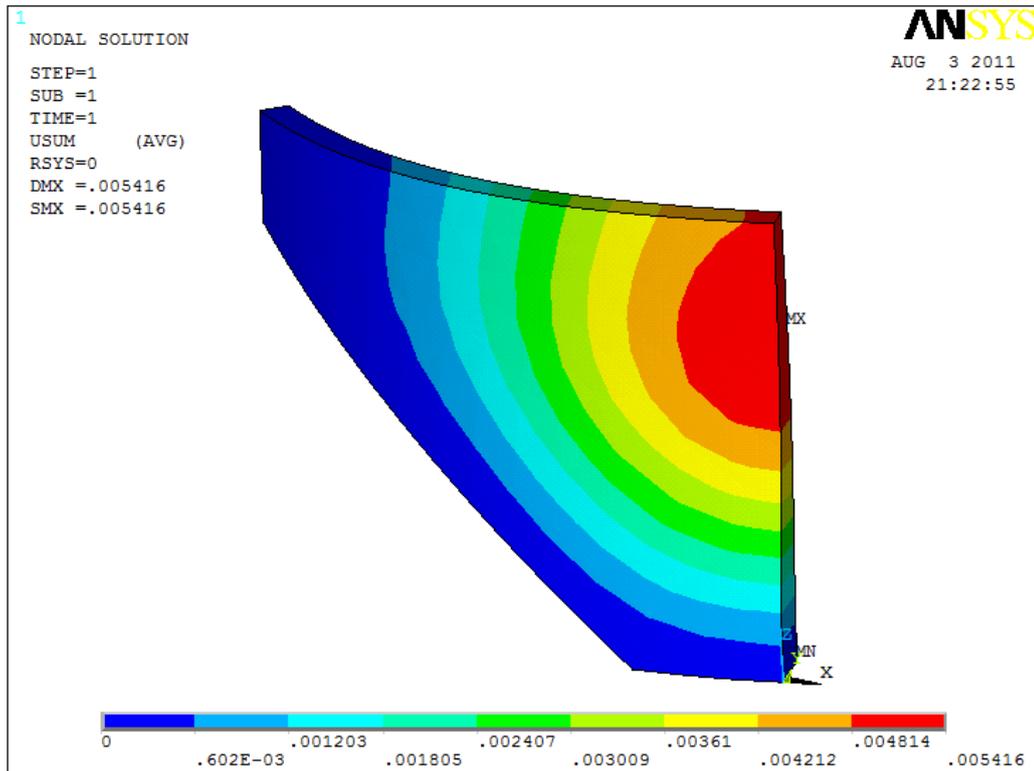


Figura 5.46 - Deslocamentos totais estrutura via elementos finitos (valores em metro)

Para as tensões verticais à montante - σ_{yM} (Figura 5.47), o valor máximo de tração é dado na base da barragem, e para as tensões verticais à jusante - σ_{yJ} (Figura 5.48), este é dado à meia altura da barragem. Portanto, estas duas zonas podem ser ditas como críticas e mais propícias à abertura de fissuras de tração. Para as tensões verticais de compressão, a face à montante tem valor máximo na zona próxima à meia altura, e a face à jusante tem valor máximo na base da barragem. Portanto, estas duas zonas estão mais propícias a uma possível ruptura por esmagamento do concreto, que ocorreria primeiramente na base em virtude do maior valor apresentado.

Fora observado que a tensão máxima de compressão ($\sigma_y = 4,11$ MPa) que ocorre na base à jusante da barragem (Figura 5.48), é equivalente a 29,8 % da tensão admissível do concreto. Desta forma, pode-se notar a tendência de alívio de tensões na base à jusante da barragem quando esta apresentar variação de espessura ao longo de sua altura.

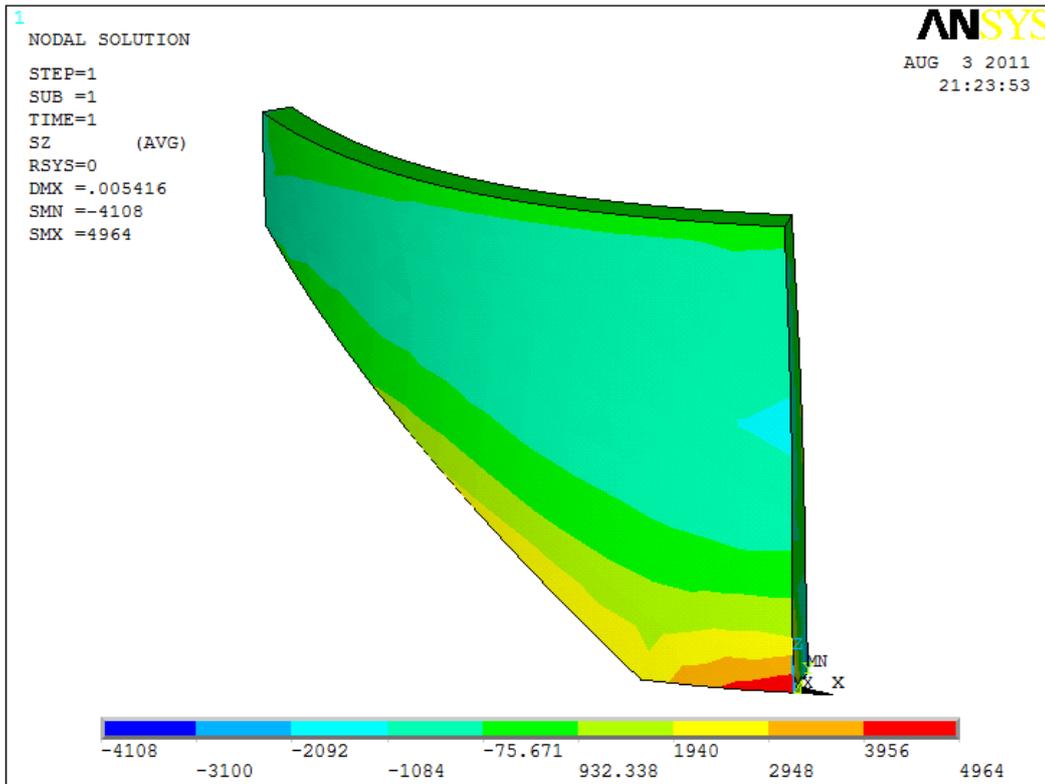


Figura 5.47 - Tensões verticais à montante (σ_{yM} – kPa) via elementos finitos barragem espessura variável

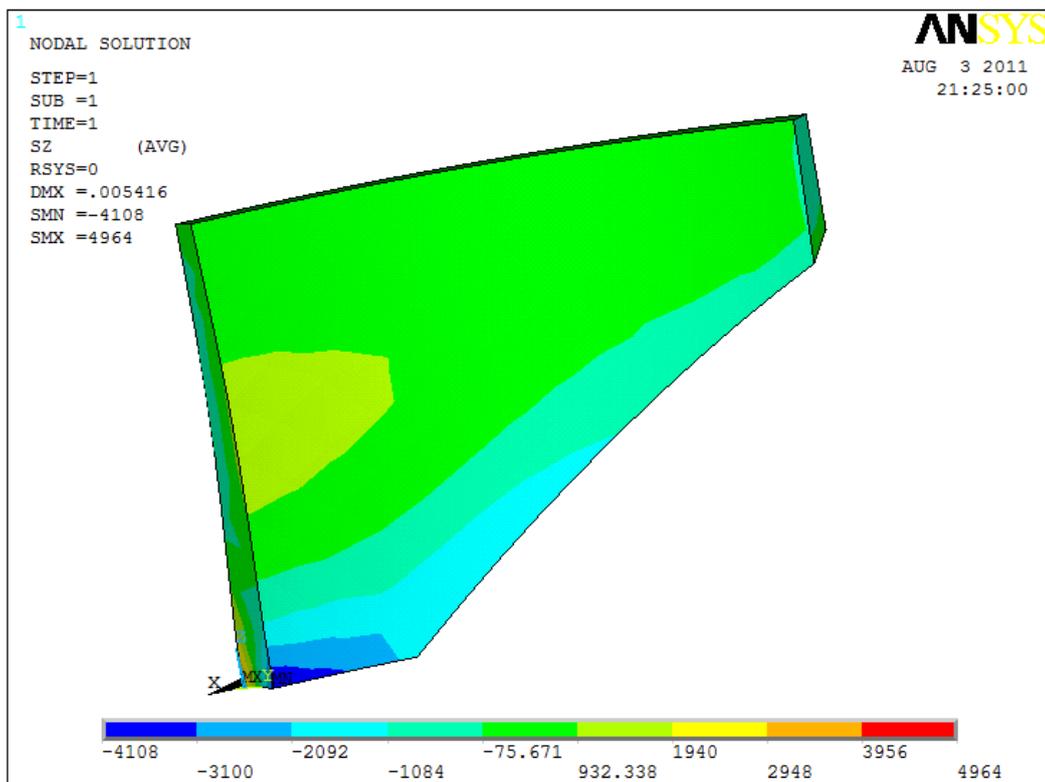


Figura 5.48 - Tensões verticais à jusante (σ_{yJ} – kPa) via elementos finitos barragem espessura variável

Caso 11 – Aplicação a um estudo de caso real – Barragem de teste Stevenson Creek

Considerando-se a Barragem Stevenson Creek discretizada por elementos finitos sólidos, a Malha 4 do estudo de validação, analisar-se-ão os deslocamentos radiais (Figura 5.49), as tensões verticais à montante (Figura 5.49) e à jusante (Figura 5.50) sendo todas estas grandezas estudadas na seção central da barragem.

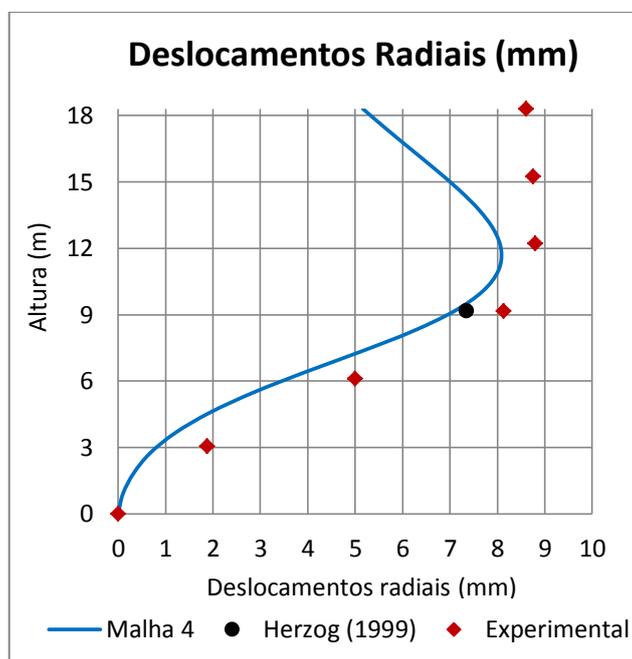


Figura 5.49 - Deslocamentos radiais (w) seção central Barragem Stevenson Creek

O comportamento da seção central estudada em termos de deslocamentos radiais apesar de, a priori, possuir um comportamento discrepante em relação ao valor experimental, acima da meia altura da barragem, em uma análise mais atenta pode-se notar que a malha estudada é capaz de representar com certo grau de acurácia o comportamento da estrutura, uma vez que os deslocamentos evoluem de forma semelhante ao resultado experimental até a meia altura da barragem, e acima desta meia altura há uma maior diferença entre valores numéricos e experimentais, que é de aproximadamente três milímetros exatamente na crista da barragem. O valor de deslocamento obtido com o cálculo analítico usando a teoria aproximada de cascas se mostra em total concordância com os valores experimentais e numéricos, o que reafirma a hipótese levantada de que tal formulação está melhor adaptada às formas de barragens de espessura variável (mais próximas da realidade). Os valores numérico, experimental e da teoria aproximada à meia altura da barragem são de 7,15 mm, 8,13 mm e 7,58 mm, respectivamente. Observa-se que as diferenças entre os modelos até a

meia altura da barragem são mínimas se compararmos às grandezas envolvidas, com apenas 1 mm de diferença para uma estrutura de 18,30 m de altura.

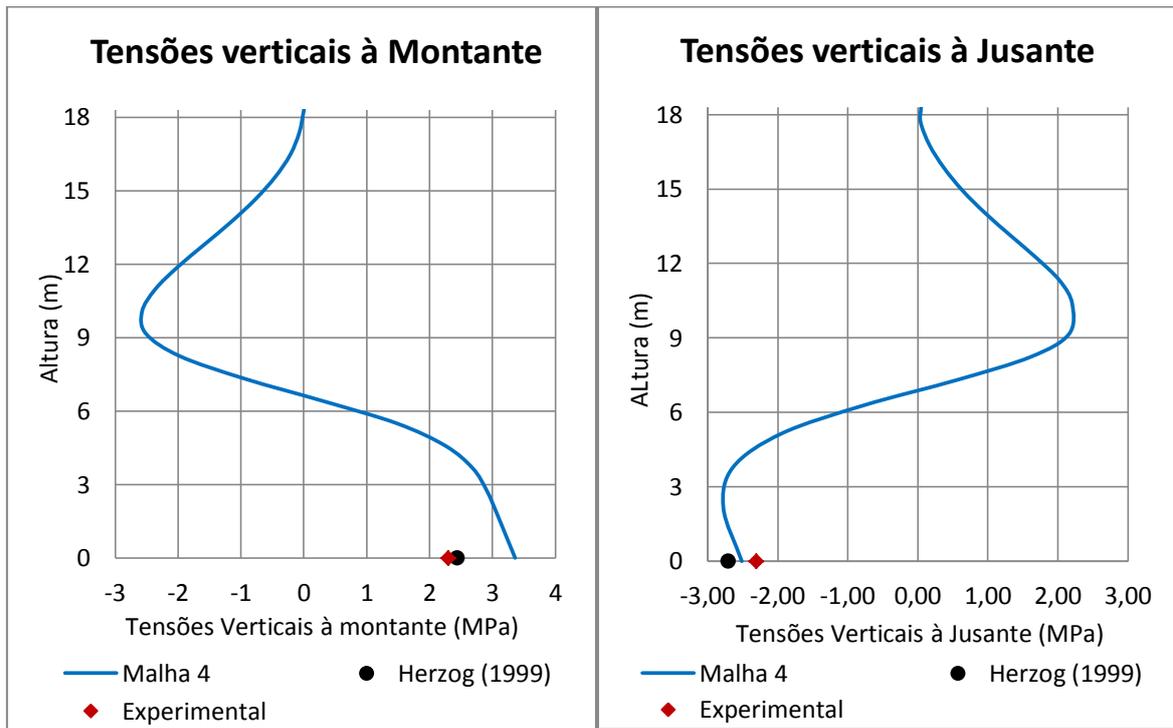


Figura 5.50 - Tensões verticais σ_{yM} e σ_{yJ} na seção central Barragem Stevenson Creek

As tensões verticais à montante (σ_{yM}) e à jusante (σ_{yJ}) ilustradas na Figura 5.50 também mostram uma boa concordância entre os resultados numéricos e a análise aproximada de cascas segundo Herzog (1999).

As figuras a seguir ilustram o comportamento global da estrutura em termos de deformada (Figura 5.51), deslocamentos totais (Figura 5.52) e tensões verticais à montante (Figura 5.53) e à jusante (Figura 5.54). Observa-se um comportamento semelhante aos casos das barragens anteriormente ilustradas, cujos valores de deslocamentos máximos estão localizados ligeiramente superiores à altura média da barragem e as tensões máximas de tração e compressão na base desta. Sendo assim, pode-se dizer que o comportamento da estrutura, para as tensões verticais à jusante, a zona crítica é a base da barragem, sendo portanto a zona mais propícia ao aparecimento de fissuras de tração.

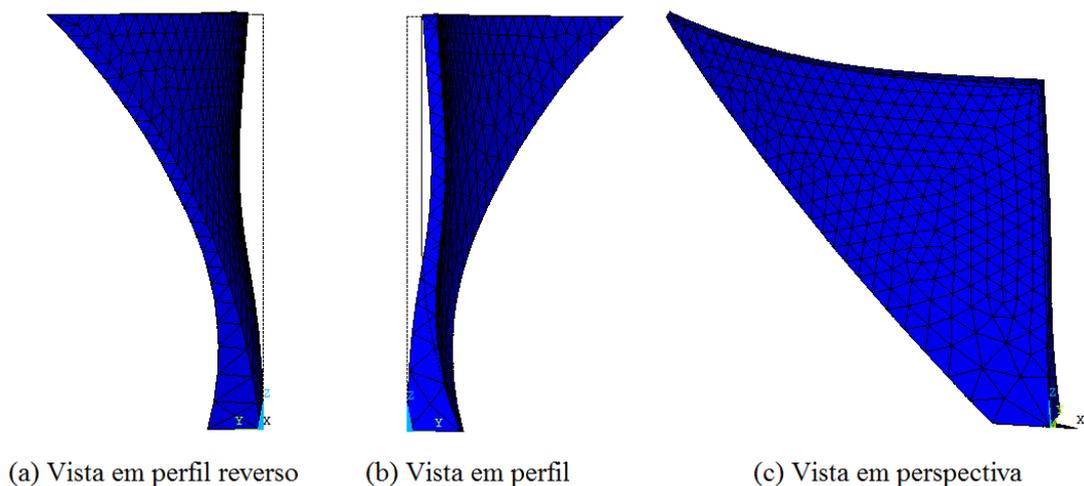


Figura 5.51 - Deformada Barragem Stevenson Creek

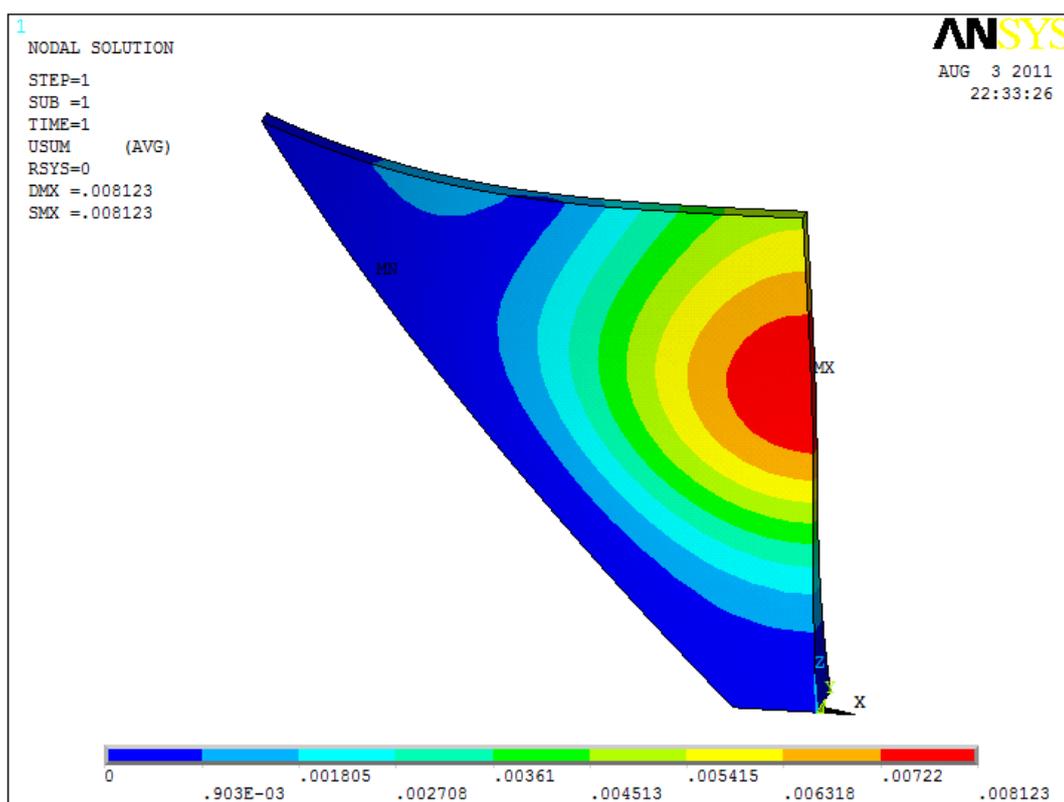


Figura 5.52 - Deslocamentos totais via elementos finitos da Barragem Stevenson Creek

Novamente, pode-se notar que o comportamento da barragem segue os mesmos observados nos casos de barragem anteriormente ilustrados. Desta forma, define-se que em relação às tensões verticais de tração a zona da base da barragem à montante (Figura 5.53) é a mais relevante e em relação às tensões verticais de compressão, a base da face à jusante (Figura 5.54) é mais relevante. Nota-se que as tensões de compressão máxima à montante ($\sigma_{yM} = 3,228$ MPa) e à jusante ($\sigma_{yJ} = 3,228$ MPa) representam apenas 25 % da tensão

admissível do concreto. Isto representa uma elevada margem de segurança se considerarmos apenas a ação do carregamento hidrostático em uma análise estática.

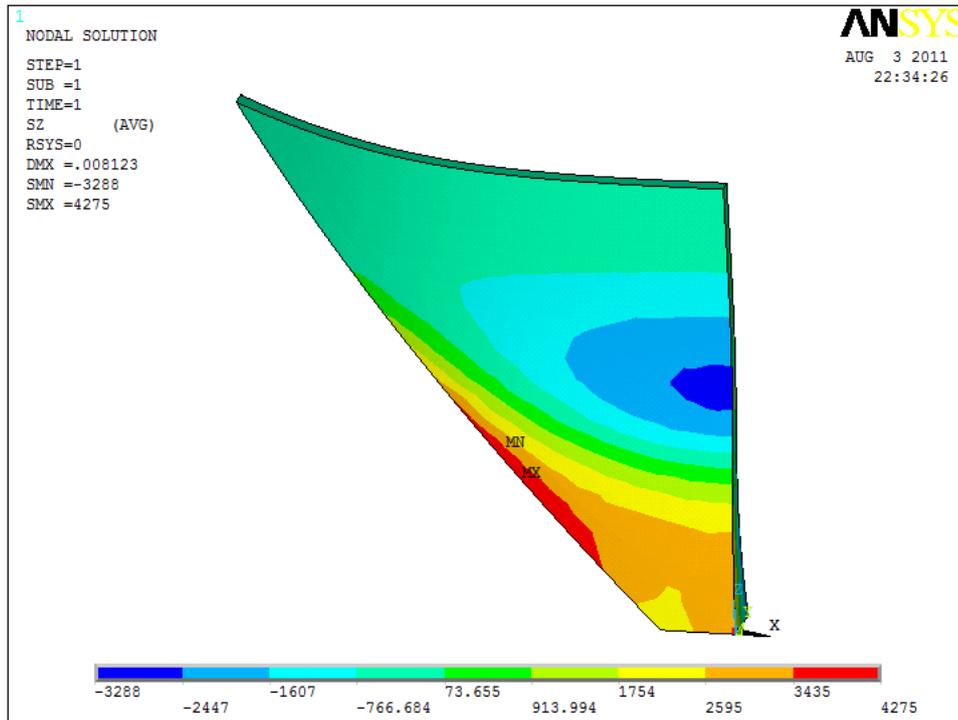


Figura 5.53 - Tensões verticais à montante (σ_{yM} – kPa) via elementos finitos da Barragem Stevenson Creek

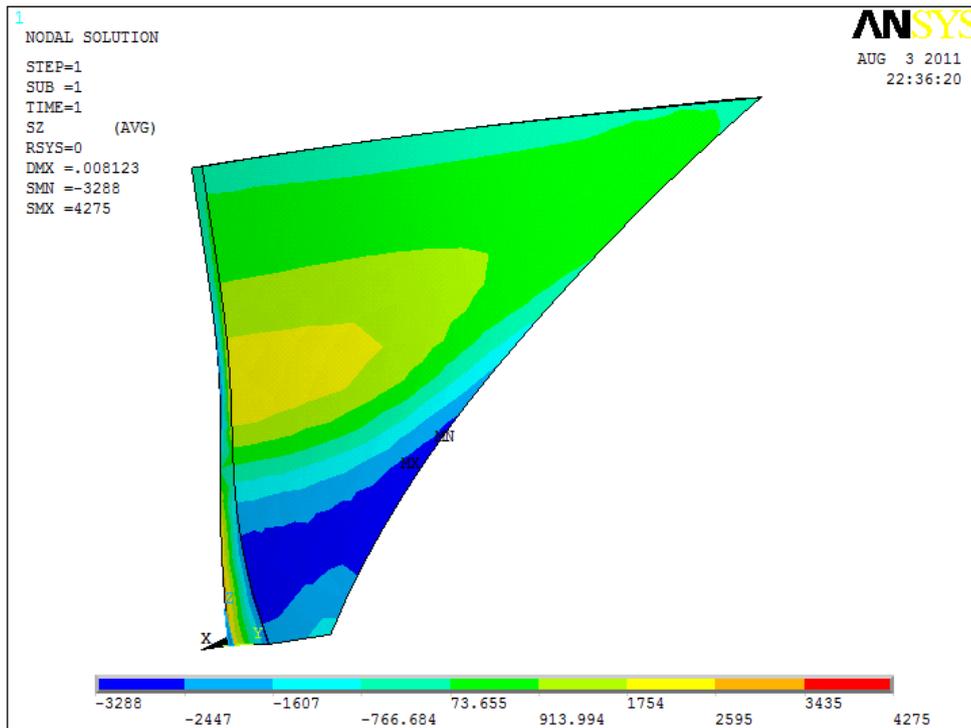


Figura 5.54 - Tensões verticais à jusante (σ_{yJ} – kPa) via elementos finitos da Barragem Stevenson Creek

6 CONCLUSÕES, PERSPECTIVAS E RECOMENDAÇÕES

São destacadas aqui as conclusões obtidas em cada um dos estudos analíticos e numéricos realizados e as sugestões para trabalhos futuros.

6.1 SÍNTESE DA DISSERTAÇÃO E CONCLUSÕES GERAIS

Neste trabalho, foram estudados alguns casos de cascas das quais foram feitas diversas aplicações analíticas, utilizando-se da teoria de membrana e teoria flexional para cascas cilíndricas, e método das forças para o tratamento de acoplamento entre cascas e/ou elementos especiais, além da teoria aproximada de cascas cilíndricas. Também foram elaboradas aplicações numéricas e testes com os elementos finitos da biblioteca do programa ANSYS 11.0, sendo o elemento SHELL 63 utilizado nas análises de cascas cilíndricas e no acoplamento entre casca e placa de fundo. O elemento SHELL 93 foi utilizado nas análises de cascas abatidas, e os elementos SHELL 43 e SHELL 63 para a análise do Caso 8, modelo proposto por Huang Wen-Xi (1965) considerando este como sendo casca espessa e a posteriori como sendo casca esbelta. O elemento SOLID 95 foi aplicado na obtenção das respostas numéricas dos três casos de barragens em arco ilustrados. Todos os elementos aplicados foram validados de modo que os resultados gerais demonstram o bom desempenho de cada elemento.

O tratamento analítico e numérico de cascas cilíndricas isoladas sob as condições de contorno dos casos 1 e 2 se mostram com grande eficiência. Desta forma, para análises numéricas seguindo a relação de malha exposta com o grau de refinamento, obtido do gerador de malhas automático do ANSYS de *SMART SIZE 1*, os resultados podem ser obtidos com grande confiabilidade. Para os casos 3, 4 e 5 que levam em consideração o acoplamento entre casca cilíndrica e uma placa circular de fundo deve-se destacar a importância da ligação da parede do reservatório com a laje de fundo, em que a teoria analítica prevê esforços e momentos na direção meridional ao longo da altura da casca sem qualquer influência da placa e da espessura desta. No entanto, numericamente foi comprovado que esta placa interfere diretamente nos esforços normais (N_θ e N_ϕ) e momentos na direção meridional (M_ϕ) gerando uma zona de perturbação ligeiramente superior à espessura da placa circular e que logo se atenua, evoluindo da forma prevista pela teoria analítica. Apesar deste assunto ter sido tratado apenas de forma inicial para o entendimento da evolução dos esforços e deslocamentos na estrutura, notou-se que a

consideração do acoplamento entre cascas e/ou elementos especiais merece uma atenção especial nestas zonas de ligação, cujos efeitos ainda não foram totalmente investigados e elucidados. Contudo o elemento utilizado na análise numérica, seguindo a malha testada e descrita anteriormente, se mostrou capaz de representar de forma fiel o comportamento destas estruturas, uma vez que os resultados analíticos e numéricos apresentaram uma excelente correspondência entre si.

O esforço normal meridional (N_ϕ) presente na casca cilíndrica mostrou-se atuando de forma independente (desacoplada) dos outros esforços.

Os casos de cascas abatidas analisados neste estudo, como sendo parte intermediária aos testes da ferramenta computacional também se mostraram bastante coerentes com os resultados observados na literatura. No caso da casca abatida apoiada nas bordas curvas, um comportamento interessante de deslocamentos verticais fora observado junto ao eixo de simetria longitudinal em que, sob ação do peso próprio, esta zona se desloca para cima em virtude do deslocamento lateral, e para baixo nas bordas livres. Além disto, notou-se o aparecimento de momentos fletores negativos decorrentes da curvatura da casca. Quando foram consideradas as bordas retas engastadas e bordas curvas livres, notou-se que as zonas mais próximas às bordas livres pertencentes ao eixo de simetria longitudinal são menos rígidas, e portanto mais deformáveis, estando associado ao menor efeito de Poisson nas bordas livres, atuando de forma semelhante a arcos isolados. As malhas aqui apresentadas foram capazes de representar o comportamento destas estruturas com bons resultados.

Ainda servindo como estudo intermediário, o Caso 8 foi analisado para os testes finais de elementos e validações numéricas. Tal aspecto permitiu a passagem para o estudo de barragens em arco. Desta forma, uma das principais contribuições deste caso foi a certificação da utilização de diferentes simetrias e a certeza de que os resultados obtidos utilizando-se estas simetrias não influenciam na qualidade dos resultados.

Para todos os modelos de barragens em arco analisados, as respostas obtidas foram satisfatórias. O processo simplificado de Herzog (1999), oriundo de aproximações de cascas cilíndricas, e em partes de uma formulação empírica testada em diversas barragens, a priori se mostra melhor adaptado às formas de barragens reais, isto por que quando fora

considerado espessura constante da barragem (Caso 9), os resultados de deslocamentos e tensões à jusante destoaram dos demais valores. Isto pode estar associado à formulação empírica para o momento fletor tangencial (M_{yA}) da Equação 3.27, utilizado no cálculo dos deslocamentos. Contudo, apesar de apresentar valores maiores que os resultados numéricos, pode-se considerar que a teoria simplificada apresenta resultados razoáveis, que podem ser aplicados para prever de forma rápida e prática o comportamento de uma barragem em arco mesmo que de espessura constante.

Para o Caso 10 (Barragem de espessura com variação linear), notou-se uma melhora nos resultados em termos de deslocamentos radiais e tensões verticais à montante e à jusante, e para o Caso 11 (Barragem Stevenson Creek) esta melhora foi significativa, chegando a apresentar diferenças de deslocamentos radiais menores que um milímetro, comparando-se com o modelo numérico e experimental; e resultados de tensões verticais à montante e à jusante com boas aproximações. Portanto, pode-se afirmar que as expressões de Herzog (1999) se mostram melhor adaptadas para o uso em barragens com espessura variável, representando casos mais realistas a este tipo de estrutura.

Notou-se que a espessura da barragem influencia sensivelmente na geração de momentos fletores tangenciais no corpo da barragem, em que tomando o Caso 9, que se trata de um modelo uma casca espessa, os valores de momentos fletores tangenciais à meia altura da barragem se apresentam com comportamento semelhante ao observado em um arco isolado. Por outro lado, nos casos de cascas esbeltas, os momentos fletores tangenciais são atenuados à uma distância de λ_x sendo relevantes nas zonas próximas às ombreiras. Tal comportamento é esperado para a barragem Stevenson Creek, contudo a mensuração destes momentos fletores não foi possível uma vez que somente foi feita a análise com modelo sólido de elementos finitos.

O modelo numérico apresentado para as barragens em arco, apesar de considerar as zonas engastadas no vale como sendo perfeitamente rígidas, quando na verdade não são em virtude da rocha de fundação ser deformável, apresentam resultados próximos dos modelos mais refinados. Estes modelos, além de confiáveis, podem ser usados em estudos iniciais de barragens reais. Todavia, em projetos reais e finais, deve-se considerar toda a fundação seguindo os preceitos de normas e experiências de “*Bureaux*” de projeto.

Notou-se que as barragens em arco possuem comportamentos semelhantes em relação ao desenvolvimento de deslocamentos radiais (w), tensões verticais à montante (σ_{yM}) e tensões verticais à jusante (σ_{yJ}), em que para todos os modelos estudados, os deslocamentos máximos situavam-se em zonas próximas à meia altura; para as tensões verticais à montante (σ_{yM}) os valores máximos de tração situavam-se na base da barragem e valores de máximos de compressão à meia altura da barragem; e para as tensões verticais à jusante (σ_{yJ}) os valores máximos de tração situam-se à meia altura da barragem e valores de compressão na base da barragem. Desta forma, pode-se concluir que as primeiras fissuras de tração podem ocorrer na base da barragem junto da face à montante e posteriormente a meia altura na face à jusante da estrutura.

Os valores de tensão vertical máximos à jusante (σ_{yJ}) se mostraram máximos na base da barragem correspondendo em 45% do valor da tensão admissível do concreto para o caso de barragem com espessura constante ao longo de sua altura. Já para os casos de espessura variando ao longo da altura este valor cai para menos de 30%, representando as formas mais favoráveis à construção devido o alívio de tensões gerados por esta geometria.

Para a barragem Stevenson Creek estudada, observou-se que as tensões de compressão máxima à montante ($\sigma_{yM} = 3,228$ MPa) e à jusante ($\sigma_{yJ} = 3,228$ MPa) representam apenas 25 % da tensão admissível do concreto quando considerada apenas a ação do carregamento hidrostático em uma análise estática.

Por fim, todos os resultados apresentados neste trabalho podem ser ditos como confiáveis e satisfatórios podendo ser usado como base para qualquer estudo futuro, inclusive aqueles apresentados para a barragem Stevenson Creek.

6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Pesquisas futuras que podem contribuir no desenvolvimento deste trabalho em direção a situações mais complexas ou ao aprimoramento das soluções apresentadas são citadas como propostas de sugestões para novos trabalhos:

- Estudo do acoplamento entre cascas e/ou elementos especiais nas zonas de ligação;
- Variação paramétrica em cascas abatidas para verificação do quanto a curvatura influencia nas respostas finais;

- Variação paramétrica dos modelos de barragens visando correlação com teoria aproximada de cascas;
- Estudo do efeito da temperatura ao longo do corpo da barragem;
- Estudo do comportamento estrutural com o volume de líquido diminuindo ou aumentando;
- Estudo do efeito dinâmico aplicado no corpo da barragem;
- Aperfeiçoamento do modelo numérico de barragens em arco simulando fundação;
- Análise de modelo constituído de elementos SHELL 63 para barragens de espessuras variáveis;
- Análise não-linear dos modelos de barragens;
- Estudo de modelos de barragens levando-se em consideração a interação Fluido-estrutura.

REFERÊNCIAS

- AGÊNCIA NACIONAL DE ENERGIA ELÉTRICA BRASIL (2008). Atlas de energia elétrica do Brasil. 3. ed. – Aneel. Brasília.
- Akbari, J. Ahmadi, M. T. Moharrami, H. (2011). Advances in concrete arch dams shape optimization. In: Applied Mathematical Modelling.
- Ansah, A. M. (1993). Analysis Of Arch Dams. In:Journal of Structural engineering, Vol. 119, No. 5. ASCE.
- Baker, E. H., Kovalevsky, L.; Rish, F. L. (1972). Structural Analysis of Shells. California, United States, McGraw-Hill.
- Beajoint (1965). New developments in traditional methods of analysis of arch dams. In: Theory of arch dams. Pergamon Press Ltd. Southampton University. April.
- Billington, D. P., Jackson, D. C., Melosi, M. V. (2005).The history of large federal dams: Planning, design, and construction In the era of big dams. U.S. Department of the Interior Bureau of Reclamation. Denver, Colorado.
- BRASIL. Lei nº 12.334, de 20 de setembro de 2010. Estabelece a Política Nacional de Segurança de Barragens e cria o Sistema Nacional de Informações sobre Segurança de Barragens. Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil, Brasília, DF, 20 set. 2010. Disponível em: <[http:// http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2007-2010/2010/Lei/L12334.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2007-2010/2010/Lei/L12334.htm)>. Acesso em 22 set 2010.
- BRASIL. Ministério de Minas e Energia. Plano Nacional de Energia 2030 - Ministério de Minas e Energia ; colaboração Empresa de Pesquisa Energética . Brasília : MME : EPE, 2007.
- Chanson, H., James, D.P. (2002). Historical Development of Arch Dams : from Cut-Stone Arches to Modern Concrete Designs. Australian Civil Engineering Transactions, Vol. CE43, p. 39-56.
- Chen, S., Xu, M., Shahrou, I., Egger, P.(2003). Analysis of Arch Dams Using Coupled Trial Load and Block Element Methods. In: Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, Vol. 129, No. 11, p. 977–986.ASCE.
- Clough, R. W., Tocher, J. T. (1965). Analysis of thin arch dams by the finite element method. In: Theory of arch dams. Southampton University. April.

- Costa, T.; Lança, R. (2001). Barragens. Escola superior de tecnologia Universidade do algarve - Área Departamental de Engenharia Civil Núcleo de Hidráulica e Ambiente. Portugal.
- Copen, M. D.(1965). Trial-Load analysis and its application to modern arch dam design. In: Theory of arch dams. Southampton University. April.
- Creager, P.; Justin, J. D.; Hinds, J. (1945). Engineering for dams. Vol. II – Concrete Dams.
- Delgado, A.H., Márquez, L. (2009). Modelling of an arch dam by polynomial interpolation. In: Mathematics and Computers in Simulation 79. p. 3434–3443.
- Del Nero, J. A. Cascas. Apostila preparada pelo Prof. João Antonio del Nero.
- Dias da Silva, V., Júlio, E. N. B. S. (1997). Computation Of Membrane Shapes And Analysis Of Arch Dams. Department of Civil Engineering, University of Coimbra. In: Computers & Structures. Vol. 64, No. 1-4. p. 849-855.
- ENGINEERING GUIDELINES FOR THE EVALUATION OF HYDROPOWER PROJECTS. (1999). Arch dams. Federal Energy Regulatory Commission Division of Dam Safety and Inspections. Washington, DC 20426.
- Feng, J., Wei, H., Jianwen, P., Jian,y., Jinting, W., Chuhan, Z. (2011).Comparative study procedure for the safety evaluation of high arch dams. In: Computers and Geotechnics 38. p. 306–317.
- Ferreira, L. C dos S. V. (2006). Revisão da literatura e métodos simplificados para análise de barragens em arco. Monografia. Universidade de Brasília, UnB.
- Flügge, W. (1973). Stresses in shells. New York. Springer, 525 p.
- Ganev, H. G. (1965). A new method of calculating arch dams as plates lying on na elastic foundation. In: Theory of arch dams. Southampton University. April.
- Gravina, P. B. J. (1957). Teoria e Cálculo das Cascas: Cascas de Revolução. 1.ed. São Paulo: Escolas Profissionais Salesianas.
- Guimarães, A. E. P. (1995). Indicações para projeto e execução de reservatórios cilíndricos em concreto armado. Dissertação de Mestrado – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- Herzog, M. (1962). Constant angle arch dams analysed with the theory of shells. In: Theory of arch dams. Southampton University. April.
- Herzog, M. A .M.(1999). Practical dam analysis. London.
- Huang Wen-Xi (1965). Analysis of the structural action of arch dams, shells and plates. In: Theory of arch dams. Southampton University. April.

- ICOLD. (2008). As barragens e a água do mundo - Um livro educativo que explica como as barragens ajudam a administrar a água do mundo.
- INTERNATIONAL COMMISSION ON LARGE DAMS (1995). Dam Failures. Statistical Analysis. Bulletin 99. Paris: International Commission On Large Dams, 63p.
- Key Developments in the History of Arch Dams. Disponível em: http://simscience.org/cracks/advanced/arch_hist1.html . Acesso em: 25 nov. 2011.
- Kottenstette, J.T. (1997). Block Theory Techniques Used In Arch Dam Foundation Stability Analysis. In: Int. J. Rock Mech. & Min.. Sci. Vol. 34, No. 3-4, ISSN 0148-9062.
- Lan, S., Yang, J. (1997). Nonlinear finite element analysis of arch dam - I. Constitutive relationship. In: Advances in Engineering Software 28. p. 403-408.
- Lan, S., Yang, J. (1997). Nonlinear finite element analysis of arch dam - II. Nonlinear analysis. In: Advances in Engineering Software 28. p. 409-415.
- Li, S., Chen, Y., Li, J., Yang, J. (2000). The new method of arch dam stress calculation and the application of GTSTRUDL CAE/CAD system. In: Advances in Engineering Software 31. p. 303-307.
- Li, X., Romo, M. P., Avilés J. L.(1996). Finite Element Analysis Of Dam-Reservoir Systems Using An Exact Far-Boundary Condition . In: Computers & Structures Vol. 60, No. 5, p. 751-762.
- Lima Junior, E. T.(2006). Formulação do método dos elementos de contorno para análise de cascas abatidas. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo.
- Lima Junior, E. T e Venturini W. S.(2010). Formulação do método dos elementos de contorno para análise de cascas abatidas. Cadernos de Engenharia de Estruturas, São Carlos, v. 12, n. 54, p. 1-15.
- Love, A. E. H.(1944). A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 1st edn, Cambridge University Press, 1892; 4th. edn, Dover, New York.
- Lustosa, I. A.(2011). Um estudo comparativo analítico-numérico de esforços e deslocamentos em cascas cilíndricas abertas ou com conexões de borda. xxiv, 164p. Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. Brasília, DF. 2011

- Meliço, J. A. G. (2010). Escolha De Formas De Barragens Abóbada. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa.
- Melo, C. A. E. (2009). Estudo do Acoplamento Comporta-Reservatório Sob Ações Sísmicas. xvii, 107p. Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.
- Menescal, R. de A.(2009). Gestão da segurança de barragens no Brasil : proposta de um sistema integrado, descentralizado, transparente e participativo. Brasília. Ed. do autor. 769 p.
- Mgalobelov, Y.B. (2008). Bearing Capacity of an Arch Dam. In: Power Technology and Engineering Vol. 42, No. 6, p. 16-30.
- Mccully, P.(2001). When Things Fall Apart: The Technical Failures Of Large Dams – In: Silenced Rivers: The Ecology And Politics Of Large Dams. Disponível em <<http://www.internationalrivers.org/files/srdamsafety.pdf>>. Acesso em 15 mar 2011.
- Oliveira, F.F. (2002) Análise de Tensões e Estabilidade Global de Barragens de Gravidade de Concreto. Dissertação de Mestrado, Publicação E.DM–015A/02, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, DF, 169p. Brasília.
- Pedroso, L.J. (2002). Barragens de concreto: Aspectos gerais e fundamentos do cálculo de tensões e da estabilidade baseado no Método da Gravidade. In: Apostila do mini-curso de extensão da Semana de Engenharia Civil. Brasília: Universidade de Brasília.
- Pedroso, L. J.(1998). Teoria de placas e cascas - uma abordagem analítica e numérica. Universidade de Brasília – UnB. Brasília – DF.
- Pedroso, L. J. (2011). “Manuscritos, Esquemas, Discussões e Notas de Seções de Orientações, 2010-2011”. In: Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil – PECC, Universidade de Brasília, Brasil.
- Perner, F., Oberhuber P.(2010). Analysis of arch dam deformations. In: Front. Archit. Civ. Eng. China. p. 102–108.
- Qiang, Y., YaoRu, L., YingRu, C., WeiYuan, Z. (2008). Deformation reinforcement theory and its application to high arch dams. In: Science in China Series E: Technological Sciences.Vol. 51, Supp. II, p. 32-47.
- Reissner, E. (1941). A new derivation of the equations of the deformation of elastic shells, Am J Math, vol. 63, No.1, p. 177–184.

- Ribeiro, P. M. V. (2006). Uma Metodologia Analítica para a Avaliação do Campo de Tensões em Barragens Gravidade de Concreto Durante Terremotos. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM – 003A/06, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 140p.
- Rodrigues, J. A.C., Cruz, M. V. (1965). Matrix analysis and programming of arches for radial, tangential and twist displacements. In: Theory of arch dams. Southampton University. April.
- Sanders, J.L.(1959). An Improved First Approximation Theory for Thin Shells, NASA.
- Sevim, B., Bayraktar, A., Altunışık, A.C., Adanur, S., Akköse, M.(2010). Dynamic Characteristics of a Prototype Arch Dam. In: Experimental Mechanics. DOI 10.1007/s11340-010-9392-9.
- Silva, S. F. da (2007). Interação dinâmica barragem-reservatório: modelos analíticos e numéricos. Tese de Doutorado em estruturas e construção civil. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 220p.
- Stamenkovic, A. (1965). Boundary conditions in the integral equations method of Analysing arch dams. In: Theory of arch dams. Southampton University. April.
- Swaminathan, K. V. (1965). Structural behaviour of arch dams on elastic foundation. In: Theory of arch dams. Southampton University. April.
- Teixeira, W.G. N.; De Hanai, J. B. (2002). Projeto e execução de coberturas em casca de concreto com forma de membrana pênsil invertida e seção tipo sanduíche. Cadernos de Engenharia de Estruturas. São Carlos, n. 19, p. 101-131.
- Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger, S. (1959). Theory of plates and shells. 2.nd. United States, McGraw-Hill.
- Tottenham, H., Desai, J. R. (1965). Approximate solutions in the shell theory of arch dams. In: Theory of arch dams. Southampton University. April.
- USBR (1977). Guide for preliminary design of arch dams. Denver. United States Department of the Interior – Bureau of Reclamation.
- USBR (1977). Design Criteria for Concrete Arch and Gravity Dams. Denver. United States Department of the Interior – Bureau of Reclamation.
- USACE (1994). Engineering and Design – ARCH DAM DESIGN. Department of the Army. U. S. Army Corps of Engineers. EM 1110-2-2201. Washington.

- Ventsel, E., Krauthammer, T. (2001). *Thin Plates and Shells: Theory, Analysis, And Applications*. New York, Basel.
- Veról, A. P. (2010). *Simulação da Propagação de Onda Decorrente de Ruptura de Barragem, Considerando a Planície de Inundação Associada a Partir da Utilização de um Modelo Pseudo-Bidimensional*. Dissertação de Mestrado - UFRJ/COPPE. Rio de Janeiro.
- Yang, H., Haynes, M., Winzenread, S., Okada, K. (1999). *The History of Dams*. UC Davis.
- Zienkiewicz, O.C., Taylor, R. L. (1967). *The Finite Element Method. Volume 2: Solid Mechanics*. Fifth edition. Butterworth-Heinemann.
- Zienkiewicz, O. C., Cheung, Y.K. (1965). Finite element method of analysis for arch dam shells and comparison with finite difference procedures. In: *Theory of arch dams*. Southampton University. April.
- Yu, X., Zhou, Y. F., Peng, S.Z. (2005). Stability analyses of dam abutments by 3D elasto-plastic finite element method: a case study of Houhe gravity-arch dam in In: *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences* 42. p. 415–430.
- Zerna, W. (1965). General review of mathematical aspects of arch dam analysis. In: *Theory of arch dams*. Southampton University. April.
- Zheng, D., Li, L., Huo, Z. (2010). Analysis of Ultimate Bearing Capacity of High Concrete Arch Dam with Cracks in Service Using Natural Vibration Frequency. In: *Earth and Space 2010: Engineering, Science, Construction, and Operations in Challenging Environments*. ASCE.
- Zheng, K., Tong-chun, L. (2010). Coupled Analysis Of Arch Dam Using Trial Load Technique And Displacement Compatibility-Based Finite Element Method. In: *Earth and Space: Engineering, Science, Construction, and Operations in Challenging Environments*. ASCE.

APÊNDICES

APÊNDICE A - OBTENÇÃO DOS ESFORÇOS E DESLOCAMENTOS NO ESTADO DE MEMBRANA PARA CASCAS CILÍNDRICAS

Considerando H , h , r como sendo a altura da parede do cilindro, espessura da parede do cilindro, e raio do cilindro respectivamente, ilustrados na Figura A.1 serão adotadas as equações resultantes extraídas de Timoshenko (1959) para esforços de membrana, conforme Equação A.1 abaixo.

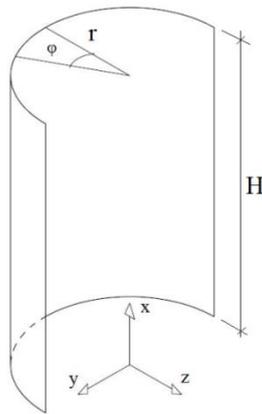


Figura A.1 - Convenções e eixos adotados na teoria de membrana

$$\begin{cases} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} = -X \\ \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} = -Y \\ N_{\theta} = -Zr \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Deste modo, sabendo que os valores de X , Y e Z correspondem aos carregamentos atuantes nas direções x , y e z respectivamente, a convenção de sinais está conforme a Figura A.1, de modo que o carregamento na direção x é considerado de baixo para cima, e por isso resulta em $-X$ na Equação A.1, da mesma forma, válido para as direções y e z .

Caso A.1 - Casca cilíndrica com carregamento constante atuante

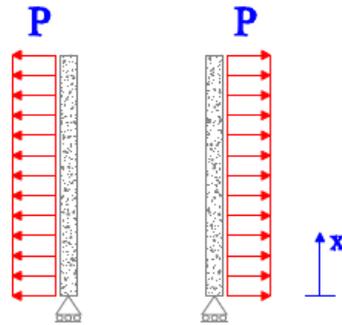


Figura A.2 - Casca cilíndrica com carregamento constante atuante

Carregamento atuante na direção $x - X = 0$

Carregamento atuante na direção $y - Y = 0$

Carregamento atuante na direção $z - Z \neq 0$

Considerando o carregamento atuante, e ainda sendo r o raio do cilindro, partindo da Equação A.1, tem-se:

$$N_{\theta} = -Zr = Pr \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial N_{\theta x}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} = -Y \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial N_{\theta x}}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = 0 \therefore N_x = C \text{ (constante)} \quad (\text{A.6})$$

Aplicando as condições de contorno: ($x = 0, N_x = 0$), resulta que $C = 0$ e portanto:

$$N_x = 0 \quad (\text{A.7})$$

Para o cálculo dos deslocamentos, considerar as equações de deformação A.8 e A.9 dadas a seguir:

$$\varepsilon_x = \frac{dv}{dx} \quad (\text{A.8})$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{2\pi w}{2\pi r} = \frac{w}{r} \quad (\text{A.9})$$

E das expressões vindas da lei de Hooke, inserindo A.2 e A.7, obtém-se:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{Eh} (N_x - \nu N_\theta) = \frac{1}{Eh} (-\nu Pr) = -\frac{\nu Pr}{Eh} \quad (\text{A.10})$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{Eh} (N_\theta - \nu N_x) = \frac{1}{Eh} (Pr) = \frac{Pr}{Eh} \quad (\text{A.11})$$

Para ε_x , igualando as Equações A.8 e A.10, obtém-se:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{\nu Pr}{Eh} \therefore v = -\frac{\nu Pr}{Eh} x + C \quad (\text{A.12})$$

Aplicando as condições de contorno ($x = 0$ e $v = 0$), resulta que $C = 0$, portanto:

$$v = -\frac{\nu Pr}{Eh} x + 0 \therefore v = -\frac{\nu Pr}{Eh} x \quad (\text{A.13})$$

Para ε_θ , igualando as Equações A.9 e A.11, obtém-se:

$$\frac{w}{r} = \frac{Pr}{Eh} \therefore w = \frac{Pr^2}{Eh} \quad (\text{A.14})$$

Sendo a rotação a derivada de w em função de x , tem-se:

$$\frac{dw}{dx} = 0 \quad (\text{A.15})$$

Caso A.2 - Casca cilíndrica com carregamento hidrostático atuante

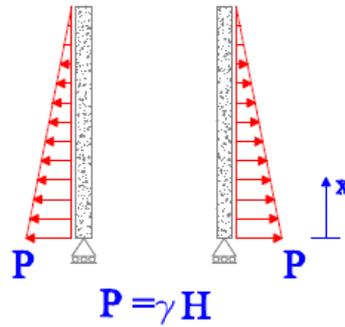


Figura A.3 - Casca cilíndrica com carregamento hidrostático atuante

Carregamento atuante na direção $x - X = 0$

Carregamento atuante na direção $y - Y = 0$

Carregamento atuante na direção $z - Z = -\gamma_a (H - x)$

Considerando o carregamento atuante, e partindo da Equação A.1, tem-se:

$$N_{\theta} = -Zr = \gamma_a r (H - x) \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\partial N_{\theta x}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} = -Y \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\partial N_{\theta x}}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = 0 \therefore N_x = C \text{ (constante)} \quad (\text{A.20})$$

Aplicando as condições de contorno: ($x = 0, N_x = 0$), resulta que $C = 0$ e portanto:

$$N_x = 0 \quad (\text{A.21})$$

Para o cálculo dos deslocamentos, considerar as equações de deformação A.8 e A.9 dadas anteriormente. E das expressões vindas da lei de Hooke, inserindo A.16 e A.21, obtém-se:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{Eh} (N_x - \nu N_\theta) = -\frac{\nu \gamma_a r}{Eh} (H - x) \quad (\text{A.22})$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{Eh} (N_\theta - \nu N_x) = \frac{\gamma_a r}{Eh} (H - x) \quad (\text{A.23})$$

Para ε_x , igualando as Equações A.8 e A.22, obtém-se:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{\nu \gamma_a r}{Eh} (H - x) \therefore v = -\frac{\nu \gamma_a r (Hx - \frac{x^2}{2})}{Eh} + C \quad (\text{A.24})$$

Aplicando as condições de contorno ($x = 0$ e $v = 0$), resulta que $C = 0$, e portanto:

$$v = -\frac{\nu \gamma_a r (Hx - \frac{x^2}{2})}{Eh} \quad (\text{A.25})$$

Para ε_θ , igualando as Equações A.9 e A.23, obtém-se:

$$\frac{w}{r} = \frac{\gamma_a r}{Eh} (H - x) \therefore w = \frac{\gamma_a r^2}{Eh} (H - x) \quad (\text{A.26})$$

Sendo a rotação a derivada de w em função de x , tem-se:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\gamma_a r^2}{Eh} \quad (\text{A.27})$$

Caso A.3 - Casca cilíndrica com carregamento constante atuando na borda

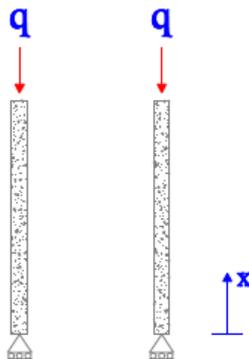


Figura A.4 - Casca cilíndrica com carregamento constante atuante na borda

Carregamento atuante na direção $x - X = -q$

Carregamento atuante na direção $y - Y = 0$

Carregamento atuante na direção $z - Z = 0$

De forma análoga aos casos anteriores, encontra-se:

$$N_{\theta} = -Zr = 0 \quad (\text{A.28})$$

$$N_x = q \quad (\text{A.29})$$

Para o cálculo dos deslocamentos, considerar as equações de deformação A.8 e A.9 dadas anteriormente. E das expressões vindas da lei de Hooke, inserindo A.28 e A.29, obtém-se:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{Eh} (N_x - \nu N_{\theta}) = \frac{1}{Eh} q \quad (\text{A.30})$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{Eh} (N_{\theta} - \nu N_x) = -\frac{\nu q}{Ee} \quad (\text{A.31})$$

Para ε_x , igualando as Equações A.8 e A.30, obtém-se:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{Eh} (q) \quad \therefore v = \frac{qx}{Eh} + C \quad (\text{A.32})$$

Aplicando as condições de contorno ($x = 0$ e $v = 0$), resulta que $C = 0$, e portanto:

$$v = \frac{qx}{Eh} \quad (\text{A.33})$$

Para ε_{θ} , igualando as Equações A.9 e A.31, obtém-se:

$$\frac{w}{r} = -\frac{\nu q}{Eh} \quad \therefore w = -\frac{\nu qr}{Eh} \quad (\text{A.34})$$

Sendo a rotação a derivada de w em função de x , tem-se:

$$\frac{dw}{dx} = 0 \quad (\text{A.35})$$

Caso A.4 - Casca cilíndrica com peso próprio

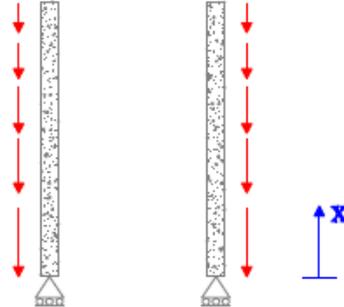


Figura A.5 - Casca cilíndrica com peso próprio atuante

Carregamento atuante na direção $x - X = -\gamma_c h (H - x)$

Carregamento atuante na direção $y - Y = 0$

Carregamento atuante na direção $z - Z = 0$

De forma análoga aos casos anteriores, encontra-se:

$$N_\theta = -Zr = 0 \quad (\text{A.36})$$

$$N_x = \gamma_c h (H - x) \quad (\text{A.37})$$

Para o cálculo dos deslocamentos, considerar as equações de deformação A.8 e A.9 dadas anteriormente. E das expressões vindas da lei de Hooke, inserindo A.36 e A.37, obtém-se:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{Eh} (N_x - \nu N_\theta) = \frac{1}{Eh} (\gamma_c h (H - x)) \quad (\text{A.38})$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{Eh} (N_\theta - \nu N_x) = -\frac{\nu}{Eh} (\gamma_c h (H - x)) \quad (\text{A.39})$$

Para ε_x , igualando as Equações A.8 e A.38, obtém-se:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{Eh} (\gamma_c h(H-x)) \therefore v = \frac{\gamma_c h \left(Hx - \frac{1}{2}x^2 \right)}{Eh} + C \quad (\text{A.40})$$

Aplicando as condições de contorno ($x = 0$ e $v = 0$), resulta que $C = 0$, e portanto:

$$v = \frac{\gamma_c \left(Hx - \frac{1}{2}x^2 \right)}{E} \quad (\text{A.41})$$

Para ϵ_θ , igualando as equações A.9 e A.39, obtém-se:

$$\frac{w}{r} = -\frac{v}{Eh} (\gamma_c h(H-x)) \therefore w = -\frac{vr}{E} (\gamma_c (H-x)) \quad (\text{A.42})$$

Sendo a rotação a derivada de w em função de x , tem-se:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{vr\gamma_c}{E} \quad (\text{A.43})$$

APÊNDICE B - MÉTODO DAS FORÇAS PARA CASCAS CILÍNDRICAS E ACOPLAMENTO ENTRE CASCAS E/OU ELEMENTOS ESPECIAIS

A Figura B.1 abaixo ilustra o sentido dos esforços hiperestáticos característicos da borda inferior de tubos considerados longos:

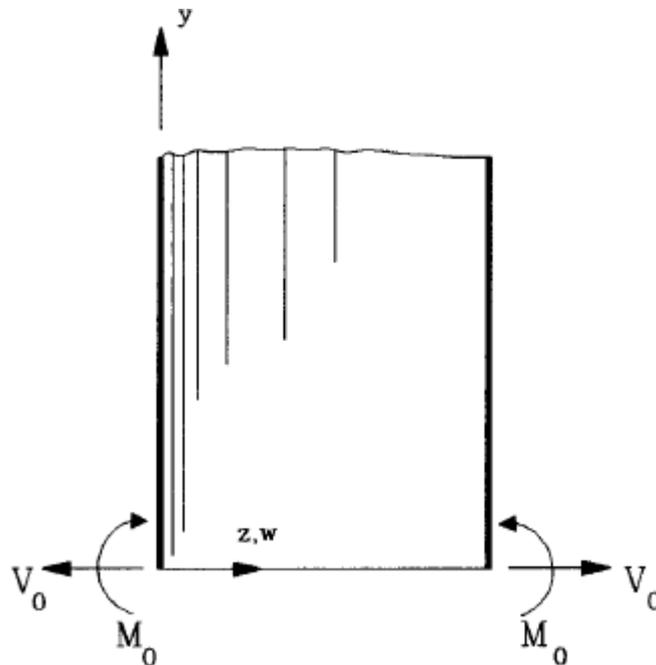


Figura B.1 - Deformabilidade de tubos longos (Guimarães, 1995)

Aplicando-se o P.T.V. (Princípio dos Trabalhos virtuais) podemos encontrar os deslocamentos e rotações relativas à aplicação unitária de cada esforço, denominados constantes elásticas e cuja obtenção está ilustrada em Lustosa (2011) e Guimarães (1995), de modo que as respostas são dadas por:

- 1) Aplicando uma força unitária X_1 na direção de V_0 com a mesma direção e sentido, determina-se:
 - O deslocamento na direção 1, devido à força X_1 :

$$\delta_{11} = \frac{1}{2\beta^3 D} \quad (\text{B.1})$$

- O deslocamento na direção 2, devido à força X_1 :

$$\delta_{21} = \frac{1}{2\beta^2 D} \quad (\text{B.2})$$

2) Aplicando um momento unitário X_2 na mesma direção e sentido de M_0 , determina-se:

– O deslocamento na direção 1, devido momento X_2 :

$$\delta_{12} = \frac{1}{2\beta^2 D} \quad (\text{B.3})$$

– O deslocamento na direção 2, devido momento X_2 :

$$\delta_{22} = \frac{1}{\beta D} \quad (\text{B.4})$$

Deve-se ainda considerar:

r: raio da casca cilíndrica e da placa circular;

h: espessura da placa e da casca quando $h_c = h_p$;

h_c : espessura da casca cilíndrica;

h_p : espessura da placa circular;

γ_a : peso específico da água, cujo valor é $\gamma_a = 10 \text{ KN/m}^3$;

q: carregamento distribuído ao longo da placa de fundo, sendo $q = \gamma_a H$.

Da convenção de sinais, deve-se considerar:

- H saindo da casca é positivo;
- M positivo quando causar tração nas fibras internas da casca;
- β positivo quando rotação ocorrer no sentido horário.

Caso 1 – Considerando a ligação da casca como uma articulação

Conforme a figura B.2 faz-se as seguintes considerações:

- Não há deslocamentos verticais na base da parede da casca;
- Deslocamentos radiais na base da casca são impedidos;

- Casca livre para rotacionar.

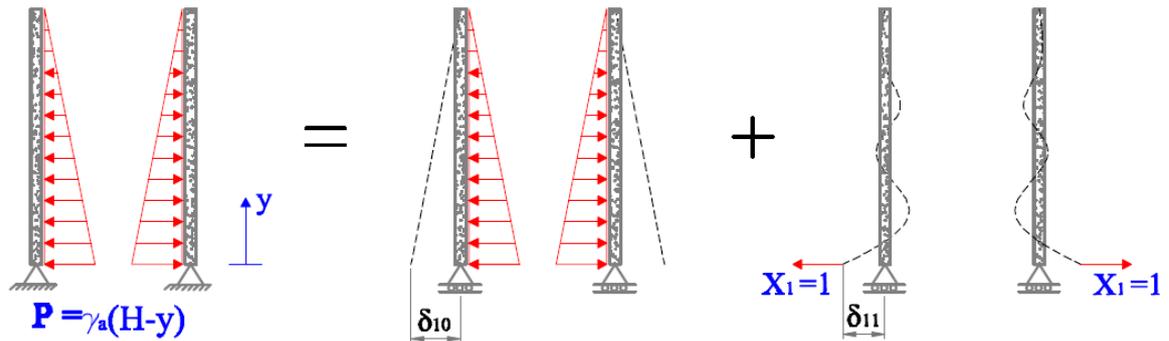


Figura B.2 - Casca cilíndrica em estado de membrana e com hiperestáticos atuando (Caso 1)

Considerando o carregamento externo atuando no estado de membrana e a atuação de apenas um hiperestático de acordo com a Figura B.2, e substituindo pelo valor da deformação no estado de membrana, ilustrado no Apêndice A para o carregamento hidrostático, e pela constante elástica dada em B.1, chegamos à equação de compatibilidade ilustrada em B.5:

$$\delta_{10} + \delta_{11}X_1 = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{\gamma_A r^2 H}{Eh} + \frac{1}{2\beta^3 D} X_1 = 0 \quad (\text{B.6})$$

$$X_1 = -\frac{2 \gamma_A r^2 \beta^3 D H}{E h} \quad (\text{B.7})$$

Pela equação geral de deslocamentos de uma casca cilíndrica, demonstrada em Guimarães (1995), e ilustrada na equação abaixo:

$$w = \frac{\gamma_a r^2 (H-y)}{E h} + \frac{1}{2 \beta^3 D} e^{-\beta y} V_o \cos \beta y + \frac{1}{2 \beta^3 D} \beta M_o e^{-\beta y} (\cos \beta y - \text{sen } \beta y) \quad (\text{B.8})$$

Em que o primeiro termo vem da solução de membrana, o segundo termo da aplicação do hiperestático X_1 e o terceiro termo da aplicação do hiperestático X_2 . Neste caso, como não há a aplicação do hiperestático X_2 , o último termo da equação desaparece, e a equação de

deslocamentos da casca cilíndrica com ligação articulada adquire a configuração ilustrada em B.9, de modo que o valor de V_0 deve ser atribuído como sendo igual a X_1 :

$$w = \frac{\gamma_a r^2 (H - y)}{E h} + \frac{1}{2 \beta^3 D} e^{-\beta y} V_0 \cos \beta y \quad (\text{B.9})$$

Sabendo que a rotação é a derivada da equação do deslocamento, tem-se que:

$$\frac{dw}{dy} = -\frac{\gamma_a r^2}{E h} - \frac{1}{2 \beta^2 D} V_0 e^{-\beta y} (\cos \beta y + \text{sen } \beta y) \quad (\text{B.10})$$

Para a obtenção dos esforços, devem ser consideradas as seguintes equações derivadas da equação dos deslocamentos dada em B.9, sendo:

$$\frac{d^2 w}{dy^2} = \frac{1}{\beta D} V_0 e^{-\beta y} \text{sen } \beta y \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{d^3 w}{dy^3} = \frac{V_0 e^{-\beta y}}{D} (\cos \beta y - \text{sen } \beta y) \quad (\text{B.12})$$

A partir destas equações derivadas, os esforços são facilmente determinados de modo que:

$$N_\theta = + \frac{E h}{r} w \quad (\text{B.13})$$

$$M_y = -D \frac{d^2 w}{dy^2} \quad (\text{B.14})$$

$$M_\theta = \nu M_y \quad (\text{B.15})$$

$$V_y = -D \frac{d^3 w}{dy^3} \quad (\text{B.16})$$

Caso 2 – Considerando a ligação da casca como um engaste perfeito

Considerando o carregamento externo atuando no estado de membrana e a atuação dos hiperestáticos X_1 e X_2 , de acordo com a Figura B.3, chegamos à equação de compatibilidade ilustrada em B.17:

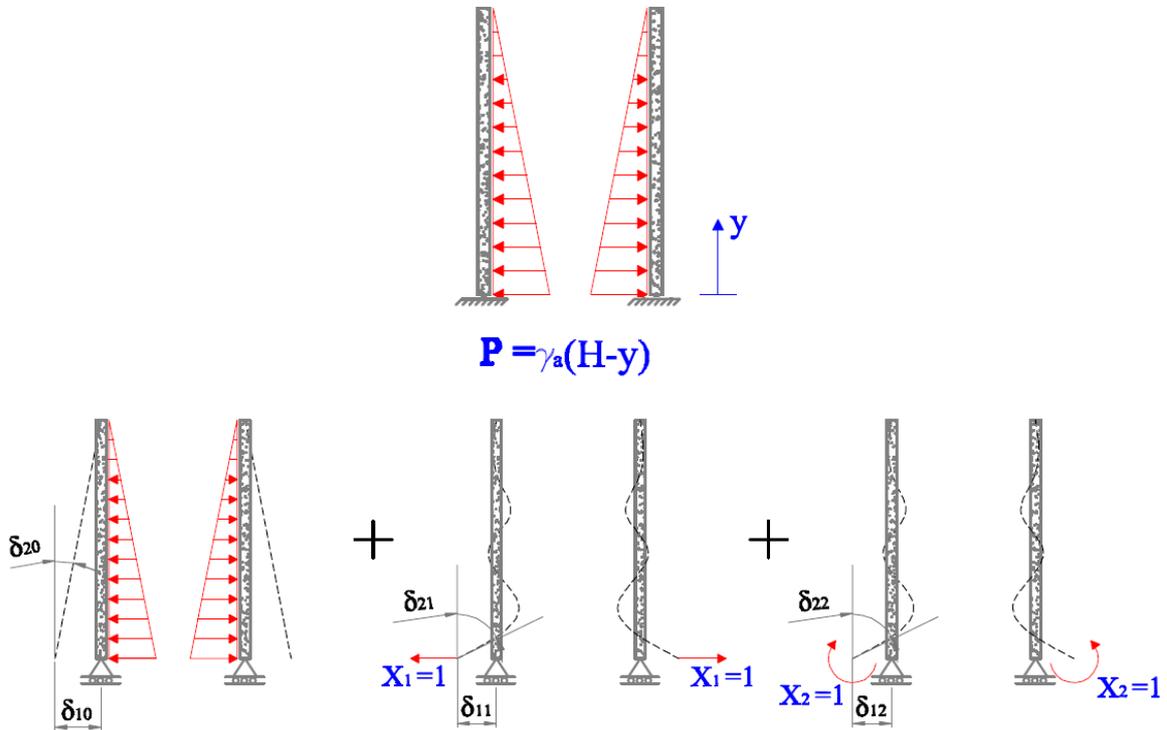


Figura B.3 - Casca cilíndrica em estado de membrana e com hiperestáticos atuando (Caso 2)

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

Substituindo pelo valor da deformação no estado de membrana, ilustrado no Apêndice A para o carregamento hidrostático, e pelas constantes elásticas dadas em B.1, B.2, B.3 e B.4, o sistema de equações dado em B.17 adquire a seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{\gamma_a r^2 H}{E h} + \frac{1}{2 \beta^3 D} X_1 + \frac{1}{2 \beta^2 D} X_2 = 0 \\ \frac{\gamma_a r^2}{E h} + \frac{1}{2 \beta^3 D} X_1 + \frac{1}{\beta D} X_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

Resolvendo o sistema de equações B.18, encontramos os valores de X_1 e X_2 , dados por:

$$X_1 = -\frac{4 \beta^3 D \gamma_a r^2 H + 2 \beta^2 D \gamma_a r^2}{E h} \quad (\text{B.19})$$

$$X_2 = \frac{2 \beta^2 D \gamma_a r^2 H - 2 \beta D \gamma_a r^2}{E h} \quad (\text{B.20})$$

Lembrando da equação geral de deslocamentos de uma casca cilíndrica:

$$w = \frac{\gamma_a r^2 (H-y)}{E h} + \frac{1}{2 \beta^3 D} e^{-\beta y} V_0 \cos \beta y + \frac{1}{2 \beta^3 D} \beta M_0 e^{-\beta y} (\cos \beta y - \text{sen } \beta y) \quad (\text{B.21})$$

Em que o primeiro termo vem da solução de membrana, o segundo termo da aplicação do hiperestático X_1 e o terceiro termo da aplicação do hiperestático X_2 , de modo que os valores de V_0 e M_0 , devem ser substituídos pelos hiperestáticos X_1 e X_2 , respectivamente. Desta forma os deslocamentos radiais são encontrados facilmente.

Sabendo que a rotação é a derivada da equação do deslocamento B.21, tem-se que:

$$\frac{dw}{dy} = -\frac{\gamma_a r^2}{E h} - \frac{1}{2 \beta^2 D} V_0 e^{-\beta y} (\cos \beta y + \text{sen } \beta y) - \frac{1}{\beta D} M_0 e^{-\beta y} \cos \beta y \quad (\text{B.22})$$

Para a obtenção dos esforços, devem ser consideradas as seguintes equações derivadas da equação dos deslocamentos dada em B.21, sendo:

$$\frac{d^2 w}{dy^2} = + \frac{[(V_0 + M_0 \beta) \text{sen } \beta y + M_0 \beta \cos \beta y] e^{-\beta y}}{\beta D} \quad (\text{B.23})$$

$$\frac{d^3 w}{dy^3} = - \frac{[(V_0 + 2 M_0 \beta) \text{sen } \beta y - V_0 \cos \beta y] e^{-\beta y}}{D} \quad (\text{B.24})$$

A partir destas equações derivadas, os esforços são facilmente determinados substituindo os valores obtidos para este caso nas equações B.13, B.14, B.15 e B.16 ilustradas anteriormente.

Caso 3 – Considerando a ligação da casca com uma placa rígida axialmente com rotação livre

Considerando o carregamento externo atuando no estado de membrana e a atuação dos hiperestáticos X_1 e X_2 , de acordo com a Figura B.4 chegamos à seguinte equação de compatibilidade ilustrada em B.25:

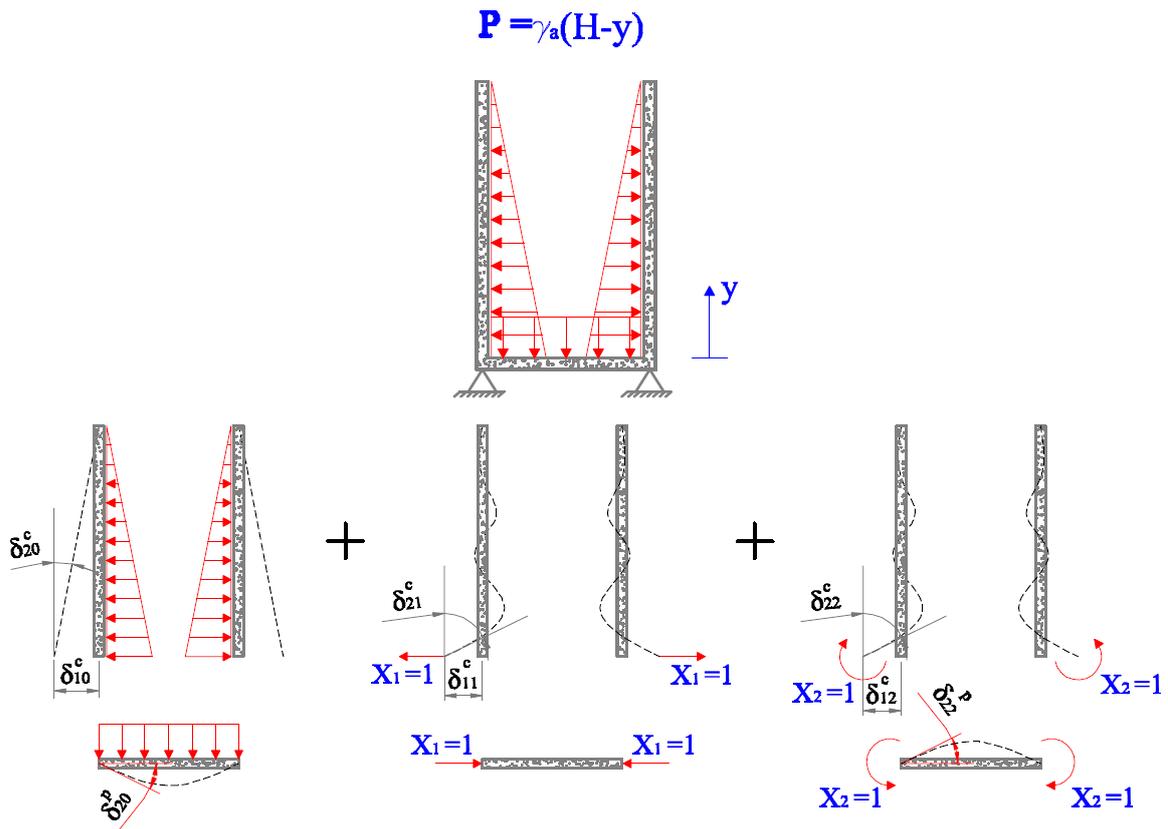


Figura B.4 - Casca cilíndrica e placa em estado de membrana e com hiperestáticos atuando (Caso 3)

$$\begin{cases} \delta_{10}^c + \delta_{11}^c X_1 + \delta_{12}^c X_2 = 0 \\ \delta_{20}^c + \delta_{21}^c X_1 + \delta_{22}^c X_2 = +\delta_{20}^p - \delta_{22}^p X_2 \end{cases} \quad (B.25)$$

Considerando o deslocamento e rotação que surgem na placa com a aplicação dos hiperestáticos unitários, respectivamente:

$$\delta_{20}^p = \frac{3qr^3(1-\nu)}{2Eh_p} \quad (\text{B.26})$$

$$\delta_{22}^p = \frac{12r(1-\nu)}{Eh_p^3} \quad (\text{B.27})$$

Considerando ainda a espessura da casca cilíndrica igual à espessura da placa circular ($h_c = h_p$), conseqüentemente $D_p = D_c$, de modo que:

$$D_c = D_p = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (\text{B.28})$$

Substituindo o valor da deformação no estado de membrana, ilustrado no Apêndice A para o carregamento hidrostático, e as constantes elásticas dadas em B.1, B.2, B.3 e B.4, além dos valores para a placa ilustrados em B.26 e B.27, o sistema de equações dado em B.25 adquire a seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{\gamma_a r^2 H}{Eh} + \frac{1}{2\beta^3 D_c} X_1 + \frac{1}{2\beta^2 D_c} X_2 = 0 \\ \frac{\gamma_a r^2}{Eh} + \frac{1}{2\beta^2 D_c} X_1 + \frac{1}{\beta D_c} X_2 = \frac{qr^3}{8D_p(1+\nu)} - \frac{r}{D_p(1+\nu)} X_2 \end{cases} \quad (\text{B.29})$$

Resolvendo o sistema de equações B.29, encontramos os valores dos hiperestáticos X_1 e X_2 , dados por:

$$X_1 = -\frac{1}{4} \frac{\{16[H\beta^2 r + H(1+\nu)\beta - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\nu]\gamma_a D(1+\nu) + qrEh(1+\nu)\}\beta^2 D r^2}{EhD(1+\nu)(1+\nu+2r\beta)} \quad (\text{B.30})$$

$$X_2 = \frac{1}{4} \frac{(1+\nu)\beta D[(-8+8H\beta)\gamma_a D(1+\nu) + qrEh]r^2}{EhD(1+\nu)(1+\nu+2r\beta)} \quad (\text{B.31})$$

Lembrando da equação geral de deslocamentos de uma casca cilíndrica ilustrado anteriormente pela equação B.21, os valores de V_0 e M_0 , devem ser substituídos pelos hiperestáticos X_1 e X_2 , respectivamente. Desta forma os deslocamentos radiais na casca cilíndrica são encontrados facilmente. De forma análoga, devem ser consideradas também as Equações B.22, B.23 e B.24 para a partir destas equações derivadas, os esforços serem

determinados substituindo os valores obtidos para este caso nas Equações B.13, B.14, B.15 e B.16 ilustradas anteriormente.

Caso 4 – Considerando a ligação da casca com uma placa axialmente elástica com rotação livre

Considerando o carregamento externo atuando no estado de membrana e a atuação dos hiperestáticos X_1 e X_2 , de acordo com a Figura B.5 chegamos à seguinte equação de compatibilidade, ilustrada em B.32:

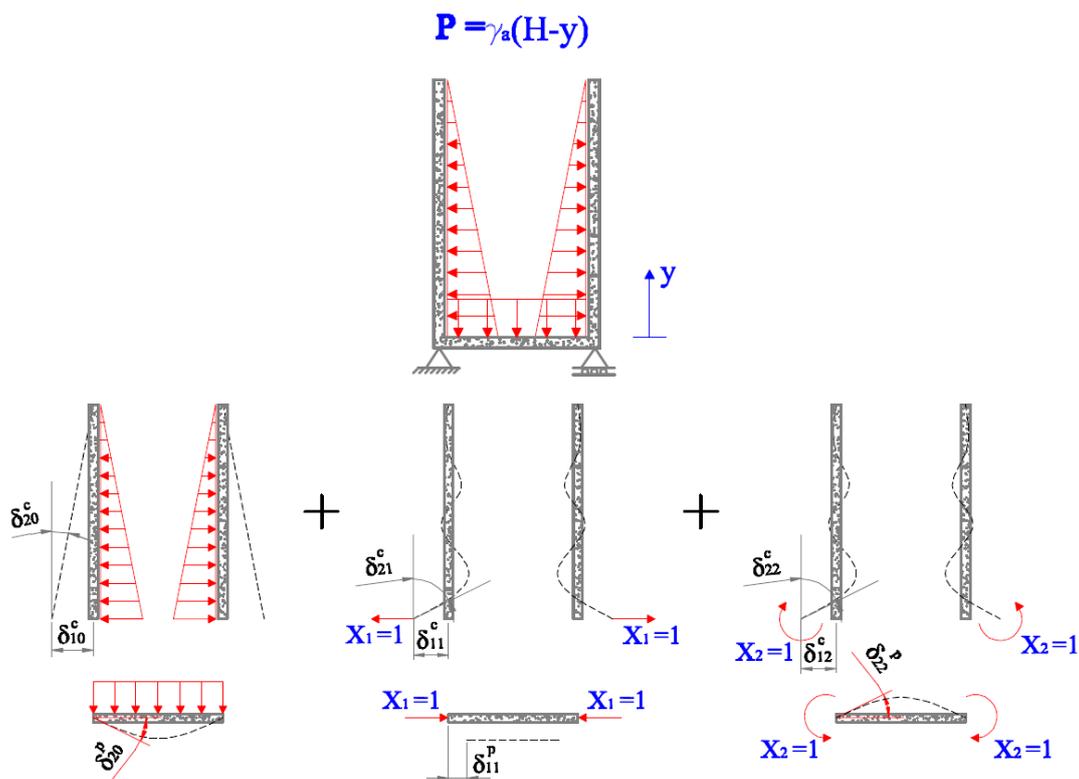


Figura B.5 - Casca cilíndrica e placa em estado de membrana e com hiperestáticos atuando (Caso 4)

$$\begin{cases} \delta_{10}^c + \delta_{11}^c X_1 + \delta_{12}^c X_2 = 0 - \delta_{11}^p X_1 \\ \delta_{20}^c + \delta_{21}^c X_1 + \delta_{22}^c X_2 = + \delta_{20}^p - \delta_{22}^p X_2 \end{cases} \quad (B.32)$$

Considerando o deslocamento e rotação que surgem na placa com a aplicação dos hiperestáticos unitários, respectivamente:

$$\delta_{11}^p = \frac{r(1-\nu)}{Eh} \quad (\text{B.33})$$

$$\delta_{20}^p = \frac{3qr^3(1-\nu)}{2Eh_p} \quad (\text{B.34})$$

$$\delta_{22}^p = \frac{12r(1-\nu)}{Eh_p^3} \quad (\text{B.35})$$

Considerando ainda a espessura da casca cilíndrica igual à espessura da placa circular ($h_c = h_p$), conseqüentemente $D_p = D_c$, dado em B.28.

Substituindo o valor da deformação no estado de membrana, ilustrado no Apêndice A para o carregamento hidrostático, e as constantes elásticas dadas em B.1, B.2, B.3 e B.4, além dos valores para a placa ilustrados em B.33, B.34 e B.35, o sistema de equações dado em B.32 adquire a seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{\gamma_a r^2 H}{E h} + \frac{1}{2 \beta^3 D_c} X_1 + \frac{1}{2 \beta^2 D_c} X_2 = -\frac{r(1-\nu)}{E h} X_1 \\ \frac{\gamma_a r^2}{E h} + \frac{1}{2 \beta^2 D_c} X_1 + \frac{1}{\beta D_c} X_2 = \frac{q r^3}{8 D_p (1+\nu)} - \frac{r}{D_p (1+\nu)} X_2 \end{cases} \quad (\text{B.36})$$

Resolvendo o sistema de equações B.36, encontramos os valores dos hiperestáticos X_1 e X_2 , dados por:

$$X_1 = -\frac{1}{8} \frac{\beta^2 D r^2 \left[16 \left(\beta^2 H r + H(1+\nu) \beta - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \nu \right) \gamma_a D(1+\nu) + q r E h (1+\nu) \right]}{\left[-2 r^2 D(-1+\nu) \beta^4 + (2D-2D\nu^2) r \beta^3 + r \beta E h + \frac{1}{2} E h (1+\nu) \right] D(1+\nu)} \quad (\text{B.37})$$

$$X_2 = \frac{1}{8} \frac{(1+\nu) \beta \{ 8 \gamma_a [2 r D(-1+\nu) \beta^3 + E h \beta H - E h] D(1+\nu) + E r q [-2 r D(-1+\nu) \beta^3 + E h] h \} D r^2}{\left[-2 r^2 D(-1+\nu) \beta^4 + (2-2\nu^2) D r \beta^3 + r \beta E h + \frac{1}{2} E h (1+\nu) \right] E D(1+\nu) h} \quad (\text{B.38})$$

Lembrando da equação geral de deslocamentos de uma casca cilíndrica ilustrado anteriormente pela equação B.21, os valores de V_0 e M_0 , devem ser substituídos pelos hiperestáticos X_1 e X_2 , respectivamente. Desta forma os deslocamentos radiais na casca cilíndrica são encontrados facilmente. De forma análoga, devem ser consideradas também as Equações B.22, B.23 e B.24 para a partir destas equações derivadas, os esforços serem

determinados substituindo os valores obtidos para este caso nas Equações B.13, B.14, B.15 e B.16 ilustradas anteriormente.

Caso 5 – Considerando a ligação da casca como sendo elasticamente engastada (Analogia de Mohr)

Considerando o carregamento externo atuando no estado de membrana e a atuação dos hiperestáticos X_1 e X_2 , de acordo com a Figura B.6 chegamos à seguinte equação de compatibilidade, ilustrada em B.39:

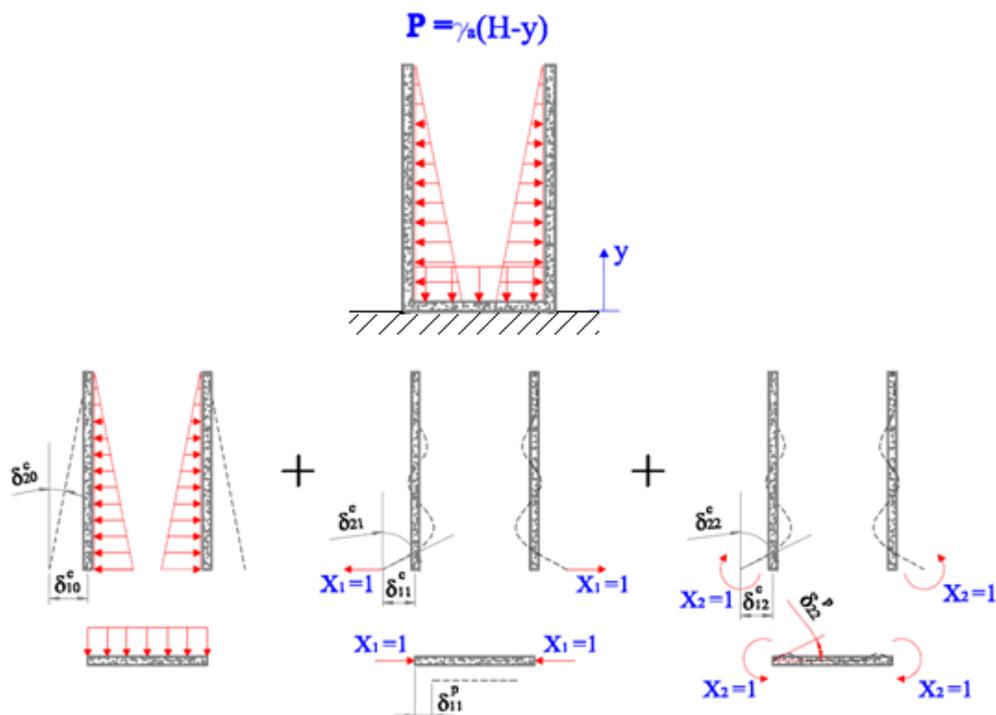


Figura B. 6 - Casca cilíndrica e placa em estado de membrana e com hiperestáticos atuando (Caso 5)

$$\begin{cases} \delta_{10}^c + \delta_{11}^c X_1 + \delta_{12}^c X_2 = -\delta_{11}^p X_1 \\ \delta_{20}^c + \delta_{21}^c X_1 + \delta_{22}^c X_2 = -\delta_{22}^p X_2 \end{cases} \quad (B.39)$$

Considerando o deslocamento e rotação que surgem na placa com a aplicação dos hiperestáticos unitários, respectivamente, e cujas demonstrações estão em Guimarães (1995):

$$\delta_{11}^p = \frac{r(1-\nu)}{E h_p} \quad (\text{B.40})$$

$$\delta_{22}^p X_2 = \frac{1}{3D_p} \sqrt{\frac{X_2^3}{q}} \quad (\text{B.41})$$

Substituindo o valor da deformação no estado de membrana, ilustrado no Apêndice A para o carregamento hidrostático, e as constantes elásticas dadas em B.1, B.2, B.3 e B.4, além dos valores para a placa ilustrados em B.40 e B.41, o sistema de equações dado em B.39 adquire a seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{\gamma_a r^2 H}{E h} + \frac{1}{2 \beta^3 D_c} X_1 + \frac{1}{2 \beta^2 D_c} X_2 = -\frac{r(1-\nu)}{E h} X_1 \\ \frac{\gamma_A r^2}{E h} + \frac{1}{2 \beta^2 D_c} X_1 + \frac{1}{\beta D_c} X_2 = -\frac{1}{3 D_p} \sqrt{\frac{X_2^3}{q}} \end{cases} \quad (\text{B.42})$$

Os hiperestáticos X_1 e X_2 são calculados de modo que devemos substituir e utilizar do seguinte artifício seguinte artifício: $a = \sqrt{X_2}$.

Lembrando da equação geral de deslocamentos de uma casca cilíndrica ilustrado anteriormente pela equação B.21, os valores de V_0 e M_0 , devem ser substituídos pelos hiperestáticos X_1 e X_2 , respectivamente. Desta forma os deslocamentos radiais na casca cilíndrica são encontrados facilmente. De forma análoga, devem ser consideradas também as Equações B.22, B.23 e B.24 para a partir destas equações derivadas, os esforços serem determinados substituindo os valores obtidos para este caso nas Equações B.13, B.14, B.15 e B.16 ilustradas anteriormente.

APÊNDICE C – OBTENÇÃO DA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO GERAL DE CASCAS CILÍNDRICAS

Partindo da equação geral de cascas cilíndricas:

$$\frac{d^4w}{dx^4} + 4\beta^4w = \frac{z}{D} \quad (C.1)$$

Fazendo $4\beta^4 = k$, e igualando a zero para obtenção da solução homogênea, tem-se:

$$r^4 + k = 0 \quad (C.2)$$

$$r = \sqrt[4]{-k} \quad (C.3)$$

Nota: Para obtenção das raízes da equação C.3, consultar Iezzi (1977), Fundamentos de Matemática Elementar, Vol. 6.

$$z = x + yi = -k \quad (C.4)$$

Considerando $x = -k$ e $y = 0$, tem-se:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = k \quad (C.5)$$

Sendo:

$$\cos \theta = \frac{x}{\rho} = -1 \quad (C.6)$$

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{\rho} = 0 \quad (C.7)$$

$$\theta = \pi \quad (C.8)$$

Considerando a equação C.5 e substituindo C.8 nesta equação, tem-se:

$$z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = k \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{C.9})$$

$$\sqrt[n]{z} = z_k = \sqrt[n]{\rho} \left[\cos \left(\frac{\theta}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) \right] \quad (\text{C.10})$$

Resolvendo C.3 utilizando C.10, tem-se:

Para $k = 0$:

$$z_0 = \sqrt[4]{k} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + 0 \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} + 0 \right) \right] = \sqrt[4]{k} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = r_1 \quad (\text{C.11})$$

Para $k = 1$:

$$z_1 = \sqrt[4]{k} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) \right] = \sqrt[4]{k} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = r_2 \quad (\text{C.12})$$

Para $k = 2$:

$$z_2 = \sqrt[4]{k} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \pi \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} + \pi \right) \right] = \sqrt[4]{k} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = r_3 \quad (\text{C.13})$$

Para $k = 3$:

$$z_3 = \sqrt[4]{k} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} \right) \right] = \sqrt[4]{k} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = r_4 \quad (\text{C.14})$$

Lembrando que $4\beta^4 = k$ e fazendo $\sqrt[4]{k} = \sqrt[4]{4\beta^4} = \beta\sqrt{2}$, tem-se para as raízes da equação:

$$r_1 = \beta(1 + i) \quad (\text{C.15})$$

$$r_2 = \beta(-1 + i) \quad (\text{C.16})$$

$$r_3 = \beta(-1 - i) \quad (\text{C.17})$$

$$r_4 = \beta(1 - i) \quad (\text{C.18})$$

Assim, como solução homogênea a equação C.19:

$$w_h = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x} + Ce^{r_3x} + De^{r_4x} \quad (\text{C.19})$$

Substituindo C.15, C.16, C.17 e C.18 em C.19, obtém-se:

$$w_h = Ae^{\beta(1+i)x} + Be^{\beta(-1+i)x} + Ce^{\beta(-1-i)x} + De^{\beta(1-i)x} \quad (\text{C.20})$$

$$w_h = Ae^{\beta x}e^{\beta xi} + Be^{-\beta x}e^{\beta xi} + Ce^{-\beta x}e^{-\beta xi} + De^{\beta x}e^{-\beta xi} \quad (\text{C.21})$$

Lembrando que:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta \quad (\text{C.22})$$

$$\cos \theta = \cos(-\theta) \quad (\text{C.22})$$

$$-\operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen}(-\theta) \quad (\text{C.23})$$

Substituindo C.22, C.23 e C.24 em C.21 de modo que $\beta x = \theta$, chega-se a:

$$w_h = Ae^{\beta x}(\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x) + Be^{-\beta x}(\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x) + Ce^{-\beta x}(\cos \beta x - i \operatorname{sen} \beta x) + De^{\beta x}(\cos \beta x - i \operatorname{sen} \beta x) \quad (\text{C.24})$$

$$w_h = e^{\beta x}(A + D) \cos \beta x + e^{-\beta x}(B + C) \cos \beta x + e^{\beta x}(Ai - Di) \operatorname{sen} \beta x + e^{-\beta x}(Bi - Ci) \operatorname{sen} \beta x \quad (\text{C.25})$$

Considerando:

$$A + D = C_1 \quad (\text{C.26})$$

$$B + C = C_3 \quad (\text{C.27})$$

$$A_i - D_i = C_2 \quad (\text{C.28})$$

$$B_i - C_i = C_4 \quad (\text{C.29})$$

Levando em C.25, a solução homogênea é dada por:

$$w_h = e^{\beta x} C_1 \cos \beta x + e^{-\beta x} C_3 \cos \beta x + e^{\beta x} C_2 \sin \beta x + e^{-\beta x} C_4 \sin \beta x \quad (\text{C.30})$$

Considerando a solução particular como sendo $f(x)$ e sabendo que a solução de uma equação diferencial ordinária é a soma da solução homogênea com a solução particular, obtem-se como solução completa:

$$w = e^{\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) + f(x) \quad (\text{C.31})$$